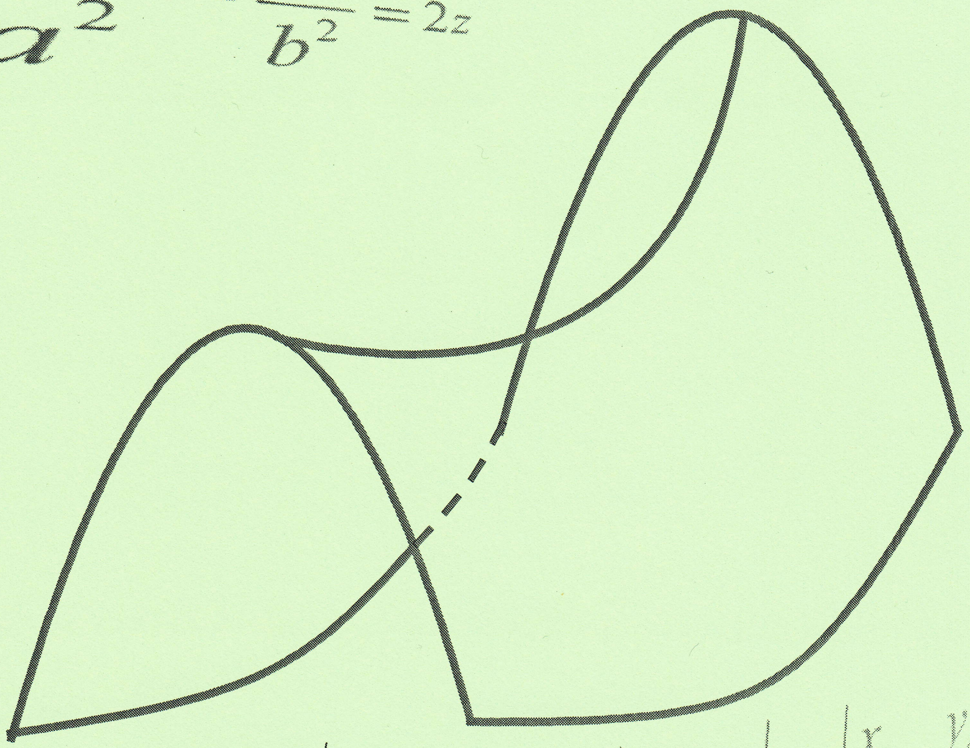
А.С. БОРТАКОВСКИЙ
Е.А. ПЕГАЧКОВА

$$d = \frac{|A x_M + B y_M + C z_M + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$



$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix}$$

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А.С. БОРТАКОВСКИЙ, Е.А. ПЕГАЧКОВА

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Печатается по рекомендации Редакционного совета факультета «Прикладная математика и физика» Московского авиационного института (национального исследовательского университета)

Москва
Издательство «Доброе слово»
2014

ББК 517
УДК 51
Б 82

Б 82 **Бортаковский А.С., Пегачкова Е.А.**

Типовые задачи по аналитической геометрии: Учебное пособие. — М.: Доброе слово, 2014. — 88 с.

ISBN 978-5-89796-517-X

Пособие предназначено для проведения самостоятельной работы студентов по курсу аналитической геометрии в первом семестре. Приведены основные теоретические сведения и методы решения типовых задач по всем основным разделам аналитической геометрии: векторы и координаты, произведения векторов, прямые на плоскости, плоскости и прямые в пространстве, линии и поверхности второго порядка. Составлены варианты типовых задач, письменное решение которых проверяется преподавателем. Подробное решение аналогичных задач приводится в каждом разделе. Эти примеры помогают студентам выработать навыки и умения решения типовых задач. Степень обоснованности и объем пояснений в приводимых примерах должны воспроизводиться студентами при самостоятельном решении задач.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Самостоятельная работа студентов (СРС) является важной составляющей учебного процесса, которой отводится значительный объем в государственных стандартах подготовки бакалавров. Самостоятельная работа позволяет студентам закрепить навыки и умения, приобретенные на аудиторных занятиях (лекциях, семинарах, лабораторных работах), проверить правильность понимания теоретических сведений, научиться решать основные типовые задачи. Проверка СРС вместе с тестами и контрольными работами дает информацию об успеваемости студентов в течение семестра и служит для текущей аттестации. Большое значение СРС имеет для подготовки к экзамену или зачету. Она учитывается также в итоговой аттестации при рейтинговой системе оценивания.

Пособие дополняет книги [2-4], образуя вместе с ними единый методический комплекс по аналитической геометрии. Основную часть пособия составляют 20 вариантов, содержащих типовые задачи по аналитической геометрии. Каждый студент выполняет один вариант задания (номер варианта определяется порядковым номером фамилии студента в списке группы). Вариант содержит 10 задач по 6 разделам аналитической геометрии [1-9]: векторы и аффинные координаты, произведения векторов, прямые на плоскости, плоскости и прямые в пространстве, линии и поверхности второго порядка.

Умение решать типовые задачи, как правило, бывает достаточным для получения удовлетворительной итоговой оценки. В течение семестра на каждом практическом занятии преподаватель указывает номера задач, письменное решение которых, соответственно оформленное, студенты должны сдать на проверку на следующем занятии. После проверки студентам сообщаются оценки и обсуждаются допущенные в решениях характерные ошибки.

Пособие состоит из 6 тематических разделов и вариантов заданий, собранных в разд. 7. В конце пособия приводится список рекомендуемой литературы для практической подготовки. В каждом тематическом разделе содержатся необходимые теоретические сведения, описываются методы и алгоритмы решения типовых задач. Приводятся примеры решения задач, аналогичных задачам из вариантов для СРС, причем нумерации и формулировки разбираемых примеров и задач для СРС совпадают. Эти примеры помогают студентам выработать навыки и умения решения типовых задач. Степень обоснованности действий, подробность алгебраических преобразований и объем пояснений в приводимых примерах должны воспроизводиться студентами при самостоятельном решении.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ

1. Решение каждой задачи должно быть написано аккуратно, разборчивым почерком, чернилами или пастой синего (или черного) цвета на листах белой бумаги (либо в клеточку) формата А4. Чертежи можно делать карандашом. Текст следует писать на одной стороне листа, оставляя левое поле не менее 2 см. Листы должны быть скреплены с левой стороны степлером.

2. На каждом листе работы указываются фамилия и инициалы студента, выполнившего работу, номер учебной группы, номер варианта, дата сдачи.

3. Перед решением каждой задачи ставится ее порядковый номер, который необходимо выделить (подчеркиванием или маркером), и полностью приводится условие задачи.

4. Математические выкладки необходимо сопровождать пояснениями, раскрывающими смысл и содержание выполняемых действий. Все вычисления проводятся точно, без округления результата. В конце решения приводится ответ. Слово «*Ответ*» следует выделить (подчеркиванием или маркером).

5. Решение задачи с измененным условием или задачи из другого варианта не засчитывается. Отсутствие обоснования решения или пояснений приводит к снижению оценки. Оценка также снижается за небрежное оформление работы.

1. ВЕКТОРЫ И АФФИННЫЕ КООРДИНАТЫ

Вектором называется упорядоченная пара точек. Первая точка называется ***началом вектора***, вторая – ***концом вектора***. Расстояние между началом и концом вектора называется его ***длиной***. Вектор, начало и конец которого совпадают, называется ***нулевым***, его длина равна нулю. Если длина вектора положительна, то его называют ***ненулевым***. Ненулевой вектор можно определить также как ***направленный отрезок***, т.е. отрезок, у которого одна из ограничивающих его точек считается первой (началом вектора), а другая – второй (концом вектора). Направление нулевого вектора, естественно, не определено.

Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается $\overline{AB}$ и изображается стрелкой, обращенной острием к концу вектора (рис. 1.1). Начало вектора называют также его ***точкой приложения***. Говорят, что вектор $\overline{AB}$ ***приложен к точке*** A. Длина вектора $\overline{AB}$ равна длине отрезка AB и обозначается $\left|\overline{AB}\right|$. Имея в виду это обозначение, длину вектора называют также ***модулем***, ***абсолютной величиной***. Нулевой вектор, например $\overline{CC}$, обозначается символом $\overline{o}$ и изображается одной точкой (точка C на рис. 1.1). Вектор, длина которого равна единице или принята за единицу, называется ***единичным вектором***.

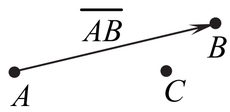


Рис. 1.1

Ненулевой вектор $\overline{AB}$ кроме направленного отрезка определяет также ***содержащие его луч*** AB (с началом в точке A) и ***прямую*** AB.

Два ненулевых вектора называются ***коллинеарными***, если они принадлежат либо одной прямой, либо двум параллельным прямым, в противном случае они называются ***неколлинеарными***. Коллинеарность векторов обозначается знаком $\|$. Поскольку направление нулевого вектора не определено, он считается коллинеарным любому вектору. Каждый вектор коллинеарен самому себе. Одинаково направленные (сонаправленные) и противоположно направленные ненулевые коллинеарные векторы обозначаются парами стрелок $\uparrow\uparrow$ и $\uparrow\downarrow$ соответственно [2].

Три ненулевых вектора называются ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях, в противном случае они называются ***некомпланарными***. Так как направление нулевого вектора не определено, он считается компланарным с любыми двумя векторами.

Два вектора называются ***равными***, если они:

а) коллинеарны, одинаково направлены;

б) имеют равные длины.

Все нулевые векторы считаются равными друг другу.

Углом между ненулевыми векторами называется угол между равными им векторами, имеющими общее начало, не превосходящий по величине π.

Пусть в пространстве даны два ненулевых вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (рис. 1.2). Построим равные им векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$. На плоскости, содержащей лучи OA и OB, получим два угла AOB. Меньший из них, величина φ которого не превосходит π ($0 \le \varphi \le \pi$), принимается за угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

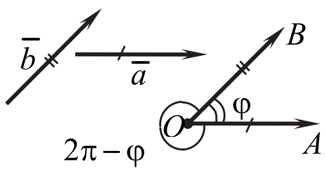


Рис. 1.2

Два ненулевых вектора называются ***ортогональными*** (***перпендикулярными***), если угол между ними прямой (величина φ угла равна $\frac{\pi}{2}$).

Линейные операции над векторами

Суммой двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{OB} = \overline{a} + \overline{b}$ (рис. 1.3), начало которого совпадает с началом вектора $\overline{OA} = \overline{a}$, а конец – с концом вектора $\overline{AB} = \overline{b}$ (*правило треугольника*).

Произведением ненулевого вектора $\overline{a}$ на действительное число λ ($\lambda \ne 0$) называется вектор $\lambda\overline{a}$, удовлетворяющий условиям:

1) длина вектора $\lambda\overline{a}$ равна $|\lambda| \cdot |\overline{a}|$, т.е. $|\lambda\overline{a}| = |\lambda| \cdot |\overline{a}|$;

2) векторы $\lambda\overline{a}$ и $\overline{a}$ коллинеарные ($\lambda\overline{a} \parallel \overline{a}$);

3) векторы $\lambda\overline{a}$ и $\overline{a}$ одинаково направлены, если $\lambda > 0$, и противоположно направлены, если $\lambda < 0$ (рис. 1.4).

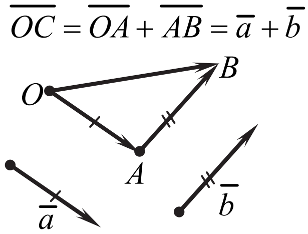


Рис. 1.3

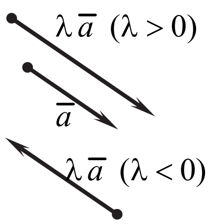


Рис. 1.4

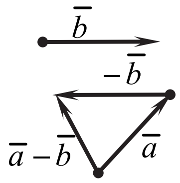


Рис. 1.5

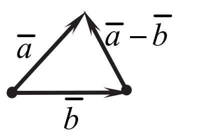


Рис. 1.6

Произведение нулевого вектора на любое число λ считается (по определению) нулевым вектором: $\lambda\overline{o} = \overline{o}$; произведение любого вектора на число нуль также считается нулевым вектором: $0 \cdot \overline{a} = \overline{o}$.

Операции сложения векторов и умножения вектора на число называются ***линейными операциями*** над векторами.

Вектор ($-\overline{a}$) называется ***противоположным*** вектору $\overline{a}$, если их сумма равна нулевому вектору: $\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{o}$. Противоположный вектор ($-\overline{a}$) имеет длину $|\overline{a}|$, коллинеарен и противоположно направлен вектору $\overline{a}$. Нулевой вектор является противоположным самому себе. Заметим, что $(-\overline{a})=(-1)\cdot\overline{a}$.

Разностью векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется сумма вектора $\overline{a}$ с вектором $(-\overline{b})$, противоположным вектору $\overline{b}$: $\overline{a}-\overline{b}=\overline{a}+(-\overline{b})$ (рис. 1.5). Другими словами, разность $\overline{a}-\overline{b}$ векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ – это такой вектор, который в сумме с вектором $\overline{b}$ дает вектор $\overline{a}$ (рис. 1.6).

Вектор $\overline{a}$ называется ***линейной комбинацией*** векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$, если он представлен в виде

$$\overline{a}=\alpha_1\overline{a}_1+\alpha_2\overline{a}_2+\ldots+\alpha_k\overline{a}_k,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – некоторые числа. В этом случае говорят, что ***вектор*** $\overline{a}$ ***разложен по векторам*** $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_k$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ называют ***коэффициентами разложения***.

Для нахождения суммы нескольких векторов можно построить ломаную из равных им векторов, прилагая к концу первого вектора начало второго, к концу второго – начало третьего и т.д. Тогда ***замыкающий*** вектор, соединяющий начало первого вектора ломаной с концом последнего ее вектора, равен сумме всех векторов ломаной (*правило ломаной*).

Базис и координаты векторов

Базисом на прямой называется любой ненулевой вектор $\overline{e}$ на этой прямой (рис. 1.7).

Базисом на плоскости называются два неколлинеарных вектора $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ на этой плоскости, взятые в определенном порядке (рис. 1.8). Базис на плоскости называется ***правым***, если кратчайший поворот от первого вектора ко второму происходит против часовой стрелки (см. рис. 1.8). В противном случае, базис на плоскости называется ***левым***.

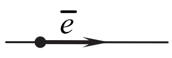


Рис. 1.7

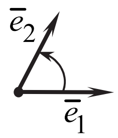


Рис. 1.8

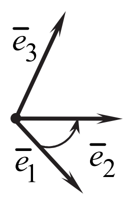


Рис. 1.9

Базисом в пространстве называются три некомпланарных вектора $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$, взятые в определенном порядке (рис. 1.9). Базис в пространстве называется ***правым***, если, наблюдая из конца третьего вектора, кратчайший поворот от первого вектора ко второму виден происходящим против часовой стрелки (см. рис. 1.9). Если описанный поворот виден происходящим по часовой стрелке, то базис называется ***левым***.

Векторы, образующие базис, называются ***базисными***.

Теорема (о разложении вектора по базису). *Любой вектор $\overline{a}$, принадлежащий прямой, может быть разложен по базису $\overline{e}$ на этой прямой.*

Любой вектор $\overline{a}$, принадлежащий плоскости, может быть разложен по базису $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ на этой плоскости.

Любой вектор $\overline{a}$ может быть разложен по базису $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ в пространстве.

Коэффициенты разложения вектора по базису определяются однозначно.

Коэффициенты x_1, x_2, x_3 в разложении $\overline{a} = x_1 \overline{e}_1 + x_2 \overline{e}_2 + x_3 \overline{e}_3$ называются ***координатами вектора*** $\overline{a}$ ***относительно базиса*** $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ (число x_1 называют ***абсциссой***, x_2 – ***ординатой***, а x_3 – ***аппликатой*** вектора $\overline{a}$). Такие же названия координат используются при разложениях $\overline{a} = x_1 \overline{e}_1 + x_2 \overline{e}_2$ или $\overline{a} = x_1 \overline{e}$ вектора $\overline{a}$ по базису на плоскости или на прямой.

На практике координаты векторов удобно представлять в виде матриц-столбцов (или матриц-строк), которые называются ***координатными столбцами*** (***координатными строками***). В базисе $(\overline{e}) = (\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ вектору $\overline{a} = x_1 \overline{e}_1 + x_2 \overline{e}_2 + x_3 \overline{e}_3$ соответствует координатный столбец $\underset{(\overline{e})}{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Обозначение базиса $(\overline{e})$ можно не указывать, если не возникает неоднозначности. Линейным операциям над векторами соответствуют линейные операции над их координатными столбцами. Например, *координатный столбец линейной комбинации векторов равен линейной комбинации координатных столбцов*.

На векторы и координатные столбцы переносятся понятия линейной зависимости и линейной независимости систем столбцов (см. [3,4] разд. 3.1,3.4), а также связанные с этими понятиями свойства.

Аффинная система координат

Пусть в пространстве фиксирована точка O. Совокупность точки O и базиса называется ***аффинной*** (***декартовой***) ***системой координат***:

$O\overline{e}$ – *аффинная система координат на прямой* (рис. 1.10) – это точка O и ненулевой вектор $\overline{e}$ на прямой (базис на прямой);

$O\overline{e}_1\overline{e}_2$ – *аффинная система координат на плоскости* (рис. 1.11) – это точка O и два неколлинеарных вектора $\overline{e}_1, \overline{e}_2$, взятые в определенном порядке (базис на плоскости);

$O\overline{e}_1\overline{e}_2\overline{e}_3$ – *аффинная система координат в пространстве* (рис. 1.12) – это точка O и три некомпланарных вектора $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$, взятые в определенном порядке (базис в пространстве).

Точка O называется ***началом координат***. Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются ***координатными осями***: Ox_1 – ***ось абсцисс***, Ox_2 – ***ось ординат***, Ox_3 – ***ось аппликат***. Плоскости, проходящие через две координатные оси, называются ***координатными плоскостями***. Аффинные системы координат обозначают также указанием начала координат и координатных осей, например Ox_1, Ox_1x_2, $Ox_1x_2x_3$.

Аффинная система координат в пространстве (или на плоскости) называется ***правой***, если ее базис является правым, и ***левой***, если ее базис –левый.

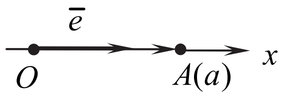


Рис. 1.10

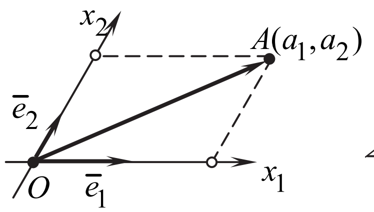


Рис. 1.11

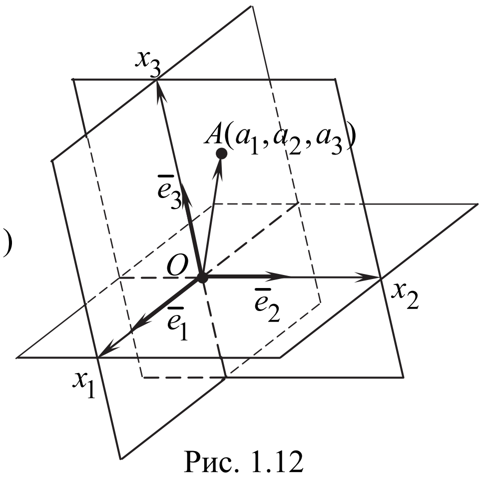


Рис. 1.12

Координатами вектора в заданной системе координат называются, как и ранее, коэффициенты в разложении вектора по базису.

Для любой точки A в заданной аффинной системе координат можно рассмотреть вектор $\overline{OA}$, начало которого совпадает с началом координат, а конец – с точкой A (рис. 1.10 – 1.12). Этот вектор называется ***радиус-вектором*** точки A. ***Координатами точки*** A в заданной системе координат называются координаты радиус-вектора этой точки относительно заданного базиса. В пространстве это координаты вектора $\overline{OA}$ в базисе $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$, т.е. коэффициенты a_1, a_2, a_3 в разложении $\overline{OA} = a_1\overline{e}_1 + a_2\overline{e}_2 + a_3\overline{e}_3$ (рис. 1.12). Координаты точки записывают в виде $A(a_1, a_2, a_3)$. Первая координата называется ***абсциссой***, вторая – ***ординатой***, третья – ***аппликатой***. На плоскости и на прямой координаты записывают в виде $A(a_1, a_2)$ и $A(a)$ согласно разложениям $\overline{OA} = a_1\overline{e}_1 + a_2\overline{e}_2$ (рис. 1.11), $\overline{OA} = a\overline{e}$ (рис. 1.10). Координаты точки A, или, что то же самое, координаты ее радиус-вектора $\overline{OA}$ представляют в виде координатного столбца (матрицы-столбца) или координатной строки:

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ или $(a_1 \quad a_2 \quad a_2)$ в пространстве, $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ или $(a_1 \quad a_2)$ на плоскости.

Чтобы найти координаты вектора $\overline{AB}$ с началом в точке $A(a_1, a_2, a_3)$ и концом в точке $B(b_1, b_2, b_3)$ *нужно из координат его конца вычесть соответствующие координаты его начала* (рис. 1.13):

$$\overline{AB} = (b_1 - a_1)\overline{e}_1 + (b_2 - a_2)\overline{e}_2 + (b_3 - a_3)\overline{e}_3 .$$

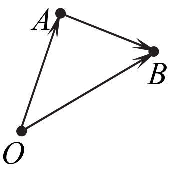


Рис. 1.13

Это же правило справедливо для аффинных систем координат на плоскости и на прямой.

Прямоугольная система координат

Система векторов называется ***ортогональной***, если все векторы, образующие ее, попарно ортогональны. Система векторов называется ***ортонормированной***, если она ортогональная и длина каждого вектора равна единице.

Аффинная система координат называется ***прямоугольной***, если ее базис ортонормированный.

Выбирая ***стандартные базисы***, получаем:

$O\overline{i}$ *– прямоугольную систему координат на прямой* – это точка O и единичный вектор $\overline{i}$ на прямой. Точки O и A (рис. 1.14) на координатной оси Ox обозначаются $O(0)$ и $A(1)$;

$O\overline{i}\,\overline{j}$ *– прямоугольную систему координат на плоскости* – это точка O и два взаимно перпендикулярных единичных вектора $\overline{i}$ и $\overline{j}$ на плоскости (вектор $\overline{i}$ – первый базисный вектор, а $\overline{j}$ – второй; пара векторов $\overline{i}, \overline{j}$ – правая). Координатные оси Ox (абсцисс) и Oy (ординат) разбивают плоскость на 4 части, называемые ***четвертями*** (рис. 1.15). Точка $A(1, 1)$, например, принадлежит I четверти;

$O\overline{i}\,\overline{j}\,\overline{k}$ *– прямоугольную систему координат в пространстве* – это точка O и три попарно перпендикулярных единичных вектора $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ (вектор $\overline{i}$ – первый базисный вектор, $\overline{j}$ – второй, а $\overline{k}$ – третий; тройка векторов $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ – правая). Координатные оси обозначаются: Ox – ось абсцисс, Oy – ось ординат, Oz – ось аппликат. ***Координатные плоскости*** Oxy, Oxz, Oyz, проходящие через пары координатных осей, разбивают пространство на 8 ***октантов*** (рис. 1.16). Точка $A(1, 2, 2)$, например, принадлежит I октанту.

Прямоугольные системы координат обозначают также указанием начала координат и координатных осей, например Ox, Oxy, $Oxyz$.

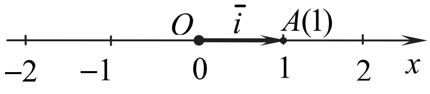


Рис.

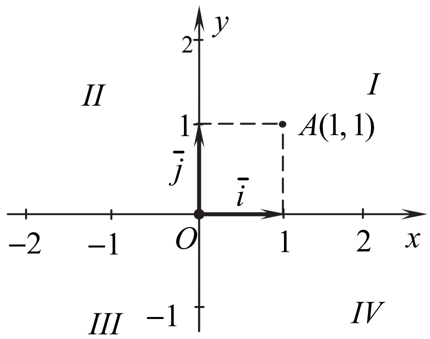


Рис. 1.15

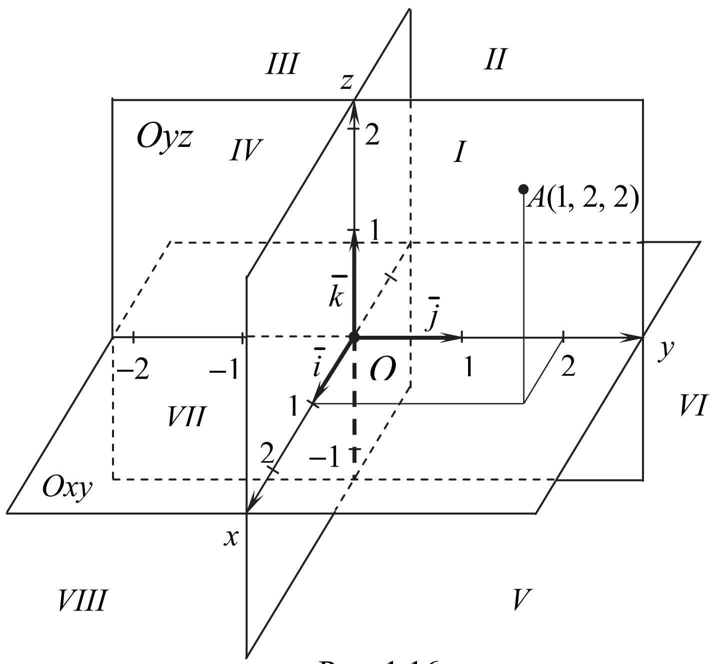


Рис. 1.16

Аффинные и выпуклые комбинации радиус-векторов

Линейная комбинация $\overline{OM} = \alpha\overline{OA} + \beta\overline{OB}$ радиус-векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ называется ***аффинной***, если сумма ее коэффициентов равна единице: $\alpha + \beta = 1$. *Точка* M*, удовлетворяющая условиям*

$$\overline{OM} = t\,\overline{OA} + (1-t)\overline{OB}, \tag{1.1}$$

принадлежит прямой AB *при всех* $t \in \mathbb{R}$, и, наоборот, *для любой точки* M*, принадлежащей прямой* AB*, найдется такое действительное число* t*, что выполняются равенство* (1.1).

Линейная комбинация $\alpha\overline{OA} + \beta\overline{OB}$ радиус-векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ называется ***выпуклой***, если все ее коэффициенты – неотрицательные числа, а их сумма равна единице: $\alpha + \beta = 1$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$. *Точка* M*, удовлетворяющая* равенству (1.1) *при* $t \in [0;1]$, *принадлежит отрезку*

AB, и, наоборот, *для любой точки* M *отрезка* AB, *найдется такое* $t \in [0;1]$, *что выполняется равенство* (1.1).

