КТ 1 2,3 ноября (4 балла) ДЗ 1 готовое 5 недель.

Предел и непр-ть функции. ≈ 15 б

1. Определение min 6.

2 Вычисление предела

3 Исследов. на непр-ть

Коллоквиум 14.11. в 15^{15} (10 баллов в ETIS)

Устный опрос : вопросы 1–6 (без равн. непр.)

10 баллов , 5 баллов на зачет

23.10.23

Т3 (о непрерывности сложной функции)

$y = f(x)$ – непр. в т. x_0, $x = \varphi(t)$ – непр в т. t_0: $\varphi(t_0) = x_0 \Rightarrow$ сложная функция $y = f(\varphi(t))$ – непр. в т. t_0.

Док-во: По опр. через окрестности $y = f(x)$ – непр в т $x_0 \Rightarrow (\forall U(y_0) \mid y_0 = f(x_0))(\exists U(x_0)): f(U(x_0)) \subset U(y_0)$

$x = \varphi(t)$ – непр в т $t_0 \Rightarrow (\forall U(x_0) \mid x_0 = \varphi(t_0))(\exists U(t_0)): \varphi(U(t_0)) \in U(x_0)$

$\forall U(y_0) \mid y_0 = f(\varphi(t_0))\ \exists U(t_0): f(\varphi(U(t_0))) \subset f(U(x_0)) \subset U(y_0)$

$\overset{def}{\Rightarrow}$ $f \circ \varphi(t)$ – непр в t_0. ■

? $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t) = x_0 \overset{\text{нет!}}{\Rightarrow} \lim\limits_{t \to t_0} f(\varphi(t)) = A$

Пример $\varphi(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$ $t_0 = 0$, $x_0 = 0$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = A$, $\lim\limits_{t \to 0} f(\underbrace{\varphi(t)}_{0}) = 1 \neq A$

$$f(0) = 1$$

Т4 (о пределе сложной ф-и)

1) $y = f(x)$ – непр в т. x_0, $x = \varphi(t)$ опр. в $\mathring{U}(t_0)$, $\exists \lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t) = x_0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{t \to t_0} f(\varphi(t)) = f(x_0)$

2) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\exists \lim\limits_{t \to t_0} \varphi(t) = x_0$: $\varphi(t) \in \mathring{U}(x_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{t \to t_0} f(\varphi(t)) = A$

Док-во: по Т о непр. сложной ф-и при доопред. или переопред. ф-ий φ, f

„Глобальные" свойства – свойства непр. функций на <u>отрезке</u>.

Опр: $y = f(x)$ – непр. на $[a,b] \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x_0 \in (a,b): f$ – непр в x_0, f – непр. справа в a, f – непр. слева в b.

Т5 Теорема Вейерштрасса (об ограниченности и достижении точных граней)

$y = f(x)$ – непр. на $[a,b] \Rightarrow$ 1) $y = f(x)$ – ограничена на $[a,b]$

2) $\exists x_1, x_2 \in [a,b]: f(x_1) = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $f(x_2) = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$

Док-во: 1) $\lightning$ f – неограничена на $[a,b] \Rightarrow$

$\forall q \in \mathbb{R} \ \exists x_q \in [a,b]: \ |f(x_q)| > q$

$q = n \in \mathbb{N}$ $\quad n=1 \ \exists x_1 \in [a,b]: \ |f(x_1)| > 1$

$n=2 \ \exists x_2 \in [a,b]: \ |f(x_2)| > 2$

.....

$n \ \exists x_n \in [a,b]: \ |f(x_n)| > n$

....

