Дифференцирование функции. Производная (Иванов Г.Е)

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ определена $U_{\delta_0}(x_0)$

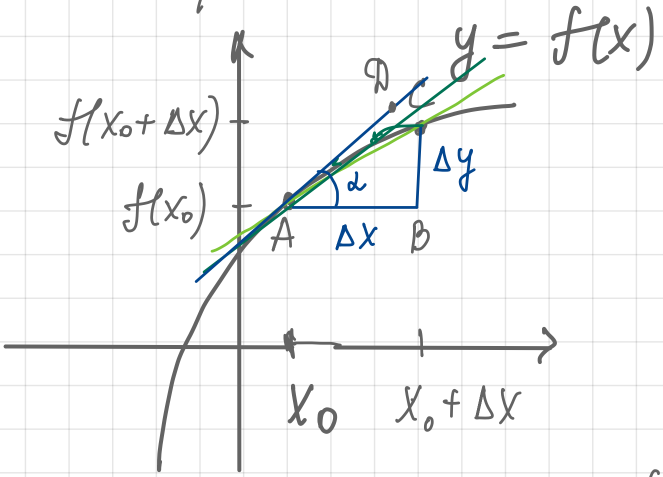
$\Delta x = x - x_0 \qquad x = x_0 + \Delta x \in U_{\delta_0}(x_0)$

$\Delta y(x_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Опр: $f'(x_0) \overset{def}{=} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y(x_0, \Delta x)}{\Delta x}$, если он существует

$\forall x_0 \in D \subseteq \mathbb{R} \quad \exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y(x_0, \Delta x)}{\Delta x} \in \mathbb{R} \ : \ y = f'(x)$ - ф-ия, которая определена на $D \subseteq \mathbb{R}$

Геометрический смысл производной



AC - секущая - прямая, проходящая через две точки графика ф-ии

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{BC}{AB} = tg\angle CAB$

$f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{C \to A} tg\angle CAB = tg\alpha$

Опр Прямая AD называется касательной к графику функции $y = f(x)$ в т x_0, если она является предельным положением секущей AC при $C \to A$ по кривой.

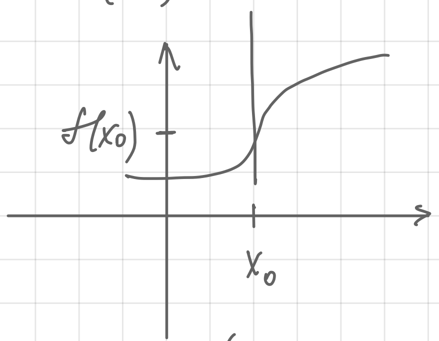
Прямая проходящая через т. $(x_0, f(x_0))$: $y - f(x_0) = k(x - x_0)$

Для касательной $k = tg\alpha = f'(x_0)$

Уравнение касательной (не вертикальной)

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$f'(x_0) = +\infty \vee -\infty$



$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = +\infty \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$

уравнение касательной $x = x_0$.

теорема 1 (о геометр. смысле производная):

$\exists f'(x_0) \Leftrightarrow \exists$ АД - касательная к графику ф-и в т. x_0

Опр: $f'_-(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y(x_0, \Delta x)}{\Delta x}$

$f'_+(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y(x_0, \Delta x)}{\Delta x}$

односторонние производные

теорема 2 (критерий существования производной):

$\exists f'(x_0) \Leftrightarrow \exists f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ (док-во из пределов)

Замечание: операция нахождения производной называется дифференцированием (! не путать с дифференцируемой ф-цией)

Опр: $y = f(x)$ называется дифференцируемой в т $x_0 \overset{def}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}: \Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$

теорема 3 (критерий дифф-ти ф-и)

f - дифф-ма в т $x_0 \Leftrightarrow \exists f'(x_0) \in \mathbb{R}$

Док-во: (Н) $\Rightarrow$ f - дифф-ма т $x_0 \overset{def}{\Leftrightarrow} \Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \mid : \Delta x \neq 0 \Leftrightarrow$

$o(1)\cdot\Delta x = o(\Delta x)$

$\Leftrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \Big| \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Leftrightarrow f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(A + \underbrace{\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}}_{\to 0}\right) = A$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + o(1)$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} - A = \underbrace{o(1)}_{б.м.ф}$

$\Leftrightarrow f'(x_0) = A \in \mathbb{R}$ (Д) $\Leftarrow$

расписать д. отдельно!