Координаты точки M, *которая делит отрезок* AB *в отношении* $\frac{AM}{MB} = \frac{\beta}{\alpha}$ ($\alpha > 0$, $\beta > 0$), *находятся по координатам его концов* $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$:

$$M\left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}; \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}; \frac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha + \beta}\right). \tag{1.2}$$

В частности, *координаты середины* M *отрезка* AB *равны среднему арифметическому соответствующих координат его концов*:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right). \tag{1.3}$$

Аналогично определяются аффинные и выпуклые комбинации трех радиус-векторов $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$. Предполагаем, что точки A, B, C не лежат на одной прямой.

Линейная комбинация $\alpha\overline{OA} + \beta\overline{OB} + \gamma\overline{OC}$ радиус-векторов $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ называется ***аффинной***, если сумма ее коэффициентов равна единице: $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Если, кроме того, все ее коэффициенты – неотрицательные числа, то комбинация называется ***выпуклой***. *Точка* M, *удовлетворяющая равенству*

$$\overline{OM} = t\,\overline{OA} + s\,\overline{OB} + (1 - t - s)\overline{OC}, \tag{1.4}$$

принадлежит плоскости, проходящей через точки A, B, C, *при всех* $t \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$, и, наоборот, *для любой точки* M, *принадлежащей плоскости, проходящей через точки* A, B, C, *найдутся такие числа* $t \in \mathbb{R}$ *и* $s \in \mathbb{R}$, *что выполняется равенство* (1.4). *Если комбинация* (1.4) *выпуклая* ($t \in [0;1], s \in [0;1]$), *то точка* M *принадлежит плоскому треугольнику* ABC.

Используя формулу (1.4) при $t = s = \frac{1}{3}$, можно показать, что *координаты точки* M *пересечения медиан треугольника* ABC *равны среднему арифметическому координат его вершин*

$$M\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right). \tag{1.5}$$

Пример 1. Точки M и N делят соответственно диагональ AC и сторону BC параллелограмма $ABCD$ в отношениях $AM : MC = 2 : 1$, $BN : NC = 2 : 3$. Разложить вектор $\overline{MN}$ по векторам $\overline{a} = \overline{AD}$ и $\overline{b} = \overline{AB}$. В каком отношении прямая BM делит отрезок AN?

Решение. Для сторон треугольника CMN имеем векторное равенство $\overline{MN} + \overline{NC} = \overline{MC}$ (рис. 1.17). Подставляя в это равенство разложения $\overline{MC} = \frac{1}{3}\overline{AC} = \frac{1}{3}(\overline{a} + \overline{b})$ и $\overline{NC} = \frac{3}{5}\overline{BC} = \frac{3}{5}\overline{a}$, получаем $\overline{MN}+\frac{3}{5}\overline{a}=\frac{1}{3}(\overline{a}+\overline{b})$. Выражаем $\overline{MN}=\frac{1}{3}(\overline{a}+\overline{b})-\frac{3}{5}\overline{a}$. Приводя подобные члены, находим искомое разложение $\overline{MN}=-\frac{4}{15}\overline{a}+\frac{1}{3}\overline{b}$.

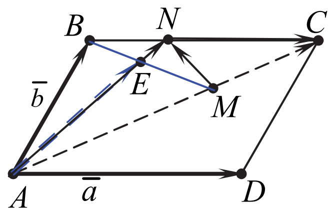


Рис. 1.17

Пусть E – точка пересечения прямой BM и отрезка AN. Обозначим через λ отношение $\lambda=AE:AN$. Тогда $\overline{AE}=\lambda\overline{AN}$. С другой стороны, поскольку точка E принадлежит отрезку BM, то вектор $\overline{AE}$ можно представить как выпуклую комбинацию векторов $\overline{AM}$ и $\overline{AB}$. Значит, существует такое число $t\in[0;1]$, что $\overline{AE}=t\,\overline{AM}+(1-t)\,\overline{AB}$. Таким образом, имеем равенство $\lambda\,\overline{AN}=t\,\overline{AM}+(1-t)\,\overline{AB}$. Выражая все векторы через $\overline{a}$ и $\overline{b}$, получаем

$$\lambda(\tfrac{2}{5}\overline{a}+\overline{b})=t\tfrac{2}{3}(\overline{a}+\overline{b})+(1-t)\overline{b}\,.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых векторах в левой и правой частях равенства:

$$\begin{cases}\frac{2}{5}\lambda=\frac{2}{3}t,\\ \lambda=\frac{2}{3}t+1-t.\end{cases}$$

Подставляя $t=0{,}6\lambda$ во второе уравнение, получаем $\lambda=1-0{,}2\lambda$. Отсюда $\lambda=\frac{5}{6}$. Значит, $AE:AN=5:6$. Тогда искомое отношение $AE:EN=5:1$.

Ответ: $\overline{MN}=-\frac{4}{15}\overline{a}+\frac{1}{3}\overline{b}$, $AE:EN=5:1$.

Пример 2. В аффинной системе координат $Ox_1x_2x_3$ заданы вершины $A(1,3,2)$, $B(3,4,1)$, $C(5,2,3)$, $D(7,7,6)$ треугольной пирамиды $ABCD$ (рис. 1.18). Найти:

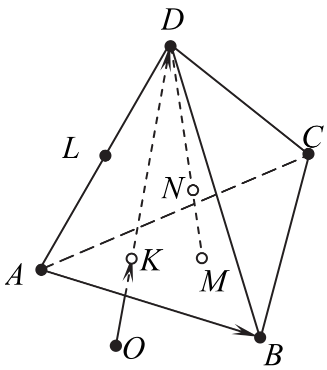


Рис. 1.18

а) координаты вектора $\overline{AB}$;

б) координаты середины L ребра AD;

в) координаты точки M пересечения медиан треугольника ABC;

г) координаты точки N, которая делит отрезок DM в отношении $DN:NM=3:1$;

д) отношение, в котором плоскость грани ABC делит отрезок OD.

Решение. а) Координаты вектора $\overline{AB}$ находим, вычитая из координат точки B координаты точки A: $\overline{AB}=(3-1\quad 4-3\quad 1-2)=(2\quad 1\quad -1)$.

б) Координаты середины L отрезка AD определяем по правилу (1.3): $L(\frac{1+7}{2}, \frac{3+7}{2}, \frac{2+6}{2})$, т.е. $L(4,5,4)$.

в) Координаты точки M пересечения медиан грани ABC вычисляем по правилу (1.5): $M(\frac{1+3+5}{3}, \frac{3+4+2}{3}, \frac{2+1+3}{3})$, т.е. $M(3,3,2)$.

г) Координаты точки N, которая делит отрезок DM в отношении $DN:NM=3:1$ ищем по правилу (1.2) при $\alpha=1$, $\beta=3$:

$$N\left(\frac{1x_D+3x_M}{1+3}, \frac{1y_D+3y_M}{1+3}, \frac{1z_D+3z_M}{1+3}\right).$$

Подставляя координаты точек D и M, получаем $N\left(\frac{1\cdot 7+3\cdot 3}{4}, \frac{1\cdot 7+3\cdot 3}{4}, \frac{1\cdot 6+3\cdot 2}{4}\right)$, т.е. $N(4,4,3)$.

д) Найдем теперь отношение, в котором плоскость грани ABC делит отрезок OD. Пусть K – точка пересечения прямой OD и плоскости грани ABC. Тогда из коллинеарности векторов $\overline{OD}$ и $\overline{OK}$ следует, что $\overline{OK}=\lambda\overline{OD}$, где $\lambda=\left|\overline{OK}\right|:\left|\overline{OD}\right|$. Кроме того, поскольку точка K принадлежит плоскости ABC, то, согласно (1.4), существуют такие числа t и s, что $\overline{OK}=t\,\overline{OA}+s\,\overline{OB}+(1-t-s)\,\overline{OC}$. Таким образом, имеем векторное равенство

$$t\,\overline{OA}+s\,\overline{OB}+(1-t-s)\,\overline{OC}=\lambda\,\overline{OD}.$$

Запишем его в координатной форме, заменяя векторы координатными столбцами

$$t\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}+(1-t-s)\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}7\\7\\6\end{pmatrix}.$$

Приравнивая координаты, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} t+3s+5(1-t-s)=7\lambda, \\ 3t+4s+2(1-t-s)=7\lambda, \\ 2t+s+3(1-t-s)=6\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t+2s+7\lambda=5, \\ -t-2s+7\lambda=2, \\ t+2s+6\lambda=3. \end{cases}$$

Складываем последние два уравнения: $13\lambda=5$. Отсюда $\lambda=\frac{5}{13}$. Значит, $OK:OD=5:13$. Тогда искомое отношение $OK:KD=5:8$.

Ответ: а) $\overline{AB}=(2 \quad 1 \quad -1)$; б) $L(4,5,4)$; в) $M(3,3,2)$; г) $N(4,4,3)$; д) $5:8$.

2. ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Если хотя бы один из двух векторов нулевой, то угол между ними не определен, а скалярное произведение считается равным нулю. Скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ обозначается

$$(\overline{a},\overline{b})=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\cos\varphi, \tag{2.1}$$

где φ – величина угла между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Скалярное произведение $(\overline{a},\overline{a})=\left|\overline{a}\right|^2$ называется ***скалярным квадратом***.

Алгебраические свойства скалярного произведения

Для любых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и любого действительного числа λ:

1. $(\overline{a},\overline{b})=(\overline{b},\overline{a})$; (коммутативность)

2. $(\overline{a}+\overline{b},\overline{c})=(\overline{a},\overline{c})+(\overline{b},\overline{c})$; (аддитивность по первому множителю)

3. $(\lambda\overline{a},\overline{b})=\lambda(\overline{a},\overline{b})$; (однородность по первому множителю)

4. $(\overline{a},\overline{a})\geq 0$, *причем из равенства* $(\overline{a},\overline{a})=0$ *следует, что* $\overline{a}=\overline{o}$. (неотрицательность)

Формула вычисления скалярного произведения. *В ортонормированном базисе скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноименных координат векторов*:

если векторы $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ *относительно ортонормированного базиса на плоскости имеют координаты* $\overline{a}=(x_a \quad y_a)$ *и* $\overline{b}=(x_b \quad y_b)$, *то скалярное произведение этих векторов вычисляется по формуле*:

$$(\overline{a},\overline{b})=x_a x_b+y_a y_b; \tag{2.2}$$

если векторы $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ *относительно ортонормированного базиса в пространстве имеют координаты* $\overline{a}=(x_a \quad y_a \quad z_a)$ *и* $\overline{b}=(x_b \quad y_b \quad z_b)$, *то скалярное произведение этих векторов вычисляется по формуле*:

$$(\overline{a},\overline{b})=x_a x_b+y_a y_b+z_a z_b. \tag{2.3}$$

Координаты вектора $\overline{a}=x_a\overline{i}+y_a\overline{j}+z_a\overline{k}$ *в ортонормированном базисе равны его скалярным произведениям на соответствующие базисные векторы*:

$$x_a=(\overline{a},\overline{i}),\quad y_a=(\overline{a},\overline{j}),\quad z_a=(\overline{a},\overline{k}). \tag{2.4}$$

Векторное произведение векторов

Вектор $\overline{c}$ называется ***векторным произведением неколлинеарных векторов*** $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если:

1) его длина равна произведению длин векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ на синус угла между ними: $|\overline{c}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin\varphi$ (рис. 2.1);

2) вектор $\overline{c}$ ортогонален векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

3) векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ (в указанном порядке) образуют правую тройку.

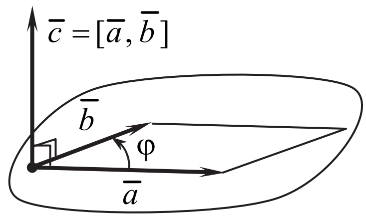


Рис. 2.1

Векторное произведение коллинеарных векторов (в частности, если хотя бы один из множителей – нулевой вектор) считается равным нулевому вектору. Векторное произведение обозначается $\overline{c} = [\overline{a}, \overline{b}]$ (или $\overline{a} \times \overline{b}$).

Алгебраические свойства векторного произведения

Для любых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и любого действительного числа λ:

1. $[\overline{a}, \overline{b}] = -[\overline{b}, \overline{a}]$; (антикоммутативность)

2. $[\overline{a} + \overline{b}, \overline{c}] = [\overline{a}, \overline{c}] + [\overline{b}, \overline{c}]$; (аддитивность по первому множителю)

3. $[\lambda\overline{a}, \overline{b}] = \lambda[\overline{a}, \overline{b}]$. (однородность по первому множителю)

Векторные произведения векторов $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ правого ортонормированного (стандартного) базиса находятся по определению:

$$[\overline{i}, \overline{j}] = \overline{k}; \quad [\overline{j}, \overline{k}] = \overline{i}; \quad [\overline{k}, \overline{i}] = \overline{j}; \quad [\overline{j}, \overline{i}] = -\overline{k}; \quad [\overline{k}, \overline{j}] = -\overline{i}; \quad [\overline{i}, \overline{k}] = -\overline{j};$$

$$[\overline{i}, \overline{i}] = [\overline{j}, \overline{j}] = [\overline{k}, \overline{k}] = \overline{o}.$$

Формула вычисления векторного произведения. *Если векторы* $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ *в правом ортонормированном базисе* $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ *имеют координаты* $\overline{a} = (x_a \quad y_a \quad z_a)$ *и* $\overline{b} = (x_b \quad y_b \quad z_b)$, *то векторное произведение этих векторов находится по формуле*:

$$[\overline{a}, \overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = \overline{i}\begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix}. \tag{2.5}$$

Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ называется число $(\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}])$, равное скалярному произведению вектора $\overline{a}$ на векторное произведение векторов $\overline{b}$ и $\overline{c}$. Смешанное произведение обозначается $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$.

Алгебраические свойства смешанного произведения

1. *При перестановке двух множителей смешанное произведение изменяет знак на противоположный*:

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = -(\overline{b}, \overline{a}, \overline{c}), \quad (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = -(\overline{c}, \overline{b}, \overline{a}), \quad (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = -(\overline{a}, \overline{c}, \overline{b});$$

при циклической (круговой) перестановке множителей смешанное произведение не изменяется:

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = (\overline{b}, \overline{c}, \overline{a}) = (\overline{c}, \overline{a}, \overline{b}).$$

2. *Смешанное произведение линейно по любому множителю.*

Например, линейность по первому множителю выражается тождеством:

$$(\lambda\overline{a} + \mu\overline{b}, \overline{c}, \overline{d}) = \lambda(\overline{a}, \overline{c}, \overline{d}) + \mu(\overline{b}, \overline{c}, \overline{d}).$$

Формула вычисления смешанного произведения. *Если векторы* $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ *в правом ортонормированном базисе* $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ *имеют координаты* $\overline{a} = (x_a \quad y_a \quad z_a)$, $\overline{b} = (x_b \quad y_b \quad z_b)$ *и* $\overline{c} = (x_c \quad y_c \quad z_c)$, *то смешанное произведение этих векторов находится по формуле*:

$$(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}) = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}. \tag{2.6}$$

Геометрические приложения произведений векторов

Координаты векторов $\overline{a} = (x_a \quad y_a \quad z_a)$, $\overline{b} = (x_b \quad y_b \quad z_b)$ и $\overline{c} = (x_c \quad y_c \quad z_c)$, указанные в формулах, найдены относительно стандартного базиса $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ в пространстве, т.е.

$$\overline{a} = x_a\overline{i} + y_a\overline{j} + z_a\overline{k}, \quad \overline{b} = x_b\overline{i} + y_b\overline{j} + z_b\overline{k}, \quad \overline{c} = x_c\overline{i} + y_c\overline{j} + z_c\overline{k}.$$

1. *Вектор* $\overline{a} = \overline{o}$ *тогда и только тогда, когда*

$$(\overline{a}, \overline{a}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_a^2 + y_a^2 + z_a^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_a = y_a = z_a = 0.$$

2. *Векторы* $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ *ортогональны тогда и только тогда, когда*

$$(\overline{a}, \overline{b}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = 0.$$

3. *Векторы* $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда*

$$[\overline{a},\overline{b}]=\overline{o} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}=\overline{o} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x_a}{x_b}=\frac{y_a}{y_b}=\frac{z_a}{z_b}.$$

4. *Векторы* $\overline{a}$ *,* $\overline{b}$ *,* $\overline{c}$ *компланарны тогда и только тогда, когда*

$$(\overline{a},\overline{b},\overline{c})=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}=0.$$

5. *Длина вектора* $\overline{a}$ *вычисляется по формуле*:

$$\left|\overline{a}\right|=\sqrt{(\overline{a},\overline{a})}=\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}. \tag{2.7}$$

6. *Угол* φ *между ненулевыми векторами* $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$ *вычисляется по формуле*:

$$\cos\varphi=\frac{(\overline{a},\overline{b})}{\sqrt{(\overline{a},\overline{a})}\ \sqrt{(\overline{b},\overline{b})}}=\frac{x_a x_b+y_a y_b+z_a z_b}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}\ \sqrt{x_b^2+y_b^2+z_b^2}}. \tag{2.8}$$

7. *Алгебраическое значение длины ортогональной проекции вектора* $\overline{a}$ *на ось, задаваемую вектором* $\overline{b}\neq\overline{o}$ (рис. 2.2), *находится по формуле*:

$$np_{\overline{b}}\,\overline{a}=\frac{(\overline{a},\overline{b})}{\left|\overline{b}\right|}=\frac{x_a x_b+y_a y_b+z_a z_b}{\sqrt{x_b^2+y_b^2+z_b^2}}. \tag{2.9}$$

8. *Ортогональная проекция вектора* $\overline{a}$ *на ось, задаваемую вектором* $\overline{b}\neq\overline{o}$ (рис.2.2):

$$\overline{np_{\overline{b}}\overline{a}}=\frac{(\overline{a},\overline{b})}{(\overline{b},\overline{b})}\cdot\overline{b}=\frac{x_a x_b+y_a y_b+z_a z_b}{x_b^2+y_b^2+z_b^2}\cdot(x_b\,\overline{i}+y_b\,\overline{j}+z_b\,\overline{k}). \tag{2.10}$$

9. *Направляющие косинусы вектора* $\overline{a}$ (рис. 2.3) *находятся по формулам*:

$$\cos\alpha=\frac{(\overline{a},\overline{i})}{\left|\overline{a}\right|}=\frac{x_a}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}};\ \cos\beta=\frac{(\overline{a},\overline{j})}{\left|\overline{a}\right|}=\frac{y_a}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}};\ \cos\gamma=\frac{(\overline{a},\overline{k})}{\left|\overline{a}\right|}=\frac{z_a}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}}.$$

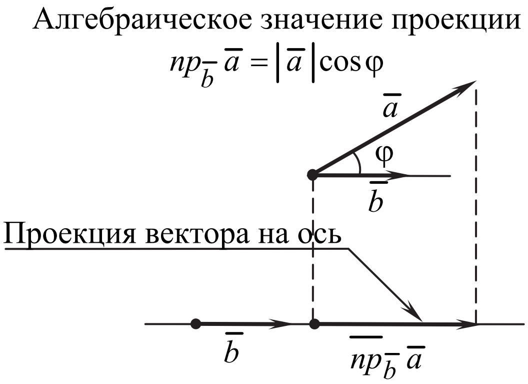


Рис. 2.2

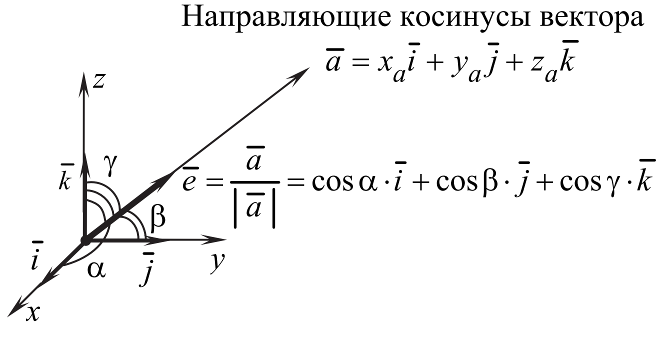


Рис. 2.3

10. *Единичный вектор* $\overline{e}$, *одинаково направленный с вектором* $\overline{a}$ (рис.2.3), *находится по формуле*:

$$\overline{e} = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|} = \cos\alpha \cdot \overline{i} + \cos\beta \cdot \overline{j} + \cos\gamma \cdot \overline{k} . \tag{2.11}$$

11. *Площадь* $S_{\#\overline{a},\overline{b}}$ *параллелограмма, построенного на векторах* $\overline{a}$ *и* $\overline{b}$, *вычисляется по формуле*:

$$S_{\#\overline{a},\overline{b}} = \left|[\overline{a}, \overline{b}]\right| . \tag{2.12}$$

Площадь S_{ABC} *треугольника* ABC *равна половине площади* $S_{\#\overline{AB},\,\overline{AC}}$ *параллелограмма, построенного на векторах* $\overline{AB}$ *и* $\overline{AC}$, *и вычисляется по формуле*:

$$S_{ABC} = \tfrac{1}{2} S_{\#\overline{AB},\,\overline{AC}} . \tag{2.13}$$

12. *Объем* $V_{\#\overline{a},\overline{b},\overline{c}}$ *параллелепипеда, построенного на векторах* $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, *вычисляется по формуле*:

$$V_{\#\overline{a},\overline{b},\overline{c}} = \left|(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})\right| . \tag{2.14}$$

Объем V_{ABCD} *треугольной пирамиды* $ABCD$ *равен одной шестой объема* $V_{\#\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}}$ *параллелепипеда, построенного на векторах* $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, *и вычисляется по формуле*:

$$V_{ABCD} = \tfrac{1}{6} V_{\#\overline{AB},\,\overline{AC},\,\overline{AD}} . \tag{2.15}$$

13. *Тройка некомпланарных векторов* $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ – *правая* (*левая*) *тогда и только тогда, когда* $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) > 0$ (соответственно, $(\overline{a},\overline{b},\overline{c}) < 0$).

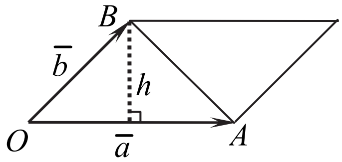


Рис. 2.4

14. *Высота* h *параллелограмма, построенного на векторах* $\overline{a}$, $\overline{b}$, *или треугольника* OAB (рис. 2.4) *вычисляется по формуле*:

$$h = \frac{S_{\#\overline{a},\overline{b}}}{|\overline{a}|} = \frac{\left|[\overline{a},\overline{b}]\right|}{\sqrt{(\overline{a},\overline{a})}} .$$

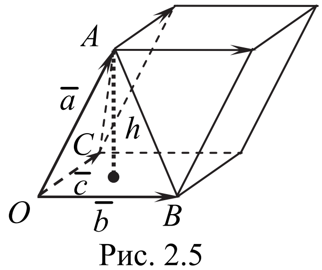


Рис. 2.5

15. Высота h параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, или треугольной пирамиды $OABC$ (рис. 2.5) находится по формуле:

$$h = \frac{V_{\#\overline{a},\overline{b},\overline{c}}}{S_{\#\overline{b},\overline{c}}} = \frac{\left|(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})\right|}{\left|[\overline{b}, \overline{c}]\right|} . \tag{2.16}$$

16. *Угол* ψ *между вектором* $\overline{a}$ *и плоскостью, содержащей векторы* $\overline{b}$ *и* $\overline{c}$*, дополняет до прямого угла угол* φ *между вектором* $\overline{a}$ *и вектором* $\overline{n}=[\overline{b},\overline{c}]$*, перпендикулярным плоскости* (рис. 2.6), *и вычисляется по формуле*:

$$\sin\psi=\left|\cos\varphi\right|=\frac{\left|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\right|}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|[\overline{b},\overline{c}]\right|}.$$

17. *Угол* δ *между плоскостями, содержащими векторы* $\overline{a}$, $\overline{b}$ *и* $\overline{c}$, $\overline{d}$ *соответственно, вычисляется как угол между векторами* $\overline{m}=[\overline{a},\overline{b}]$, $\overline{n}=[\overline{c},\overline{d}]$*, перпендикулярными данным плоскостям, по формуле* (рис. 2.7):

$$\cos\delta=\frac{\left|\left([\overline{a},\overline{b}],\,[\overline{c},\overline{d}]\right)\right|}{\left|[\overline{a},\overline{b}]\right|\cdot\left|[\overline{c},\overline{d}]\right|}.$$

Заметим, что свойства 1–3,5–11,14 применяются также для векторов на плоскости, полагая, что их аппликаты равны нулю.

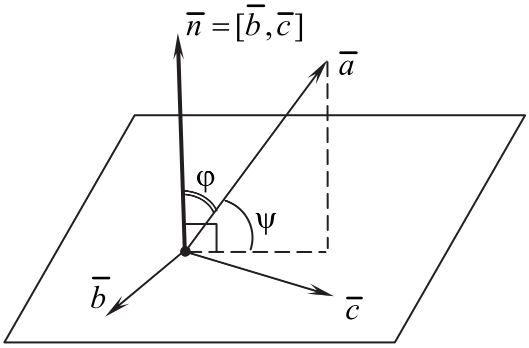


Рис. 2.6

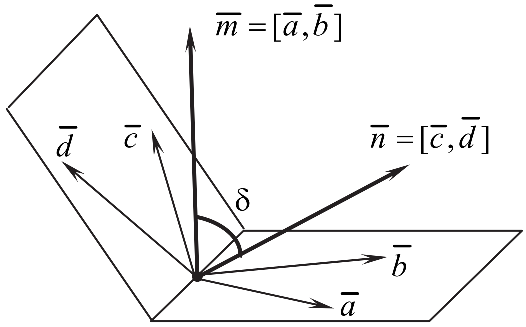


Рис. 2.7

Пример 3. Угол φ между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен 120^o, вектор $\overline{c}$ образует с плоскостью, параллельной векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, угол $\psi=60^o$, причем $\left|\overline{a}\right|=1$, $\left|\overline{b}\right|=2$, $\left|\overline{c}\right|=3$ (рис. 2.8). Векторы $\overline{d}$ и $\overline{e}$ линейно выражаются через $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $\overline{d}=-2\overline{a}-3\overline{b}$, $\overline{e}=-2\overline{a}+3\overline{b}$. Вычислить:

а) $(\overline{a},\overline{b})$, $(\overline{a}+\overline{b},\overline{a}-\overline{b})$, $(\overline{d},\overline{e})$;

б) $\left|[\overline{a},\overline{b}]\right|$, $\left|[\overline{a}+\overline{b},\overline{a}-\overline{b}]\right|$, $\left|[\overline{d},\overline{e}]\right|$;

в) $\left|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\right|$, $\left|(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c},\overline{d}-2\overline{c},\overline{e}+\overline{c})\right|$.