$\{x_n\}$ $\qquad \{f(x_n)\}$

$\forall n \in \mathbb{N}: a \le x_n \le b \Rightarrow$ огран. $\qquad (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)$:

$\downarrow$ т. Б–В $\qquad |f(x_n)| > N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$

$\exists \{x_{n_k}\}$ – сх-ся $\Rightarrow$ $\qquad \Downarrow$

$\exists \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c \in [a,b]$ (пред. переход в нер-ве) $\qquad \{f(x_n)\}$ – б.б.п, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$

Т.к. f – непр. на $[a,b] \Rightarrow$

f – непр в т. $c \Rightarrow \exists \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c) \in \mathbb{R}$

$\{f(x_{n_k})\} \subset \{f(x_n)\} \subset U(\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ – ограничена на $[a,b]$.

2) Пусть $\beta = \sup\limits_{[a,b]} f(x) \Rightarrow$ 1) $\forall x \in [a,b] : f(x) \le \beta$

2) $(\forall \beta' < \beta)(\exists x_{\beta'} \in [a,b]) : f(x_{\beta'}) > \beta'$

У f – не достигает своей точной грани:

и 1) f – ограничена $\Rightarrow \beta \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [a,b] : f(x) < \beta$

Вспомогат. ф-ия $\varphi(x) = \dfrac{1}{\beta - f(x)}$ – непрерывна, т.к. знам $\ne 0$, f – непр. $\Rightarrow$

$\overset{1)}{\Rightarrow}$ φ – ограничена, т.е. $(\exists q \in \mathbb{R})(\forall x \in [a,b]) : |\varphi(x)| \le q$

$$|\varphi(x)| = \frac{1}{\beta - f(x)} \le q \qquad \beta - f(x) \geq \frac{1}{q}$$

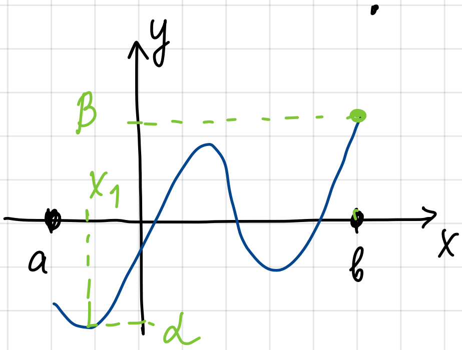
$$\forall x \in [a,b] : f(x) \le \beta - \frac{1}{q} = \beta' < \beta \quad \nearrow$$

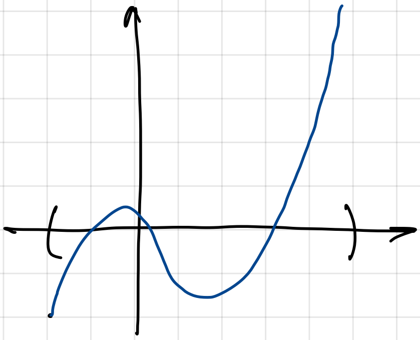
противоречие с опр. т.В.Г : $\forall \beta' < \beta \quad f(x_{\beta'}) > \beta' \Rightarrow$

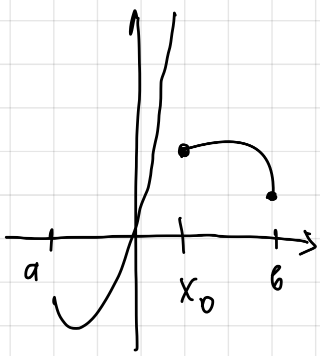
$\Rightarrow \exists x_2 \in [a,b] : f(x_2) = \beta = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$.

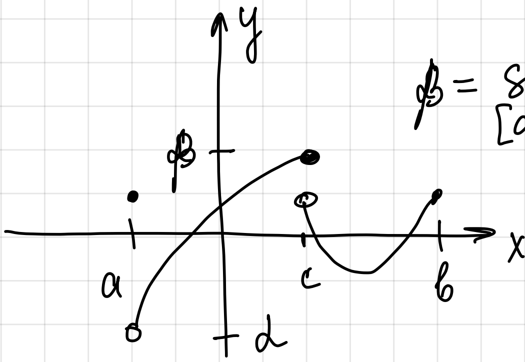
? Можно ли в условиях теоремы $[a,b] \to (a,b)$

Нет!









