Непрерывность элементарных функций

Показательная функция

$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n\ \text{раз}}$

$y = x$ - непрерывна $\Rightarrow$

$\Rightarrow y = x^n$ - непр. как произв. непр. ф-й

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Функция $f(x) = x^n : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ (называемая степенной функцией с показателем степени n) строго возрастает и непрерывна на $[0, +\infty)$.

По теореме об обратной функции обратная функция f^{-1}, обозначаемая символами $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$, строго возрастает и непрерывна на $[0, +\infty)$ - по теореме о непр-ти обратной ф-и

Для рационального показателя степени $\frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$ и дробь $\frac{m}{n}$ несократима, полагают при $a > 0$

$$a^{\frac{m}{n}} := \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m, \quad a^{-\frac{m}{n}} := \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}, \quad a^0 = 1.$$

Тем самым a^r определено $\forall a \in (0, +\infty)$, $\forall r \in \mathbb{Q}$;

$$a^r > 0 \ \ \forall r \in \mathbb{Q}. \tag{1}$$

Будем считать известными следующие свойства показательной функции a^r рационального аргумента r:

1° $r_1 < r_2 \ \Rightarrow \ a^{r_1} < a^{r_2}$ при $a > 1$, $a^{r_1} > a^{r_2}$ при $0 < a < 1$;

2° $a^{r_1} a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$;

3° $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$;

4° $(ab)^r = a^r b^r$.

Известное неравенство Бернулли:

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx \quad \forall x \geqslant -1, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Лемма 1 (Сильное неравенство Бернулли)

Пусть $a > 1$, $r \in \mathbb{Q}$, $|r| \leqslant 1$.
Тогда

$$|a^r - 1| \leqslant 2|r|(a-1). \tag{2}$$

Док-во:

1) $n=1$ $\quad 1+x \geqslant 1+x$ - верно

2) верно для n: $(1+x)^n \geqslant 1+nx \;\Big|\cdot (1+x) \geqslant 0$

3) докажем для $n+1$: $(1+x)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)x$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geqslant (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+n\overset{\geqslant 0}{x^2} \geqslant 1+(n+1)x \Rightarrow n+1 \text{ - верно}$$

1), 2), 3) $\overset{\text{ММИ}}{\Longrightarrow}$ нер. Б верно $\forall n \in \mathbb{N}$

 $|a^r - 1| \le 2|r|(a-1)$

$r = 0$: $0 \le 0$ — верно

Пусть сначала $r = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Положим $\lambda := a^{1/n} - 1 > 0$. Тогда $a^{1/n} = 1 + \lambda$, $\underline{a \geqslant 1 + n\lambda}$, откуда $\lambda \leqslant \frac{a-1}{n}$, т.е.

$\Downarrow$

$a = (1+\lambda)^n \geqslant 1 + n\lambda$

$\lambda \le \frac{a-1}{n}$ н.Б.

$\lim\limits_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$ д.з.

$$\underbrace{a^{1/n} - 1}_{\lambda} \leqslant \frac{1}{n}(a-1) \le \qquad (3)$$

$\le 2\frac{1}{n}(a-1) = 2r(a-1)$

откуда легко получается (2).

Пусть теперь $0 < r \leqslant 1$. Тогда $\underline{\frac{1}{n+1} < r \leqslant \frac{1}{n}}$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Используя (3) и монотонность функции a^r, получаем

строго возр.

$$|a^r - 1| = a^r - 1 \underset{\text{мон.}}{\leqslant} a^{1/n} - 1 \underset{\text{доказано выше}}{\leqslant} \frac{1}{n}(a-1) \leqslant \frac{2}{n+1}(a-1) < 2r(a-1) = 2|r|(a-1)$$

и неравенство (2) в этом случае установлено.

$0 < r = \frac{m}{k} < 1$

$m, k \in \mathbb{N}$

Пусть теперь $-1 \leqslant r < 0$. Тогда

$a^r \left|1 - \frac{1}{a^r}\right|$

$$|a^r - 1| = a^r|a^{-r} - 1| \leqslant a^r \cdot 2(-r)(a-1).$$

$-r \in (0;1)$ — доказано выше

Учитывая, что $a^r < 1$ получаем отсюда (2). $\square$

Определение

Пусть $a > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$.
Тогда

$$a^x \overset{def}{:=} \lim_{n\to\infty} a^{r_n}, \quad r_n \in \mathbb{Q}$$

Это определение корректно в следующем смысле:
(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ существует и конечен;
(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ не зависит от выбора сходящейся к x последовательности $\{r_n\}$;
(3) в случае $x = r$ значение a^r по этому определению совпадает с прежним.