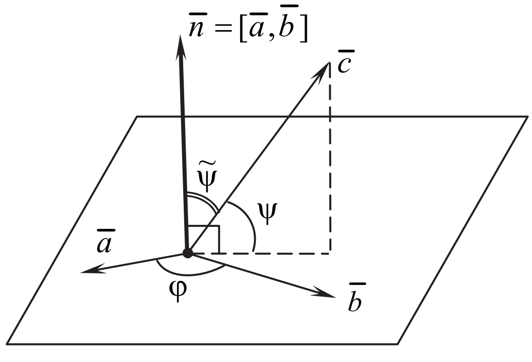


Рис. 2.8

Решение. а) Используя определение и алгебраические свойства скалярного произведения, вычисляем

$(\overline{a},\overline{b})=\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos\varphi=1\cdot2\cdot\cos120^o=-1$;

$$(\overline{a}+\overline{b},\overline{a}-\overline{b})=(\overline{a},\overline{a})+(\overline{a},-\overline{b})+(\overline{b},\overline{a})+(\overline{b},-\overline{b})=(\overline{a},\overline{a})-(\overline{b},\overline{b})=\left|\overline{a}\right|^2-\left|\overline{b}\right|^2=1-4=-3;$$

$$(\overline{d},\overline{e})=(-2\overline{a}-3\overline{b},-2\overline{a}+3\overline{b})=\left|-2\overline{a}\right|^2-\left|3\overline{b}\right|^2=4\left|\overline{a}\right|^2-9\left|\overline{b}\right|^2=4\cdot1-9\cdot4=-32.$$

б) Используя определение и алгебраические свойства векторного произведения, находим

$$\left|[\overline{a},\overline{b}]\right|=\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\sin\varphi=1\cdot2\cdot\sin120^o=\sqrt{3};$$

$$\left|[\overline{a}+\overline{b},\overline{a}-\overline{b}]\right|=\left|[\overline{a},\overline{a}]-[\overline{a},\overline{b}]+[\overline{b},\overline{a}]-[\overline{b},\overline{b}]\right|=\left|-2[\overline{a},\overline{b}]\right|=2\left|[\overline{a},\overline{b}]\right|=2\sqrt{3};$$

$$\left|[\overline{d},\overline{e}]\right|=\left|[-2\overline{a}-3\overline{b},-2\overline{a}+3\overline{b}]\right|=\left|-6[\overline{a},\overline{b}]+6[\overline{b},\overline{a}]\right|=\left|-12[\overline{a},\overline{b}]\right|=12\sqrt{3}.$$

в) Используя определение и алгебраические свойства смешанного произведения, получаем

$$\left|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\right|=\left|([\overline{a},\overline{b}],\overline{c})\right|=\left|[\overline{a},\overline{b}]\right|\left|\overline{c}\right|\cos\widetilde{\psi}=\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\sin\varphi\left|\overline{c}\right|\sin\psi=$$

$$=1\cdot2\cdot\sin120^o\cdot3\cdot\sin60^o=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3\cdot3}{2}=4{,}5;$$

$$\left|(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c},\overline{d}-2\overline{c},\overline{e}+\overline{c})\right|=\left|(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c},-2\overline{a}-3\overline{b}-2\overline{c},-2\overline{a}+3\overline{b}+\overline{c})\right|=$$

$$=\left|-3(\overline{a},\overline{b},\overline{c})-6(\overline{a},\overline{c},\overline{b})-2(\overline{b},\overline{a},\overline{c})+4(\overline{b},\overline{c},\overline{a})-6(\overline{c},\overline{a},\overline{b})+6(\overline{c},\overline{b},\overline{a})\right|=$$

$$=\left|-3(\overline{a},\overline{b},\overline{c})+6(\overline{a},\overline{b},\overline{c})+2(\overline{a},\overline{b},\overline{c})+4(\overline{a},\overline{b},\overline{c})-6(\overline{a},\overline{b},\overline{c})-6(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\right|=3\left|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\right|=13{,}5.$$

Ответ: а) –1, –3, – 32; б) $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, $12\sqrt{3}$; в) $4{,}5$; $13{,}5$.

Пример 4. В ортонормированном базисе $\overline{i}$, $\overline{j}$ даны разложения векторов $\overline{a}=-3\overline{i}-4\overline{j}$ и $\overline{b}=\overline{i}+2\overline{j}$. Найти:

а) разложение вектора $\overline{i}$ по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

б) длину вектора $\overline{a}$;

в) единичный вектор $\overline{e}$, имеющий направление вектора $\overline{a}$;

г) направляющие косинусы вектора $\overline{a}$;

д) величину φ угла между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

е) алгебраическое значение $np_{\overline{b}}\overline{a}$ ортогональной проекции вектора $\overline{a}$ на направление вектора $\overline{b}$;

ж) ортогональную проекцию $\overline{np_{\overline{b}}\overline{a}}$ вектора $\overline{a}$ на направление вектора $\overline{b}$;

з) вектор $\overline{c}$, имеющий длину вектора $\overline{b}$ и направление вектора $\overline{a}$.

Решение. а) Запишем данные разложения в виде системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} -3\bar{i} - 4\bar{j} = \bar{a}, \\ \bar{i} + 2\bar{j} = \bar{b}. \end{cases}$$

Исключаем вектор $\bar{j}$, прибавляя к первому уравнению второе, умноженное на 2: $-\bar{i} = \bar{a} + 2\bar{b}$. Отсюда $\bar{i} = -\bar{a} - 2\bar{b}$.

б) По формуле (2.7) находим длину вектора $\bar{a}$: $|\bar{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$.

в) Разделив вектор $\bar{a}$ на его длину $|\bar{a}| = 5$, по формуле (2.11) получаем искомый единичный вектор $\bar{e} = -\frac{3}{5}\bar{i} - \frac{4}{5}\bar{j} = -0{,}6\bar{i} - 0{,}8\bar{j}$.

г) Сравнивая вектор $\bar{e}$ с разложением (2.11), определяем направляющие косинусы вектора $\bar{a}$: $\cos\alpha = -0{,}6$ и $\cos\beta = -0{,}8$.

д) Учитывая, что $(\bar{a}, \bar{b}) = -3 \cdot 1 + (-4) \cdot 2 = -11$ и $|\bar{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, находим по формуле (2.8) $\cos\varphi = \dfrac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \dfrac{-11}{5\sqrt{5}} = -0{,}44\sqrt{5}$, а затем и угол $\varphi = \arccos(-0{,}44\sqrt{5})$.

е) Вычисляем алгебраическое значение ортогональной проекции вектора $\bar{a}$ на направление вектора $\bar{b}$ по формуле (2.9): $np_{\bar{b}}\,\bar{a} = \dfrac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{b}|} = \dfrac{-11}{\sqrt{5}} = -2{,}2\sqrt{5}$.

ж) Находим по формуле (2.10) ортогональную проекцию вектора $\bar{a}$ на направление вектора $\bar{b}$: $\overline{np_{\bar{b}}\bar{a}} = \dfrac{(\bar{a}, \bar{b})}{(\bar{b}, \bar{b})} \cdot \bar{b} = \dfrac{-11}{5}(\bar{i} + 2\bar{j}) = -2{,}2\bar{i} - 4{,}4\bar{j}$.

з) Вектор $\bar{c}$, имеющий длину вектора $\bar{b}$ и направление вектора $\bar{a}$, определяется равенством: $\bar{c} = \dfrac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}\bar{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(-3\bar{i} - 4\bar{j}) = -0{,}6\sqrt{5}\,\bar{i} - 0{,}8\sqrt{5}\,\bar{j}$.

Ответ: а) $\bar{i} = -\bar{a} - 2\bar{b}$; б) 5; в) $\bar{e} = -0{,}6\bar{i} - 0{,}8\bar{j}$; г) $\cos\alpha = -0{,}6$, $\cos\beta = -0{,}8$; д) $\arccos(-0{,}44\sqrt{5})$; е) $np_{\bar{b}}\,\bar{a} = -2{,}2\sqrt{5}$; ж) $\overline{np_{\bar{b}}\bar{a}} = -2{,}2\bar{i} - 4{,}4\bar{j}$; з) $\bar{c} = -0{,}6\sqrt{5}\,\bar{i} - 0{,}8\sqrt{5}\,\bar{j}$.

Пример 5. На векторах $\overline{OA} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + 6\bar{k}$, $\overline{OB} = -4\bar{i} - 4\bar{j} + 7\bar{k}$, $\overline{OC} = -2\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$ построена треугольная пирамида $OABC$ (рис. 2.9). Найти:

а) длину ребра OA;

б) величину φ угла AOC;

в) площадь S треугольника OAC;

г) объем V пирамиды $OABC$;

д) высоту h пирамиды, опущенную из вершины B.

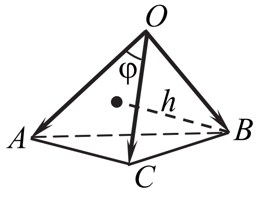


Рис. 2.9

Решение. а) Длину ребра OA находим как длину вектора $\overline{OA}$ по формуле (2.7): $\left|\overline{OA}\right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = 7$.

б) Учитывая, что $(\overline{OA}, \overline{OC}) = 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 = 5$, $\left|\overline{OC}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 3$, определяем $\cos\varphi = \dfrac{(\overline{OA}, \overline{OC})}{\left|\overline{OA}\right|\left|\overline{OC}\right|} = \dfrac{5}{7 \cdot 3} = \dfrac{5}{21}$. Отсюда $\varphi = \arccos\dfrac{5}{21}$.

в) Чтобы найти площадь треугольника OAC, сначала вычисляем векторное произведение

$$[\overline{OA}, \overline{OC}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -3 & 6 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -12\bar{i} - 16\bar{j} - 4\bar{k}.$$

Тогда $\left|[\overline{OA}, \overline{OC}]\right| = \sqrt{(-12)^2 + (-16)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{26}$. Учитывая формулы (2.12), (2.13), получаем $S = \frac{1}{2}\left|[\overline{OA}, \overline{OC}]\right| = 2\sqrt{26}$.

г) Чтобы найти объем V пирамиды $OABC$, сначала вычисляем смешанное произведение векторов по формуле (2.6)

$$(\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}) = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 \\ -4 & -4 & 7 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 0 & -10 & 19 \\ 0 & -2 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & -21 \end{vmatrix} = -84,$$

а затем, учитывая формулы (2.14), (2.15), получаем:

$$V = \frac{1}{6}\left|(\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC})\right| = \frac{|-84|}{6} = 14.$$

д) Высоту пирамиды находим через ее объем $V = \frac{1}{3}Sh$ и площадь S основания: $h = \dfrac{3V}{S} = \dfrac{3 \cdot 14}{2\sqrt{26}} = \dfrac{21}{\sqrt{26}}$. Тот же результат можно получить через объем параллелепипеда, используя формулу (2.16):

$$h = \frac{\left|(\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC})\right|}{\left|[\overline{OA}, \overline{OC}]\right|} = \frac{|-84|}{4\sqrt{26}} = \frac{21}{\sqrt{26}}.$$

Ответ: а) 7; б) $\varphi = \arccos\dfrac{5}{21}$; в) $S = 2\sqrt{26}$; г) $V = 14$; д) $h = \dfrac{21}{\sqrt{26}}$.

3. ПРЯМЫЕ НА ПЛОСКОСТИ

Разнообразие видов уравнений прямых на плоскости порождается многообразием геометрических способов задания прямых. По любому набору геометрических данных, однозначно определяющих прямую на плоскости, можно составить уравнение этой прямой, причем геометрические данные будут отражены в коэффициентах уравнения. И наоборот, коэффициенты любого уравнения прямой имеют геометрический смысл, соответствующий способу задания прямой на плоскости.

Ненулевой вектор $\overline{n}$, перпендикулярный заданной прямой, называется ***нормальным вектором*** (или, короче, ***нормалью***) для этой прямой (рис. 3.1,3.2). ***Направляющим вектором*** прямой называется ненулевой вектор, ***коллинеарный этой прямой***, т.е. принадлежащий или параллельный ей (рис. 3.3). Эти векторы характеризуют направление прямой и используются в уравнениях. Прямую, разумеется, можно задать, указав две точки, через которые она проходит (рис. 3.4). В частности, это могут быть точки на координатных осях (рис. 3.5). В этом случае говорят, что прямая отсекает "***отрезки***" x_1 и y_1 на координатных осях. Направление прямой можно также определить, задав угол α, который она образует с положительным направлением оси абсцисс (рис. 3.6), при этом используется ***угловой коэффициент***, равный тангенсу этого угла.

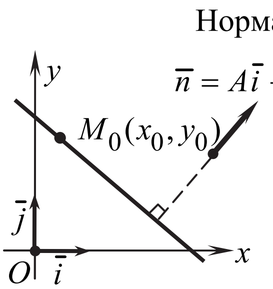


Рис. 3.1

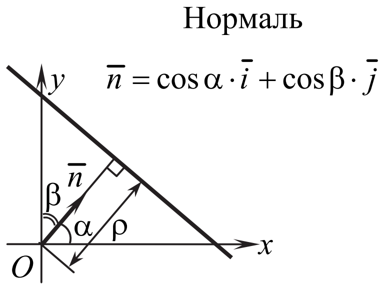


Рис. 3.2

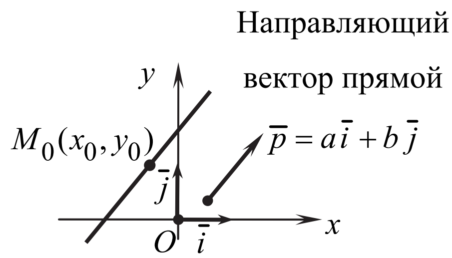


Рис. 3.3

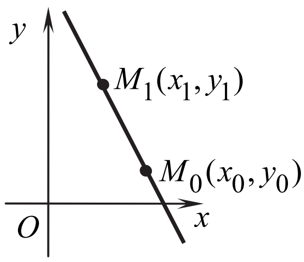


Рис. 3.4

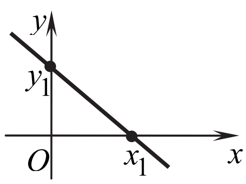


Рис. 3.5

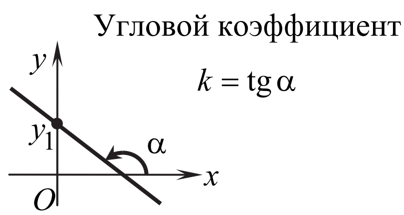


Рис. 3.6

Для удобства решения практических задач, связанных с прямыми на плоскости, в табл. 3.1 приведены основные типы уравнений прямых и соответствующие геометрические способы задания этих прямых.

Таблица 3.1. **Основные типы уравнений прямых на плоскости**

Название	Уравнение	Способ задания прямой
Общее уравнение прямой	$Ax+By+C=0$, $A^2+B^2 \neq 0$	Прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n} = A\overline{i} + B\,\overline{j}$ (рис. 3.1)
Нормированное уравнение прямой	$x\cos\alpha + y\cos\beta - \rho = 0$, $\rho \geq 0$	Прямая проходит перпендикулярно вектору $\overline{n} = \cos\alpha \cdot \overline{i} + \cos\beta \cdot \overline{j}$ на расстоянии ρ от начала координат (рис. 3.2)
Параметрическое уравнение прямой	$\begin{cases} x = x_0 + a\,t, \\ y = y_0 + b\,t, \end{cases} t \in \mathbb{R}$; $a^2+b^2 \neq 0$	Прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ коллинеарно вектору $\overline{p} = a\,\overline{i} + b\,\overline{j}$ (рис. 3.3)
Каноническое уравнение прямой	$\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b}$	
Уравнение прямой, проходящей через две точки	$\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0} = \dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}$	Прямая проходит через точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$ (рис. 3.4)
Уравнение прямой "в отрезках"	$\dfrac{x}{x_1} + \dfrac{y}{y_1} = 1$, $x_1 \neq 0$, $y_1 \neq 0$	Прямая отсекает на координатных осях "отрезки" x_1 и y_1 (рис. 3.5)
Уравнение с угловым коэффициентом	$y = k\,x + y_1$	Прямая проходит через точку $(0, y_1)$ на оси ординат с угловым коэффициентом k (рис. 3.6)

Метрические приложения уравнений прямых на плоскости

Перечислим формулы для вычисления длин отрезков (расстояний) и величин углов по уравнениям образующих их прямых.

Углом между двумя прямыми на плоскости называется угол между их направляющими векторами. По этому определению получаются не один угол, а два смежных угла, дополняющих друг друга до π. В элементарной геометрии из двух смежных углов, как правило, выбирается меньший, т.е. величина φ угла между двумя прямыми удовлетворяет условию $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

1. *Расстояние d от точки $M(x_M, y_M)$ до прямой $A\,x + B\,y + C = 0$* (рис. 3.7) *вычисляется по формуле*:

$$d = \frac{\left| A\,x_M + B\,y_M + C \right|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{3.1}$$

2. *Расстояние между параллельными прямыми* $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ *и* $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ (рис. 3.8) *находится как расстояние* d_1 *от точки* $M_2(x_2, y_2)$, *координаты которой удовлетворяют уравнению* $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, *до прямой* $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ *по формуле*:

$$d_1 = \frac{\left|A_1x_2 + B_1y_2 + C_1\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}.$$

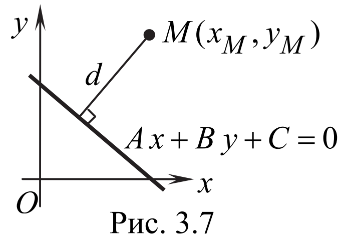


Рис. 3.7

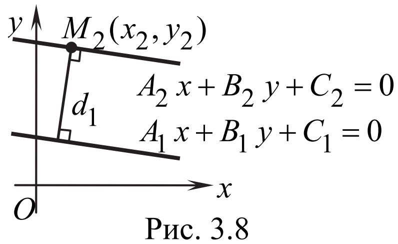


Рис. 3.8

3. *Острый угол* φ *между двумя прямыми* l_1 *и* l_2 *находится по формулам*:

$$\cos\varphi = \frac{\left|a_1a_2 + b_1b_2\right|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}, \tag{3.2}$$

если $\overline{p}_1 = a_1\overline{i} + b_1\overline{j}$ *и* $\overline{p}_2 = a_2\overline{i} + b_2\overline{j}$ – *направляющие векторы прямых* l_1 *и* l_2 *соответственно* (*в случае задания прямых каноническими или параметрическими уравнениями* (рис. 3.9));

$$\cos\varphi = \frac{\left|A_1A_2 + B_1B_2\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}, \tag{3.3}$$

если $\overline{n}_1 = A_1\overline{i} + B_1\overline{j}$ *и* $\overline{n}_2 = A_2\overline{i} + B_2\overline{j}$ – *нормали к прямым* l_1 *и* l_2 *соответственно* (*в случае задания прямых общими уравнениями* (рис. 3.9));

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right|,$$

если $k_1k_2 \neq -1$, $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$ *и* $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$ – *угловые коэффициенты прямых* l_1 *и* l_2 *соответственно* (*в случае задания прямых уравнениями с угловыми коэффициентами* (рис. 3.10)). *Если* $k_1k_2 = -1$, *то* $\varphi = \frac{\pi}{2}$, *поскольку прямые перпендикулярны.*

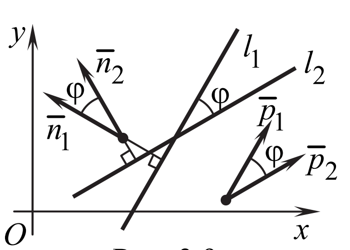


Рис. 3.9

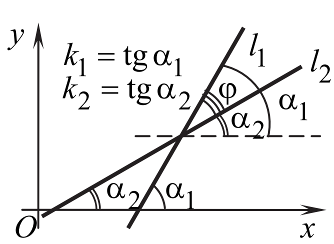


Рис. 3.10

Пример 6. В прямоугольной системе координат Oxy заданы координаты точек $A(1,2)$ и $B(4,6)$ (рис. 3.11). Составить следующие уравнения прямой AB:

а) каноническое;

б) параметрическое;

в) общее;

г) нормированное;

д) в отрезках;

е) разрешенное относительно y (т.е. с угловым коэффициентом).

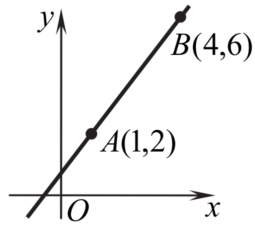


Рис. 3.11

Вычислить:

ж) расстояние ρ от прямой AB до начала координат O;

з) площадь S треугольника, образованного этой прямой с координатными осями;

и) величину α угла между этой прямой и положительным направлением оси абсцисс.

Решение. а) Составляем уравнение прямой, проходящей через две данные точки $\frac{x-1}{4-1}=\frac{y-2}{6-2}$. Вычисляя знаменатели, приходим к каноническому уравнению $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4}$.

б) Приравниваем каждую дробь канонического уравнения параметру t и выражаем неизвестные x и y:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{4}=t \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=1+3t, \\ y=2+4t, \end{cases}$$

где $t \in \mathbb{R}$. Получили параметрическое уравнение прямой.

в) Перенесем все члены канонического уравнения в левую часть и умножим на общий знаменатель. Приводя свободные члены, получаем общее уравнение: $4x-3y+2=0$.

г) Разделим общее уравнение на длину нормали $\overline{n}=4\overline{i}-3\overline{j}$. Получим $0{,}8x-0{,}6y+0{,}4=0$, так как $|\overline{n}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$. Осталось сделать свободный член уравнения неположительным. Поэтому умножаем обе части уравнения на (-1): $-0{,}8x+0{,}6y-0{,}4=0$. Это нормированное уравнение прямой AB.

д) Чтобы получить уравнение прямой в отрезках, нужно свободный член общего уравнения перенести в правую часть и разделить обе части на правую. В полученной левой части умножения неизвестных на коэффициенты заменить делением на обратные величины. Выполняя эти преобразования уравнения $4x-3y+2=0$, последовательно получаем:

$$4x-3y+2=0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x-3y=-2 \quad \Leftrightarrow \quad -2x+1{,}5y=1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{-\frac{1}{2}}+\frac{y}{\frac{2}{3}}=1.$$

е) Выражая неизвестную y из общего уравнения, приходим к уравнению разрешенному относительно y (т.е. уравнению прямой с угловым коэффициентом):

$$4x-3y+2=0 \quad \Leftrightarrow \quad y=\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}.$$

ж) Расстояние ρ от прямой до начала координат O находим по нормированному уравнению: $\rho=0{,}4$.

з) Площадь S треугольника, образованного этой прямой с координатными осями, вычисляем, учитывая геометрический смысл коэффициентов уравнения прямой в отрезках: $S=\frac{1}{2}\left|x_1\right|\left|y_1\right|=\frac{1}{2}\left|-\frac{1}{2}\right|\left|\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{6}$.

и) Величину α угла между этой прямой и положительным направлением оси абсцисс находим по угловому коэффициенту. Так как $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$, то $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

Ответ: а) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{4}$; б) $\begin{cases} x=1+3t, \\ y=2+4t, \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$; в) $4x-3y+2=0$; г) $-0{,}8x+0{,}6y-0{,}4=0$; д) $\dfrac{x}{-\frac{1}{2}}+\dfrac{y}{\frac{2}{3}}=1$; е) $y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}$; ж) $\rho=0{,}4$; з) $S=\frac{1}{6}$; и) $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

Пример 7. В прямоугольной системе координат Oxy заданы координаты вершин $A(1{,}5)$, $B(13{,}0)$, $C(5{,}8)$ треугольника ABC (рис. 3.12). Требуется:

а) составить общее уравнение серединного перпендикуляра к стороне BC;

б) составить каноническое уравнение прямой, содержащей медиану AM;

в) составить общее уравнение прямой, содержащей высоту AH;

г) составить параметрическое уравнение прямой, содержащей биссектрису AL;

д) найти расстояние от вершины A до прямой BC (т.е. высоту AH треугольника);

е) найти величину φ угла между прямыми AC и BC;

ж) найти координаты точки O', симметричной точке O относительно прямой AB.

Решение. а) Найдем сначала координаты точки M – середины стороны BC. По формуле (1.3): $M(\frac{13+5}{2};\frac{0+8}{2})$, т.е. $M(9;4)$. Искомый серединный перпендикуляр MN проходит через точку M перпендикулярно вектору $\overline{BC}=(5-13 \quad 8-0)=(-8 \quad 8)$. Значит, вектор $\overline{BC}$ служит нормалью для этой прямой. Поэтому ее уравнение имеет вид $-8x+8y+c=0$. Свободный член c выбираем так, чтобы прямая MN проходила через точку M: $(-8)\cdot 9+8\cdot 4+c=0$. Отсюда $c=40$. Сократив уравнение $-8x+8y+40=0$ на (-8), получаем $x-y-5=0$ – общее уравнение серединного перпендикуляра к стороне BC.

б) Найдем направляющий вектор $\overline{AM} = (9-1 \quad 4-5) = (8 \quad -1)$. Запишем каноническое уравнение прямой, содержащей медиану AM. Эта прямая проходит через точку A, а вектор $\overline{AM}$ является направляющим для нее. Получаем $\dfrac{x-1}{8} = \dfrac{y-5}{-1}$.

в) Прямая, содержащая высоту AH, проходит через точку A перпендикулярно вектору $\overline{BC} = (-8 \quad 8)$. Следовательно, вектор $\overline{BC}$ – нормаль. Поэтому для этой прямой можно записать общее уравнение. Сначала запишем уравнение $-8(x-1)+8(y-5)=0$, упрощая которое, приходим к общему уравнению $x-y+4=0$.

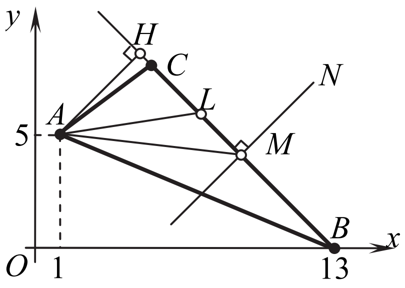


Рис. 3.12

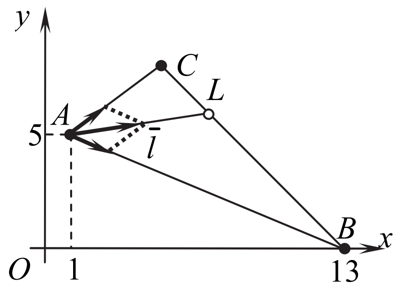


Рис. 3.13

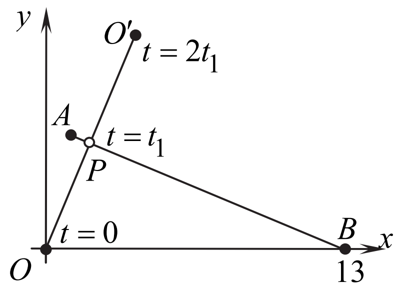


Рис. 3.14

г) Найдем сначала направляющий вектор $\bar{l}$ прямой, содержащей биссектрису AL. Для этого можно отложить от вершины A два единичных вектора $\dfrac{\overline{AB}}{\left|\overline{AB}\right|}$, $\dfrac{\overline{AC}}{\left|\overline{AC}\right|}$ и построить на них ромб (изображенный на рис. 3.13 пунктирными линиями). Диагональ ромба является биссектрисой угла A, поэтому вектор $\bar{l} = \dfrac{\overline{AB}}{\left|\overline{AB}\right|} + \dfrac{\overline{AC}}{\left|\overline{AC}\right|}$ будет направляющим для биссектрисы AL. Находим координаты и длины векторов $\overline{AB} = (13-1 \quad 0-5) = (12 \quad -5)$, $\left|\overline{AB}\right| = 13$ и $\overline{AC} = (5-1 \quad 8-5) = (4 \quad 3)$, $\left|\overline{AC}\right| = 5$. Следовательно, $\bar{l} = \dfrac{\overline{AB}}{\left|\overline{AB}\right|} + \dfrac{\overline{AC}}{\left|\overline{AC}\right|} = \begin{pmatrix} \frac{12}{13} \\ \frac{-5}{13} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{112}{65} \\ \frac{14}{65} \end{pmatrix}$.

