МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Институт №8 «Компьютерные науки и прикладная математика»
Кафедра 806 «Вычислительная математика и программирование»

**Лабораторная работа 8**
**по курсу «Численные методы»**

Выполнила: К.О. Михеева
Группа: 8О-407Б
Преподаватель:  Ревизников Д.Л.

Москва, 2023

## Условие

Используя схемы переменных направлений и дробных шагов, решить двумерную начально-краевую задачу для дифференциального уравнения параболического типа. В различные моменты времени вычислить погрешность численного решения путем сравнения результатов с приведенным в задании аналитическим решением . Исследовать зависимость погрешности от сеточных параметров .

6.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ a > 0,$$
$$u(0, y, t) = \sinh(y)\exp(-3at),$$
$$u_x(\frac{\pi}{4}, y, t) = -2\sinh(y)\exp(-3at),$$
$$u_y(x,0,t) = \cos(2x)\exp(-3at),$$
$$u(x, \ln 2, t) = \frac{3}{4}\cos(2x)\exp(-3at),$$
$$u(x, y, 0) = \cos(2x)\sinh(y).$$

## Метод решения

Будем решать задачу на заданной площади от $0$ до $l_x$ по координате $x$, от $0$ до $l_y$ по координате $y$ и на промежутке от $0$ до заданного параметра $T$ по времени $t$.

Рассмотрим конечно-разностную схему решения краевой задачи на сетке с граничными парамерами $l_x$, $l_y$, $T$ и параметрами насыщенности сетки $N_x$, $N_y$, $K$. Тогда размер шага по каждой из координат определяется:

$$h_x = \frac{l_x}{N_x - 1},\ h_y = \frac{l_y}{N_y - 1},\ \tau = \frac{T}{K - 1}$$

Конечно-разностная схема решения параболического типа в сетке на временном слое $t^{k+1}$ определяется с помощью 2-ух этапов, на каждом из которых решается трёхдиагональное уравнение с помощью метода прогонки:

- Считая, что значения функции $u^k_{i,j} = u(x_i, y_j, t^k)$ на временном слое $t^k$ известно, попробуем определить значения функции на временном слое $t^{k+\frac{1}{2}}$ путем разностной апроксимации производной по времени: $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_j, t^k) = (1+\gamma)\frac{u^{k+\frac{1}{2}}_{i,j} - u^k_{i,j}}{\tau}$, неявной аппроксимацией производной по $x$: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t^k) = \frac{u^{k+\frac{1}{2}}_{i-1,j} - 2u^{k+\frac{1}{2}}_{i,j} + u^{k+\frac{1}{2}}_{i+1,j}}{h_x^2}$ и явной аппроксимацией по $y$: $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j, t^k) = \frac{u^k_{i,j-1} - 2u^k_{i,j} + u^k_{i,j+1}}{h_y^2}$ получаем уравнение:

$$-a\tau h_x^2\gamma u^k_{i,j-1} - ((1+\gamma)h_x^2h_y^2 - 2a\tau h_x^2\gamma)u^k_{i,j} - a\tau h_x^2\gamma u^k_{i,j+1} = a\tau h_y^2 u^{k+\frac{1}{2}}_{i-1,j} - (2a\tau h_y^2 + (1+\gamma)h_x^2h_y^2)u^{k+\frac{1}{2}}_{i,j} + a\tau h_y^2 u^{k+\frac{1}{2}}_{i+1,j}$$

- Считая, что значения функции $u^{k+\frac{1}{2}}_{i,j} = u(x_i, y_j, t^{k+\frac{1}{2}})$ на временном слое $t^{k+\frac{1}{2}}$ известно из прошлого этапа, попробуем определить значения функции на временном слое $t^{k+1}$ путем разностной апроксимации производной по времени: $\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_j, t^{k+\frac{1}{2}}) = (1+\gamma)\frac{u^{k+1}_{i,j} - u^{k+\frac{1}{2}}_{i,j}}{\tau}$, явной аппроксимацией производной по $x$: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t^{k+\frac{1}{2}}) = \frac{u^{k+\frac{1}{2}}_{i-1,j} - 2u^{k+\frac{1}{2}}_{i,j} + u^{k+\frac{1}{2}}_{i+1,j}}{h_x^2}$ и неявной аппроксимацией по $y$: $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j, t^{k+\frac{1}{2}}) = \frac{u^{k+1}_{i,j-1} - 2u^{k+1}_{i,j} + u^{k+1}_{i,j+1}}{h_y^2}$ получим второе уравнение:

$$-a\tau h_y^2\gamma u^{k+\frac{1}{2}}_{i-1,j} - ((1+\gamma)h_x^2h_y^2 - 2a\tau h_y^2\gamma)u^{k+\frac{1}{2}}_{i,j} - a\tau h_y^2\gamma u^{k+\frac{1}{2}}_{i+1,j} = a\tau h_x^2 u^{k+1}_{i,j-1} - (2a\tau h_x^2 + (1+\gamma)h_x^2h_y^2)u^{k+1}_{i,j} + a\tau h_x^2 u^{k+1}_{i,j+1}$$