$\beta = \sup\limits_{[a,b]} f(x) = f(c)$

$\alpha = \inf\limits_{[a,b]} f(x) < f(x) \quad \forall x \in [a,b]$

Опр: $\exists x_0 \in [a,b]\ \forall x \in [a,b] \hookrightarrow f(x) \le f(x_0) \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ ($\geqslant$)

$\Leftrightarrow f(x_0) = \max\limits_{[a,b]} f \quad \left(f(x_0) = \min\limits_{[a,b]} f \right)$

Т. Вейерштрасса (др. формулировка)

$y = f(x)$ – непр. на $[a,b] \Rightarrow f$ – огр. на $[a,b]$ и имеет наибольшее и наименьшее зн-ния.

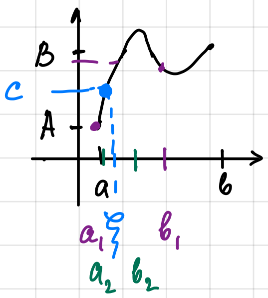
Т6 Теорема Больцано-Коши (о промежут. значениях)

f – непр. на $[a,b] \Rightarrow$ принимает все значения из промежутка с концами $f(a)$, $f(b)$

$A = f(a)$, $B = f(b)$. f – непр. на $[a,b] \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall C \in [A,B]\ ([B,A])\ \exists \xi \in [a,b] : f(\xi) = C$.

Док-во:] $A \le C \le B$.



Делим $[a,b]$ пополам $\hookrightarrow$

$[a_1, b_1]: f(a_1) \le C \le f(b_1)$

↗делим пополам $\hookrightarrow$

$[a_2, b_2]: f(a_2) \le C \le f(b_2)$

....

$[a_n, b_n]: f(a_n) \le C \le f(b_n)$ ①

....

$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n \le \ldots \le b_n \le \ldots \le b_1 \Rightarrow \{[a_n, b_n]\}$ - система вложенных отрезков

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon = [\log_{1/2} \varepsilon] + 1)\ \forall n \geqslant n_\varepsilon : 0 \le b_n - a_n = \frac{1}{2^n} < \varepsilon,\ n > \log_{1/2} \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \{[a_n, b_n]\}$ – стягив. система влож. отрезков

по принц. Кантора

$\Rightarrow \exists \xi \in [a_n, b_n]\ \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow a_n \le \xi \le b_n$ ②

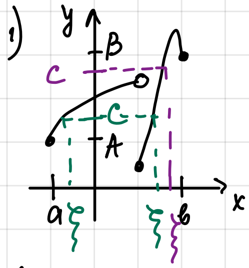
Переходя к пределу в ①, ② $\{a_n\} \to \xi$, $\{b_n\} \to \xi$, в силу непр-ти ф-и f: $f(a_n) \le C \le f(b_n) \ \Big|\ \lim\limits_{n \to \infty}$

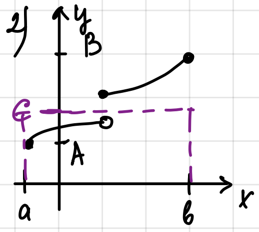
$$\underbrace{f(\xi) \le C \le f(\xi)}$$

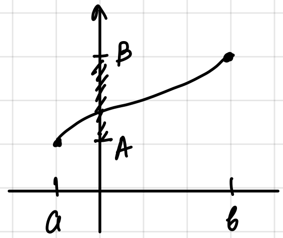
$$\Downarrow$$

$C = f(\xi)$.