Пусть $a > 1$, $r_n \to x$ $(n \to \infty)$. Тогда $\exists N \in \mathbb{N}$: $\forall n, m \geqslant N$ $|r_n - r_m| \leqslant 1$ в силу сходимости последовательности $\{r_n\}$. С помощью сильного неравенства Бернулли имеем для $\forall n, m \geqslant N$:

$$\underline{|a^{r_n} - a^{r_m}|} = a^{r_m}|a^{r_n - r_m} - 1| \leqslant a^{r_m} \cdot 2|r_n - r_m|(a-1). \qquad (4)$$

Заметим, что последовательность $\{r_n\}$ ограничена (как всякая сходящаяся), поэтому при некотором $M > 0$

$$0 < \frac{1}{M} \leqslant a^{r_m} \leqslant M \quad \forall m \in \mathbb{N}. \qquad (5)$$

В силу сходимости последовательности $\{r_n\}$ для неё выполняется условие Коши:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}:\ \forall n, m \in \mathbb{N},\ n, m \geqslant N_\varepsilon \ \hookrightarrow\ |r_n - r_m| < \varepsilon.$$

Доказательство (1) (продолжение)

Отсюда и из (4) при $\forall$ $0 < \varepsilon \leqslant 1$ имеем $\exists N_1 = N_\varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{M\cdot 2(a-1)}\right)$ $\forall m,n \geqslant N_1$

$$\underline{|a^{r_n} - a^{r_m}| \leqslant M\cdot 2(a-1)\varepsilon} < \varepsilon \quad \forall n, m \geqslant N_\varepsilon.$$

Это означает, что для последовательности $\{a^{r_n}\}$ выполняется условие Коши. В силу критерия Коши она сходится, т.е. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} \in \mathbb{R}$ существует и конечен. Из (5) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} > 0$.

Пусть теперь $0 < a < 1$. Тогда $a^{r_n} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}}$, $\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n} = b^{r_n}$ и существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ следует из уже установленного существования положительного предела $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{a}\right)^{r_n}$.

$\exists \lim\limits_{n\to\infty} b^{r_n}$ доказано

$\lim\limits_{n\to\infty} b^{r_n} \neq 0$

Случай $a = 1$ тривиален.

Доказательство (2)

Пусть $a > 1$, $r_n \to x$, $r'_n \to x$ при $n \to \infty$. Тогда $r_n - r'_n \to 0$ при $n \to \infty$, и с помощью сильного неравенства Бернулли имеем

$$|a^{r_n} - a^{r'_n}| = a^{r'_n}|a^{r_n - r'_n} - 1| \leqslant M \cdot 2|r_n - r'_n|(a-1) \to 0 \ (n \to \infty).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} - \lim_{n\to\infty} a^{r'_n} = \lim_{n\to\infty}(a^{r_n} - a^{r'_n}) = 0, \Rightarrow$$

что и требовалось показать.

$\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r'_n}$, т.е. не зависит от выбора посл.

Случай $0 < a < 1$ сводится к рассмотренному с помощью равенства $a^{r_n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{r_n}}$.

Доказательство (3)

Для этого достаточно рассмотреть последовательность $\{r_n\}$, где $r_n = r \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Определение

При $a > 0$ функция $x \to a^x$, $x \in (-\infty, +\infty)$, называется показательной с основанием a. $y = a^x$, $x \in (-\infty; +\infty)$
Функция $x \to e^x$, $x \in (-\infty, +\infty)$, называется экспоненциальной. Иногда вместо e^x пишут $\exp x$.

Теорема 1

Показательная функция имеет следующие свойства:

1° $a^x > 0$ $\forall x \in (-\infty, +\infty)$;

2° a^x *при* $a > 1$ *строго возрастает, при* $0 < a < 1$ *строго убывает;*

3° $a^x a^y = a^{x+y}$;

4° $(bc)^x = b^x c^x$;

5° $(a^x)^y = a^{xy}$;

6° a^x *непрерывна на* $(-\infty, +\infty)$.