Записываем параметрическое уравнение прямой AL

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{112}{65}t, \\ y = 5 + \frac{14}{65}t, \end{cases}$$

где $t \in \mathbb{R}$.

д) Составим уравнение прямой BC. Поскольку известен направляющий вектор $\overline{BC} = (-8 \quad 8)$, то сначала запишем каноническое уравнение $\dfrac{x-5}{-8} = \dfrac{y-8}{8}$. Затем, упрощая его, получим общее уравнение прямой BC: $x+y-13=0$. Искомое расстояние находим по формуле (3.1):

$$AH=\frac{|1\cdot 1+1\cdot 5-13|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{7}{\sqrt{2}}=3{,}5\sqrt{2}\,.$$

е) Угол между прямыми AC и BC вычисляем по формуле (3.2). Поскольку известны направляющие векторы $\overline{AC}=(4\quad 3)$ и $\overline{BC}=(-8\quad 8)$ этих прямых, то

$$\cos\varphi=\frac{|4\cdot(-8)+3\cdot 8|}{\sqrt{4^2+3^2}\cdot\sqrt{8^2+8^2}}=\frac{8}{5\cdot 8\sqrt{2}}=\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

Следовательно, $\varphi=\arccos\frac{\sqrt{2}}{10}$. Заметим, что этот угол острый, а угол C треугольника ABC тупой.

ж) Для нахождения координат точки O' составим общее уравнение прямой AB. Поскольку известен направляющий вектор $\overline{AB}=(12\quad -5)$, то сначала составляем каноническое уравнение: $\dfrac{x-1}{12}=\dfrac{y-5}{-5}$. Затем, преобразовывая его, получаем общее уравнение прямой AB: $5x+12y-65=0$. Теперь составим параметрическое уравнение прямой OO', проходящей через начало координат O, перпендикулярно прямой AB. Направляющий вектор $\overline{p}$ этой прямой перпендикулярен вектору $\overline{AB}=(12\quad -5)$. Можно взять, например вектор $\overline{p}=(5\quad 12)$, который удовлетворяет условию ортогональности $(\overline{p},\overline{AB})=0$. Тогда параметрическое уравнение прямой OO' будет следующее

$$\begin{cases} x=5t, \\ y=12t, \end{cases} \tag{3.4}$$

где $t\in\mathbb{R}$. Найдем точку P пересечения прямых OO' и AB (рис. 3.14). Для этого подставим выражения (3.4) в общее уравнение прямой AB:

$$5(5t)+12(12t)-65=0 \quad\Leftrightarrow\quad 169t=65 \quad\Leftrightarrow\quad t_1=\tfrac{5}{13}.$$

Если в точке O соответствует нулевое значение параметра $t=0$, а точке P – значение параметра $t=t_1=\frac{5}{13}$, то точке O' будет соответствовать удвоенное значение $t=2t_1=\frac{10}{13}$. Это следует из равенства $OO'=2\cdot OP$. Подставляя $t=\frac{10}{13}$ в (3.4), находим координаты точки O': $x=5\cdot\frac{10}{13}=\frac{50}{13}$, $y=12\cdot\frac{10}{13}=\frac{120}{13}$, т.е. $O'(\frac{50}{13},\frac{120}{13})$.

Ответ: а) $x-y-5=0$; б) $\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y-5}{-1}$; в) $x-y+4=0$; г) $\begin{cases} x=1+\frac{112}{65}t, \\ y=2+\frac{14}{65}t, \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$; д) $3{,}5\sqrt{2}$; е) $\varphi=\arccos\frac{\sqrt{2}}{10}$; ж) $O'(\frac{50}{13},\frac{120}{13})$.

4. ПЛОСКОСТИ И ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

Уравнения плоскостей

Разнообразие видов уравнений плоскостей порождается многообразием геометрических способов их задания. По любому набору геометрических данных, однозначно определяющих плоскость, можно составить уравнение этой плоскости, причем геометрические данные будут отражены в коэффициентах уравнения. И наоборот, коэффициенты любого уравнения плоскости имеют геометрический смысл, соответствующий способу задания плоскости.

Ненулевой вектор $\overline{n}$, перпендикулярный заданной плоскости, называется ***нормальным вектором*** (или, короче, ***нормалью***) для этой плоскости (рис. 4.1,4.2). ***Направляющими векторами*** плоскости называются два неколлинеарных вектора, ***компланарных этой плоскости***, т.е. принадлежащих плоскости или параллельных ей (рис. 4.3). Эти векторы характеризуют направление прямой и используются в уравнениях. Плоскость, разумеется, можно задать, указав три ее точки, не лежащие на одной прямой (рис. 4.4). В частности, это могут быть точки на координатных осях (рис. 4.5). В этом случае говорят, что плоскость отсекает «***отрезки***» x_1, y_1, z_1 на координатных осях.

Нормаль

$\overline{n} = A\overline{i} + B\overline{j} + C\overline{k}$

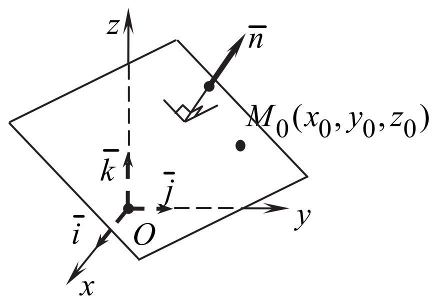


Рис. 4.1

Нормаль

$\overline{n} = \cos\alpha \cdot \overline{i} + \cos\beta \cdot \overline{j} + \cos\gamma \cdot \overline{k}$

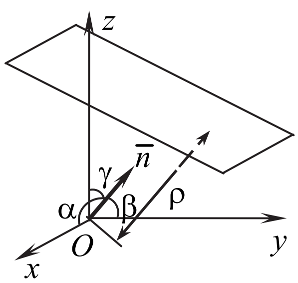


Рис. 4.2

Направляющие векторы

$\overline{p}_1 = a_1\overline{i} + b_1\overline{j} + c_1\overline{k}$

$\overline{p}_2 = a_2\overline{i} + b_2\overline{j} + c_2\overline{k}$

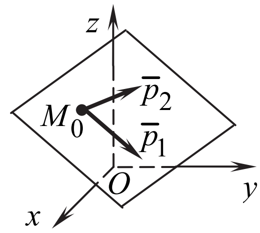


Рис. 4.3

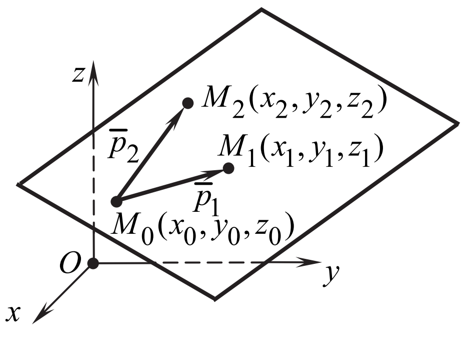


Рис. 4.4

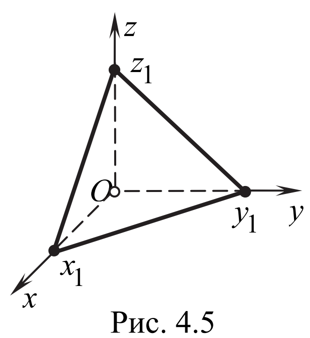


Рис. 4.5

Для удобства решения практических задач, связанных с плоскостями, приведем все основные типы уравнений плоскостей и соответствующие геометрические способы задания этих плоскостей (см. табл. 4.1).

Таблица 4.1. **Основные типы уравнений плоскостей**

Название	Уравнение	Способ задания плоскости
Общее уравнение плоскости	$Ax+By+Cz+D=0$, $A^2+B^2+C^2\neq 0$	Плоскость проходит через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n}=A\overline{i}+B\overline{j}+C\overline{k}$ (рис. 4.1)
Нормированное уравнение плоскости	$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-\rho=0$, $\rho\geq 0$	Плоскость проходит перпендикулярно вектору $\overline{n}=\cos\alpha\cdot\overline{i}+\cos\beta\cdot\overline{j}+\cos\gamma\cdot\overline{k}$ на расстоянии ρ от начала координат (рис. 4.2)
Параметрическое уравнение плоскости	$\begin{cases} x=x_0+a_1t_1+a_2t_2, \\ y=y_0+b_1t_1+b_2t_2, \quad t_1,t_2\in\mathbb{R}, \\ z=z_0+c_1t_1+c_2t_2, \end{cases}$ $rg\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}=2$	Плоскость проходит через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ компланарно неколлинеарным векторам $\overline{p}_1=a_1\overline{i}+b_1\overline{j}+c_1\overline{k}$, $\overline{p}_2=a_2\overline{i}+b_2\overline{j}+c_2\overline{k}$ (рис. 4.3)
Уравнение плоскости, проходящей через точку и компланарной двум неколлинеарным векторам	$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0$	
Уравнение плоскости, проходящей через три точки	$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0$	Плоскость проходит через три точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ (рис. 4.4)
Уравнение плоскости «в отрезках»	$\dfrac{x}{x_1}+\dfrac{y}{y_1}+\dfrac{z}{z_1}=1$, $x_1\neq 0$, $y_1\neq 0$, $z_1\neq 0$	Плоскость отсекает на координатных осях «отрезки» x_1, y_1 и z_1 (рис. 4.5)

Метрические приложения уравнений плоскостей

Приведем формулы для вычисления длин отрезков (расстояний) и величин углов по уравнениям образующих их плоскостей.

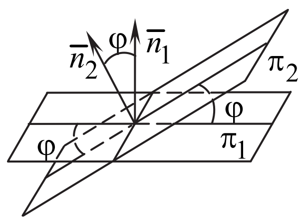


Рис. 4.6

Угол между двумя плоскостями можно определить как угол между их нормальными векторами (на рис. 4.6 нормали к плоскостям π_1, π_2 обозначены $\overline{n}_1$, $\overline{n}_2$ соответственно). По этому определению получаются не один угол, а два смежных угла, дополняющих друг друга до π. В элементарной геометрии из двух смежных углов, как правило, выбирается меньший, т.е. величина φ угла между двумя плоскостями удовлетворяет условию $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

1. *Расстояние d от точки $M(x_M, y_M, z_M)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ вычисляется по формуле* (рис. 4.7):

$$d = \frac{\left| A x_M + B y_M + C z_M + D \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{4.1}$$

2. *Расстояние между параллельными плоскостями $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ находится как расстояние d_1 от точки $M_2(x_2, y_2, z_2)$, координаты которой удовлетворяют уравнению $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$, до плоскости $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ по формуле* (рис. 4.8):

$$d_1 = \frac{\left| A_1 x_2 + B_1 y_2 + C_1 z_2 + D_1 \right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}.$$

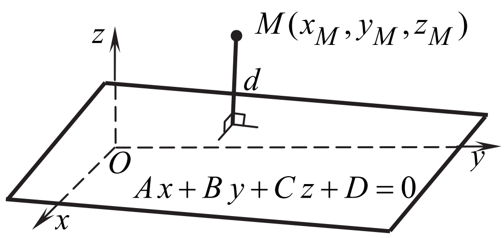


Рис. 4.7

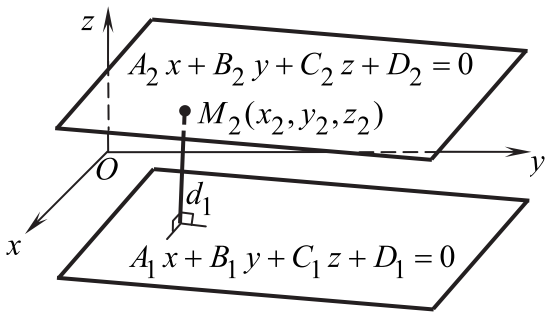


Рис. 4.8

3. *Острый угол φ между двумя плоскостями*

$$\pi_1: \quad A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \qquad \text{и} \qquad \pi_2: \quad A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

находится по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{\left| A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 \right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \tag{4.2}$$

где $\overline{n}_1 = A_1 \overline{i} + B_1 \overline{j} + C_1 \overline{k}$ и $\overline{n}_2 = A_2 \overline{i} + B_2 \overline{j} + C_2 \overline{k}$ – нормали к плоскостям π_1 и π_2 соответственно (см. рис. 4.6).

При решении задач формулы п. 1–3 используются наряду с метрическими приложениями векторной алгебры (см. разд. 2).

Уравнения прямых в пространстве

Разнообразие видов уравнений прямых в пространстве порождается многообразием геометрических способов их задания. По любому набору геометрических данных, однозначно определяющих прямую в пространстве, можно составить уравнение этой прямой, причем геометрические данные будут отражены в коэффициентах уравнения. И наоборот, коэффициенты любого уравнения прямой имеют геометрический смысл, соответствующий способу задания прямой в пространстве. Обычно, используются следующие данные. Прямую задают как линию пересечения двух плоскостей (рис. 4.9), либо указываю точку, принадлежащую прямой и ее направляющий вектор (рис. 4.10), либо указать две точки, принадлежащие прямой (рис. 4.11).

Рис. 4.9

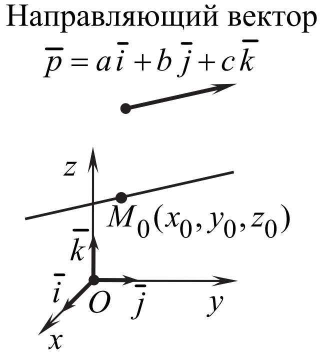


Рис. 4.10

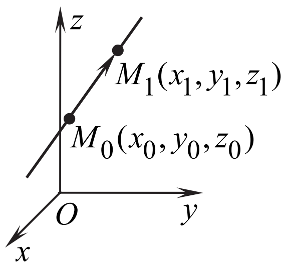


Рис. 4.11

Для удобства решения практических задач, связанных с прямыми в пространстве, приведем все основные типы уравнений прямых и соответствующие геометрические способы задания этих прямых (см. табл. 4.2).

Метрические приложения уравнений прямых

Угол между прямой l ***и плоскостью*** π определяется как угол между прямой l и ее ортогональной проекцией $l_{\text{пр}}$ на плоскость (рис. 4.12). Из двух смежных углов ψ и ψ', как правило, выбирают меньший, т.е. $0 \le \psi \le \frac{\pi}{2}$. Если прямая l перпендикулярна плоскости (ее ортогональная проекция на плоскость является точкой), то угол считается равным $\frac{\pi}{2}$.

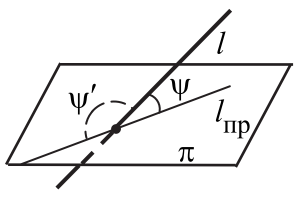


Рис. 4.12

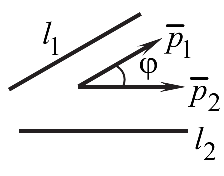


Рис. 4.13

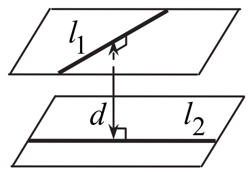


Рис. 4.14

Таблица 4.2. **Основные типы уравнений прямых в пространстве**

Название	Уравнение	Способ задания прямой
Общее уравнение прямой	$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases}$ $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}=2$	Прямая определяется как линия пересечения двух плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ (рис. 4.9)
Параметрическое уравнение прямой	$\begin{cases} x=x_0+at, \\ y=y_0+bt, \quad t\in\mathbb{R}; \\ z=z_0+ct, \end{cases}$ $a^2+b^2+c^2\neq 0$	Прямая проходит через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ коллинеарно вектору $\overline{p}=a\overline{i}+b\overline{j}+c\overline{k}$ (рис. 4.10)
Каноническое уравнение прямой	$\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c},$ $a^2+b^2+c^2\neq 0$	
Уравнение прямой, проходящей через две точки	$\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}=\dfrac{y-y_0}{y_1-y_0}=\dfrac{z-z_0}{z_1-z_0}$	Прямая проходит через точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и $M_1(x_1,y_1,z_1)$ (рис. 4.11)

Угол между прямыми определяется как угол между их направляющими векторами (рис. 4.13).

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется длина их общего перпендикуляра (рис. 4.14), т.е. кратчайшее расстояние между точками этих прямых.

Перечислим формулы для вычисления длин отрезков (расстояний) и величин углов по уравнениям образующих их прямых.

1. *Расстояние* d *от точки* $M_1(x_1,y_1,z_1)$ *до прямой* $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ *вычисляется по формуле*

$$d=\frac{\left|[\overline{m},\overline{p}]\right|}{\left|\overline{p}\right|}, \tag{4.3}$$

как высота параллелограмма (рис. 4.15), *построенного на векторах* $\overline{p}=(a\quad b\quad c)$ *и* $\overline{m}=(x_1-x_0\quad y_1-y_0\quad z_1-z_0)$.

По этой же формуле вычисляется расстояние между параллельными прямыми $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ *и* $\dfrac{x-x_1}{a_1}=\dfrac{y-y_1}{b_1}=\dfrac{z-z_1}{c_1}$, *координаты направляющих векторов которых пропорциональны*: $\dfrac{a}{a_1}=\dfrac{b}{b_1}=\dfrac{c}{c_1}$ (см. рис. 4.15).

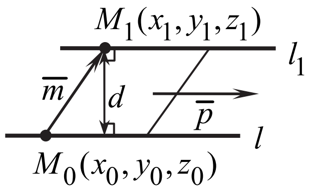


Рис. 4.15

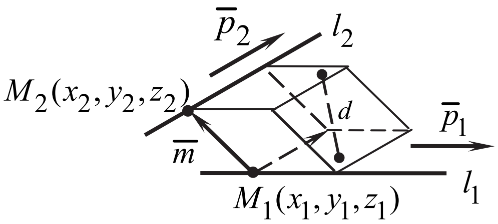


Рис. 4.16

2. *Расстояние* d *между скрещивающимися прямыми* (рис. 4.16)

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$$

вычисляется по формуле

$$d=\frac{\left|(\overline{m},\overline{p}_1,\overline{p}_2)\right|}{\left|[\,\overline{p}_1,\overline{p}_2\,]\right|}, \tag{4.4}$$

как высота параллелепипеда (рис. 4.16), *построенного на векторах* $\overline{p}_1=a_1\,\overline{i}+b_1\,\overline{j}+c_1\,\overline{k}$, $\overline{p}_2=a_2\,\overline{i}+b_2\,\overline{j}+c_2\,\overline{k}$ *и* $\overline{m}=(x_2-x_1)\overline{i}+(y_2-y_1)\,\overline{j}+(z_2-z_1)\overline{k}$. *В формуле* (4.4)

$$(\overline{m},\overline{p}_1,\overline{p}_2)=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}\neq 0,\ [\overline{p}_1,\overline{p}_2]=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

– смешанное и векторное произведения векторов соответственно.

3. *Угол* φ *между двумя прямыми*

$$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$$

вычисляется по формуле

$$\cos\varphi=\frac{\left|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2\right|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\,\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}. \tag{4.5}$$

4. *Угол* ψ *между прямой* $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ *и плоскостью* $Ax+By+Cz+D=0$ *вычисляется по формуле*

$$\sin\psi=\frac{\left|aA+bB+cC\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{4.6}$$

Пример 8. В прямоугольной системе координат $Oxyz$ заданы координаты вершин $A(2,-2,1)$, $B(2,2,-1)$ и $C(-7,6,0)$ треугольной пирамиды $OABC$ (рис. 4.17) Требуется:

а) составить общее уравнение плоскости грани ABC;

б) найти расстояние h от вершины O до плоскости грани ABC;

в) составить каноническое уравнение прямой BC;

г) найти расстояние от вершины A до прямой BC (т.е. высоту AH треугольника ABC);

д) составить общее и каноническое уравнения прямой, содержащей высоту AH треугольника ABC;

е) найти величину φ угла между плоскостями граней OAB и ABC;

ж) найти величину ψ угла между ребром OA и плоскостью грани ABC пирамиды;

з) найти проекцию O_1 вершины O на плоскость основания ABC;

и) составить каноническое уравнение прямой, проходящей через вершину O и точку M пересечения медиан треугольника ABC;

к) найти величину γ угла между прямыми OM и AB;

л) найти расстояние d между прямыми OM и AB;

м) найти проекцию C_1 вершины C на прямую AB;

н) составить уравнение прямой, симметричной прямой OM относительно плоскости основания ABC.

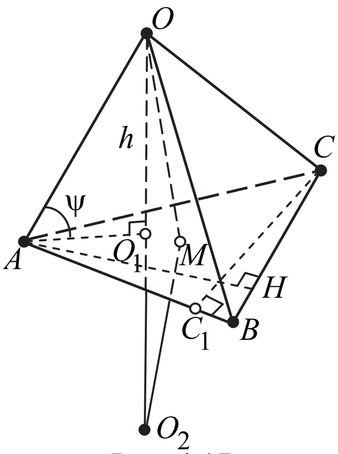


Рис. 4.17

Решение. а) Составляем уравнение плоскости, проходящей через три точки A, B, C:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-1 \\ 2-2 & 2+2 & -1-1 \\ -7-2 & 6+2 & 0-1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z-1 \\ 0 & 4 & -2 \\ -9 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая определитель по первой строке, получаем $12(x-2)+18(y+2)+36(z-1)=0$. Раскрывая скобки и упрощая, приходим к общему уравнению плоскости грани ABC:

$$2x+3y+6z-4=0. \tag{4.7}$$

б) Высоту h пирамиды находим по формуле (4.1): $h = \dfrac{|2\cdot 0+3\cdot 0+6\cdot 0-4|}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}} = \dfrac{4}{7}$.

в) Находим для прямой BC направляющий вектор $\overline{BC} = (-9 \quad 4 \quad 1)$ и записываем каноническое уравнение $\frac{x-2}{-9} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+1}{1}$.

г) Расстояние от вершины A до прямой BC вычисляем по формуле (4.3). Находим векторное произведение векторов $\overline{m} = \overline{AB} = (2-2 \quad 2+2 \quad -1-1) = (0 \quad 4 \quad -2)$ и $\overline{p} = \overline{BC}$:

$$[\overline{m},\overline{p}]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 0 & 4 & -2\\ -9 & 4 & 1\end{vmatrix}=12\overline{i}+18\overline{j}+36\overline{k},$$

а затем искомое расстояние $AH=\dfrac{\sqrt{12^2+18^2+36^2}}{\sqrt{(-9)^2+4^2+1^2}}=\dfrac{42}{\sqrt{98}}=3\sqrt{2}$.

д) Сначала составим общее уравнение прямой AH, представляя ее как линию пересечения плоскости треугольника ABC и плоскости π, проходящей через вершину A и перпендикулярную прямой BC. Учитывая, что вектор $\overline{BC}$ является нормальным для этой плоскости, получаем: $-9(x-2)+4(y+2)+1\cdot(z-1)=0 \Leftrightarrow 9x-4y-z-25=0$. Записывая это уравнение вместе с (4.7), приходим к общему уравнению прямой AH:

$$\begin{cases}9x-4y-z-25=0,\\ 2x+3y+6z-4=0.\end{cases} \tag{4.8}$$

Чтобы составить каноническое уравнение этой прямой, достаточно найти ее направляющий вектор $\overline{q}$. Для этого можно использовать векторное произведение нормалей $\overline{n}_\pi=(9\quad -4\quad -1)$ и $\overline{n}_{ABC}=(2\quad 3\quad 6)$ плоскостей в уравнении (4.8):

$$\overline{q}=[\overline{n}_\pi,\overline{n}_{ABC}]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 9 & -4 & -1\\ 2 & 3 & 6\end{vmatrix}=\overline{i}\begin{vmatrix}-4 & -1\\ 3 & 6\end{vmatrix}-\overline{j}\begin{vmatrix}9 & -1\\ 2 & 6\end{vmatrix}+\overline{k}\begin{vmatrix}9 & -4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-21\overline{i}-56\overline{j}+35\overline{k}.$$

Теперь записываем каноническое уравнение прямой, проходящей через точку A с направляющим вектором $\overline{q}$: $\dfrac{x-2}{-21}=\dfrac{y+2}{-56}=\dfrac{z-1}{35}$.

е) Составим уравнение плоскости, проходящей через точки O, A, B:

$$\begin{vmatrix}x & y & z\\ 2 & -2 & 1\\ 2 & 2 & -1\end{vmatrix}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4y+8z=0 \quad\Leftrightarrow\quad y+2z=0.$$

По формуле (4.2) находим $\cos\varphi=\dfrac{|2\cdot 0+3\cdot 1+6\cdot 2|}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2+2^2}}=\dfrac{15}{7\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$. Следовательно, $\varphi=\arccos\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$.

ж) Вектор $\overline{OA}=(2\quad -2\quad 1)$ является направляющим для прямой OA, которая имеет уравнение $\frac{x}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{1}$. По формуле (4.6) вычисляем

$$\sin\psi = \frac{|2\cdot 2 - 2\cdot 3 + 1\cdot 6|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{4}{21}.$$

Следовательно, искомая величина угла $\psi = \arcsin\frac{4}{21}$.

з) Чтобы найти проекцию O_1 вершины O на плоскость основания ABC нужно составить параметрическое уравнение прямой OO_1, которая проходит через начало координат перпендикулярно плоскости ABC. Нормаль $\overline{n}_{ABC} = (2 \quad 3 \quad 6)$ к этой плоскости является направляющим вектором для прямой OO_1, поэтом ее уравнение имеет вид:

$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = 3t, \\ z = 6t, \end{cases} \tag{4.9}$$

где $t \in \mathbb{R}$. Подставляя эти выражения в уравнение плоскости ABC, определяем значение параметра t для точки O_1 пересечения прямой и плоскости:

$$2(2t) + 3(3t) + 6(6t) - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 49t = 4 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{4}{49}.$$

Подставляя в (4.9), определяем координаты точки $O_1(\frac{8}{49}, \frac{12}{49}, \frac{24}{49})$.

