Дифференциалы высших порядков

$y = f(x)$ - дифф-ма в т. x_0

$dy = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx$ – зависит от x_0 и Δx

$dy = f'(x)dx$ – ф-ия от x и dx определена при $x \in X$.

$$\delta(dy) = \delta(f'(x)dx) = \underbrace{(f'(x))'\delta x}\cdot dx \Big|_{\delta x = dx} =$$

$$= f''(x)(dx)^2 = d(dy) = d^2 y$$

Опр $d^n y(x_0, \Delta x) = d(d^{n-1}y)\Big|_{x_0, \Delta x}$

ММИ: $d^n y(x_0) = f^{(n)}(x_0)dx^n$ $(*)$ (самостоят)

$\underbrace{dddd\ldots d}_{n \text{ раз дифф-ие}} y$

не разрывное обозначение, поэтому скобки не ставим.

Замечание: при $n \geq 2$ свойство инвариантности формы дифф-ла не работает.

$x = \varphi(t)$ $\quad dy = f'(x)dx$

$$d^2y = d(f'(x)\cdot dx) = d(f'(x))\cdot dx + f'(x)d(dx)$$

$$= (f'(x))'dx\cdot dx + f'(x)d^2x = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x \neq$$

$$\neq f''(x)dx^2 \quad (*)$$

Опр: $y = f(x)$ - n раз дифф-мая в т. $x_0 \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists\, d^n y(x_0)$ (б/д)

$y = f(x)$ - n раз непр. дифф-ма в т. $x_0 \Longleftrightarrow \exists\, f^{(n)}(x)$ - непр. в x_0

Теоремы о среднем.

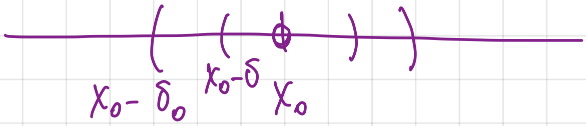
$y = f(x)$ – опр. в $U_{\delta_0}(x_0)$

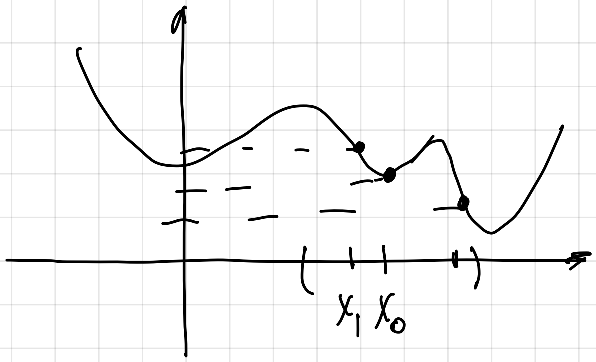
Опр: x_0 – точка локального минимума (строгого или не строгого) $\Leftrightarrow (\exists \delta \in (0;\delta_0))(\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0))$:

$$f(x) > (\geq) f(x_0)$$

$U_\delta(x_0)$: всегда $f(x) \geq f(x_0)$

$y = c$

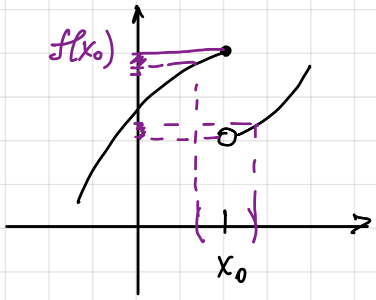




Опр x_0 – точка локального максимума (строгого или не строгого) $\Leftrightarrow (\exists \delta \in (0;\delta_0))(\forall x \in \mathring{U}_\delta(x_0)) : f(x) < (\leq) f(x_0)$

Опр: точки локального минимума или локального максимума называются точками локального экстремума.

Опр: значение функции в точках локального экстремума называется локальным экстремумом: $f(x_0) = \text{extr}\, f = y_{extr}$



Теорема Ферма (необходимое условие лок. экстр.)

$y=f(x)$ - непр. в $U(x_0)$, x_0 - точка локального экстр.

Ф-и f, $\exists f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0)=0$

Док-во: $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y(x_0)}{\Delta x}$

как н.у. $\exists f'$

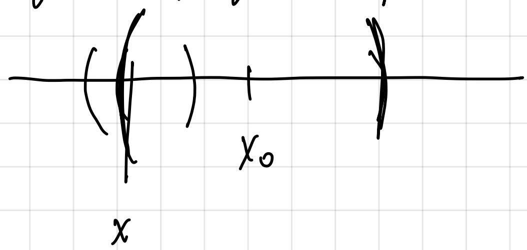
$$\exists f'(x_0) \Rightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$$

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\overset{①\,\geq 0}{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}}{\Delta x<0}\leq 0$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\overset{①\,\geq 0}{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}}{\Delta x>0}\geq 0$$

Пусть x_0 - точка loc min $f \overset{def}{\Rightarrow} (\exists\delta>0)(\forall x\in \mathring{U}_\delta(x_0)): f(x)\overset{①}{\geq} f(x_0)$

Рав-во $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$ выполняется только когда пределы равны нулю $\Rightarrow f'(x_0)=0$.