Замечание: условие непрерывности и на отрезке существенно:







f - терпит разрыв

1) $\forall C \in [A,B]\ \exists \xi \in [a,b]: f(\xi) = C$

2) $\nearrow$ не выполняется

$\exists C \in [A,B]\ \forall \xi \in [a,b]: f(\xi) \neq C$

Т7 (критерий непрерывности мон. ф-ии)

f - мон. и непр. на $[a,b] \Longleftrightarrow f$ - мон на $[a,b]$ и ее значения сплошь заполняют отрезок $[f(a), f(b)]$ ($\nearrow$) или $[f(b), f(a)]$ ($\searrow$)

Док-во (самост.) H $\Rightarrow$ из т. Б-К

Δ $\Leftarrow$ от противного

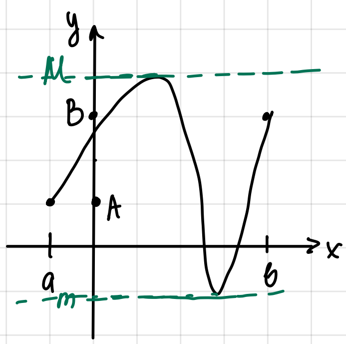
Следствие из т. Б-К:

1) f - непр. на $[a,b]$, $f(a)\cdot f(b) < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \xi \in [a,b]: f(\xi) = 0$

2) f - непр на $[a,b]$, $m = \min\limits_{[a,b]} f$, $M = \max\limits_{[a,b]} f$ (т. В-ш)

$\Rightarrow f$ принимает все значения $[m, M]$ и только эти значения



(§10 № 42: f - непр на (a,b), $m = \inf\limits_{(a,b)} f$, $M = \sup\limits_{(a,b)} f \overset{?}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \forall y \in (m, M)\ \exists x_0 \in (a,b): f(x_0) = y$)

Обратная функция

$f: X \to Y_f$ — X - область опр-ия ф-и
Y_f - область значений ф-и

$\forall x_1, x_2 \in X \mid x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow X \leftrightarrow Y_f \Rightarrow$

$\exists f^{-1}: Y_f \to X$ - обратная ф-ия

1) $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$
2) $f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in X$
3) $f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in Y_f$
4) графики ф-и f и f^{-1} симметричны относительно $y = x$
5) f - строго возраст на X $\Rightarrow \exists f^{-1}$ - строго возраст на Y_f.
(убыв) (убыв.)

Док-во: f - строго возраст. $\Rightarrow \forall x_1, x_2 \in X \mid x_1 < x_2 \hookrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

- докажем существование f^{-1}, т.е. $\forall x_1, x_2 \in X \mid x_1 \neq x_2 : f(x_1) \neq f(x_2)$

$\lightning$ $\exists x_1 \neq x_2 : f(x_1) = f(x_2)$

$x_1 < x_2$ (переименуем, если $x_2 < x_1$) $\Rightarrow$ в силу строгой монот-ти $f(x_1) < f(x_2)$ (стр. возраст) или $f(x_1) > f(x_2)$ (стр. убыв) $\nearrow\!\!\swarrow$

$f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow \exists f^{-1}$

- докажем строгую монот-ть.

Пусть $f \uparrow$ $\lightning$ f^{-1} - не строго возрастающая $\Rightarrow \exists y_1, y_2 \in Y_f : y_1 < y_2 \hookrightarrow$

$\hookrightarrow x_1 \geq x_2$

Если $x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2 \nearrow\!\!\swarrow y_1 < y_2$

$x_1 > x_2 \Rightarrow y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2 \nearrow\!\!\swarrow y_1 < y_2$ $\Rightarrow$

f^{-1} строго возрастает

Теорема (о непрерывности обратной ф-и)

f - непр на $[a,b]$, строго возраст (строго убыв) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists f^{-1}$ - строго возраст. (строго убыв) на

$[f(a), f(b)]$ ($[f(b), f(a)]$)

Док-во: $\exists f^{-1}$ и строгая мон-ть следуют из св-ва 5)