и) Находим координаты точки M, согласно правилу (1.5)

$$M\left(\frac{2+2-7}{3}; \frac{-2+2+6}{3}; \frac{1-1+0}{3}\right), \text{ т.е. } M(-1; 2; 0).$$

Учитывая, что вектор $\overline{OM} = (-1 \quad 2 \quad 0)$ является направляющим для прямой OM, записываем каноническое уравнение этой прямой: $\frac{x-0}{-1} = \frac{y-0}{2} = \frac{z-0}{0} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{0}$.

к) Применяем формулу (4.5) к направляющим векторам $\overline{AB} = (0 \quad 4 \quad -2)$ и $\overline{OM} = (-1 \quad 2 \quad 0)$: $\quad \cos\gamma = \frac{|0\cdot(-1) + 4\cdot 2 - 2\cdot 0|}{\sqrt{0^2 + 4^2 + (-2)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 0^2}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$. Следовательно, $\gamma = \arccos\frac{4}{5}$.

л) Канонические уравнения скрещивающихся прямых OM и AB имеют вид

$$OM: \ \frac{x}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{0}; \qquad AB: \ \frac{x-2}{0} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-1}{-2}.$$

Расстояние d между ними будем искать по формуле (4.4). Сначала запишем все используемые векторы: направляющие векторы $\overline{p}_1 = (-1 \quad 2 \quad 0)$, $\overline{p}_2 = (0 \quad 4 \quad -2)$, а также вектор, соединяющий точки O и A: $\overline{m} = \overline{OA} = (2 \quad -2 \quad 1)$. Теперь вычисляем произведения векторов

$$(\overline{m},\overline{p}_1,\overline{p}_2)=\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix}=-8, \qquad [\overline{p}_1,\overline{p}_2]=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{vmatrix}=-4\overline{i}-2\overline{j}-4\overline{k}\,.$$

Находим расстояние как отношение модулей этих произведений

$$d=\frac{|-8|}{\sqrt{(-4)^2+(-2)^2+(-4)^2}}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}.$$

м) Чтобы найти проекцию C_1 вершины C на прямую AB, составим уравнение плоскости, проходящей через точку C и перпендикулярной прямой AB. Поскольку вектор $\overline{AB}=(0\quad 4\quad -2)$ является нормальным для этой плоскости, то ее уравнением имеет вид

$$0\cdot(x+7)+4\cdot(y-6)-2\cdot(z-0)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4y-2z-24=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2y-z-12=0\,.$$

Найдем точку пересечения этой плоскости с прямой AB. Для этого удобно использовать параметрическое уравнение прямой AB:

$$\begin{cases} x=2, \\ y=-2+4t, \\ z=1-2t, \end{cases} \tag{4.10}$$

где $t\in\mathbb{R}$. Подставляя эти выражения в уравнение плоскости, получаем $2(-2+4t)-(1-2t)-12=0$. Отсюда $t=1{,}7$. По формулам (4.10) вычисляем координаты точки $C_1(2;4{,}8;-2{,}4)$.

н) Сначала найдем координаты точки O_2, симметричной точке O относительно плоскости основания ABC. Учитывая, равенство $\overline{OO_2}=2\overline{OO_1}$, по координатам точки $O_1(\frac{8}{49},\frac{12}{49},\frac{24}{49})$ (см. п.«з») вычисляем координаты точки $O_2(\frac{16}{49},\frac{24}{49},\frac{48}{49})$. Теперь записываем уравнение прямой, проходящей через две точки M и O_2:

$$\frac{x+1}{\frac{16}{49}+1}=\frac{y-2}{\frac{24}{49}-2}=\frac{z-0}{\frac{48}{49}-0} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{x+1}{65}=\frac{y-2}{-74}=\frac{z-0}{48}\,.$$

Ответ: а) $2x+3y+6z-4=0$; б) $h=\dfrac{4}{7}$; в) $\frac{x-2}{-9}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+1}{1}$; г) $3\sqrt{2}$; д) $\begin{cases} 9x-4y-z-25=0, \\ 2x+3y+6z-4=0, \end{cases}$ $\dfrac{x-2}{-21}=\dfrac{y+2}{-38}=\dfrac{z-1}{35}$; е) $\varphi=\arccos\dfrac{3\sqrt{5}}{7}$; ж) $\psi=\arcsin\frac{10}{21}$; з) $O_1(\frac{8}{49},\frac{12}{49},\frac{24}{49})$; и) $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{0}$; к) $\gamma=\arccos\frac{4}{5}$; л) $d=\dfrac{4}{3}$; м) $C_1(2;4{,}8;-2{,}4)$; н) $\dfrac{x+1}{65}=\dfrac{y-2}{-74}=\dfrac{z-0}{48}$.

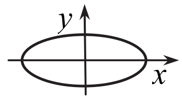
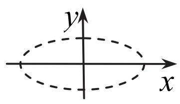
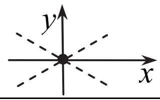
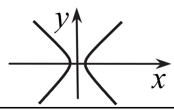
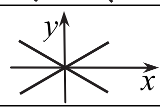
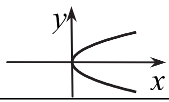
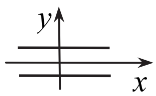
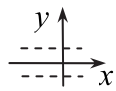
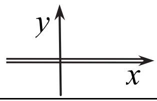
5. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Алгебраической линией второго порядка называется геометрическое место точек плоскости, которое в какой-либо аффинной системе координат Oxy может быть задано уравнением вида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0, \tag{5.1}$$

где старшие коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} не равны нулю одновременно ($a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$). Без ограничения общности можно считать, что система координат, в которой задано уравнение линии второго порядка, прямоугольная. Для каждой линии второго порядка существует прямоугольная система координат Oxy, в которой уравнение принимает наиболее простой (***канонический***) вид. Она называется ***канонической***, а уравнение – ***каноническим***. Всего имеется девять канонических видов уравнений линий второго порядка, которые приведены в табл. 5.1

Таблица 5.1. **Канонические уравнения линий второго порядка**

№	Уравнение линии	Название линии	Изображение линии
1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	эллипс	
2	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	мнимый эллипс	
3	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	пара мнимых пересекающихся прямых	
4	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	гипербола	
5	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	пара пересекающихся прямых	
6	$y^2=2px$	парабола	
7	$y^2-b^2=0$	пара параллельных прямых	
8	$y^2+b^2=0$	пара мнимых параллельных прямых	
9	$y^2=0$	пара совпадающих прямых	

В этих уравнениях $a > 0$, $b > 0$, $p > 0$, причем $a \geq b$ в уравнениях 1–3.

Линии (1), (4), (5), (6), (7), (9) называются ***вещественными*** (***действительными***), а линии (2), (3), (8) – ***мнимыми***. Вещественные линии изображены в канонических системах координат. Изображения мнимых линий даются штриховкой только для иллюстрации.

Линия второго порядка называется ***центральной***, если она имеет единственный центр (симметрии). В противном случае, если центр отсутствует или не является единственным, линия называется ***нецентральной***. К центральным линиям относятся эллипсы (вещественный и мнимый), гипербола, пара пересекающихся прямых (вещественных и мнимых). Остальные линии – нецентральные.

Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная ($2a$), бóльшая расстояния ($2c$) между этими заданными точками (рис. 5.1). Точки F_1 и F_2 называются ***фокусами*** эллипса, расстояние между ними $2c = F_1F_2$ – ***фокусным расстоянием***, середина O отрезка F_1F_2 – ***центром*** эллипса. Отрезки F_1M и F_2M, соединяющие произвольную точку M эллипса с его фокусами, называются ***фокальными радиусами*** точки M.

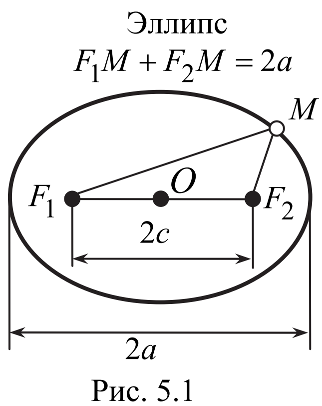


Рис. 5.1

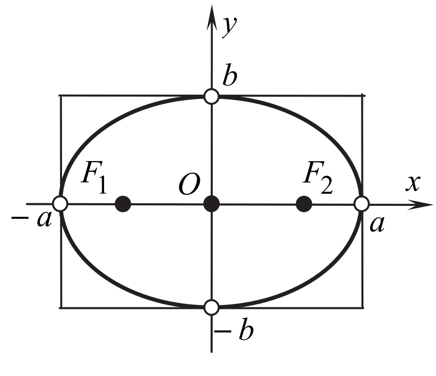


Рис. 5.2

Отношение $e = \dfrac{c}{a}$ называется ***эксцентриситетом*** эллипса. Из определения ($2a > 2c$) следует, что $0 \le e < 1$. Чем больше e, тем эллипс более вытянут. При $e = 0$, т.е. при $c = 0$, фокусы F_1 и F_2, а также центр O совпадают, и эллипс является *окружностью радиуса* a.

В канонической системе координат, введенной так, как показано на рис. 5.2, эллипс описывается ***каноническим уравнением***

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Координатные оси (канонической системы координат) являются ***осями симметрии*** эллипса (называются ***главными осями эллипса***), а его центр – ***центром симметрии***. Числа a и b называются ***большой полуосью*** и ***малой полуосью*** эллипса соответственно, отношение $k=\frac{b}{a}\le 1$ – ***коэффициентом сжатия***. Прямые $x=\pm a$, $y=\pm b$ ограничивают на координатной плоскости ***основной прямоугольник***, внутри которого находится эллипс (см. рис. 5.2). Точки пересечения эллипса с координатными осями называются ***вершинами*** эллипса.

Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух заданных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная ($2a$), меньшая расстояния ($2c$) между этими заданными точками (рис. 5.3).

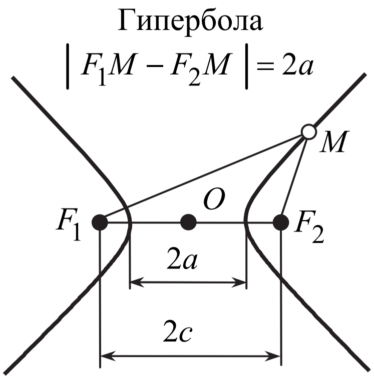


Рис. 5.3

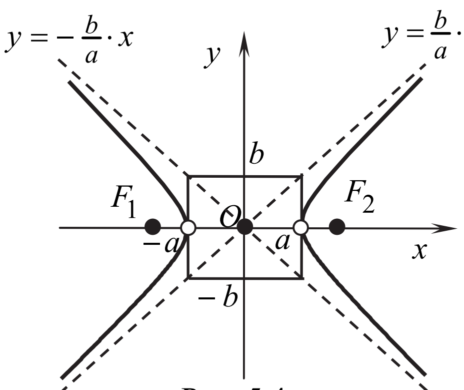


Рис. 5.4

Точки F_1 и F_2 называются ***фокусами*** гиперболы, расстояние $2c=F_1F_2$ между ними – ***фокусным расстоянием***, середина O отрезка F_1F_2 – ***центром*** гиперболы. Отрезки F_1M и F_2M, соединяющие произвольную точку M гиперболы с ее фокусами, называются ***фокальными радиусами*** точки M. Отношение $e=\frac{c}{a}$ называется ***эксцентриситетом*** гиперболы. Из определения ($2a<2c$) следует, что $e>1$. Эксцентриситет e характеризует форму гиперболы. Чем больше e, тем шире ветви гиперболы, а чем ближе e к единице, тем ветви гиперболы у́же.

В канонической системе координат, введенной так, как показано на рис.5.4, гипербола описывается ***каноническим уравнением***

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

где $b=\sqrt{c^2-a^2}$.

Координатные оси (канонической системы координат) являются ***осями симметрии*** гиперболы (называются ***главными осями гиперболы***), а ее центр – ***центром симметрии***, число a – ***действительной полуосью*** гиперболы, b – ***мнимой полуосью*** гиперболы. Прямые $x = \pm a$, $y = \pm b$ ограничивают на координатной плоскости ***основной прямоугольник***, вне которого находится гипербола (рис. 5.4). Точки пересечения гиперболы с осью абсцисс называются ***вершинами*** гиперболы. Прямые $y = \pm \frac{b}{a} x$, содержащие диагонали основного прямоугольника, называются ***асимптотами гиперболы*** (см. рис. 5.4).

Парабола

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от заданной точки F и заданной прямой d, не проходящей через заданную точку. Точка F называется ***фокусом параболы***, прямая d – ***директрисой параболы***, середина O перпендикуляра, опущенного из фокуса на директрису, – ***вершиной параболы***, расстояние p от фокуса до директрисы – ***параметром параболы***, а расстояние $\frac{p}{2}$ от вершины параболы до ее фокуса – ***фокусным расстоянием*** (рис. 5.5). Параметр p параболы характеризует ее форму. Чем больше p, тем шире ветви параболы, чем ближе p к нулю, тем ветви параболы у́же. Прямая, перпендикулярная директрисе и проходящая через фокус, называется ***осью параболы*** (***фокальной осью параболы***). Отрезок FM, соединяющий произвольную точку M параболы с ее фокусом, называется ***фокальным радиусом*** точки M. ***Эксцентриситет параболы*** по определению равен единице ($e = 1$).

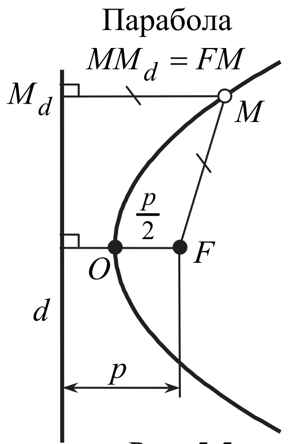


Рис. 5.5

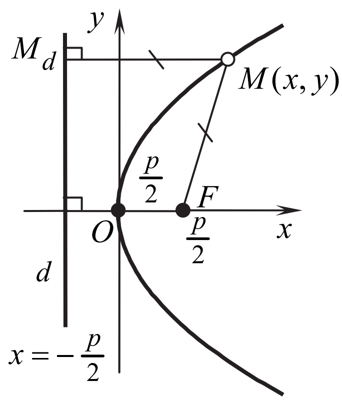


Рис. 5.6

В канонической системе координат, введенной так, как показано на рис. 5.6, парабола описывается ***каноническим уравнением***

$$y^2 = 2px.$$

В этой системе координат уравнение директрисы $x = -\frac{p}{2}$, координаты фокуса $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Оси канонической системы координат называются ***главными осями параболы***.

Построение линии второго порядка

Для построения линии второго порядка, заданной в прямоугольной системе координат уравнением (5.1), нужно:

I) определить название линии второго порядка, составить ее каноническое уравнение;

II) найти каноническую систему координат $O'x'y'$ (в которой уравнение линии имеет канонический вид);

III) построить линию в заданной системе координат Oxy.

Рассмотрим алгоритмы выполнения каждого этапа.

Алгоритм составления канонического уравнения линии второго порядка

В алгоритме применяются ***ортогональные инварианты*** – выражения, составленные из коэффициентов уравнения (5.1), которые не изменяются при замене исходной прямоугольной системы координат другой прямоугольной системой координат. Другой способ – алгоритм приведения уравнения линии второго порядка к каноническому виду, который выполняется при помощи алгебраических преобразований, рассматривается ниже (на стр. 50).

Пусть в прямоугольной системе координат Oxy линия второго порядка описывается уравнением (5.1). Требуется определить ее название и составить каноническое уравнение. Для этого нужно выполнить следующие действия.

1. Вычислить ***ортогональные инварианты***

$$\tau = a_{11} + a_{22}, \qquad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Если $\delta = \Delta = 0$, то вычислить $\kappa = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}$.

2. По таблице 5.2 определить название линии, а по названию – каноническое уравнение линий второго порядка.

3. Составить характеристическое уравнение $\lambda^2 - \tau\lambda + \delta = 0$, либо используя вычисленные в п.1 коэффициенты, либо разлагая определитель

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \tau\lambda + \delta.$$

Найти корни λ_1, λ_2 (с учетом кратности) характеристического уравнения.

4. Занумеровать корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения в соответствии с правилами:

а) если линия эллиптического типа, то $|\lambda_1| \le |\lambda_2|$;

б) если линия гиперболического типа, то:

– при $\Delta \ne 0$: $\lambda_1 \Delta > 0$ (знак λ_1 совпадает со знаком Δ);

– при $\Delta = 0$: $\lambda_1 > 0$;

в) если линия параболического типа, то $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \ne 0$. Корни λ_1, λ_2 не используются при составлении канонических уравнений линий параболического типа, но применяются при нахождении канонической системы координат.

Таблица 5.2. **Классификация линий второго порядка**

<table>
<tr><th></th><th colspan="4">Признаки вида</th><th>Название линии</th><th>№</th></tr>
<tr><td rowspan="5">Центральные линии</td><td rowspan="3">Эллиптический тип</td><td rowspan="3">$\delta > 0$</td><td rowspan="2">$\Delta \ne 0$</td><td>$\tau\Delta < 0$</td><td>эллипс</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$\tau\Delta > 0$</td><td>эллипс мнимый</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\Delta = 0$</td><td>пара мнимых пересекающихся прямых</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Гиперболический тип</td><td rowspan="2">$\delta < 0$</td><td colspan="2">$\Delta \ne 0$</td><td>гипербола</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\Delta = 0$</td><td>пара пересекающихся прямых</td><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Нецентральные линии</td><td rowspan="4">Параболический тип</td><td rowspan="4">$\delta = 0$</td><td colspan="2">$\Delta \ne 0$</td><td>парабола</td><td>6</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\Delta = 0$</td><td>$\kappa < 0$</td><td>пара параллельных прямых</td><td>7</td></tr>
<tr><td>$\kappa > 0$</td><td>пара мнимых параллельных прямых</td><td>8</td></tr>
<tr><td>$\kappa = 0$</td><td>пара совпадающих прямых</td><td>9</td></tr>
</table>

5. Вычислить коэффициенты канонического уравнения и записать его в канонической системе координат $O'x'y'$:

а) для линий эллиптического типа ($\delta > 0$):

(1) при $\tau \cdot \Delta < 0$ – уравнение *эллипса* $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$ с коэффициентами $a^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_1 \delta}$, $b^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_2 \delta}$;

(2) при $\tau \cdot \Delta > 0$ – уравнение *мнимого эллипса* $\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=-1$ с коэффициентами $a^2=\frac{\Delta}{\lambda_1 \delta}$, $b^2=\frac{\Delta}{\lambda_2 \delta}$;

(3) при $\Delta = 0$ – уравнение *пары мнимых пересекающихся прямых* $\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=0$ с коэффициентами $a^2=\frac{1}{|\lambda_1|}$, $b^2=\frac{1}{|\lambda_2|}$;

б) для линии гиперболического типа ($\delta < 0$):

(4) при $\Delta \neq 0$ – уравнение *гиперболы* $\frac{(x')^2}{a^2}-\frac{(y')^2}{b^2}=1$ с коэффициентами $a^2=-\frac{\Delta}{\lambda_1 \delta}$, $b^2=\frac{\Delta}{\lambda_2 \delta}$;

(5) при $\Delta = 0$ – уравнение *пары пересекающихся прямых* $\frac{(x')^2}{a^2}-\frac{(y')^2}{b^2}=0$ с коэффициентами $a^2=\frac{1}{\lambda_1}$, $b^2=-\frac{1}{\lambda_2}$;

в) для линии параболического типа ($\delta = 0$):

(6) при $\Delta \neq 0$ – уравнение *параболы* $(y')^2 = 2px'$ с параметром $p=\sqrt{-\frac{\Delta}{\tau^3}}$;

(7) при $\Delta = 0$, $\kappa < 0$ – уравнение *пары параллельных прямых* $(y')^2 - b^2 = 0$ с коэффициентом $b^2=-\frac{\kappa}{\tau^2}$;

(8) при $\Delta = 0$, $\kappa > 0$ – уравнение *пары мнимых параллельных прямых* $(y')^2 + b^2 = 0$ с коэффициентом $b^2=\frac{\kappa}{\tau^2}$;

(9) при $\Delta = 0$, $\kappa = 0$ – уравнение *пары совпадающих прямых* $(y')^2 = 0$.

Алгоритм нахождения канонической системы координат линии второго порядка

Для нахождения канонической системы координат $O'x'y'$ достаточно указать величину φ угла поворота системы координат $O'x'y'$ относительно заданной системы координат Oxy, а также координаты x_0, y_0 начала O' канонической системы координат в заданной системе координат Oxy. Связи между координатами определяются формулами:

$$\begin{cases} x = x_0 + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = y_0 + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{cases} \tag{5.2}$$

Пусть выполнены пп.1–5 алгоритма составления канонического уравнения линии второго порядка.

6. Вычислить величину φ угла поворота системы координат:

если $a_{12} \neq 0$ или $a_{11} \neq \lambda_1$, то

$$\cos\varphi = \frac{a_{12}}{\sqrt{(\lambda_1 - a_{11})^2 + a_{12}^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{\sqrt{(\lambda_1 - a_{11})^2 + a_{12}^2}};$$

если $a_{12} = 0$ и $a_{11} = \lambda_1$, то $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = 0$ (т.е. $\varphi = 0$).

Для параболы (при $\lambda_1 = 0$) угол φ должен удовлетворять дополнительному условию, $\tau(a_1\cos\varphi + a_2\sin\varphi) \leq 0$, в противном случае величину угла нужно увеличить на π (в формуле (5.2) угол φ заменить на $\varphi + \pi$ и учесть, что $\cos(\varphi + \pi) = -\cos\varphi$, $\sin(\varphi + \pi) = -\sin\varphi$).

7. Найти координаты x_0, y_0 начала O' канонической системы координат:

а) для всех линий, за исключением параболы, найти любое решение $x = x_0$, $y = y_0$ системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0, \\ a_{12}x + a_{22}y + a_2 = 0; \end{cases}$$

б) для параболы найти решение $x = x_0$, $y = y_0$ системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + \dfrac{a_1 a_{11} + a_2 a_{12}}{a_{11} + a_{22}} = 0, \\ \left(a_1 + \dfrac{a_1 a_{22} - a_2 a_{12}}{a_{11} + a_{22}}\right)x + \left(a_2 - \dfrac{a_1 a_{12} - a_2 a_{11}}{a_{11} + a_{22}}\right)y + a_0 = 0, \end{cases} \quad \text{если } a_{11} \neq 0 \text{ или } a_{12} \neq 0;$$

либо системы уравнений $\begin{cases} a_{22}y + a_2 = 0, \\ 2a_1 x + a_0 = 0, \end{cases}$ если $a_{11} = a_{12} = 0$.

Найденные в п. 6,7 значения φ, x_0, y_0 подставить в (5.2) для получения формул преобразования координат.

Алгоритм построения линии второго порядка

Пусть определено название линии второго порядка, составлено ее каноническое уравнение (см. пп. 1–5), а также найдена каноническая система координат $O'x'y'$ (пп. 6,7 алгоритма). Требуется построить линию второго порядка в заданной системе координат Oxy. Для этого нужно выполнить следующие действия.

8. На координатной плоскости Oxy изобразить каноническую систему координат $O'x'y'$, оси которой повернуты на угол φ, вычисленный в п.6, а начало O' имеет координаты x_0, y_0, найденные в п. 7.

9. Построить линию второго порядка в канонической системе координат $O'x'y'$ по каноническому уравнению, найденному в п.5. Построение центральных линий (эллипса, гиперболы, пары пересекающихся прямых) удобно начинать с изображения основного прямоугольника (см. рис. 5.2, 5.4). При построении параболы использовать рис. 5.6. Пары параллельных прямых и пары совпадающих прямых строятся в канонической системе координат без труда. Мнимые линии не изображаются, за исключением пары мнимых пересекающихся прямых (в этом случае изображается только единственная точка O').

Рассмотрим другой алгоритм получения канонического уравнения линии второго порядка и нахождения канонической системы координат $O'x'y'$ (первые два этапа построения линии второго порядка).

Алгоритм приведения уравнения линии второго порядка к каноническому виду

Пусть в прямоугольной системе координат Oxy алгебраическая линия второго порядка задана уравнением (5.1):

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0.$$

Чтобы привести уравнение к каноническому виду, нужно выполнить следующие действия.

1. Если в уравнении имеется член с произведением неизвестных ($a_{12} \neq 0$), то делаем поворот системы координат:

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{cases}$$

на угол φ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$), удовлетворяющий равенству $\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$. При этом получим упрощенное уравнение линии второго порядка:

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 2a_1'x' + 2a_2'y' + a_0 = 0. \qquad (5.3)$$

Если $a_{12} = 0$, переходим к п. 2, поворот системы координат делать не нужно, так как исходное уравнение имеет упрощенный вид (5.3).

2. Выполняем параллельный перенос системы координат:

а) если в уравнении (5.3) нет линейных членов ($a_1' = 0$ и $a_2' = 0$), то переходим к п. 3;

б) если в уравнении (5.3) имеются линейный и квадратичный члены с какой-либо одной неизвестной, то дополняем эти члены до полного квадрата и заменяем его квадратом новой неизвестной. Например, если в уравнении $\lambda_1 \neq 0$ и $a_1' \neq 0$, то выполняем преобразования:

$$\lambda_1 (x')^2 + 2a_1'x' = \lambda_1 \left[(x')^2 + 2\frac{a_1'}{\lambda_1}x' + \left(\frac{a_1'}{\lambda_1}\right)^2 \right] - \lambda_1 \left(\frac{a_1'}{\lambda_1}\right)^2 = \lambda_1 \left(x' + \frac{a_1'}{\lambda_1} \right)^2 - \lambda_1 \left(\frac{a_1'}{\lambda_1}\right)^2 = \lambda_1 (x'')^2 - \lambda_1 \left(\frac{a_1'}{\lambda_1}\right)^2,$$

где $x'' = x' + \frac{a_1'}{\lambda_1}$. В полученном выражении нет линейного члена с неизвестной x'';

в) если одна неизвестная входит в уравнение (5.3) только в первой степени, а другая – только во второй, то нужно уничтожить свободный член уравнения, заменяя первую неизвестную. Например, в уравнении $a_{22}(y')^2 + 2a_1x' + a_0 = 0$ можно преобразовать неквадратичные члены: $2a_1x' + a_0 = 2a_1\left(x' + \frac{a_0}{2a_1} \right) = 2a_1x''$, где $x'' = x' + \frac{a_0}{2a_1}$.

3. Полученное в результате преобразований (п. 2) ***приведенное*** уравнение имеет «почти» канонический вид. Для окончательного упрощения приведенного уравнения при необходимости применяются следующие преобразования:

а) переименование координатных осей (зеркальное отражение в прямой $y = x$): $x' = y''$, $y' = x''$;

б) изменение направления координатной оси, например оси абсцисс (зеркальное отражение в оси ординат): $x' = -x''$, $y' = y''$;

в) умножение обеих частей уравнения на отличный от нуля множитель;

г) перенос членов из одной части уравнения в другую.