Следствие: (равносильно теореме) $y=f(x)$ - непр. на (a,b), в точке x_0 функция принимает наибольшее или наименьшее значение, $\exists f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0)=0$.

Замечание: 1) на отрезке теорема может не работать

$y=x$ на $[0;1]$ $\qquad \max\limits_{[0;1]} y = y(1)=1$

$y'(1)=0$? (если бы выполнялась Т.Ф.)

$y'=1 \qquad y'(1)=1\neq 0$.

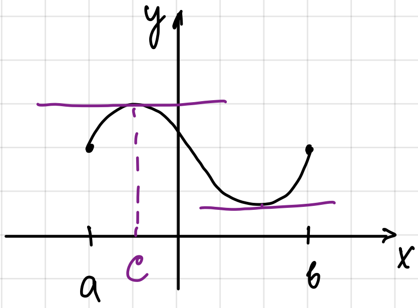
2) $f'(x_0)=0$ - только необходимое условие для экстр.

$y=x^3 \nearrow$ на $\mathbb{R}$ $\quad y'(x)=3x^2 \quad y'(0)=0$, но точкой лок. экстр. $x=0$ не является.

Теорема Ролля

$y=f(x)$ – непр. на $[a,b]$, диф. на (a,b), $f(a)=f(b) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists c\in(a,b): f'(c)=0$.



Док-во: $y=f(x)$ – непр. на $[a,b] \Rightarrow$

т. В-са

$\Rightarrow \exists x_1, x_2\in[a,b]: f(x_1)=\min\limits_{[a,b]} f(x)$,

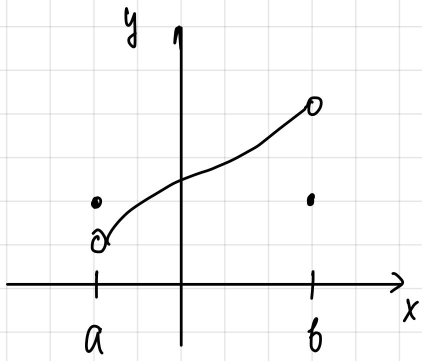
$f(x_2)=\max\limits_{[a,b]} f(x)$

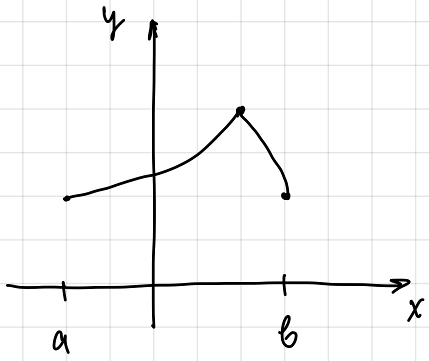
– $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow y=C \Rightarrow y'=0 \ \forall x\in(a,b) \Rightarrow$

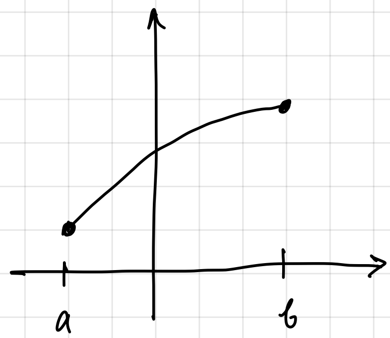
$\Rightarrow \exists c=\frac{a+b}{2}\in(a,b): y'(c)=0$.

– $f(x_1)<f(x_2) \underset{f(a)=f(b)}{\Rightarrow} x_1\in(a,b) \vee x_2\in(a,b) \overset{т. Ф}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow f'(x_1)=0 \vee f'(x_2)=0 \Rightarrow \exists c=x_1 \vee x_2$.



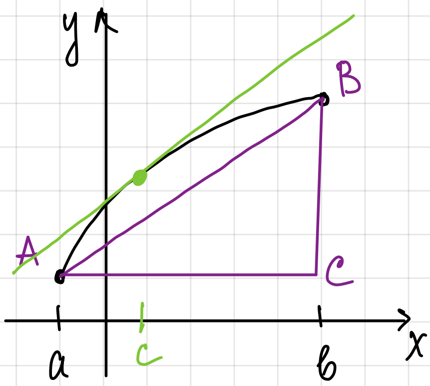




Теорема Лагранжа

$y=f(x)$ – непр. на $[a,b]$, дифф. на $(a,b) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists c \in (a,b) : f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{BC}{AC} = tg\angle BAC$$

$f'(c) = tg\,\alpha$, α – угол наклона касательной

$tg\,\alpha = tg\angle BAC \Rightarrow$ касат $\parallel AB$

Док-во: Введем вспомогательную ф-цию φ: выполнялись все условия т. Ролля

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda x$$

λ: $\varphi(a) = f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b = \varphi(b)$

$$\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$\varphi(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$
- непр на $[a,b]$ (как разность непр. ф-й)
- дифф. на (a,b) (– " –)
- $\varphi(a) = \varphi(b)$

