МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Институт №8 «Компьютерные науки и прикладная математика»
Кафедра 806 «Вычислительная математика и программирование»

Лабораторная работа 7
по курсу «Численные методы»

Выполнила: К.О. Михеева
Группа: 8О-407Б
Преподаватель: Ревизников Д.Л.

Москва, 2023

Условие

Решить краевую задачу для *дифференциального уравнения эллиптического типа*. Аппроксимацию уравнения произвести с использованием *центрально-разностной схемы*. Для решения дискретного аналога применить следующие методы: *метод простых итераций (метод Либмана), метод Зейделя, метод простых итераций с верхней релаксацией*. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением

6.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$u(0, y) = y,$$

$$u(1, y) = 1 + y,$$

$$u(x,0) = x,$$

$$u(x,1) = 1 + x.$$

Аналитическое решение: $U(x, y) = x + y$.

Метод решения

Будем решать задачу на заданном промежутке от 0 до l_x по координате x и на промежутке от 0 до l_y по координате y.

Рассмотрим конечно-разностную схему решения краевой задачи на сетке с граничными парамерами l_x, l_y и параметрами насыщенности сетки N_x, N_y. Тогда размер шага по каждой из координат определяется:

$$h_x = \frac{l_x}{N_x - 1}, \; h_y = \frac{N_y}{N_y - 1}$$

Попробуем определить связь между дискретными значениями функции путем разностной апроксимации производной:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, y_i) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_j, y_i) = \frac{u_{j-1,i} - 2u_{j,i} + u_{j+1,i}}{h_x^2} + \frac{u_{j,i-1} - 2u_{j,i} + u_{j,i+1}}{h_y^2}$$

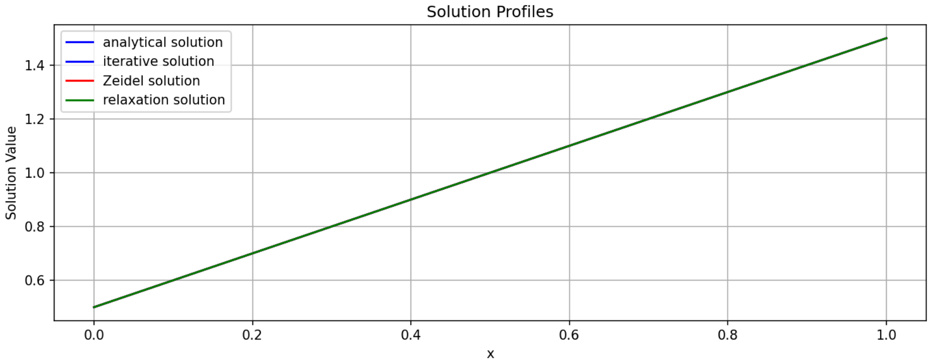
Тогда выражая из искомого уравнения значение $u_{i,j} = \dfrac{h_y^2(u_{j-1,i} + u_{j+1,i}) + h_x^2(u_{j,i-1} + u_{j,i+1})}{2(h_x^2 + h_y^2)}$, мы получаем основу для применения иттерационных методов решения *СЛАУ*.

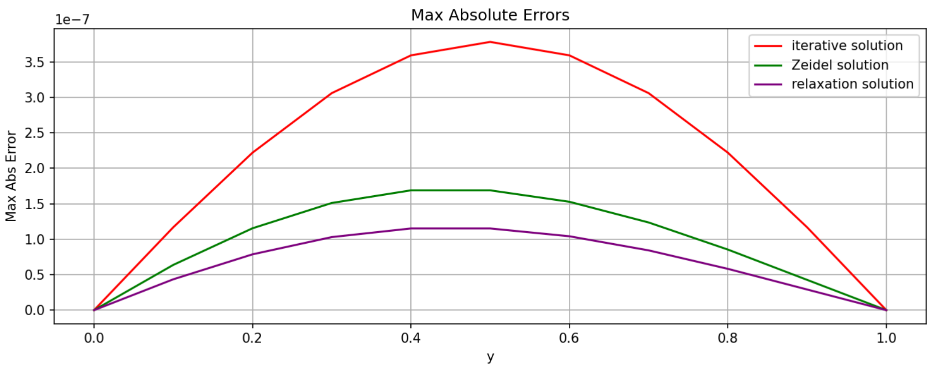
Для расчета $u_{j,0}$ и $u_{0,i}$ следует использовать граничные условия.

Описание

Программа состоит из одного файла.
В программе задаются граничные условия, начальное условие и аналитическое решение в качестве отдельных функций.
Далее задаем необходимый шаг по пространственной и временной сетке, а также кол-во слоев сетки и порядок аппроксимации.
Затем переносим на сетку аналитическое решение.
Далее рассчитываем значения по явной и неявной схеме, отталкиваясь от различий в их формулах. Реализованы метод простых итераций (Либмана), метод Зейделя, метод простых итераций с верхней релаксацией. Рассчитываем ошибку как среднеквадратичную.
Реализуем графики аппроксимации и среднеквадратичной ошибки.

Результат






```
max abs error iterative = 3.7812129727310406e-07
iter iterative = 303
max abs error Zeidel= 1.689039332841702e-07
Zeidel iter = 161
max abs error relaxation = 1.1515541253892536e-07
iter relaxation = 107
```

Вывод

При работе с данной лабораторной работой, я изучила метод численного решения: метод простых итераций (Либмана), метод Зейделя, метод простых итераций с верхней релаксацией. В результате были выведены графики аналитического решения и среднеквадратичной ошибки.