Например, приведенное уравнение $x^2 + 2y = 0$ преобразуем к виду $x^2 = -2y$. Затем меняем название осей (п.3,а): $(y')^2 = -2x'$, где $x' = y$, $y' = x$ Осталось изменить направление оси абсцисс (п.3,б). Подставляя $x' = -x''$, $y' = y''$, получаем каноническое уравнение параболы $(y'')^2 = 2x''$.

В результате преобразований 1–3 уравнение приводится к каноническому виду. Замену неизвестных, приводящую уравнение поверхности к каноническому виду, определяем как композицию всех замен, применяемых в ходе решения. Выражая исходные координаты через канонические, получаем формулы (5.3). После этого выполняем п. 8,9 алгоритм построения линии второго порядка.

Этот алгоритм удобно использовать в случае, когда нет произведения неизвестных, при этом п. 1 не выполняется. Если же произведение неизвестных входит в уравнение, то приходиться делать поворот системы координат (п. 1), что приводит к довольно громоздким выкладкам.

Пример 9. В прямоугольной системе координат Oxy заданы уравнения

1) $9x^2+4y^2-18x+16y-11=0$,

2) $16x^2+24xy+9y^2+62x-16y+46=0$

линий второго порядка.

9.1. Уравнение 1) привести к каноническому виду, выполняя преобразование данной системы координат без поворота, определить название линии, найти координаты (x_0, y_0) начала O' канонической системы координат $O'x'y'$ в данной системе координат Oxy, записать формулы, выражающие координаты x, y через канонические координаты x', y', построить линию в данной системе координат Oxy.

9.2. Для уравнения 2) вычислить ортогональные инварианты, по ним определить название линии и составить каноническое уравнение, вычислить угол φ, на который повернута каноническая система координат $O'x'y'$ относительно данной системы координат Oxy, найти координаты (x_0, y_0) начала O' в данной системе координат, записать формулы, выражающие координаты x, y через канонические координаты x', y', построить линию в данной системе координат Oxy.

Решение. Уравнение 1). Применяем алгоритм приведения уравнения линии второго порядка к каноническому виду (см. стр. 50). Сравнивая заданное уравнение с (5.1), определяем коэффициенты $a_{11}=9$, $a_{12}=0$, $a_{22}=4$, $a_1=-9$, $a_2=8$, $a_0=-11$.

1. Поскольку в уравнении нет произведения неизвестных ($a_{12}=0$), то поворот системы координат делать не нужно.

2. Каждая неизвестная входит в уравнение в первой и второй степенях, поэтому выделяем полные квадраты по обеим неизвестным

$$9x^2+4y^2-18x+16y-11=9(x^2-2x)+4(y^2+4y)-11=$$

$$9(x^2-2x+1-1)+4(y^2+4y+4-4)-11=9(x-1)^2-9+4(y+2)^2-16-11=$$

$$9(x^2-2x+1-1)+4(y^2+4y+4-4)-11=9(x-1)^2+4(y+2)^2-36\,.$$

Заменяя $x_1=x-1$, $y_1=y+2$, получаем приведенное уравнение $9x_1^2+4y_1^2-36=0$. Переносим свободный член в правую часть и делим уравнение на 36:

$$9x_1^2+4_1^2-36=0 \;\Leftrightarrow\; 9x_1^2+4y_1^2=36 \;\Leftrightarrow\; \frac{9x_1^2}{36}+\frac{4y_1^2}{36}=1 \;\Leftrightarrow\; \frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{9}=1.$$

Это уравнение похоже на каноническое уравнение эллипса. Однако, в каноническом уравнении бóльший знаменатель соответствует первой неизвестной, поскольку бóльшая полуось эллипса принадлежит оси абсцисс канонической системы координат. Поэтому нужно переименовать неизвестные, сделав замену $x_1=y'$, $y_1=x'$:

$$\frac{(x')^2}{3^2}+\frac{(y')^2}{2^2}=1. \tag{5.4}$$

Получено каноническое уравнение эллипса. Значит, линия заданная уравнением 1) является эллипсом.

В ходе преобразований были сделаны две замены неизвестных:

$$\begin{cases} x_1=x-1 \\ y_1=y+2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_1=y', \\ y_1=x'. \end{cases}$$

Выражаем "старые" неизвестные x, y через "новые" (канонические) x', y': $x=x_1+1=y'+1$, $\quad y=y_1-2=x'-2$. Следовательно, искомая замена неизвестных

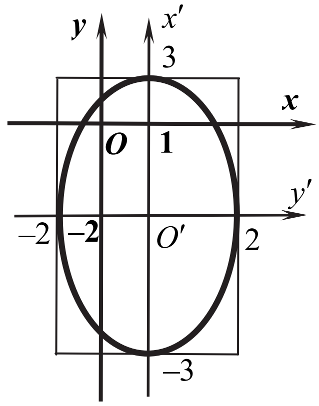


Рис. 5.7

$$\begin{cases} x=y'+1, \\ y=x'-2. \end{cases} \tag{5.5}$$

Подставляя $x'=0$, $y'=0$ в (5.5), находим координаты $x_0=1$, $y_0=-2$ начала O' канонической системы координат $O'x'y'$. Отметим на координатной плоскости Oxy начало $O'(1,-2)$ канонической системы координат (рис. 5.7). По формулам, связывающим «старые» (x, y) и новые (x', y') координаты определяем направления координатных осей. Так как при возрастании переменной x' возрастает $y=x'-2$, то направление оси $O'x'$ совпадает с направлением оси Oy. Аналогично, из формулы $x=y'+1$ следует, что направление оси $O'y'$ совпадает с направлением оси Ox. Оси данной системы координат Oxy изображены на рис. 5.7 полужирными стрелками, а канонической системы координат $O'x'y'$ – светлыми. Отмечаем на координатных осях точки $x'=\pm 3$, $y'=\pm 2$ и строим основной прямоугольник, в который затем вписываем эллипс.

Заметим, что формулы (5.5) нельзя получить из формул (5.2). Действительно, изменение названий координатных осей ($x_1=y'$, $y_1=x'$), т.е. зеркальное отражение в прямой $y_1=x_1$, нельзя реализовать поворотом системы координат. Это, однако, не означает, что формулы

(5.2) не подходят для данного уравнения. Просто каноническая система координат определяется неоднозначно. Например, вместо (5.5) можно использовать формулы

$$\begin{cases} x = -y' + 1, \\ y = x' - 2, \end{cases} \tag{5.6}$$

которые получаются из (5.2) при $x_0 = 1$, $y_0 = -2$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Формулам (5.6) отвечает система координат, которая отличается от изображенной на рис. 5.7 канонической системы только направлением оси ординат, а каноническое уравнение эллипса будет иметь тот же вид (5.4). Подчеркнем, что изменение направление оси ординат канонической системы координат, не меняет ни одного канонического уравнения.

Уравнение 2). Применяем алгоритм составления канонического уравнения линии второго порядка (см. стр. 46). Сравнивая заданное уравнение с (5.1), определяем коэффициенты $a_{11} = 16$, $a_{12} = 12$, $a_{22} = 9$, $a_1 = 31$, $a_2 = -8$, $a_0 = 46$.

1. Вычисляем инварианты: $\tau = 16 + 9 = 25$, $\delta = \begin{vmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{vmatrix} = 144 - 144 = 0$,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 16 & 12 & 31 \\ 12 & 9 & -8 \\ 31 & -8 & 46 \end{vmatrix} = 6624 - 2976 - 2976 - 8649 - 1024 - 6624 = -15625.$$

2. По таблице 5.2 определяем, что уравнение задает *параболу*, так как $\delta = 0$, $\Delta \neq 0$.

3. Находим корни характеристического уравнения $\lambda^2 - 25\lambda = 0$: $\lambda = 0$, $\lambda = 25$.

4. Поскольку линия параболического типа, то нулевой корень обозначаем λ_1, т.е. $\lambda_1 = 0$, а $\lambda_2 = 25$, чтобы выполнялись условия $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$.

5. Вычисляем коэффициент канонического уравнения параболы:

$$p = \sqrt{-\frac{\Delta}{\tau^3}} = \sqrt{-\frac{-15625}{25^3}} = 1.$$

Таким образом, каноническое уравнение (уравнение (6) в табл.5.1) заданной линии имеет вид

$$(y')^2 = 2 \cdot 1 \cdot x'.$$

Переходим к нахождению канонической системы координат.

6. Вычислим величину φ угла поворота системы координат. Поскольку $a_{12} = 12 \neq 0$, то

$$\cos\varphi = \frac{a_{12}}{\sqrt{(\lambda_1 - a_{11})^2 + a_{12}^2}} = \frac{12}{\sqrt{(0-16)^2 + 12^2}} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5},$$

$$\sin\varphi = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{\sqrt{(\lambda_1 - a_{11})^2 + a_{12}^2}} = \frac{0-16}{\sqrt{(0-16)^2 + 12^2}} = \frac{-16}{20} = -\frac{4}{5}.$$

Поскольку угол φ не удовлетворяет дополнительному условию

$$\tau(a_1\cos\varphi + a_2\sin\varphi) \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad 25\left[31\cdot\tfrac{3}{5} + (-8)\cdot(-\tfrac{4}{5})\right] \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad 625 \le 0,$$

то угол поворота φ нужно увеличить на π и учесть, что

$$\cos(\varphi+\pi) = -\cos\varphi = -\tfrac{3}{5}, \qquad \sin(\varphi+\pi) = -\sin\varphi = \tfrac{4}{5}.$$

7. Найдем координаты x_0, y_0 начала O' канонической системы координат. Так как заданная линия является параболой и $a_{11} \ne 0$, то решаем систему уравнений п."б":

$$\begin{cases} 16x + 12y + \dfrac{31\cdot 16 + (-8)\cdot 12}{16+9} = 0, \\ \left(31 + \dfrac{31\cdot 9 - (-8)\cdot 12}{16+9}\right)x + \left(-8 - \dfrac{31\cdot 12 - (-8)\cdot 16}{16+9}\right)y + 46 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 16x + 12y + 16 = 0, \\ 46x - 28y + 46 = 0. \end{cases}$$

Система имеет единственное решение $x_0 = -1$, $y_0 = 0$.

Таким образом, формулы (5.2) преобразования координат, где вместо φ взят угол $\varphi+\pi$, имеют вид

$$\begin{cases} x = -1 + x'\cdot(-\tfrac{3}{5}) - y'\cdot\tfrac{4}{5}, \\ y = x'\cdot\tfrac{4}{5} + y'\cdot(-\tfrac{3}{5}) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -1 - \tfrac{3}{5}x' - \tfrac{4}{5}y', \\ y = \tfrac{4}{5}x' - \tfrac{3}{5}y'. \end{cases}$$

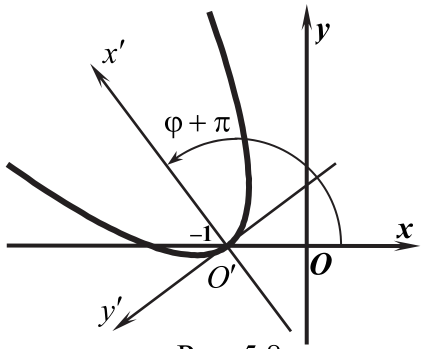


Рис. 5.8

Переходим к построению линии.

8. На координатной плоскости Oxy (см. рис. 5.8) изображаем каноническую систему координат $O'x'y'$ с началом в точке $O'(-1,0)$, оси которой повернуты на угол $\varphi+\pi = -\mathrm{arctg}\tfrac{4}{3} + \pi$.

9. В канонической системе координат строим параболу $(y')^2 = 2\cdot 1\cdot x'$.

Ответ: 1) каноническое уравнение эллипса $\dfrac{(x')^2}{3^2} + \dfrac{(y')^2}{2^2} = 1$; координаты $x_0 = 1$, $y_0 = -2$; формулы $x = y' + 1$, $y = x' - 2$; эллипс изображен на рис.5.7;

2) каноническое уравнение параболы $(y')^2 = 2\cdot 1\cdot x'$; координаты $x_0 = -1$, $y_0 = 0$; формулы $x = -1 - \tfrac{3}{5}x' - \tfrac{4}{5}y'$, $y = \tfrac{4}{5}x' - \tfrac{3}{5}y'$; парабола изображена на рис. 5.8.

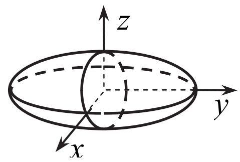
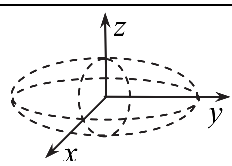
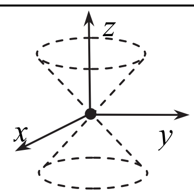
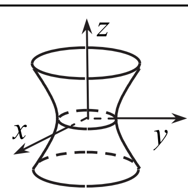
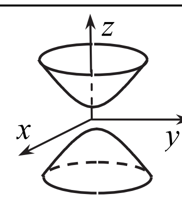
6. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

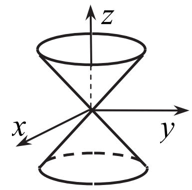
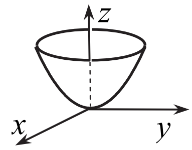
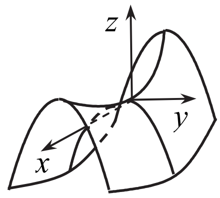
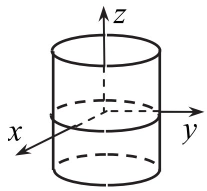
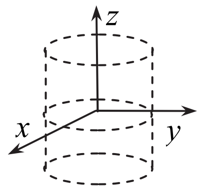
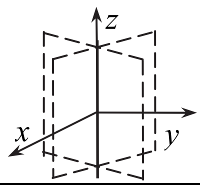
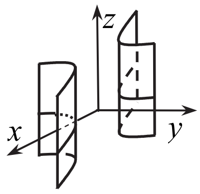
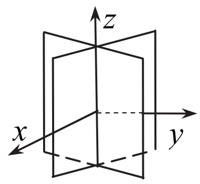
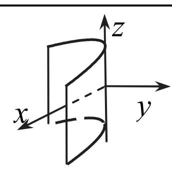
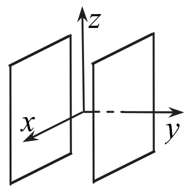
Алгебраической поверхностью второго порядка называется геометрическое место точек пространства, которое в какой-либо аффинной системе координат $Oxyz$ может быть задано уравнением вида

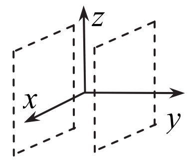
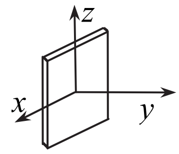
$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0 \qquad (6.1)$$

где старшие коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}, a_{33} не равны нулю одновременно. Без ограничения общности можно считать, что система координат, в которой задано уравнение поверхности второго порядка, прямоугольная. Для каждой поверхности второго порядка существует прямоугольная система координат $Oxyz$, в которой уравнение принимает наиболее простой (***канонический***) вид. Она называется ***канонической***, а уравнение – ***каноническим***. Всего имеется 17 канонических видов уравнений поверхностей второго порядка, которые приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1. **Канонические уравнения поверхностей второго порядка**

№	Уравнение поверхности	Название поверхности	Изображение поверхности
1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	эллипсоид	
2	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$	мнимый эллипсоид	
3	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$	мнимый конус	
4	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	однополостный гиперболоид	
5	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	двуполостный гиперболоид	

6	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	конус	
7	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$	эллиптический параболоид	
8	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$	гиперболический параболоид	
9	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	эллиптический цилиндр	
10	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	мнимый эллиптический цилиндр	
11	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	пара мнимых пересекающихся плоскостей	
12	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	гиперболический цилиндр	
13	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	пара пересекающихся плоскостей	
14	$y^2=2px$	параболический цилиндр	
15	$y^2-b^2=0$	пара параллельных плоскостей	

16	$y^2+b^2=0$	пара мнимых параллельных плоскостей	
17	$y^2=0$	пара совпадающих плоскостей	

В этих уравнениях $a>0$, $b>0$, $c>0$, $p>0$, причем $a \ge b \ge c$ в уравнениях 1–3; $a \ge b$ в уравнениях 4–7, 9–11.

Поверхности (1), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (12), (13), (14), (15), (17) называются ***вещественными*** (***действительными***), а поверхности (2), (3), (10), (11), (16) – ***мнимыми***. Вещественные поверхности изображены в канонических системах координат. Изображения мнимых поверхностей даются штриховыми линиями только для иллюстрации.

Поверхность второго порядка называется ***центральной***, если она имеет единственный центр (симметрии). В противном случае, если центр отсутствует или не является единственным, поверхность называется ***нецентральной***. К центральным поверхностям относятся эллипсоиды (вещественный и мнимый), гиперболоиды (однополостный и двуполостный), конусы (вещественный и мнимый). Остальные поверхности – нецентральные.

Эллипсоид

Эллипсоидом называется поверхность, определяемая в некоторой прямоугольной системе координат $Oxyz$ каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{6.2}$$

где a, b, c – положительные параметры, удовлетворяющие неравенствам $a \ge b \ge c$.

Если точка $M(x,y,z)$ принадлежит эллипсоиду (6.2), то координаты точек $(\pm x, \pm y, \pm z)$ при любом выборе знаков также удовлетворяют уравнению (6.2). Поэтому эллипсоид симметричен относительно координатных плоскостей, координатных осей и начала координат. Начало координат называют ***центром*** эллипсоида. Шесть точек $(\pm a,0,0)$, $(0,\pm b,0)$, $(0,0,\pm c)$ пересечения эллипсоида с координатными осями называются его ***вершинами***, а три отрезка координатных осей, соединяющих вершины, – ***осями*** эллипсоида. Оси эллипсоида, принадлежащие координатным осям Ox, Oy, Oz, имеют длины $2a$, $2b$, $2c$ соответственно. Если $a>b>c$, то число a называется ***большой полуосью***, число b – ***средней полуосью***, число c – ***малой полуосью*** эллипсоида. Если полуоси не удовлетворяют условиям $a \ge b \ge c$, то уравнение (6.2) не является каноническим. Однако при помощи переименования неизвестных можно всегда добиться выполнения неравенств $a \ge b \ge c$.

Плоские сечения дают возможность составить полное представление о виде эллипсоида (рис. 6.1). Например, подставляя $z = 0$ в уравнение (6.2), получаем уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ линии пересечения эллипсоида с координатной плоскостью Oxy. Это уравнение в плоскости Oxy определяет эллипс (см. разд. 5). Линии пересечения эллипсоида с другими координатными плоскостями также являются эллипсами. Они называются ***главными сечениями*** (***главными эллипсами***) эллипсоида.

Плоскости $x = \pm a$, $y = \pm b$, $z = \pm c$ определяют в пространстве ***основной прямоугольный параллелепипед***, внутри которого находится эллипсоид (рис. 6.2). Грани параллелепипеда касаются эллипсоида в его вершинах.

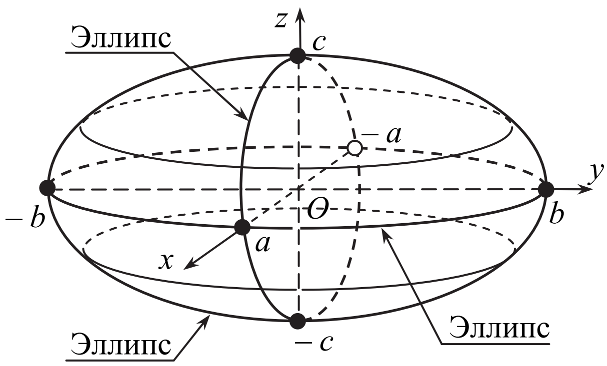


Рис. 6.1

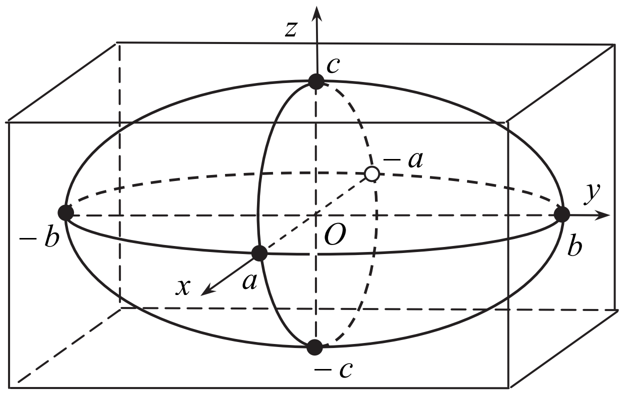


Рис. 6.2

Эллипсоид, у которого полуоси попарно различны ($a > b > c$), называется ***трехосным*** (или ***общим***). Эллипсоид, у которого две полуоси равны, называется ***эллипсоидом вращения***. Например, если $a = b$, то такую поверхность можно получить, вращая вокруг оси Oz эллипс $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, заданный в плоскости Oyz. Если все полуоси эллипсоида равны ($a = b = c = R$), то он представляет собой ***сферу*** $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ радиуса R.

Гиперболоиды

Однополостным гиперболоидом называется поверхность, определяемая в некоторой прямоугольной системе координат $Oxyz$ каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{6.3}$$

Двуполостным гиперболоидом называется поверхность, определяемая в некоторой прямоугольной системе координат $Oxyz$ каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \qquad (6.4)$$

В уравнениях (6.3), (6.4) a, b, c – положительные параметры, характеризующие гиперболоиды, причем $a \geq b$.

Начало координат называют ***центром*** гиперболоида. Точки пересечения гиперболоида с координатными осями называются его ***вершинами***. Это четыре точки $(\pm a, 0, 0)$, $(0, \pm b, 0)$ однополостного гиперболоида (6.3) и две точки $(0, 0, \pm c)$ двуполостного гиперболоида (6.4). Три отрезка координатных осей, соединяющих вершины гиперболоидов, называются ***осями*** гиперболоидов. Оси гиперболоидов, принадлежащие координатным осям Ox, Oy, называются ***поперечными осями*** гиперболоидов, а ось, принадлежащая оси аппликат Oz, – ***продольной осью*** гиперболоидов. Числа a, b, c, равные половинам длин осей, называются ***полуосями*** гиперболоидов.

Плоские сечения дают возможность составить полное представление о виде *однополостного гиперболоида*. Например, подставляя $z=0$ в уравнение (6.3), получаем уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ линии пересечения однополостного гиперболоида с координатной плоскостью Oxy. Это уравнение в плоскости Oxy определяет эллипс (см. разд. 5), который называется ***горловым***. Линии пересечения однополостного гиперболоида с другими координатными плоскостями являются гиперболами. Они называются ***главными гиперболами.*** Например, при $x=0$ получаем главную гиперболу $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, а при $y=0$ – главную гиперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

Однополостный гиперболоид можно представить как поверхность, образованную эллипсами, вершины которых лежат на главных гиперболах (рис. 6.3). Сечение однополостного гиперболоида плоскостью, параллельной оси аппликат и имеющей одну общую точку с горловым эллипсом (т.е. касающейся его), представляет собой две прямые, пересекающиеся в точке касания. Например, подставляя $x=\pm a$ в уравнение (6.3), получаем уравнение $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ двух пересекающихся прямых (см. рис. 6.3).

Плоские сечения дают возможность составить представление о виде *двуполостного гиперболоида*. Сечения двуполостного гиперболоида координатными плоскостями Oyz и Oxz представляют собой гиперболы (***главные гиперболы***), а плоскостями, параллельными плоскости Oxy, – эллипсы. Двуполостный гиперболоид можно представить как поверхность, образованную эллипсами, вершины которых лежат на главных гиперболах (рис. 6.4)

Плоскости $x = \pm a$, $y = \pm b$, $z = \pm c$ определяют в пространстве ***основной прямоугольный параллелепипед***. Две грани ($z = \pm c$) параллелепипеда касаются двуполостного гиперболоида в его вершинах (рис. 6.5).

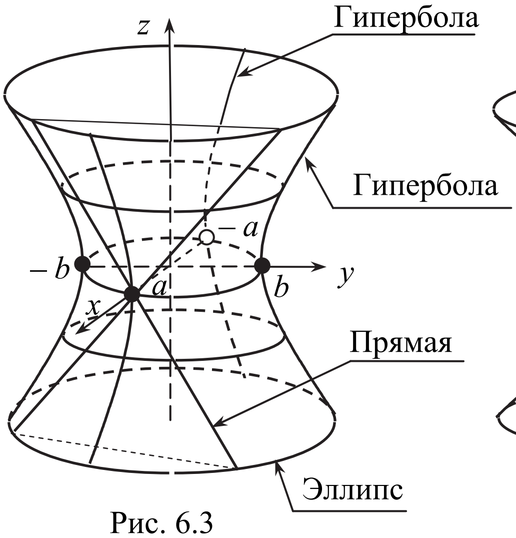


Рис. 6.3

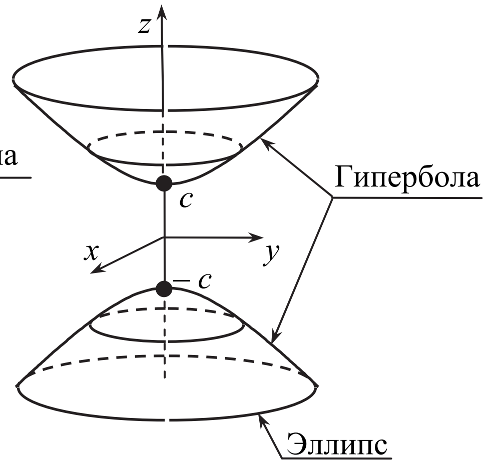


Рис. 6.4

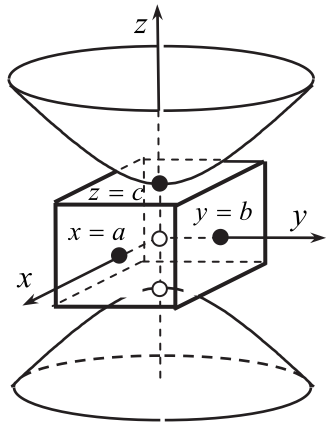


Рис. 6.5

Гиперболоид, у которого поперечные оси различны ($a \neq b$), называется ***трехосным*** (или ***общим***). Гиперболоид, у которого поперечные полуоси равны ($a = b$), называется ***гиперболоидом вращения***. Однополостный или двуполостный гиперболоиды вращения можно получить, вращая вокруг оси Oz гиперболу $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ или сопряженную гиперболу $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ соответственно.

Конус

Конусом называется поверхность, определяемая в некоторой прямоугольной системе координат $Oxyz$ каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{6.5}$$

где a, b, c – положительные параметры, характеризующие конус, причем $a \geq b$.

Начало координат называется ***центром*** конуса (рис.6.6), точка O – ***вершиной*** конуса (6.5), а любой луч OM, принадлежащий конусу, – его ***образующей***.