(Д) $\exists f'(x_0) \in \mathbb{R}: f'(x_0) = A = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow \overbrace{\frac{\Delta y}{\Delta x} - A}^{бмф} = o(1) \Rightarrow$

$\Delta y = A\Delta x + o(1)\cdot\Delta x \overset{def}{=} A\Delta x + o(\Delta x) \Rightarrow f$ - дифф в т x_0

Следствие: $y=f(x)$ – дифф-ма в т $x_0 \Rightarrow$

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

Опр: Главная линейная часть приращения дифф-мой функции называется первым дифференциалом $dy(x_0,\Delta x) = dy(x_0) = f'(x_0)\Delta x$

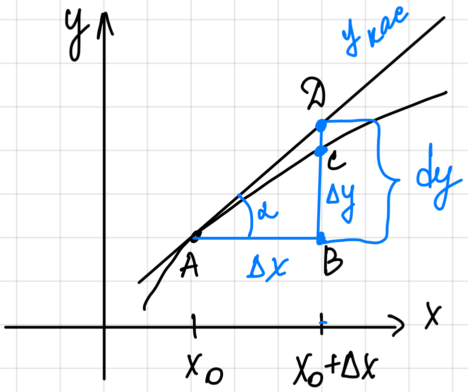
Опр: дифференциал независимой переменной $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$$dx = \Delta x$$

$$dy(x_0) = \underbrace{f'(x_0)}\,\underbrace{dx}$$

$$dy = tg\alpha \cdot \Delta x = DB =$$

$$= y_{кас}(x_0+\Delta x) - y_{кас}(x_0)$$



Теорема 4 (критерий дифф-ти)

f - дифф-ма в т $x_0 \Leftrightarrow \exists$ не вертик. касат. в т. x_0

Теорема 5 (необходимое условие дифф-ти)

f - дифф-ма в т $x_0 \Rightarrow f$ - непр. в т. x_0

Док-во: f - дифф-ма в т. $x_0 \overset{def\ дифф.}{\Rightarrow} \Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) =$

$$= \underset{\downarrow 0}{\Delta x}\underbrace{\left(A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)}_{\to A} \to 0 \quad \text{при } \Delta x \to 0 \overset{def\ непр}{\Rightarrow}$$

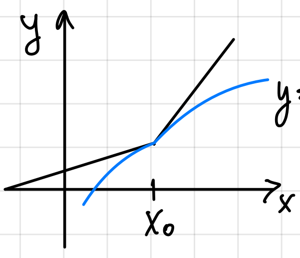
$\Rightarrow f$ - непр. в т. x_0

Замечание: непрерывность не является ДУ дифф-ти, например: $y=|x|$

$$y'_-(0) = -1,\ y'_+(0) = 1 \overset{кр.}{\Rightarrow} \nexists\, y'(0) \Rightarrow$$

$\Rightarrow y$ - не дифф в $x=0$, $y=|x|$ - непр на $\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow y$ - непр в $x=0$.



$y=f(x)$ – не дифф. в x_0

Теорема 6 (Правила дифференцирования)

$y=f(x)$, $y=g(x)$ – дифф. в т. x_0 (в $U(x_0)$) $\Rightarrow$

1) $(c)'=0$, $c\in\mathbb{R}$

2) $(af(x)+bg(x))'\big|_{x=x_0}=af'(x)+bg'(x)\big|_{x=x_0}$, $a,b\in\mathbb{R}$

3) $(f(x)\cdot g(x))'\big|_{x=x_0}=f'(x)\cdot g(x)+f(x)g'(x)\big|_{x=x_0}$

4) $\forall x\in U(x_0)\hookrightarrow g(x)\neq 0:\ \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'\Big|_{x=x_0}=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}\Big|_{x=x_0}$

Док-во: по определению производных:

1) $$(c)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x_0+\Delta x)-y(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\overbrace{c-c}^{=0}}{\underbrace{\Delta x}_{\neq 0}}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0$$

4) $\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\Rightarrow f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\Delta f$

$g(x_0+\Delta x)=g(x_0)+\Delta g$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\left(\frac{f}{g}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f(x_0)+\Delta f)g(x_0)-f(x_0)(g(x_0)+\Delta g)}{\Delta x\, g(x_0+\Delta x)g(x_0)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\underbrace{\frac{\Delta f}{\Delta x}}_{\to f'(x_0)}\underbrace{g(x_0)}_{const}-\underbrace{f(x_0)}_{const}\underbrace{\frac{\Delta g}{\Delta x}}_{\to g'(x_0)}\right)\cdot\frac{1}{\underbrace{g(x_0+\Delta x)}_{\to g(x_0)}\underbrace{g(x_0)}_{const}}=$$

$$=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Теорема 6' (свойства дифф-лов)

