Titre: Magie binaire

Auteurs

David Da SILVA

Objectifs

Faire découvrir le binaire, comment écrire et compter en binaire mais aussi comment utiliser le binaire pour encoder de l'information.
Après cette séquence les élèves devraient avoir compris le système de numération des entiers positifs utilisant la base 2.
Ils auront également assimilé le fait que n'importe quelle information peut être représentée par une suite ordonnée de 0 et de 1, ce qui est à la base de tout ce qu'ils peuvent voir et faire sur un ordinateur ou un smartphone.

Durée

2 périodes de cours en classe (théorie, vidéos et exercices "déconnectés"

Matériel requis

Les 6 cartes ci-dessous pour faire le tour de magie. Le fichier MagieBinaire.png est disponible en annexe pour impression.

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Description

L'objectif de cette séquence est de faire une introduction au binaire de manière ludique en misant sur leur curiosité à comprendre le fonctionnement d'un tour de magie.

Activité 1 - Tour de magie[10-15 min.]

Objectif : Attiser la curiosité
Faire le tour de magie suivant à différents élèves, il est possible que certains d'entre eux le connaissent, soient peut-être capable de le réaliser mais il est très peu probable qu'ils puisse expliquer pourquoi ça marche. Interrogez-les au préalable et concentrez-vous sur ceux qui ne le connaissent pas.

Tour de magie : Demandez à un élève de choisir un nombre entre 1 et 63 et de le mémoriser sans vous le révéler. A l'aide des cartes vous allez lui révéler le nombre qu'il a secrètement choisi.
Variante 1 : Montrez les cartes une à une à l'élève en lui demandant simplement de vous indiquer si oui ou non son nombre apparaît sur la carte.
Variante 2 : Demandez à l'élève de séparer les cartes en 2 paquets, le premier avec les cartes ou son nombre est présent, le second avec les autres.

Le secret du tour est simple, il suffit d'additionner le nombre en haut à gauche de chaque carte où son nombre est présent.

Accroche : Annoncez maintenant que vous allez faire ce qu'aucun magicien ne fait, vous allez leur expliquer le fonctionnement du tour de magie, mais comme c'est un tour de magie binaire, il faut d'abord acquérir les bases du binaire...

Activité 2 - Compter en binaire [15-20 min.]

Objectif : comprendre comment représenter des nombres entiers positifs à l'aide de la numération de position avec seulement deux chiffres : le 0 et le 1.

Commencez par expliquer le fonctionnement en base 10.

Pour compter, on commence par 0 et on ajoute 1 pour passer au chiffre suivant et on recommence. Après l'utilisation de tous les chiffres (0...9) on en rajoute 1 devant et on recommence…
Faire la même démonstration en base 2.

Exercice 1 : Faire compter les élèves de 0 à 20 (ou plus) en binaire sur papier, ils peuvent écrire le nombre correspondant en base 10 à côté.

Activité 3 - Passage de la base 2 à la base 10 [15-20 min.]

Revenez ensuite sur la numérotation en base 10 pour présenter la forme canonique.
Dans un système de position, comme le nôtre, pour connaître la valeur de chaque chiffre qui compose un nombre, il faut décomposer ce nombre pour identifier chaque chiffre et son coefficient. En effet, le 2 de 1924 et celui de 2004 n'ont pas la même valeur : Le premier vaut 20, alors que le second vaut 2000.

Niveau	Nom	Coefficient
0	Unités	$10^0 = 1$
1	Dizaines	$10^1 = 10$
2	Centaines	$10^2 = 100$
3	Milliers	$10^3 = 1000$

La forme canonique de 3528 est : $3.10^3 + 5.10^2 + 2.10^1 + 8.10^0$.

En binaire c'est la même chose sauf qu'il n'y a que 2 chiffres qui composent la base, le 0 et le 1.

Niveau	Nom[1]	Coefficient
0	Unité	$2^0 = 1$
1	"Deuzaine"	$2^1 = 2$
2	"Quatraine"	$2^2 = 4$
3	"Huitaine"	$2^3 = 8$
4	"Seizaine"	$2^4 = 16$
5	...	$2^5 = 32$
6	...	$2^6 = 64$
7	...	$2^7 = 128$

La forme canonique du nombre binaire $1101_{(2)}$ est : $1.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0$.

La forme canonique nous permet de faire facilement le passage de la base 2 à la base 10 :

$$1101_{(2)} = 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0 = 8 + 4 + 0 + 1 = 9_{(10)}$$

Exercice 1 (facultatif) : Réalisation d'un tableau de conversion de 11 premières puissance de 2

Puissance de 2	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Valeur	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1

[1] Les noms sont au singulier car il ne peut pas y en avoir plus que 1 par niveau...

Exercice 2 : Faire les conversions décimales de plusieurs nombres binaires, par exemple

1. $1101101_{(2)}$
2. $11000001_{(2)}$
3. $1111_{(2)}$
4. $1111111111_{(2)}$

Exercice 3 : Faire les conversions décimales de nombres binaires spécifiques

1. $1_{(2)}$
2. $10_{(2)}$
3. $100_{(2)}$
4. $1000_{(2)}$
5. $10000_{(2)}$
6. $100000_{(2)}$
7. $1000000_{(2)}$
8. $10000000_{(2)}$

Rq : la conversion 2.4 peut être obtenue rapidement si on remarque qu'il s'agit de

$$10000000000 - 1 = 2^{10} - 1 = 1023$$

Exercice 4 (Facultatif) : A l'aide du tableau de l'exercice 1, comment peut-on passer de la base 10 à la base 2 ? Faire les conversions binaires de différents nombres décimaux.