$\Rightarrow$

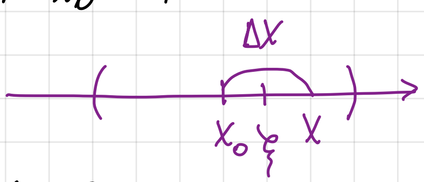
т. Ролля $\Rightarrow \exists c \in (a,b) : \varphi'(c) = 0$

$$\varphi'(c) = \left(f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)\Big|_{x=c} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Следствие: $y=f(x)$ – непр. и дифф. в т $x_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \xi \in \cancel{U(x_0)}$ $(x_0,x) \vee (x,x_0)$ (или) $: f'(\xi) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$



$\Delta y = f'(\xi)\Delta x$ – формула Лагранжа о конечных приращениях.

Теорема Коши: $y = f(x)$, $y = g(x)$ – непр. на $[a,b]$, дифф на (a,b), $\forall x \in (a,b) \hookrightarrow g'(x) \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists c \in (a,b)$: $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

Док-во: $g(b) \neq g(a)$, т.к. $\forall\, g(b) = g(a) \overset{\text{т. Ролля}}{\Rightarrow} \exists c \in (a,b)$:
$g'(c) = 0 \ \nearrow \ \forall x \in (a,b) \hookrightarrow g'(x) \neq 0 \Rightarrow$ условия теоремы корректны.

Всп. ф-ия $\varphi(x) = f(x) - \lambda g(x)$ (аналогично т. Лагранжа)

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x) \overset{\text{т.Р.}}{\Rightarrow} \exists c \in (a,b):$$

$$\varphi'(c) = \left(f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x) \right) \Bigg|_{x=c} = 0$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

теорема Коши $\Rightarrow (g(x) = x) \Rightarrow$ теорема Лагранжа $\Rightarrow$
$\Rightarrow (f(a) = f(b)) \Rightarrow$ теорема Ролля

Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей $\left(\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty}\right)$

Теорема 1: $y=f(x)$, $y=g(x)$ – дифф. на (a,b), $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a+0} g(x)=0$, $\exists \lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\in\overline{\mathbb{R}}$, $\forall x\in(a,b)\hookrightarrow g'(x)\neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Док-во: Доопределим ф-и f и g в точке $x=a$ до непрерывности, т.е. $f(a)=0$, $g(a)=0$

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\ \xi\in(a,x) \Rightarrow \xi(x)$$

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))}=\lim_{\xi\to a+0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

по т. о пределе сложной ф-и

Теорема 2 $y=f(x)$, $y=g(x)$ – дифф на $(c;+\infty)$, $\exists\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$, $\forall x\in(c;+\infty)\hookrightarrow g'(x)\neq 0$, $\exists\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\in\overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Док-во: Пусть $c>0$, всегда можно выбрать, т.к. не влияет на поведение ф-и на $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\left|\begin{matrix}x=\frac{1}{t}\\ t\in(0;\frac{1}{c})\end{matrix}\right|=\lim_{t\to+0}\frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} \ominus$$

$\tilde{f}(t)=f(\frac{1}{t})$, $\tilde{g}(t)=g(\frac{1}{t})$ удовл. усл. Т1 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \overset{\ominus}{\exists}\lim_{t\to+0}\frac{\tilde{f}(t)}{\tilde{g}(t)}=\lim_{t\to+0}\frac{\tilde{f}'(t)}{\tilde{g}'(t)}=\overset{?}{\cdot}\lim_{t\to+0}\frac{\left(f(\frac{1}{t})\right)'_t}{\left(g(\frac{1}{t})\right)'_t}=$$

?. да ②   ① $\Rightarrow \exists$ ②

$$= \lim_{t\to +0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t\to +0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \underbrace{\lim_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}}_{\exists \text{ дано } (1)}$$

теорема 3 $y = f(x)$, $y = g(x)$ – дифф. на (a, b),
$\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$, $\exists \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = \pm\infty$, $\forall x \in (a, b) \hookrightarrow g'(x) \neq 0$,
$\exists \lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

теорема 4 $y = f(x)$, $y = g(x)$ – дифф. на $(c; +\infty)$,
$\exists \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \pm\infty$, $\forall x \in (c; +\infty) \hookrightarrow g'(x) \neq 0$,
$\exists \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Замечание: все 4 теоремы „работают" при $x\to a$; $x \to a-0$;
$x \to -\infty$; $x \to \infty$

Следствие: 1) f, g – непрерывно дифф-мы $\Rightarrow$
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$
$(a \in \mathbb{R})$

2) f, g – n раз дифф-мы и выполняются условия теорем для производных $\Rightarrow$
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ldots = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$
$(a \in \overline{\mathbb{R}})$

! Замечание: теорема односторонняя, т.е. равенство только справа налево.
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\Leftarrow}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$