Плоские сечения дают возможность составить полное представление о виде конуса. Например, сечения конуса координатными плоскостями Oxz, Oyz представляют собой пары пересекающихся прямых, удовлетворяющих в этих плоскостях уравнениям $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (при $y = 0$) или $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ (при $x = 0$) соответственно. Сечения конуса плоскостями, параллельными плоскости Oxy, представляют собой эллипсы. Конус можно представить как поверхность, образованную эллипсами, центры которых лежат на оси аппликат, а вершины принадлежат координатным плоскостям Oxz и Oyz (см. рис. 6.6).

При $a = b$ все сечения конуса плоскостями $z = h$ ($h \neq 0$) становятся окружностями. Такой конус называется ***прямым круговым конусом***. Он может быть получен в результате вращения, например, прямой $z = \frac{c}{b} y$ (***образующей***) вокруг оси аппликат.

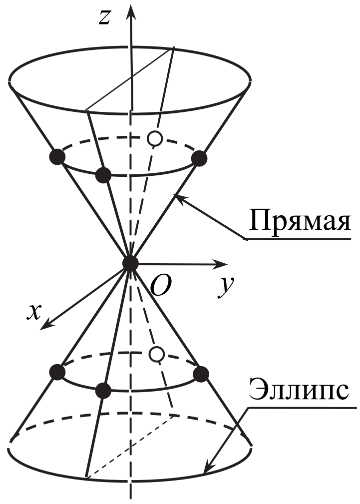


Рис. 6.6

Параболоиды

Эллиптическим параболоидом называется поверхность, определяемая в некоторой прямоугольной системе координат $Oxyz$ каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z. \tag{6.6}$$

Гиперболическим параболоидом называется поверхность, определяемая в некоторой прямоугольной системе координат $Oxyz$ каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z. \tag{6.7}$$

В уравнениях (6.6), (6.7) a и b – положительные параметры, характеризующие параболоиды, причем для эллиптического параболоида $a \geq b$.

Начало координат называют ***вершиной*** каждого из параболоидов [(6.6) или (6.7)].

Плоские сечения дают возможность составить полное представление о виде *эллиптического параболоида*. Например, плоскость Oxz пересекает эллиптический параболоид (6.6) по линии, имеющей в этой плоскости уравнение $\frac{x^2}{a^2} = 2z$, которое равносильно уравнению $x^2 = 2pz$ параболы с фокальным параметром $p = a^2$. Сечение параболоида плоскостью Oyz получаем, подставляя $x = 0$ в уравнение (6.6): $\frac{y^2}{b^2} = 2z$. Это уравнение равносильно уравнению $y^2 = 2qz$ параболы с фокальным параметром $q = b^2$. Эти сечения называются ***главными параболами*** эллиптического параболоида (6.6). Сечения плоскостями, параллельными плоскости Oxy, представляют собой эллипсы. Эллиптический параболоид можно представить как поверхность, образованную эллипсами, вершины которых лежат на главных параболах (рис. 6.7).

Эллиптический параболоид, у которого $a = b$, называется ***параболоидом вращения***. Его можно получить, вращая вокруг оси Oz параболу $y^2 = 2qz$, где $q = a^2 = b^2$ (см. разд. 5).

Плоские сечения дают возможность составить полное представление о виде *гиперболического параболоида*. Например, сечения гиперболического параболоида координатными плоскостями Oxz и Oyz представляют собой параболы (***главные параболы***) $x^2 = 2pz$ или $y^2 = -2qz$ с параметрами $p = a^2$ или $q = b^2$ соответственно. Поскольку оси симметрии главных парабол направлены в противоположные стороны, гиперболический параболоид называют ***седловой поверхностью***. Сечение гиперболического параболоида плоскостью Oxy представляет собой пару пересекающихся в начале координат прямых, а сечение плоскостью, параллельной плоскости Oxy, – гиперболу. Гиперболический параболоид можно представить как поверхность, образованную гиперболами (включая и «крест» из их асимптот), вершины которых лежат на главных параболах (рис. 6.8).

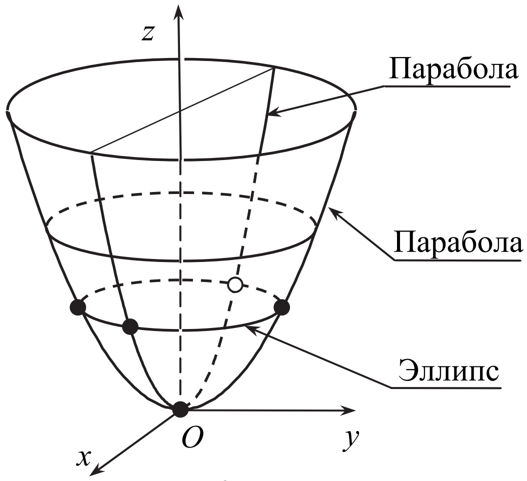


Рис. 6.7

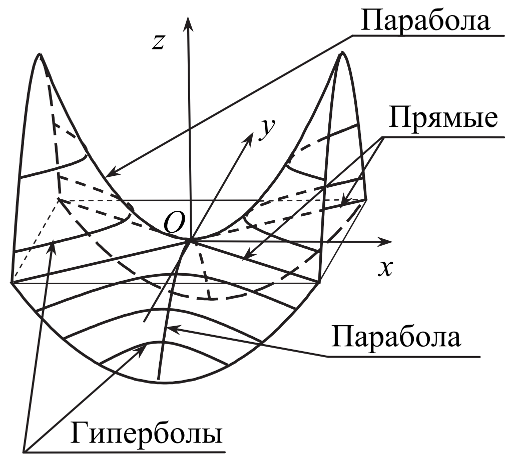


Рис. 6.8

Построение поверхности второго порядка

Для построения поверхности второго порядка, заданной в прямоугольной системе координат уравнением (6.1), нужно:

I) определить название поверхности второго порядка, составить ее каноническое уравнение;

II) найти каноническую систему координат $O'x'y'z'$ (в которой уравнение поверхности имеет канонический вид);

III) построить поверхность в заданной системе координат $Oxyz$.

Рассмотрим алгоритмы выполнения каждого этапа.

Алгоритм составления канонического уравнения поверхности второго порядка

В алгоритме применяются ***ортогональные инварианты*** – выражения, составленные из коэффициентов уравнения (6.1), которые не изменяются при замене исходной прямоугольной системы координат другой прямоугольной системой координат. Другой способ – алгоритм приведения уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду, который выполняется при помощи алгебраических преобразований, рассматривается ниже (на стр. 72).

Пусть в прямоугольной системе координат $Oxyz$ поверхность второго порядка описывается уравнением (6.1). Требуется определить ее название и составить каноническое уравнение. Для этого нужно выполнить следующие действия.

1. Вычислить ***ортогональные инварианты***

$$\tau_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \qquad \tau_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Если $\delta = \Delta = 0$, то вычислить

$$\kappa_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_1 \\ a_{13} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_3 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Если $\delta = \Delta = 0$ и $\tau_2 = \kappa_2 = 0$, то вычислить

$$\kappa_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_3 \\ a_3 & a_0 \end{vmatrix}.$$

2. По таблице 6.2 определить название поверхности, а по названию – каноническое уравнение поверхности второго порядка.

3. Составить характеристическое уравнение $-\lambda^3 + \tau_1\lambda^2 - \tau_2\lambda + \delta = 0$, используя коэффициенты, вычисленные в п.1, либо разлагая определитель

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \tau_1\lambda^2 - \tau_2\lambda + \delta.$$

Найти корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (с учетом кратности) характеристического уравнения.

Таблица 6.2. **Канонические уравнения поверхностей второго порядка**

<table>
<tr><td></td><td colspan="6">Признаки вида</td><td>Название поверхности</td><td>№</td></tr>
<tr><td rowspan="6">Центральные поверхности</td><td rowspan="6">$\delta \neq 0$</td><td rowspan="3">Эллиптический тип</td><td colspan="2" rowspan="3">$\begin{cases} \tau_2 > 0, \\ \tau_1 \cdot \delta > 0 \end{cases}$</td><td colspan="2">$\Delta < 0$</td><td>эллипсоид</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\Delta > 0$</td><td>мнимый эллипсоид</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\Delta = 0$</td><td>мнимый конус</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Гиперболический тип</td><td colspan="2" rowspan="3">$\left[\begin{array}{l} \tau_2 \leq 0, \\ \tau_1 \cdot \delta \leq 0 \end{array} \right.$</td><td colspan="2">$\Delta > 0$</td><td>однополостный гиперболоид</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\Delta < 0$</td><td>двуполостный гиперболоид</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\Delta = 0$</td><td>конус</td><td>6</td></tr>
<tr><td rowspan="11">Нецентральные поверхности</td><td rowspan="11">$\delta = 0$</td><td rowspan="11">Параболический тип</td><td colspan="4">$\Delta < 0$</td><td>эллиптический параболоид</td><td>7</td></tr>
<tr><td colspan="4">$\Delta > 0$</td><td>гиперболический параболоид</td><td>8</td></tr>
<tr><td rowspan="9">$\Delta = 0$</td><td rowspan="3">$\tau_2 > 0$</td><td colspan="2">$\tau_1 \kappa_2 < 0$</td><td>эллиптический цилиндр</td><td>9</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\tau_1 \kappa_2 > 0$</td><td>мнимый эллиптический цилиндр</td><td>10</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\kappa_2 = 0$</td><td>пара мнимых пересекающих-ся плоскостей</td><td>11</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\tau_2 < 0$</td><td colspan="2">$\kappa_2 \neq 0$</td><td>гиперболический цилиндр</td><td>12</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\kappa_2 = 0$</td><td>пара пересекающихся плоскостей</td><td>13</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\tau_2 = 0$</td><td colspan="2">$\kappa_2 \neq 0$</td><td>параболический цилиндр</td><td>14</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\kappa_2 = 0$</td><td>$\kappa_1 < 0$</td><td>пара параллельных плоскостей</td><td>15</td></tr>
<tr><td>$\kappa_1 > 0$</td><td>пара мнимых параллельных плоскостей</td><td>16</td></tr>
<tr><td>$\kappa_1 = 0$</td><td>пара совпадающих плоскостей</td><td>17</td></tr>
</table>

4. Занумеровать корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения в соответствии с правилами:

а) если поверхность эллиптического типа, то $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le |\lambda_3|$;

б) если поверхность гиперболического типа, то обозначить через λ_1 и λ_2 корни одного знака так, чтобы $|\lambda_1| \le |\lambda_2|$, а через λ_3 – корень противоположного знака;

в) если поверхность параболического типа и

– если нулевой корень двойной, то $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ и $\lambda_2 \ne 0$;

– если нулевой корень простой, а ненулевые корни одного знака, то $\lambda_3 = 0$ и $|\lambda_1| \le |\lambda_2|$;

– если нулевой корень простой, а ненулевые корни разных знаков,

то $\lambda_3 = 0$ и либо $\lambda_1 > 0$, если $\Delta \ne 0$ или $\Delta = \kappa_2 = 0$;

либо $\lambda_1 \kappa_2 > 0$, если $\Delta = 0$ и $\kappa_2 \ne 0$.

5. Вычислить коэффициенты канонического уравнения и записать его в канонической системе координат $O'x'y'z'$:

а) для поверхностей эллиптического типа:

(1) – при $\Delta < 0$ – уравнение *эллипсоида* $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} + \frac{(z')^2}{c^2} = 1$ с коэффициентами $a^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_1 \delta}$, $b^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_2 \delta}$, $c^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_3 \delta}$;

(2) при $\Delta > 0$ – уравнение *мнимого эллипсоида* $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} + \frac{(z')^2}{c^2} = -1$ с коэффициентами $a^2 = \frac{\Delta}{\lambda_1 \delta}$, $b^2 = \frac{\Delta}{\lambda_2 \delta}$, $c^2 = \frac{\Delta}{\lambda_3 \delta}$;

(3) при $\Delta = 0$ – уравнение *мнимого конуса* $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} + \frac{(z')^2}{c^2} = 0$ с коэффициентами $a^2 = \frac{1}{|\lambda_1|}$, $b^2 = \frac{1}{|\lambda_2|}$, $c^2 = \frac{1}{|\lambda_3|}$;

б) для поверхностей гиперболического типа:

(4) при $\Delta > 0$ – уравнение *однополостного гиперболоида* $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} - \frac{(z')^2}{c^2} = 1$ с коэффициентами $a^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_1 \delta}$, $b^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_2 \delta}$, $c^2 = \frac{\Delta}{\lambda_3 \delta}$;

(5) при $\Delta < 0$ – уравнение *двуполостного гиперболоида* $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} - \frac{(z')^2}{c^2} = -1$ с коэффициентами $a^2 = \frac{\Delta}{\lambda_1 \delta}$, $b^2 = \frac{\Delta}{\lambda_2 \delta}$, $c^2 = -\frac{\Delta}{\lambda_3 \delta}$;

(6) при $\Delta = 0$ – уравнение *конуса* $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} - \frac{(z')^2}{c^2} = 0$ с коэффициентами $a^2 = \frac{1}{|\lambda_1|}$, $b^2 = \frac{1}{|\lambda_2|}$, $c^2 = \frac{1}{|\lambda_3|}$;

в) для поверхностей параболического типа:

(7) при $\Delta < 0$ – уравнение *эллиптического параболоида* $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 2z$ с коэффициентами $a^2 = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1^2 \tau_2}}$, $b^2 = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_2^2 \tau_2}}$;

(8) при $\Delta > 0$ – уравнение *гиперболического параболоида* $\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 2z$ с коэффициентами $a^2 = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1^2 \tau_2}}$, $b^2 = \sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_2^2 \tau_2}}$;

(9) при $\Delta = 0$, $\tau_2 > 0$, $\tau_1 \kappa_2 < 0$ – уравнение *эллиптического цилиндра* $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$ с коэффициентами $a^2 = -\frac{\kappa_2}{\lambda_1 \tau_2}$, $b^2 = -\frac{\kappa_2}{\lambda_2 \tau_2}$;

(10) при $\Delta = 0$, $\tau_2 > 0$, $\tau_1 \kappa_2 > 0$ – уравнение *мнимого эллиптического цилиндра* $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = -1$ с коэффициентами $a^2 = \frac{\kappa_2}{\lambda_1 \tau_2}$, $b^2 = \frac{\kappa_2}{\lambda_2 \tau_2}$;

(11) при $\Delta = 0$, $\tau_2 > 0$, $\kappa_2 = 0$ – уравнение *пары мнимых пересекающихся плоскостей* $\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 0$ с коэффициентами $a^2 = \frac{1}{|\lambda_1|}$, $b^2 = \frac{1}{|\lambda_2|}$;

(12) при $\Delta = 0$, $\tau_2 < 0$, $\kappa_2 \neq 0$ – уравнение *гиперболического цилиндра* $\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1$ с коэффициентами $a^2 = -\frac{\kappa_2}{\lambda_1 \tau_2}$, $b^2 = \frac{\kappa_2}{\lambda_2 \tau_2}$;

(13) при $\Delta = 0$, $\tau_2 < 0$, $\kappa_2 = 0$ – уравнение *пары пересекающихся плоскостей* $\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 0$ с коэффициентами $a^2 = \frac{1}{\lambda_1}$, $b^2 = -\frac{1}{\lambda_2}$;

(14) при $\Delta = 0$, $\tau_2 = 0$, $\kappa_2 \neq 0$ – уравнение *параболического цилиндра* $(y')^2 = 2p\,x'$ с коэффициентом $p = \sqrt{-\frac{\kappa_2}{\tau_1^3}}$;

(15) при $\Delta = 0$, $\tau_2 = 0$, $\kappa_2 = 0$, $\kappa_1 < 0$ – уравнение *пары параллельных плоскостей* $(y')^2 - b^2 = 0$ с коэффициентом $b^2 = -\frac{\kappa_1}{\tau_1^2}$;

(16) при $\Delta = 0$, $\tau_2 = 0$, $\kappa_2 = 0$, $\kappa_1 > 0$ – уравнение *пары мнимых параллельных плоскостей* $(y')^2 + b^2 = 0$ с коэффициентом $b^2 = \frac{\kappa_1}{\tau_1^2}$;

(17) при $\Delta = 0$, $\tau_2 = 0$, $\kappa_2 = 0$, $\kappa_1 = 0$ – уравнение *пары совпадающих плоскостей* $(y')^2 = 0$.

Алгоритм нахождение канонической системы координат поверхности второго порядка

Для нахождения канонической системы координат $O'x'y'z'$ достаточно указать ее базисные векторы:

$$\bar{s}_1 = s_{11}\bar{i} + s_{21}\bar{j} + s_{31}\bar{k}, \quad \bar{s}_2 = s_{12}\bar{i} + s_{22}\bar{j} + s_{32}\bar{k}, \quad \bar{s}_3 = s_{13}\bar{i} + s_{23}\bar{j} + s_{33}\bar{k}$$

(***канонический базис***), а также координаты x_0, y_0, z_0 ее начала O' в системе координат $Oxyz$.

Пусть выполнены пп. 1–5 алгоритма составления канонического уравнения поверхности второго порядка. Как и ранее, матрицу квадратичной формы в левой части уравнения (6.1) обозначим через

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

6. Найти собственные векторы

$$l_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad l_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad l_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

матрицы A, соответствующие корням λ_1, λ_2, λ_3 характеристического уравнения, по следующим правилам:

а) если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то $l_1 = (1 \quad 0 \quad 0)^T$, $l_2 = (0 \quad 1 \quad 0)^T$, $l_3 = (0 \quad 0 \quad 1)^T$;

б) если все корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ простые, то для каждого корня найти ненулевое решение однородной системы уравнений

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{12}x + (a_{22}-\lambda)y + a_{23}z = 0, \\ a_{13}x + a_{23}y + (a_{33}-\lambda)z = 0, \end{cases} \tag{6.8}$$

а именно, решая (6.8) при $\lambda = \lambda_1$, найти $l_1 = (x_1 \quad y_1 \quad z_1)^T \neq o$; решая (6.9) при $\lambda = \lambda_2$, найти $l_2 = (x_2 \quad y_2 \quad z_2)^T \neq o$; решая (6.8) при $\lambda = \lambda_3$, найти $l_3 = (x_3 \quad y_3 \quad z_3)^T \neq o$.

Если $\lambda_3 = 0$ и корни λ_1 и λ_2 имеют разные знаки ($\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$), то столбец $l_3 = (x_3 \quad y_3 \quad z_3)^T$ должен удовлетворять дополнительному условию $a_1x_3 + a_2y_3 + a_3z_3 \leq 0$, в противном случае следует заменить столбец l_3 на противоположный: $l_3 = (-x_3 \quad -y_3 \quad -z_3)^T$.

Если $\lambda_3 = 0$ и корни λ_1 и λ_2 одного знака ($\lambda_1\lambda_2 > 0$), то столбец $l_3 = (x_3 \quad y_3 \quad z_3)^T$ должен удовлетворять дополнительному условию $\tau_1(a_1x_3 + a_2y_3 + a_3z_3) < 0$, в противном случае следует заменить столбец l_3 на противоположный: $l_3 = (-x_3 \quad -y_3 \quad -z_3)^T$;

в) если имеется двойной ненулевой корень $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, то для простого корня λ_3 найти соответствующий собственный вектор $l_3 = (x_3 \quad y_3 \quad z_3)^T \neq o$ – любое ненулевое решение системы (6.8) при $\lambda = \lambda_3$. Для кратного корня $\lambda_1 = \lambda_2$ в качестве $l_2 = (x_2 \quad y_2 \quad z_2)^T \neq o$ взять любой ненулевой столбец матрицы $A - \lambda_3 E$, а элементы столбца $l_1 = (x_1 \quad y_1 \quad z_1)^T$ найти по формулам

$$x_1 = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \qquad y_1 = -\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}, \qquad z_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Если $\lambda_3 = 0$, то столбец $l_3 = (x_3 \quad y_3 \quad z_3)^T$ должен удовлетворять дополнительному условию $\tau_1(a_1x_3 + a_2y_3 + a_3z_3) < 0$, в противном случае следует заменить столбец l_3 на противоположный: $l_3 = (-x_3 \quad -y_3 \quad -z_3)^T$;

г) если имеется двойной нулевой корень $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, то собственный вектор $l_2 = (x_2 \quad y_2 \quad z_2)^T$, соответствующий простому корню λ_2, найти как ненулевое решение системы (6.2). Вычислить столбец $a' = (a'_1 \quad a'_2 \quad a'_3)^T$:

$$a'_1 = a_1 - \frac{a_1x_2 + a_2y_2 + a_3z_2}{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \cdot x_2, \qquad a'_2 = a_2 - \frac{a_1x_2 + a_2y_2 + a_3z_2}{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \cdot y_2, \qquad a'_3 = a_3 - \frac{a_1x_2 + a_2y_2 + a_3z_2}{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \cdot z_2.$$

Если $a' = o$, то столбец $l_1 = (x_1 \quad y_1 \quad z_1)^T$ найти как ненулевое решение системы (6.8) при $\lambda = 0$. Если $a' \neq o$, то элементы столбца $l_1 = (x_1 \quad y_1 \quad z_1)^T$ вычислить по формулам $x_1 = -\tau_1 a_1'$, $y_1 = -\tau_1 a_2'$, $z_1 = -\tau_1 a_3'$. Элементы столбца $l_3 = (x_3 \quad y_3 \quad z_3)^T$ найти по формулам

$$x_3 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \quad y_3 = -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \quad z_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

По собственным векторам $l_1 = (x_1 \quad y_1 \quad z_1)^T$, $l_2 = (x_2 \quad y_2 \quad z_2)^T$, $l_3 = (x_3 \quad y_3 \quad z_3)^T$ определить канонический базис:

$$\bar{s}_1 = s_{11}\bar{i} + s_{21}\bar{j} + s_{31}\bar{k} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} \cdot \bar{i} + \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} \cdot \bar{j} + \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} \cdot \bar{k},$$

$$\bar{s}_2 = s_{12}\bar{i} + s_{22}\bar{j} + s_{32}\bar{k} = \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \cdot \bar{i} + \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \cdot \bar{j} + \frac{z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \cdot \bar{k},$$

$$\bar{s}_3 = s_{13}\bar{i} + s_{23}\bar{j} + s_{33}\bar{k} = \frac{x_3}{\sqrt{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2}} \cdot \bar{i} + \frac{y_3}{\sqrt{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2}} \cdot \bar{j} + \frac{z_3}{\sqrt{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2}} \cdot \bar{k}.$$

7. Найти координаты x_0, y_0, z_0 начала O' канонической системы координат:

а) для эллипсоидов, гиперболоидов, конусов, эллиптических или гиперболических цилиндров, пар плоскостей найти любое решение x_0, y_0, z_0 системы:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1 = 0, \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2 = 0, \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_3 = 0; \end{cases}$$

б) для параболоидов и параболического цилиндра найти любое решение x_0, y_0, z_0 системы:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_1^{\perp} = 0, \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_2^{\perp} = 0, \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_3^{\perp} = 0, \\ (a_1 + a_1')\,x + (a_2 + a_2')\,y + (a_3 + a_3')\,z + a_0 = 0, \end{cases}$$

где в зависимости от вида поверхности положить:

– для эллиптического и гиперболического параболоидов:

$$\mu = a_1 s_{13} + a_2 s_{23} + a_3 s_{33}, \quad a_1' = \mu s_{13}, \quad a_2' = \mu s_{23}, \quad a_3' = \mu s_{33},$$

$$a_1^{\perp} = a_1 - a_1', \quad a_2^{\perp} = a_2 - a_2', \quad a_3^{\perp} = a_3 - a_3';$$

– для параболического цилиндра:

$$\mu = a_1 s_{12} + a_2 s_{22} + a_3 s_{32}, \quad a_1^{\perp} = \mu s_{12}, \quad a_2^{\perp} = \mu s_{22}, \quad a_3^{\perp} = \mu s_{32},$$

$$a_1' = a_1 - a_1^{\perp}, \quad a_2' = a_2 - a_2^{\perp}, \quad a_3' = a_3 - a_3^{\perp}.$$

Найденные в пп.6,7 координаты x_0, y_0, z_0 начала O' и базисные векторы $\overline{s}_1$, $\overline{s}_2$, $\overline{s}_3$ определяют каноническую систему координат $O'x'y'z'$. "Старые" координаты x, y, z и "новые" (канонические) x', y', z' связаны формулами

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s + S \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + s_{11}x' + s_{12}y' + s_{13}z', \\ y = y_0 + s_{11}x' + s_{12}y' + s_{13}z', \\ z = z_0 + s_{11}x' + s_{12}y' + s_{13}z', \end{cases} \tag{6.9}$$

где $s = (x_0 \quad y_0 \quad z_0)^T$ – координатный столбец вектора $\overline{s} = OO'$ переноса начала O' канонической системы координат.

Алгоритм построения поверхности второго порядка

Пусть определено название поверхности второго порядка, составлено ее каноническое уравнение (см. пп. 1–5 алгоритма), а также найдена каноническая система координат $O'x'y'z'$ (пп. 6, 7 алгоритма). Требуется построить поверхность второго порядка в заданной системе координат $Oxyz$. Для этого нужно выполнить следующие действия.

8. В координатном пространстве $Oxyz$ изобразить каноническую систему координат $O'x'y'z'$, координаты x_0, y_0, z_0 начала O' которой найдены в п. 7, а координаты базисных векторов – в п.6.

9. Построить поверхность второго порядка в канонической системе координат $O'x'y'z'$ по каноническому уравнению, найденному в п. 5. Построение центральных поверхностей (эллипсоида, гиперболоидов, конуса) удобно начинать с изображения основного параллелепипеда. При построении поверхностей использовать их типовые изображения в канонической системе координат. Мнимые поверхности не изображаются, за исключением мнимого конуса или пары мнимых пересекающихся плоскостей (при этом изображаются только точка O' или ось $O'z'$ соответственно).

Рассмотрим другой алгоритм получения канонического уравнения линии второго порядка и нахождения канонической системы координат $O'x'y'z'$ (первые два этапа построения поверхности второго порядка).

Алгоритм приведения уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду

Пусть в прямоугольной системе координат $Oxyz$ поверхность второго порядка задана уравнением (6.1)

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_1x+2a_2y+2a_3z+a_0=0\,.$$

Чтобы привести уравнение к каноническому виду, нужно выполнить следующие действия.

1. Составить матрицу квадратичной формы и столбец коэффициентов линейной формы:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad a=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Если матрица квадратичной формы диагональная, т.е. $A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, то положить $S=E$ и перейти к п. 4.

2. Составить характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

и найти его корни $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ (с учетом кратности).