$y=f(x)$, $y=g(x)$ – дифф-мы в т. x_0 $\Rightarrow$

1) $d(c)=0$ $\quad c\in\mathbb{R}$

2) $d(af(x)+bg(x))\big|_{x=x_0}=a\,df(x_0)+b\,dg(x_0)$

3) $d(\underbrace{f(x)g(x)}_{(f\cdot g)(x_0)})\big|_{x=x_0}=df(x_0)\,g(x_0)+f(x_0)\,dg(x_0)$

4) $\forall x\in U(x_0)\hookrightarrow g(x)\neq 0\Rightarrow d\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)\Big|_{x=x_0}=\dfrac{df(x_0)g(x_0)-f(x_0)dg(x_0)}{g^2(x_0)}$

Теорема 7 (о дифф-ти сложной функции)

$z = f(y)$ – дифф-ма в т. y_0, $y = g(x)$ – дифф-ма в т. x_0:

$g(x_0) = y_0 \Rightarrow$ сложная ф-ия $z(x) = f(g(x))$ – дифф. в т. x_0

$z'(x_0) = f'(y_0)\cdot g'(x_0)$

Док-во: f, g – дифф-мы $\Rightarrow \Delta f(y_0) = f'(y_0)\Delta y + o(\Delta y)$

$\Delta y = \Delta g(x_0) = g'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$

$$\Delta z(x_0) = \Delta f(g(x_0)) = f'(y_0)\left(g'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)\right) + \underset{?}{o(\Delta x)} =$$

? $o(\Delta y) = o(g'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) = o(\Delta x)$

$$\overset{\shortparallel}{o\left(\Delta x\cdot\left(g'(x_0) + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)\right)}$$

огр. ф-ия

$o(cf) = o(f)$

$$= f'(y_0)g'(x_0)\cdot\Delta x + \underbrace{f'(y_0)\cdot o(\Delta x) + o(\Delta x)}_{o(\Delta x)} =$$

$$= \underbrace{f'(y_0)g'(x_0)}_{\in\mathbb{R}}\cdot\Delta x + o(\Delta x) \underset{def}{\Rightarrow} z \text{ – дифф. в т. } x_0$$

$z'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0)$.

Пример, $y = \cos^2\left(e^{tg^3\sqrt{5x}}\right)$,

$$y' = \left(\left(\cos\left(\exp\left(\left(tg\left((5x)^{1/2}\right)\right)^3\right)\right)\right)^2\right)' =$$

$$= 2\left(\cos e^{tg^3\sqrt{5x}}\right)\cdot\left(-\sin\left(e^{tg^3\sqrt{5x}}\right)\right)\cdot e^{\left(tg^3\sqrt{5x}\right)}\cdot 3\left(tg\sqrt{5x}\right)^2\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\cos^2(\sqrt{5x})}\cdot\frac{1}{2}(5x)^{-1/2}\cdot 5$$

Теорема 8 (свойство инвариантности формы первого дифференциала)

$z = f(y)$ - дифф. в т. y_0, $y = g(x)$ - дифф. в т. x_0:

$$y_0 = g(x_0) \Rightarrow dz\Big|_{\substack{y_0 = g(x_0)\\ x = x_0}} = f'(y_0)\,dy = z'(x_0)\,dx$$

Док-во: $z = f(g(x))$ - дифф-ма в т. x_0 по Т7 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow dz(x_0) = f'(y_0)\underbrace{g'(x_0)\Delta x}_{\substack{g\text{ - дифф}\\ dg(x_0) = dy(x_0) = g'(x_0)dx}} = \underline{f'(y_0)\,dy} \text{ - зависимая}$$

$$\overset{\text{def}}{=} \underline{z'(x_0)\,dx} \text{ - независимая}$$

Пример: 1) $y = \ln\cos x$

$$dy = \frac{1}{\cos x}\,d(\cos x) = \frac{1}{\cos x}(-\sin x)\,dx = -\operatorname{tg} x\,dx$$