Из свойств a^r и свойств пределов

Доказательство свойства 1°: $\forall x \in (-\infty, +\infty)$

Это свойство следует из 2° и из (1).

Доказательство свойства 2°: a^x при $a > 1$ строго возрастает, при $0 < a < 1$ строго убывает

Пусть $a > 1$, $x < y$. Пусть $r, \rho \in \mathbb{Q}$, причём $x < r < \rho < y$.
Пусть $r_n \to x$, $\rho_n \to y$ $(n \to \infty)$, причём $r_n \leqslant r$, $\rho_n \geqslant \rho$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Тогда, используя монотонность показательной функции с рациональным показателем и предельный переход в неравенстве, получаем

$$a^x = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \leqslant a^r < a^\rho \leqslant \lim_{n\to\infty} a^{\rho_n} = a^y,$$

откуда следует, что $a^x < a^y$.
Случай $0 < a < 1$ рассматривается аналогично.

Доказательство свойства 3°: $a^x a^y = a^{x+y}$

Пусть $r_n \to x$, $\rho_n \to y$ $(n \to \infty)$. Тогда

$$a^x a^y = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \lim_{n\to\infty} a^{\rho_n} = \lim_{n\to\infty} (a^{r_n} a^{\rho_n}) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n+\rho_n} = a^{x+y}.$$

В качестве следствия получаем отсюда, что $a^x a^{-x} = a^0 = 1$, $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

Доказательство свойства 4°: $(bc)^x = b^x c^x$

Пусть $r_n \to x$ $(n \to \infty)$. Тогда

$$(bc)^x = \lim_{n\to\infty} (bc)^{r_n} = \lim_{n\to\infty} (b^{r_n} c^{r_n}) = \lim_{n\to\infty} b^{r_n} \lim_{n\to\infty} c^{r_n} = b^x c^x.$$

В качестве следствия получаем, что

$$a^x > b^x \text{ при } a > b,\ x > 0,$$

для чего в 4° достаточно взять $c > 1$, $bc = a$.

Доказательство свойства 5°: $(a^x)^y = a^{xy}$

Пусть $a > 1$, $x > 0$, $y > 0$, $r'_n \uparrow x$, $r''_n \downarrow x$, $\rho'_n \uparrow y$, $\rho''_n \downarrow y$.
Тогда

$$a^{xy} \leftarrow a^{r'_n \rho'_n} = \left(a^{r'_n}\right)^{\rho'_n} \leqslant (a^x)^{\rho'_n} \leqslant (a^x)^y \leqslant$$

$$\leqslant (a^x)^{\rho''_n} \leqslant \left(a^{r''_n}\right)^{\rho''_n} = a^{r''_n \rho''_n} \to a^{xy},$$

откуда следует, что $(a^x)^y = a^{xy}$.
При других знаках чисел x, y доказательства аналогичны.
Случай $0 < a < 1$ сводится к случаю $a > 1$ с помощью соотношения $a^x = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$.

Доказательство свойства 6°: a^x непрерывна на $(-\infty, +\infty)$

Заметим сначала, что неравенство Бернулли допускает следующее обобщение:

$$|a^x - 1| \leqslant 2|x|(a-1) \text{ при } a > 1, \ |x| \leqslant 1.$$

Его можно получить, записав неравенство (2) для r_n (вместо r), где $r_n \to x$ $(n \to \infty)$, и перейдя в этом неравенстве к пределу.
Установим непрерывность функции a^x в произвольной точке $x_0 \in (-\infty, +\infty)$. Пусть сначала $a > 1$. Тогда

$$|a^{x_0+\Delta x} - a^{x)}| = a^{x_0}|a^{\Delta x} - 1| \leqslant a^{x_0} \cdot 2|\Delta x|(a-1) \to 0$$

при $\Delta x \to 0$, что и требовалось доказать.
Случай $0 < a < 1$ сводится к случаю $a > 1$ с помощью соотношения $a^x = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$.

Логарифмическая и степенная функция

Определение

Функция, обратная к функции $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$, *называется логарифмической функцией и обозначается* $y = \log_a x$.
В случае $a = e$ *она обозначается* $\ln x := \log_e x$.