Докажем непр-ть f^{-1}

1) Покажем, что $Y_f = [A, B]$, где

$A = \min\limits_{[a,b]} f = f(a) \uparrow \; f(b) \downarrow$

$B = \max\limits_{[a,b]} f = f(b) \uparrow \; f(a) \downarrow$

т. В-са

f - непр. на $[a,b] \Rightarrow \exists x_1, x_2 \in [a,b]: f(x_1) = m, f(x_2) = M \Rightarrow Y_f \subseteq [A,B]$ ①

т. о непр. мон. ф-и

$\forall C \in [A,B] \; \exists x_0 \in [a,b]: f(x_0) = C \Rightarrow [A,B] \subseteq Y_f$ ②

①, ② $\Rightarrow Y_f = [A,B]$

2) Рассмотрим произвольную точку $y_0 \in (A,B)$, докажем непр-ть f^{-1} в y_0.

т.к. f^{-1} строго мон. (стр. возраст) $\Rightarrow x_0 = f^{-1}(y_0) \in (a,b)$

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \quad\quad)(\forall y \mid |y - y_0| < \delta): |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| = |x - x_0| < \varepsilon$

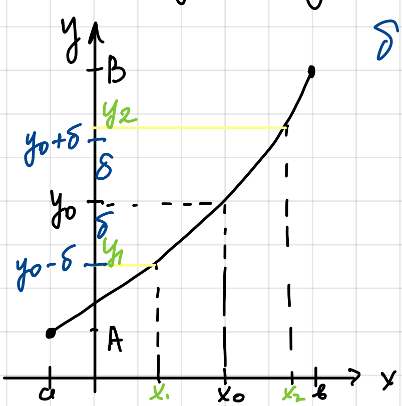
$|x - x_0| < \varepsilon \Leftrightarrow \quad x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$

$x_1 = \max\{a, x_0 - \varepsilon\}, \; x_2 = \min\{b, x_0 + \varepsilon\} \Rightarrow$

$x_0 - \varepsilon \leq x_1 < x < x_2 \leq x_0 + \varepsilon \quad | \; f$

$f(x_1) < f(x) < f(x_2)$

$y_1 < y < y_2$



$\delta = \min\{y_0 - y_1, y_2 - y_0\} \hookrightarrow \forall y \mid y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \hookrightarrow$

$x_1 < x < x_2$

А это значит, что $\forall y \mid |y - y_0| < \delta \hookrightarrow |x - x_0| < \varepsilon$

т.е. $\forall y_0 \in (A,B): f^{-1}(y)$ - непр. в т. y_0

Для $y = A$, $y = B$ аналогично, с точностью до одностор. непрерывности.

Теорема
об обратной функции

(оставляю из старой презентации)

Пусть $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда функция (отображение) f задаёт взаимно однозначное соответствие $X \leftrightarrow f(X)$. Поставив в соответствие каждому $y \in f(X)$ именно то (единственное) значение $x \in X$, для которого $f(x) = y$, обозначим полученную функцию символом

$$f^{-1} : f(X) \to X.$$

Функция f^{-1} называется обратной по отношению к f. В силу этого определения

$$y = f(x) \ \Leftrightarrow \ x = f^{-1}(y),$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \ \ \forall x \in X,$$

$$f(f^{-1}(y)) = y \ \ \forall y \in f(X).$$

Теорема 3 (Об обратной функции)

Пусть функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *строго возрастает и непрерывна. Тогда обратная функция задана на отрезке* $[A, B] = [f(a), f(b)]$, *строго возрастает и непрерывная на нём.*

Доказательство теоремы об обратной функции

Найдем область значений Y_f функции f.
Поскольку $A \le f(x) \le B$ для всех $x \in [a, b]$, то $Y_f \subseteq [A, B]$.
С другой стороны, по теореме Коши для любого $C \in [A, B]$ существует $c \in [a, b]$: $f(c) = C$, так что $[A, B] \subseteq Y_f$.
Следовательно, $Y_f = [A, B]$.
Строгое возрастание f^{-1} следует из леммы.