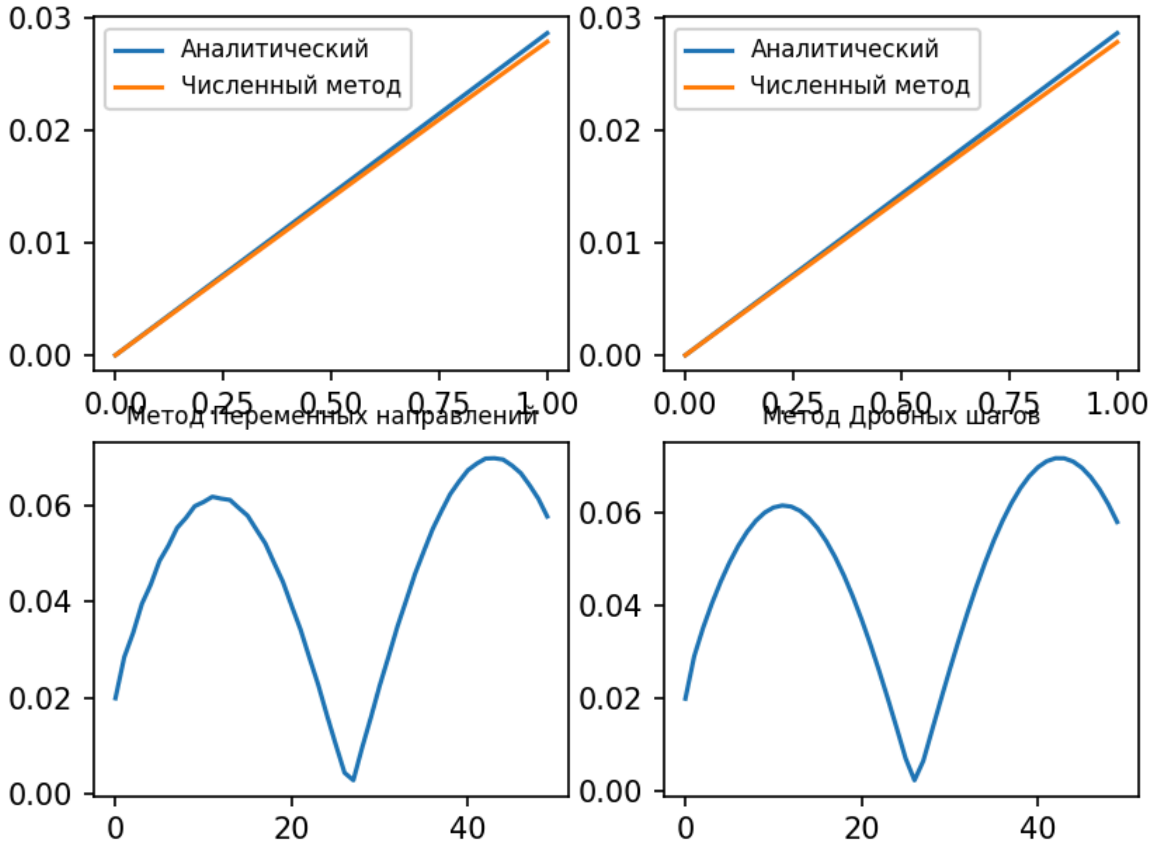
При $\gamma = 1$ получаем метод переменных направлений, когда как при $\gamma = 0$ - метод дробных шагов.

Значения на слое $u^0_{i,j}$ и на границах сетки определяются с помощью заданных граничных условий и их аппроксимаций.

**Описание**

Программа состоит из одного файла.
В программе задаются граничные условия, начальное условие и аналитическое решение в качестве отдельных функций.
Далее задаем необходимый шаг по пространственной и временной сетке, а также кол-во слоев сетки и порядок аппроксимации.
Затем переносим на сетку аналитическое решение.
Далее рассчитываем значения по явной и неявной схеме, отталкиваясь от различий в их формулах. Рассчитываем ошибку как среднеквадратичную.
Реализуем графики аппроксимации и среднеквадратичной ошибки.

**Результат**




**Вывод**

При работе с данной лабораторной работой, я изучила метод численного решения, используя схемы переменных направлений и дробных шагов, решив двумерную начально-краевую задачу для ДУ параболического типа.
Также было выяснено, что более точной является схема переменных направлений.