Теорема 2

Логарифмическая функция

$$x \mapsto \log_a x : \quad (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$$

строго монотонна и непрерывна на $(0, +\infty)$, *область ее значений есть* $(-\infty, +\infty)$.

Доказательство.
Пусть $a > 1$. Тогда

$$A = \inf_{(-\infty,+\infty)} a^x = 0, \quad B = \sup_{(-\infty,+\infty)} a^x = +\infty.$$

В самом деле, $a^n = (1+\alpha)^n > 1 + n\alpha \to +\infty$ и $a^{-n} < (1+n\alpha)^{-1} \to 0$ при $n \to \infty$. Остается воспользоваться теоремой об обратной функции.
Случай $0 < a < 1$ рассматривается аналогично. $\square$

Из того, что при $a \neq 1$ показательная и логарифмическая функции являются взаимно обратными, следуют тождества

$$a^{\log_a x} = x \ \forall\, x > 0,$$

$$\log_a a^x = x \ \forall\, x \in (-\infty, +\infty).$$

Заметим, что из $a^x = a^y$ (при любом $a > 0$, $a \neq 1$) следует $x = y$.

Свойства логарифмических функций

1° $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$ при $x, y > 0$.
Сравним $a^{\log_a xy} = xy$ и $a^{\log_a x + \log_a y} = (a^{\log_a x})(a^{\log_a y}) = xy$
Из их совпадения следует 1°.

2° $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$ при $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Сравним $a^{\log_a x^\alpha} = x^\alpha$ и $a^{\alpha \log_a x} = (a^{\log_a x})^\alpha = x^\alpha$. Из их совпадения следует 2°.

3° $\log_a b = \log_c b / \log_c a$ при $a, b, c > 0$, $a, c \neq 1$.
Домножим обе части равенства на $\log_c a$ и сравним
$c^{\log_c a \log_a b} = a^{\log_a b} = b$ и $c^{\log_c b} = b$.

4° $\log_a b \log_b a = 1$ при $a, b > 0$, $a, b \neq 1$.
Очевидно следует из 3°.

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Определение

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$. Функция

$$x \mapsto x^{\alpha} : \quad (0, +\infty) \to (0, +\infty)$$

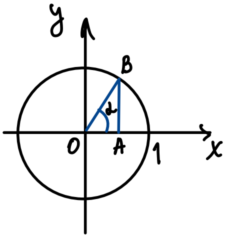
называется степенной функцией с показателем α. $y = x^{\alpha}$

Степенную функцию можно представить в виде

$$\underline{x^{\alpha} = (e^{\ln x})^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}.}$$

По теореме о непрерывности суперпозиции непрерывных функций степенная функция непрерывна в области определения $(0, +\infty)$. При $\alpha > 0$ степенную функцию доопределяют в точке 0 значением 0. Тогда степенная функция становится непрерывной на $[0, +\infty)$.

Тригонометрические и обратные тригонометрические функции



Функция синуса определяется из прямоугольного треугольника, как отношение противолежащего катета к гипотенузе. С использованием единичной окружности: $x \to \sin x$ (ордината y_B, если $\angle BOA = x$)

Теорема 3

Функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ *непрерывны на своих областях определения.*

Доказательство. Покажем, что функция $y = \sin x$ непрерывна в произвольной точке $x_0 \in \mathbb{R}$. Имеем

$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\cos\left(x_0 + \frac{\Delta}{2}\right)\,\sin\frac{\Delta}{2}.$$

В силу (6) имеем

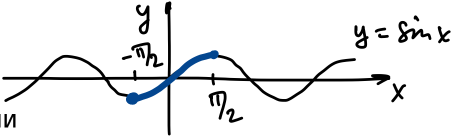
$$|\Delta y| \leq 2\left|\sin\frac{\Delta}{2}\right| \leq |\Delta x|,$$

так что $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, что и доказывает непрерывность $\sin x$ в точке x_0.

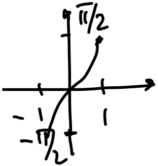
Непрерывность функции $\cos x$ доказывается аналогично или с использованием равенства $\underline{\cos x = \sin(x + \pi/2)}$ и теоремы о непрерывности суперпозиции непрерывных функций.

