МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Институт №8 «Компьютерные науки и прикладная математика»
Кафедра 806 «Вычислительная математика и программирование»

Лабораторная работа 6
по курсу «Численные методы»

Выполнила: К.О. Михеева
Группа: 8О-407Б
Преподаватель: Ревизников Д.Л.

Москва, 2023

Условие

Используя явную схему крест и неявную схему, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения гиперболического типа. Аппроксимацию второго начального условия произвести с первым и со вторым порядком. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением . Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров .

6.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x} - 2u,$$

$$u(0,t) = \cos(2t),$$

$$u(\frac{\pi}{2},t) = 0,$$

$$u(x,0) = \exp(-x)\cos x,$$

$$u_t(x,0) = 0.$$

Аналитическое решение: $U(x,t) = \exp(-x)\cos x\cos(2t)$

Метод решения

Будем решать задачу на заданном промежутке от 0 до l по координате x и на промежутке от 0 до заданного параметра T по времени t.

Рассмотрим конечно-разностную схему решения краевой задачи на сетке с граничными парамерами l, T и параметрами насыщенности сетки N, K. Тогда размер шага по каждой из координат определяется:

$$h = \frac{l}{N-1},\ \tau = \frac{T}{K-1}$$

Считая, что значения функции $u_j^k = u(x_j, t^k)$ для всех координат $x_j = jh,\ \forall j \in \{0,\dots,N\}$ на предыдущих временных известно, попробуем определить значения функции на временном слое t^{k+1} путем разностной апроксимации производной:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^k) = \frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2}$$

И одним из методов апроксимации второй производной по x:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^k)$$

Для расчета u_j^0 и u_j^1 можно использовать следующие формулы:

$$u_j^0 = \psi_1(x_j)$$

$$u_j^1 = \psi_1(x_j) + \tau\psi_2(x_j) + \frac{\tau^2}{2}\psi_1''(x_j) + O(\tau^2)$$

$$u_j^1 = \psi_1(x_j) + \tau\psi_2(x_j) + O(\tau^1)$$

Описание

Программа состоит из одного файла.

В программе задаются граничные условия, начальное условие и аналитическое решение в качестве отдельных функций.

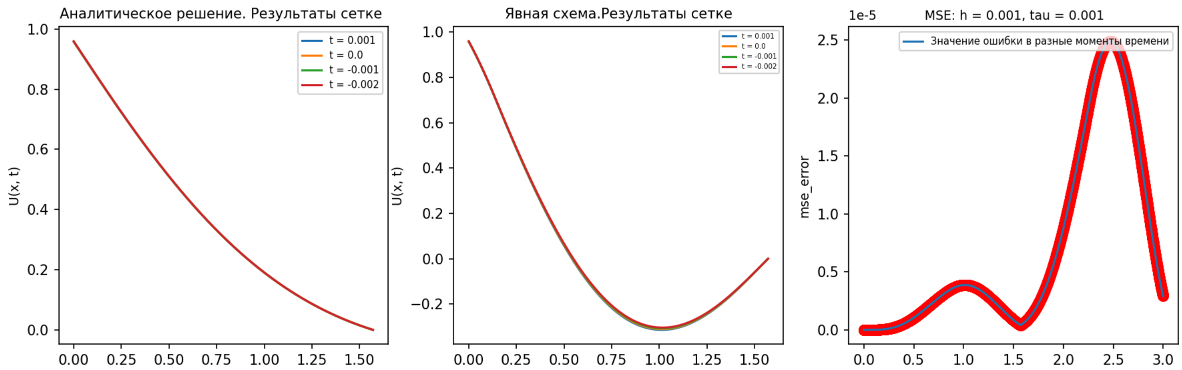
Далее задаем необходимый шаг по пространственной и временной сетке, а также кол-во слоев сетки и порядок аппроксимации.

Затем переносим на сетку аналитическое решение.

Далее рассчитываем значения по явной и неявной схеме, отталкиваясь от различий в их формулах. Рассчитываем ошибку как среднеквадратичную.

Реализуем графики аппроксимации и среднеквадратичной ошибки.

Результат



Вывод

При работе с данной лабораторной работой, я изучила метод численного решения гиперболических уравнений.

Также было выявлено, что для моего случая более уместно применять неявную схему, которая будет более точной.