

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Институт №8 «Компьютерные науки и прикладная математика»
Кафедра 806 «Вычислительная математика и программирование»

Лабораторная работа 5
по курсу «Численные методы»

Выполнила: К.О. Михеева
Группа: 8О-407Б
Преподаватель: Ревизников Д.Л.

Москва, 2023

Условие

Используя явную и неявную конечно-разностные схемы, а также схему Кранка - Николсона, решить начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. Осуществить реализацию трех вариантов аппроксимации граничных условий, содержащих производные: двухточечная аппроксимация с первым порядком, трехточечная аппроксимация со вторым порядком, двухточечная аппроксимация со вторым порядком. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением. Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров.

6.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos x (\cos t + \sin t),$$

$$u(0, t) = \sin t,$$

$$u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = -\sin t,$$

$$u(x, 0) = 0,$$

Аналитическое решение: $U(x, t) = \sin t \cos x$.

Метод решения

Будем решать задачу на заданном промежутке от 0 до l по координате x и на промежутке от 0 до заданного параметра T по времени t .

Рассмотрим конечно-разностную схему решения краевой задачи на сетке с граничными параметрами l, T и параметрами насыщенности сетки N, K . Тогда размер шага по каждой из координат определяется:

$$h = \frac{l}{N}, \quad \tau = \frac{T}{K}$$

Считая, что значения функции $u_j^k = u(x_j, t^k)$ для всех координат $x_j = jh, \forall j \in \{0, \dots, N\}$ на временном слое $t^k = k\tau, k \in \{0, \dots, K-1\}$ известно, попробуем определить значения функции на временном слое t^{k+1} путем разностной аппроксимации производной:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^k) = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau}$$

И одним из методов аппроксимации второй производной по x :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^k)$$

Описание

Программа состоит из одного файла.

В программе задаются граничные условия, начальное условие и аналитическое решение в качестве отдельных функций.

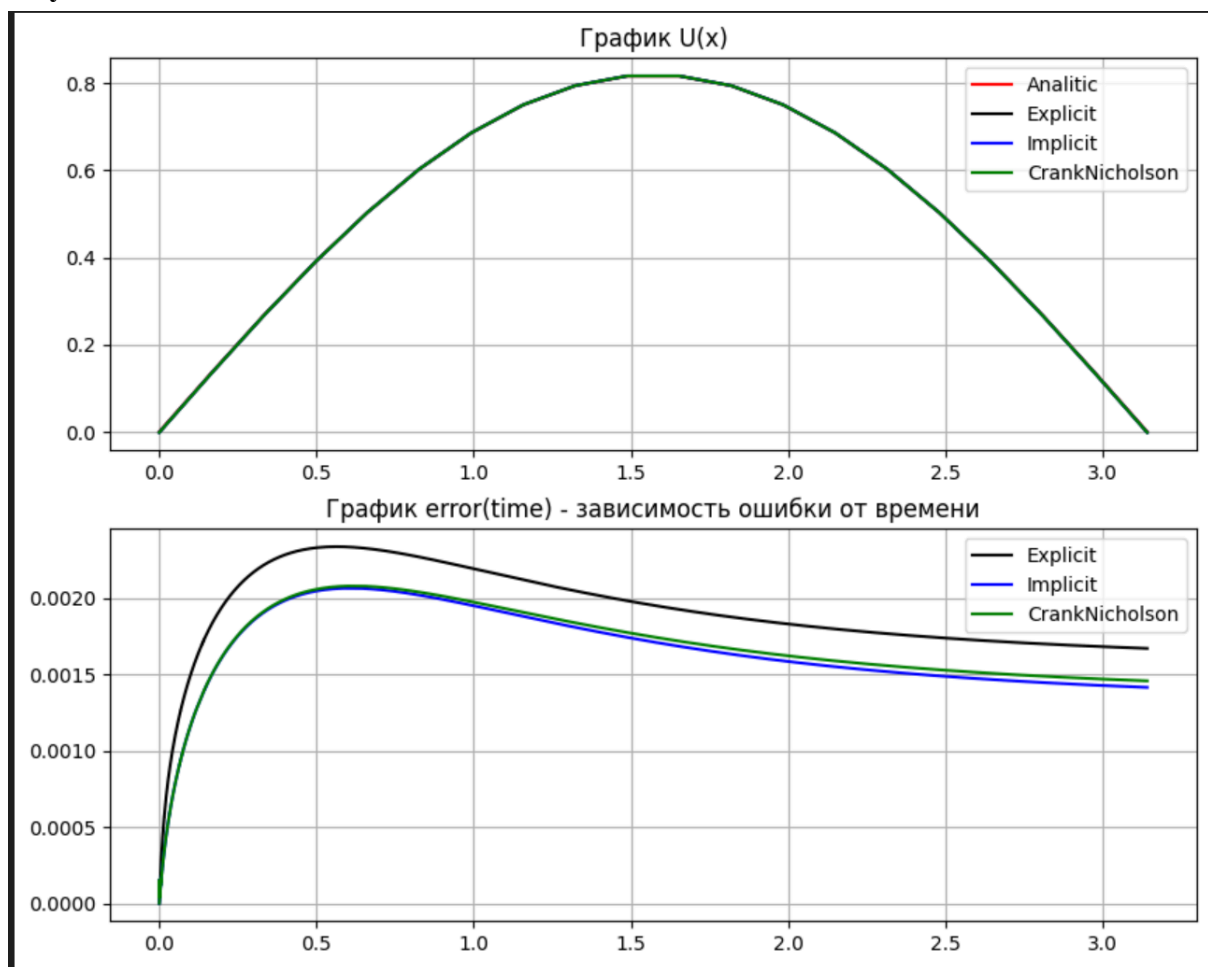
Далее задаем необходимый шаг по пространственной и временной сетке, а также кол-во слоев сетки и порядок аппроксимации.

Затем переносим на сетку аналитическое решение.

Далее рассчитываем значения по явной и неявной схеме, отталкиваясь от различий в их формулах. Рассчитываем ошибку как среднеквадратичную.

Реализуем графики аппроксимации и среднеквадратичной ошибки.

Результат



Вывод

При работе с данной лабораторной работой, я изучила метод численного решения параболических уравнений.

Также было выявлено, что для моего случая более уместно применять неявную схему, которая будет более точной.