Activité 4 - Encodage de l'information [10 -15 min.]

A l'instar du morse (0 = . ; 1 = -), on peut utiliser le binaire pour (en)coder autre chose que des nombres. Introduire la notion du nombre "mots" différents en fonction du nombre de bits.

Nombre de bits	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de mots	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Quelques questions pour ancrer l'idée. Au début l'encodage par l'intermédiaire des nombres rassure puis on essaye de s'en éloigner.

Combien de bits faut-il pour représenter :

1. les mois de l'année ?
2. les lettres de l'alphabet (préciser lequel) ?
3. le nombre d'élèves du gymnase ?
4. la présence/absence des élèves étant donnée la liste de présence ?
5. …

Activité 5 - Explication du tour [10 -15 min.]

L'idée ici est d'essayer d'amener les élèves à comprendre en observant les cartes et guidées par des questions telles que :

1. Combien faut-il de bits pour encoder les chiffres de 1 (ou 0) à 63 ?
2. Combien y a-t-il de cartes pour le tour ?
3. Avec 6 bits je peux coder 64 "mots" différents, avec 1 bit de moins, combien ?
4. Combien y a-t-il de nombres sur une carte ?
5. Qu'on en commun les nombres d'une même carte ?

La solution

Regardez attentivement la carte qui contient un 2 en haut à gauche. Voici comment s'écrivent les nombres de cette carte en binaire:

2	000010	**18**	010010	**34**	100010	**50**	110010
3	000011	**19**	010011	**35**	100011	**51**	110010
6	000110	**22**	010110	**38**	100110	**54**	110110
7	000111	**23**	010111	**39**	100111	**55**	110111
10	001010	**26**	011010	**42**	101010	**58**	111010
11	001011	**27**	011011	**43**	101011	**59**	111011
14	001110	**30**	011110	**46**	101110	**62**	111110
15	001111	**31**	011111	**47**	101111	**63**	111111

Chaque carte représente donc 1 des 6 bits nécessaire à l'encodage des entiers de 0 à 63 et les nombres présents sur la carte sont tous ceux dont ce bit est à 1 dans leur code binaire. Par conséquent l'information donnée par l'élève de présence ou non de son nombre sur une carte équivaut à la notion de 0 ou 1 sur un certain bit. Une fois toutes les cartes passées en revue il a donné le code binaire de son nombre secret !

Si on a du temps pour escalader la pyramide d'Anderson et Krathwohl

Les élèves doivent créer la version du tour pour le petit frère (ou petite soeur) avec 4 cartes.

- Quels sont les nombres possibles ?
- Combien y a-t-il de nombres par carte ?
- Quels sont ces nombres ?

~~Informatique et société~~

Ouverture et questionnements

- Les valeurs des puissances de 2 sont des valeurs qu'ils connaissent déjà !
  Capacité de stockage des clés USB, smartphones, SSD, etc.. Pourquoi ?
- Comment peut-on faire pour écrire des nombres négatifs, décimaux en binaire ?
- À compléter...

Pour aller plus loin

Informatique : Voici une énigme dont la solution utilise le principe de codage binaire.

L'énigme

Vous êtes le seigneur du canton de Vaud, et préparez votre mariage qui a lieu demain. Pour cette occasion, vous avez commandé 1000 bouteilles d'un excellent cru du Valais. Mauvaise idée, on vous apprend qu'une des bouteilles (et une seule) est empoisonnée. Le poison incolore, insipide et inodore, dont les effets sont dévastateurs (vomissements, convulsions, ...), provoque la mort en moins de 24h.
Pour trouver la bouteille empoisonnée, vous disposez de 10 rats testeurs (vous avez malheureusement aboli l'esclavage et personne ne souhaite faire ce métier). Votre problème, il est midi et les bouteilles doivent être servies demain à 14h. Comment allez-vous procéder pour pouvoir servir les 999 bouteilles non empoisonnées à votre mariage ?

La solution

Le fait qu'un rat meurt ou non nous donne de l'information. Ce qu'on doit trouver, c'est comment cette information peut nous permettre d'identifier la bouteille empoisonnée.
Il suffit d'identifier chaque bouteille par un nombre binaire unique, et chaque rat par un numéro (non binaire celui-ci).
Ce nombre binaire comportera autant de bits que de rats, et la position d'un bit dans le nombre correspondra à un numéro de rat (avec 10 rats on a 1024 possibilités donc un peu de marge). Si ce bit est à 1, alors cela signifie que ce rat aura gouté cette bouteille.
Par exemple la bouteille 3 sera codée 0110 (si on code sur 4 bits, c'est à dire 4 rats), ce qui signifie que les rats 2 et 3 l'auront gouté.

Une fois que toutes les bouteilles ont été goutées, on regarde les numéros des rats décédés. Tous on leur bit à 1 dans la bouteille empoisonnée, leur mort nous apporte l'information nécessaire.
Si par exemple on avait le serviteur 1 et le 3 de mort, alors la bouteille correspondante serait (0101), c'est à dire la numéro 5 !

Société :