Функции $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ и $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ непрерывны в точках, где их знаменатели отличны от нуля, как частные непрерывных функций.

$\square$ $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\sin(x + \pi/2)}$ – непр $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x \mid x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\}$



Символами



$f = \sin x$; f^{-1} =

$$
\begin{aligned}
\arcsin x &: [-1,1] \to \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right], \\
\arccos x &: [-1,1] \to [0,\pi], \\
\operatorname{arctg} x &: (-\infty,+\infty) \to \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right), \\
\operatorname{arcctg} x &: (-\infty,+\infty) \to (0,\pi)
\end{aligned}
$$

обозначаются функции, обратные к сужению $\sin x$ на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, к сужению $\cos x$ на $[0,\pi]$, к сужению $\operatorname{tg} x$ на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, к сужению $\operatorname{ctg} x$ на $(0,\pi)$ соответственно.

Теорема 4

Функции $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ *непрерывны на своих областях определения (непрерывность* $\arcsin x$, $\arccos x$ *в концах отрезков – их областей определения – понимается как односторонняя).*

Доказательство следует из теоремы об обратной функции.

Некоторые замечательные пределы

1°.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{7}$$

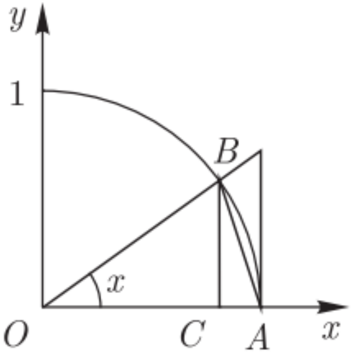
Рассматривая в тригонометрическом круге сектор с углом радианной меры x, $0<x<\frac{\pi}{2}$, и два треугольника с тем же углом (см. рисунок) и сравнивая их площади, получаем

$$\tfrac{1}{2}\sin x<\tfrac{1}{2}x<\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}x,$$

откуда

$$\cos x<\tfrac{\sin x}{x}<1,\quad 0<x<\tfrac{\pi}{2}.$$

Из четности функций $\sin x/x$ и $\cos x$ следует, что те же неравенства верны и при $0<|x|<\frac{\pi}{2}$.
Переходя в них к пределу при $x\to 0$ и учитывая, что $\cos x\to\cos 0=1$ в силу непрерывности $\cos x$, получаем (7).



y
1
B
x
O
C
A
x

2°.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1.$$

Из непрерывности функции $\cos x$ имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

$$\lim_{y\to y_0} f(y) = A, \quad \lim_{x\to x_0} y(x) = y_0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(y(x)) = A$$

т. о непр. сл. ф-и

3°.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

Заметим, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y\to 0} \sqrt{\frac{y}{\sin y}}\bigg|_{y=\arcsin x}, = \frac{1}{\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}} = 1$$

где вертикальная черта означает, что в дробь $y/\sin y$ вместо y следует подставить $\arcsin x$. Таким образом, функция $\arcsin x/x$ представлена в виде суперпозиции двух функций. Используя непрерывность $\arcsin x$ в точке $x = 0$, равенство (7) и теорему о пределе суперпозиции двух функций, завершаем доказательство. Видоизмененный вариант доказательства состоит в доопределении функции $y/\sin y$ единицей в точке $y = 0$ и использовании теоремы о непрерывности суперпозиции двух непрерывных функций.

4°.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1.$$

Представив

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \frac{y}{\operatorname{tg} y}\bigg|_{y=\operatorname{arctg} x},$$

повторяем рассуждение из доказательства предыдущего пункта.

Доказано: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ (8*)

5°.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\Big|_{x=\frac{1}{t}} = e.$$

Следствие из (8*)

Покажем сначала, что

$$\lim_{x\to 0+0}(1+x)^{1/x} = e. \qquad (8)$$

Напомним, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$$

$$= \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\to 1}$$

и что при доказательстве этого было установлено убывание последовательности $\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\}$.