2) $y = \ln\left(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}\right)$

$t = \sin x$

$$y = \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)$$

$$dy = \frac{1}{t+\sqrt{1+t^2}}\cdot\left(1 + \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1+t^2}}\cdot\cancel{2}t\right)dt =$$

$$= \frac{1}{t+\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+t^2}+t}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$dy = \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$$

Следствие: $y = f(x)$ - дифф-ма в т. x_0 $\Rightarrow$

$$f'(x_0) = \frac{dy(x_0)}{dx}$$

Теорема 9 (о дифф-ти обратной ф-и):

$y = f(x)$ - строго монот, непр. в $U(x_0)$, $f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ x = f^{-1}(y)$ - дифф. в т y_0: $y_0 = f(x_0)$,

$$\left(f^{-1}(y)\right)'\Big|_{y=y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Док-во: $f'(x_0) = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\underbrace{x=g(y)}_{\text{обратная к } f\text{, т.е. } x=f^{-1}(y)}} = \dfrac{1}{\frac{dx}{dy}} = \dfrac{1}{g'(y_0)} = \dfrac{1}{\left.(f^{-1}(y))'\right|_{y_0}}$

$$\left.(f^{-1}(y))'\right|_{y_0} = \lim_{\Delta y\to 0} \left.\frac{f^{-1}(y_0+\Delta y) - f^{-1}(y_0)}{\Delta y}\right|_{x=f^{-1}(y)} \overset{\text{т. о lim сложн. ф-и}}{=}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}} =$$

$$= \frac{1}{f'(x_0)}$$

Теорема 10 (о диф. параметр. заданной ф-и)

$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $t \in (\alpha, \beta)$ определяет ф-ию $y = f(x)$ в $U(x_0)$

$t_0 \in (\alpha, \beta)$: $\begin{matrix} x_0 = \varphi(t_0) \\ y_0 = \psi(t_0) \end{matrix} \hookrightarrow y_0 = f(x_0)$

Если φ, ψ - диф-мы в t_0, φ - строго мон и непр в $U(t_0) \subset (\alpha, \beta)$, $\varphi'(t_0) \neq 0 \Rightarrow f$ - диф в т. x_0 и

$$y' = f'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$$

Док-во: φ - строго мон, непр, диф $\Rightarrow \exists \varphi^{-1}$

$$y = f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$$

$$y' = f'(x_0) = \psi'(t_0) \cdot \frac{1}{\varphi'(t_0)} = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$$

$$y' = f'(x_0) = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t_0)\,\cancel{dt}}{\varphi'(t_0)\,\cancel{dt}}$$

"~~Теорема~~" 11 (дифф-ие неявной ф-и)

$\underset{\exists}{F}(x, y) = 0 \hookrightarrow y = f(x) : \underline{F(x, f(x))} \equiv 0$

При определенных условиях $\exists f'(x_0)$.

Пример: $y^2 + x^2 = e^{xy}$, $x_0 = 1$

$0 + 1 = e^0 \Rightarrow \exists y = f(x)$ в $U(1)$ $\qquad y_0 = f(1) = 0$

$F(x) = (f(x))^2 + x^2 - e^{x \cdot f(x)} = 0$

$F'(x) = 0 \hookrightarrow f'(x)$

$2y \cdot y' + 2x - e^{xy}(y + xy') = 0 \Big|_{\substack{x=1 \\ y=0}}$

$((f(x))^2)' = 2f(x) \cdot f'(x)$

$2 - y' = 0 \Rightarrow y'(1) = 2$

Опр: $y = f(x)$ - дифф-ма на $X \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall x_0 \in X \hookrightarrow$
$y = f(x)$ - дифф. в т. x_0

Следствие: $y = f(x)$ - дифф. на $X \Rightarrow \exists y = f'(x)$ -
- опр. на X.

Теорема 7 (дифф-е сложной ф-ии)

$z = f(y)$ - дифф-ма в y_0, $y = \varphi(x)$ - дифф-ма в x_0:

$y_0 = \varphi(x_0) \Rightarrow z'(x_0) = f'(y_0) \cdot \varphi'(x_0)$

Док-во: $\Delta z(y_0, \Delta y) = f'(y_0) \cdot \Delta y + o(\Delta y)$

$\Delta y(x_0, \Delta x) = \varphi'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$

$\Delta z(x_0, \Delta x) = f'(y_0)\left(\varphi'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)\right) + o\left(\varphi'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)\right) =$

$= f'(y_0)\varphi'(x_0)\Delta x + f'(y_0)\, o(\Delta x) + o(\Delta x)$