Доказательство теоремы об обратной функции (продолжение)

Установим непрерывность f^{-1}. Пусть сначала $y_0 \in (A, B)$, так что $x_0 = f^{-1}(y_0) \in (a, b)$.
Пусть $\varepsilon > 0$ столь мало, что

$$[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subseteq [a, b].$$

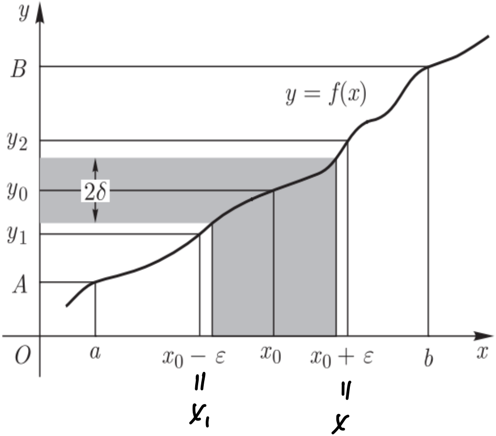
Положим $y_1 := f(x_0 - \varepsilon)$ и $y_2 := f(x_0 + \varepsilon)$.
Функция f устанавливает взаимно однозначное соответствие отрезка $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ и отрезка $[y_1, y_2] \subseteq [A, B]$. При этом $y_1 < y_0 < y_2$. Возьмем $\delta > 0$ столь малым, что $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subseteq (y_1, y_2)$.
Тогда

$$f^{-1}(U_\delta(y_0)) \subseteq f^{-1}((y_1, y_2)) = U_\varepsilon(x_0).$$

Следовательно, функция f^{-1} непрерывна в точке y_0.

Доказательство теоремы об обратной функции (продолжение)

Пусть теперь $y_0 = A$ или $y_0 = B$. Тогда (односторонняя) непрерывность f^{-1} в точке y_0 доказывается аналогично (с использованием односторонних окрестностей). $\square$



y
B
$y = f(x)$
y_2
y_0
2δ
y_1
A
O
a
$x_0 - \varepsilon$
x_0
$x_0 + \varepsilon$
b
x
$\shortparallel$
x_1
$\shortparallel$
x

Теорема 4

Пусть функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *задана на интервале* (a, b)*, строго возрастает и непрерывна на нем.*
Тогда обратная функция задана, строго возрастает и непрерывна на интервале (A, B)*, где*

$$A = \inf_{(a,b)} f, \quad B = \sup_{(a,b)} f.$$

Доказательство теоремы 4

Найдем область значений Y_f функции f. Покажем, что

$$A < f(x) < B \quad \forall\, x \in (a, b). \tag{1}$$

В самом деле, допущение, например, того, что $f(x_0) \geq B$ при некотором $x_0 \in (a, b)$, означало бы в силу строгого возрастания f, что $f(x) > B$ для всех $x \in (x_0, b)$, что противоречит условию $B = \sup\limits_{(a,b)} f$.

Доказательство теоремы 4 (продолжение)

Покажем теперь, что

$$\forall y_0 \in (A, B) \quad \exists x_0 \in (a, b) \ : \ f(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Из определений inf и sup следует, что

$$\exists x_1, x_2 \in (a, b) \ : \ f(x_1) < y_0, \quad f(x_2) > y_0.$$

Применяя к сужению функции f на отрезок $[x_1, x_2]$ теорему Коши о промежуточном значении непрерывной функции, получаем, что

$$\exists x_0 \in [x_1, x_2] \ : \ f(x_0) = y_0.$$

Таким образом, утверждение (2) установлено.
Из (1), (2) следует, что $f((a, b)) = (A, B)$.
Остается показать, что обратная функция f^{-1} непрерывна в каждой точке $y_0 \in (A, B)$. Это делается так же, как и в теореме 3.
$\square$

Аналогично формулируются вариант теоремы 4 для функции, строго убывающей на интервале, а также варианты теоремы об обратной функции для полуинтервалов.