Пусть

$$0 < x < 1, \quad n_x \in \mathbb{N}, \quad \tfrac{1}{n_x+1} < x \leq \tfrac{1}{n_x}.$$

Тогда

$$\left(1 + \frac{1}{n_x + 1}\right)^{-2} \left(1 + \frac{1}{n_x + 1}\right)^{n_x + 2} = \left(1 + \frac{1}{n_x + 1}\right)^{n_x} \leq$$
$$\leq (1 + x)^{1/x} \leq \left(1 + \frac{1}{n_x}\right)^{n_x + 1}. \quad (9)$$

Правая часть неравенства является, как легко проверить, монотонной функцией аргумента x. Поэтому

$$\exists \lim_{x \to 0+0} \left(1 + \frac{1}{n_x}\right)^{n_x + 1} = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

Обоснование первого из этих неравенств состоит в том, что если функция $f(x)$ имеет предел $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x)$, то он совпадает с пределом $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ для произвольной последовательности $\{x_n\}$, такой, что $x_n \to 0 + 0$ при $n \to \infty$. В нашем случае $x_n = 1/n$.

Итак, показано, что правая часть (9) стремится к e при $x \to 0+0$. Аналогично показывается, что левая часть (9) также стремится к e при $x \to 0+0$. Переходя к пределу в неравенствах (9), получаем (8).
Теперь покажем, что

$$\lim_{x \to 0-0} (1+x)^{1/x} = e. \tag{10}$$

Пусть $-1 < x < 0$. Положив $y := -x$ и $z := y/(1-y) = -x/(1+x) > 0$, имеем

$$(1+x)^{1/x} = (1-y)^{-1/y} = \left(\frac{1}{1-y}\right)^{1/y} = \left(1+\frac{y}{1-y}\right)^{1/y} = (1+z)^{1/z+1}.$$

Таким образом,

$$(1+x)^{1/x} = (1+z)^{1/z+1}\Big|_{z=-\frac{x}{1+x}}, \quad -1 < x < 0,$$

то есть функция $(1+x)^{1/x}$ представлена в виде суперпозиции $(f \circ \varphi)(x)$ двух функций, где $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$,
$\varphi : (-1,0) \to (0,+\infty)$, причем

$$\lim_{x\to 0-0} \varphi(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0+0} f(z) = e.$$

Применяя теорему о пределе суперпозиции, получаем (10).
Из (8) и (10) следует 5°.

Замечание 1.
Вместо теоремы о пределе суперпозиции можно воспользоваться доказанной теоремой о непрерывности суперпозиции непрерывных функций для $\tilde{f} \circ \tilde{\varphi}$, где

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} e, & \text{при} \quad z \leq 0, \\ (1+z)^{1/1+z}, & \text{при} \quad z > 0, \end{cases}$$

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} -\frac{x}{1+x}, & \text{при} \quad -1 < x < 0, \\ 0, & \text{при} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

следствие 7°.

6°.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x\ln a} = \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \quad (\forall\, a>0,\ a\neq 1).$$

$$= \frac{1}{\ln a}$$

Представив

$$\frac{1}{x}\log_a(1+x) = \log_a(1+x)^{1/x}$$

в виде суперпозиции логарифмической функции и функции $\varphi(x) = (1+x)^{1/x}$, применяем теорему о пределе суперпозиции с учетом 5°.

$$\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x} \underset{\text{непр } \ln}{=} \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln e = 1$$

7°.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$ основное

Частный случай 6°.

8°. Следствие 9°

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \quad (\forall\, a>0,\ a\neq 1).$$

Пусть $y=a^x-1$. Тогда

$$x=\frac{\ln(1+y)}{\ln a},\qquad \frac{a^x-1}{x}=\left.\frac{y\ln a}{\ln(1+y)}\right|_{y=a^x-1}.$$

Остается воспользоваться теоремой о пределе суперпозиции и свойством 7°.

9°. удобно доказать

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Частный случай 8°.

$y = e^x - 1$

10°.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$

Докажите это самостоятельно, используя 9°.

Сделаем замену $y = \ln(1+x)$: $y \to 0$ при $x \to 0$

$1+x = e^y$, $x = e^y - 1$

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \frac{e^{\alpha y} - 1}{e^y - 1}\Bigg|_{y=\ln(1+x)} \overset{=}{} \alpha\cdot\frac{e^{\alpha y}-1}{\alpha y}\cdot\frac{y}{e^y - 1}\Bigg|_{y=\ln(1+x)}$$