3. Найти взаимно перпендикулярные единичные собственные векторы s_1,s_2,s_3, соответствующие корням $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ характеристического уравнения, и составить из них матрицу $S=(s_1 \mid s_2 \mid s_3)$:

а) если уравнение имеет один тройной корень $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$, то базис исходной системы координат является каноническим. Поэтому полагаем $S=E$ и переходим к п. 4;

б) если все корни $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ простые, то для каждого корня найти ненулевое решение однородной системы уравнений $(A-\lambda_i E)l_i=o$, $i=1,2,3$. Например, собственный вектор $l_3=(x_3 \quad y_3 \quad z_3)^T$ для простого корня λ_3 находится как любое ненулевое решение системы

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_3)x+a_{12}y+a_{13}z=0, \\ a_{12}x+(a_{22}-\lambda_3\, y+a_{23}z=0, \\ a_{13}x+a_{23}y+(a_{33}-\lambda_3)z=0; \end{cases} \qquad \text{или} \qquad (A-\lambda_3E)l_3=o\,;$$

в) если имеется двойной корень, например, $\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$, то для простого корня λ_3 найти соответствующий собственный вектор l_3 – любое ненулевое решение системы $(A-\lambda_3 E)l_3=o$. Для кратного корня $\lambda_1=\lambda_2$ в качестве l_2 взять любой ненулевой столбец матрицы $A-\lambda_3 E$, а координатный столбец l_1 найти, используя векторное произведение $\bar{l}_1=[\bar{l}_2,\bar{l}_3]$.

Нормируя найденные в п.«б» или «в» собственные векторы l_1,l_2,l_3, получаем координатные столбцы

$$s_1=\frac{1}{\sqrt{l_1^T l_1}}\cdot l_1,\quad s_2=\frac{1}{\sqrt{l_2^T l_2}}\cdot l_2,\quad s_3=\frac{1}{\sqrt{l_3^T l_3}}\cdot l_3$$

базисных векторов новой прямоугольной системы координат $Ox'y'z'$. Составляем матрицу S перехода к новому базису, записывая собственные векторы s_1, s_2, s_3 по столбцам: $S=(s_1 \mid s_2 \mid s_3)$.

4. Вычислить столбец коэффициентов линейной формы $a'=S^T a=(a_1' \quad a_2' \quad a_3')^T$ и составить упрощенное уравнение поверхности второго порядка:

$$\lambda_1(x')^2+\lambda_2(y')^2+\lambda_3(z')^2+2a_1'x'+2a_2'y'+2a_3'z'+a_0=0. \tag{6.10}$$

В зависимости от вида этого уравнения выполнить следующие действия.

а) Если в уравнении (6.10) нет линейных членов, то переходим к п. 5.

б) Если в уравнении (6.10) имеются линейный и квадратичный члены с какой-либо неизвестной, то дополняем эти члены до полного квадрата и заменяем его квадратом новой неизвестной. Например, если в уравнении $\lambda_1\neq 0$ и $a_1'\neq 0$, то выполняем преобразования:

$$\lambda_1(x')^2+2a_1'x'=\lambda_1\left[(x')^2+2\frac{a_1'}{\lambda_1}x'+\left(\frac{a_1'}{\lambda_1}\right)^2\right]-\lambda_1\left(\frac{a_1'}{\lambda_1}\right)^2=\lambda_1\left(x'+\frac{a_1'}{\lambda_1}\right)^2-\lambda_1\left(\frac{a_1'}{\lambda_1}\right)^2=\lambda_1(x'')^2-\lambda_1\left(\frac{a_1'}{\lambda_1}\right)^2,$$

где $x''=x'+\frac{a_1'}{\lambda_1}$. В полученном уравнении нет линейного члена с неизвестной x''.

в) Если в уравнении (6.10) имеются два линейных члена с двумя неизвестными, а квадраты одноименных неизвестных отсутствуют, то делаем ортогональную замену этих неизвестных так, чтобы заменить их одной неизвестной. Например, если в уравнении $\lambda_1\neq 0$, $\lambda_2=0$, $\lambda_3=0$, $a_1'=0$, $a_2'\neq 0$, $a_3'\neq 0$, т.е. уравнение имеет вид

$$\lambda_1(x')^2+2a_2'y'+2a_3'z'+a_0=0,$$

то нужно выполнить замену неизвестных

$$x'' = x', \quad y'' = \frac{1}{\mu}(a_2' y' + a_3' z' + \frac{1}{2} a_0), \quad z'' = \frac{1}{\mu}(-a_3' y' + a_2' z'),$$

где $\mu = \sqrt{(a_2')^2 + (a_3')^2}$. Эта ортогональная замена неизвестных приводит уравнение к виду

$$\lambda_1 (x'')^2 + 2\mu\, y'' = 0.$$

г) Если одна неизвестная входит в уравнение (6.10) только в первой степени, а другие неизвестные – только во второй, то нужно уничтожить свободный член уравнения, заменяя первую неизвестную. Например, в уравнении

$$\lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 + 2a_3' z' + a_0 = 0,$$

можно преобразовать неквадратичные члены: $2a_3' z' + a_0 = 2a_3'(z' + \frac{a_0}{2a_3'}) = 2a_3' z''$, $z'' = z' + \frac{a_0}{2a_3'}$.

5. Полученное в результате преобразований (п. 4) ***приведенное*** уравнение имеет «почти» канонический вид. Для окончательного упрощения приведенного уравнения применяются при необходимости следующие преобразования:

а) переименование координатных осей, например, $x' = y''$, $y' = x''$, $z' = z''$;

б) изменение направления координатной оси, например: $x' = -x''$, $y' = y''$, $z' = z''$;

в) умножение обеих частей уравнения на отличный от нуля множитель;

г) перенос членов из одной части уравнения в другую.

В результате этих преобразований уравнение приводится к каноническому виду. Замену неизвестных, приводящую уравнение поверхности к каноническому виду, определяем как композицию всех замен, применяемых в ходе решения. Выражая исходные координаты через канонические, получаем формулы (6.9). После этого выполняем п. 8, 9 алгоритм построения поверхности второго порядка.

Этот алгоритм удобно использовать в случае, когда нет произведения неизвестных, при этом п. 2, 3 не выполняются. Если же произведение неизвестных входит в уравнение, то приходиться делать поворот системы координат (п. 1), что приводит к довольно громоздким выкладкам.

Пример 10. В прямоугольной системе координат $Oxyz$ заданы уравнения

1) $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 2z + 1 = 0$;

2) $2x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 6yz + 4x + 16y + 16z + 10 = 0$

поверхностей второго порядка:

10.1. Уравнение 1) привести к каноническому виду, выполняя преобразование данной системы координат (без поворотов), определить название поверхности, найти координаты

(x_0, y_0, z_0) начала O' канонической системы координат $O'x'y'z'$ в данной системе координат $Oxyz$, записать формулы, выражающие координаты x, y, z через канонические координаты x', y', z', построить поверхность в данной системе координат $Oxyz$.

10.2. Для уравнения 2) вычислить ортогональные инварианты, по ним определить название поверхности и составить каноническое уравнение, найти координаты базисных векторов $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$, $\bar{s}_3$ и координаты (x_0, y_0, z_0) начала O' канонической системы координат $O'x'y'z'$ относительно данной системы координат $Oxyz$, записать формулы, выражающие координаты x, y, z через канонические координаты x', y', z', построить поверхность в канонической системе координат $O'x'y'z'$.

Решение. Уравнение 1). Применяем алгоритм приведения уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду (см. стр. 72).

1. Сравнивая заданное уравнение с (6.1), определяем коэффициенты, по которым составляем матрицу A квадратичной формы и столбец a коэффициентов линейной формы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица A диагональная ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$), а уравнение имеет упрощенный вид (отсутствуют произведения неизвестных). Поэтому полагаем, что $S = E$ и переходим к п.4.

4. В заданном уравнении имеются линейные члены всех неизвестных, а также квадраты неизвестных x и y. Дополняем члены с неизвестными x и y до полных квадратов (см. п.4 «б» алгоритма):

$$(x^2 + 2x + 1) - 1 + (y^2 - 4y + 4) - 4 + 2z + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 + (y-2)^2 + 2z - 4 = 0.$$

Сделаем замену $x_1 = x + 1$, $y_1 = y - 2$, $z_1 = z$: $x_1^2 + y_1^2 + 2z_1 - 4 = 0$. Получили уравнение, в котором имеется один линейный член с неизвестной z_1, а квадрата этой неизвестной нет (см. п.4, «г» алгоритма). Сделаем замену $z_2 = z_1 - 2$, чтобы в уравнении исчез свободный член (для единообразия обозначим $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$):

$$x_2^2 + y_2^2 + 2z_2 = 0.$$

5. Полученное уравнение $x_2^2 + y_2^2 + 2z_2 = 0$ имеет простейший вид. Переносим линейный член в правую часть: $x_2^2 + y_2^2 = -2z_2$, и делаем замену $z' = -z_2$, меняя направление оси аппликат (для единообразия обозначаем $x' = x_2$, $y' = y_2$):

$$\frac{(x')^2}{1^2}+\frac{(y')^2}{1^2}=2z'.$$

Получили каноническое уравнение эллиптического параболоида (уравнение (7) в табл. 6.1) с коэффициентами $a=b=1$.

Найдем замену неизвестных, приводящую данное уравнение к каноническому виду. В п. 4, 5 решения были сделаны следующие замены: $x_1=x+1$, $y_1=y-2$, $z_1=z$; $x_2=x_1$, $y_2=y_1$, $z_2=z_1-2$; $x'=x_2$, $y'=y_2$, $z'=-z_2$. Выражая заменяемые неизвестные, получаем цепочки замен:

$$x=x_1-1,\ x_1=x_2,\ x_2=x' \quad\Rightarrow\quad x=x_1-1=x_2-1=x'-1;$$

$$y=y_1+2,\ y_1=y_2,\ y_2=y' \quad\Rightarrow\quad y=y_1+2=y_2+2=y'+2;$$

$$z=z_1,\ z_1=z_2+2,\ z_2=-z' \quad\Rightarrow\quad z=z_1=z_2+2=-z'+2.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x=x'-1, \\ y=y'+2, \\ z=-z'+2, \end{cases} \text{или} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=s+S\cdot\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Таким образом, найдены координатный столбец s вектора $\bar{s}=\overline{OO'}$ переноса начала координат и матрица S перехода к каноническому базису:

$$s=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Построим эллиптический параболоид в данной системе координат, используя каноническую. Сначала отмечаем начало $O'(-1,2,2)$ канонической системы координат (рис. 6.9). Затем изображаем оси канонической системы координат. Так как при возрастании x' возрастает абсцисса $x=x'-1$, то направление оси $O'x'$ совпадает с направлением оси Ox. Аналогич-

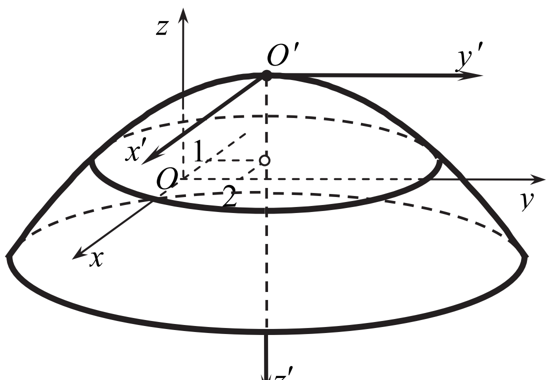


Рис. 6.9

ный вывод делаем в отношении направления оси $O'y'$, которое совпадает с направлением оси Oy. Ось $O'z'$ имеет направление, противоположное оси Oz, поскольку при возрастании z' убывает аппликата $z=-z'+2$. Строим поверхность, учитывая изображение (рис. 6.7) эллиптического параболоида в канонической системе координат.

У р а в н е н и е 2). Применяем алгоритм составления канонического уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду (см. стр. 64). Сравнивая заданное уравнение с (6.1), определяем коэффициенты: $a_{11}=2$, $a_{12}=0$, $a_{13}=0$, $a_{22}=5$, $a_{23}=3$, $a_{33}=5$, $a_1=2$, $a_2=8$, $a_3=8$, $a_0=10$.

1. Вычисляем инварианты: $\tau_1=2+5+5=12$,

$$\tau_2=\begin{vmatrix}2&0\\0&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&0\\0&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5&3\\3&5\end{vmatrix}=10+10+25-9=36,\quad \delta=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&5&3\\0&3&5\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}5&3\\3&5\end{vmatrix}=32,$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&0&0&2\\0&5&3&8\\0&3&5&8\\2&8&8&10\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0&0&2\\0&5&3&8\\0&3&5&8\\0&8&8&8\end{vmatrix}=2\cdot8\cdot\begin{vmatrix}5&3&8\\3&5&8\\1&1&1\end{vmatrix}=-256.$$

2. По таблице 6.2 определяем, что уравнение задает *эллипсоид*, так как $\tau_2>0$, $\tau_1\delta>0$, $\Delta<0$.

3. Составляем характеристическое уравнение $-\lambda^3+12\lambda^2-36\lambda+32=0$ и находим его корни $\lambda=2$ (двойной корень), $\lambda=8$ (простой корень).

4. Поскольку поверхность эллиптического типа, то корни уравнения обозначим $\lambda_1=\lambda_2=2$, $\lambda_3=8$, чтобы выполнялось условие $|\lambda_1|\le|\lambda_2|\le|\lambda_3|$.

5. Вычисляем коэффициенты канонического уравнения эллипсоида:

$$a^2=-\frac{\Delta}{\lambda_1\delta}=-\frac{-256}{2\cdot32}=4,\quad b^2=-\frac{\Delta}{\lambda_2\delta}=-\frac{-256}{2\cdot32}=4,\quad c^2=-\frac{\Delta}{\lambda_3\delta}=-\frac{-256}{8\cdot32}=1.$$

Таким образом, каноническое уравнение (1) заданной поверхности имеет вид

$$\frac{(x')^2}{2^2}+\frac{(y')^2}{2^2}+\frac{(z')^2}{1^2}=1.$$

Переходим к нахождению канонической системы координат.

Обозначим через $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&5&3\\0&3&5\end{pmatrix}$ матрицу квадратичной формы в левой части заданного уравнения.

6. Находим собственные векторы l_1, l_2, l_3 матрицы A, соответствующие корням $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 8$ характеристического уравнения. Поскольку имеется двойной ненулевой корень $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ (см. п. 6, «в» алгоритма), то для простого корня $\lambda_3 = 8$ находим ненулевое решение l_3 однородной системы уравнений (6.9):

$$\begin{cases} (2-8)x + 0\cdot y + 0\cdot z = 0, \\ 0\cdot x + (5-8)y + 3z = 0, \\ 0\cdot x + 3\cdot y + (5-8)z = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -6x = 0, \\ -3y + 3z = 0, \\ 3y - 3z = 0. \end{cases}$$

Возьмем, например, решение $x = 0$, $y = 1$, $z = 1$, т.е. $l_3 = (0 \quad 1 \quad 1)^T$. В качестве l_2 принимаем первый (ненулевой) столбец $l_2 = (-6 \quad 0 \quad 0)^T$ матрицы

$$A - 8E = \begin{pmatrix} 2-8 & 0 & 0 \\ 0 & 5-8 & 3 \\ 0 & 3 & 5-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Элементы столбца $l_1 = (x_1 \quad y_1 \quad z_1)^T$ находим по формулам

$$x_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad y_1 = -\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 6, \quad z_1 = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -6, \text{ т.е. } l_1 = (0 \quad 6 \quad -6)^T.$$

По собственным векторам $l_1 = (0 \quad 6 \quad -6)^T$, $l_2 = (-6 \quad 0 \quad 0)^T$, $l_3 = (0 \quad 1 \quad 1)^T$ определяем канонический базис:

$$\bar{s}_1 = s_{11}\bar{i} + s_{21}\bar{j} + s_{31}\bar{k} = \frac{1}{\sqrt{0^2+6^2+(-6)^2}} \cdot (0\cdot\bar{i} + 6\cdot\bar{j} - 6\cdot\bar{k}) = 0\cdot\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\bar{j} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\bar{k},$$

$$\bar{s}_2 = s_{12}\bar{i} + s_{22}\bar{j} + s_{32}\bar{k} = \frac{1}{\sqrt{(-6)^2+0^2+0^2}} \cdot (-6\cdot\bar{i} + 0\cdot\bar{j} + 0\cdot\bar{k}) = -1\cdot\bar{i} + 0\cdot\bar{j} + 0\cdot\bar{k},$$

$$\bar{s}_3 = s_{13}\bar{i} + s_{23}\bar{j} + s_{33}\bar{k} = \frac{1}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}} \cdot (0\cdot\bar{i} + 1\cdot\bar{j} + 1\cdot\bar{k}) = 0\cdot\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\bar{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\bar{k}.$$

Составляем матрицу S, записывая по столбцам координаты этих векторов

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

7. Поскольку поверхность является эллипсоидом, то находим координаты x_0, y_0, z_0 начала O' канонической системы координат, решая систему уравнений (см. п. 7, «а» алгоритма):

$$\begin{cases} 2\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z + 2 = 0, \\ 0\cdot x + 5\cdot y + 3\cdot z + 8 = 0, \\ 0\cdot x + 3\cdot y + 5\cdot z + 8 = 0. \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x + 2 = 0, \\ 5y + 3z + 8 = 0, \\ 3y + 5z + 8 = 0. \end{cases}$$

Получаем единственное решение $x_0 = -1$, $y_0 = -1$, $z_0 = -1$. Следовательно, начало O' канонической системы координат имеет координаты $O'(-1,-1,-1)$. Такие же координаты имеет вектор переноса $\bar{s} = \overline{OO'} = -\bar{i} - \bar{j} - \bar{k}$ начала O' системы координат.

Запишем формулы (6.10) для матрицы S, найденной в п. 6, и координатного столбца $s = (-1 \quad -1 \quad -1)^T$ вектора переноса $\bar{s}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s + S\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -1 - y', \\ y = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x' + s\frac{1}{\sqrt{2}}z', \\ z = -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'. \end{cases}$$

Данную поверхность нужно построить в канонической системе координат. Поэтому сначала изображаем каноническую систему координат $O'x'y'z'$ (рис. 6.10). Отмечаем на координатных осях вершины эллипсоида $x' = \pm 2$, $y' = \pm 2$, $z' = \pm 1$. Затем строим поверхность (рис. 6.10), учитывая изображение (рис. 6.1) эллипсоида в канонической системе координат.

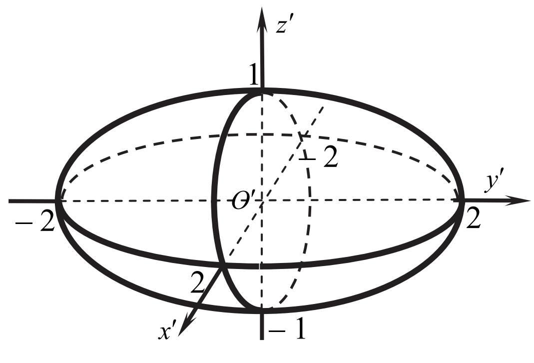


Рис. 6.10

Ответ: 1) каноническое уравнение эллиптического параболоида $\frac{(x')^2}{1^2} + \frac{(y')^2}{1^2} = 2z'$; координаты $x_0 = -1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 2$; формулы $x = x' - 1$, $y = y' + 2$, $z = -z' + 2$; эллиптический параболоид изображен на рис. 6.9;

2) каноническое уравнение эллипсоида $\frac{(x')^2}{2^2} + \frac{(y')^2}{2^2} + \frac{(z')^2}{1^2} = 1$; координаты $x_0 = -1$, $y_0 = -1$, $z_0 = -1$; формулы $x = -1 - y'$, $y = -1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x' + s\frac{1}{\sqrt{2}}z'$, $z = -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'$; эллипсоид изображен на рис. 6.10.

7. ВАРИАНТЫ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Точки M и N делят соответственно диагональ AC и сторону BC параллелограмма $ABCD$ в отношениях, которые приведены в таблице 7.1. Разложить вектор $\overline{MN}$ по векторам $\overline{a} = \overline{AD}$ и $\overline{b} = \overline{AB}$. В каком отношении прямая BM делит отрезок AN?

Таблица 7.1.

Вариант	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$AM:MC$	3:1	2:3	1:2	3:1	2:3	2:1	3:1	3:2	1:2	2:3
$BN:NC$	1:2	1:3	2:3	1:4	3:4	1:5	2:5	3:5	4:5	1:6
Вариант	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
$AM:MC$	3:1	3:2	2:1	3:1	3:2	1:2	1:3	2:3	2:1	3:2
$BN:NC$	2:1	3:1	3:2	4:1	4:3	5:1	5:2	5:3	5:4	6:5

2. Координаты вершин треугольной пирамиды $ABCD$ в аффинной системе координат $Ox_1x_2x_3$ приведены в таблице 7.2. Найти:

а) координаты вектора $\overline{AB}$;

б) координаты середины L ребра AD;

в) координаты точки M пересечения медиан треугольника ABC;

г) координаты точки N, которая делит отрезок DM в отношении $DN:NM = 3:1$;

д) отношение, в котором плоскость грани ABC делит отрезок OD.

Таблица 7.2.

Вар.	A	B	C	D	**Вар.**	A	B	C	D
1	(2,2,1)	(1,4,1)	(1,2,4)	(4,8,6)	**2**	(4,1,1)	(2,4,1)	(2,1,5)	(8,2,5)
3	(5,1,1)	(2,5,1)	(2,1,3)	(7,5,1)	**4**	(6,1,1)	(2,2,1)	(2,1,4)	(6,4,6)
5	(4,1,1)	(2,5,1)	(2,1,2)	(4,5,8)	**6**	(2,1,2)	(1,3,1)	(1,1,5)	(4,7,7)
7	(3,2,1)	(1,5,1)	(1,2,5)	(7,3,5)	**8**	(3,1,1)	(1,4,1)	(1,1,3)	(6,8,8)
9	(5,2,1)	(1,3,2)	(1,1,1)	(5,6,4)	**10**	(3,2,1)	(1,6,1)	(1,2,2)	(3,6,8)
11	(3,1,1)	(2,3,1)	(2,1,4)	(5,7,6)	**12**	(3,1,2)	(1,4,2)	(1,1,6)	(7,2,6)
13	(4,1,2)	(1,5,2)	(1,1,4)	(6,5,8)	**14**	(5,1,2)	(1,2,2)	(1,1,5)	(5,4,7)
15	(3,1,2)	(1,5,2)	(1,1,3)	(3,5,9)	**16**	(3,2,1)	(2,4,1)	(2,2,4)	(5,6,6)
17	(4,1,2)	(2,4,2)	(1,1,6)	(8,2,6)	**18**	(4,2,2)	(1,6,2)	(1,2,4)	(6,6,8)
19	(6,2,1)	(2,3,1)	(2,2,4)	(6,5,6)	**20**	(4,1,2)	(2,5,2)	(2,1,3)	(4,5,9)

3. Угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равен φ, вектор $\overline{c}$ образует с плоскостью, параллельной векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, угол ψ, причем $\left|\overline{a}\right|=1$, $\left|\overline{b}\right|=2$, $\left|\overline{c}\right|=3$. Векторы $\overline{d}$ и $\overline{e}$ линейно выражаются через $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Величины φ, ψ углов и разложения векторов $\overline{d}$ и $\overline{e}$ приведены в таблице 7.3. Вычислить:

а) $(\overline{a},\overline{b})$, $(\overline{a}+\overline{b},\overline{a}-\overline{b})$, $(\overline{d},\overline{e})$;

б) $\left|[\overline{a},\overline{b}]\right|$, $\left|[\overline{a}+\overline{b},\overline{a}-\overline{b}]\right|$, $\left|[\overline{d},\overline{e}]\right|$;

в) $\left|(\overline{a},\overline{b},\overline{c})\right|$, $\left|(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c},\overline{d}-2\overline{c},\overline{e}+\overline{c})\right|$.

Таблица 7.3.

Вар.	φ	ψ	$\overline{d}$	$\overline{e}$	**Вар.**	φ	ψ	$\overline{d}$	$\overline{e}$
1	120^o	30^o	$3\overline{a}+\overline{b}$	$\overline{a}-3\overline{b}$	**2**	30^o	60^o	$4\overline{a}+\overline{b}$	$4\overline{a}-\overline{b}$
3	150^o	45^o	$3\overline{a}+2\overline{b}$	$3\overline{a}-2\overline{b}$	**4**	45^o	60^o	$4\overline{a}+3\overline{b}$	$4\overline{a}-3\overline{b}$
5	135^o	60^o	$5\overline{a}+\overline{b}$	$5\overline{a}-\overline{b}$	**6**	60^o	45^o	$\overline{a}+2\overline{b}$	$\overline{a}-2\overline{b}$
7	120^o	45^o	$5\overline{a}+2\overline{b}$	$5\overline{a}-2\overline{b}$	**8**	30^o	45^o	$2\overline{a}+3\overline{b}$	$2\overline{a}-3\overline{b}$
9	150^o	60^o	$5\overline{a}+3\overline{b}$	$5\overline{a}-3\overline{b}$	**10**	45^o	30^o	$\overline{a}+4\overline{b}$	$\overline{a}-4\overline{b}$
11	135^o	30^o	$5\overline{a}+4\overline{b}$	$5\overline{a}-4\overline{b}$	**12**	60^o	30^o	$\overline{a}+3\overline{b}$	$\overline{a}-3\overline{b}$
13	120^o	60^o	$\overline{a}+6\overline{b}$	$\overline{a}-6\overline{b}$	**14**	150^o	60^o	$\overline{a}+5\overline{b}$	$\overline{a}-5\overline{b}$
15	150^o	30^o	$3\overline{a}+5\overline{b}$	$3\overline{a}-5\overline{b}$	**16**	135^o	30^o	$2\overline{a}+5\overline{b}$	$2\overline{a}-5\overline{b}$
17	135^o	45^o	$\overline{a}+7\overline{b}$	$\overline{a}-7\overline{b}$	**18**	120^o	45^o	$3\overline{a}+4\overline{b}$	$3\overline{a}-4\overline{b}$
19	30^o	60^o	$7\overline{a}+\overline{b}$	$7\overline{a}-\overline{b}$	**20**	150^o	60^o	$6\overline{a}+\overline{b}$	$6\overline{a}-\overline{b}$

4. Разложения векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ в ортонормированном базисе $\overline{i}$, $\overline{j}$ приведены в таблице 7.4. Найти:

а) разложение вектора $\overline{i}$ по векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

б) длину вектора $\overline{a}$;

в) единичный вектор $\overline{e}$, имеющий направление вектора $\overline{a}$;

г) направляющие косинусы вектора $\overline{a}$;

д) величину φ угла между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

е) алгебраическое значение $np_{\overline{b}}\overline{a}$ ортогональной проекции вектора $\overline{a}$ на направление вектора $\overline{b}$;

ж) ортогональную проекцию $\overline{np_{\overline{b}}\overline{a}}$ вектора $\overline{a}$ на направление вектора $\overline{b}$;

з) вектор $\overline{c}$, имеющий длину вектора $\overline{b}$ и направление вектора $\overline{a}$.

Таблица 7.4.

Вар.	$\overline{a}$	$\overline{b}$	**Вар.**	$\overline{a}$	$\overline{b}$	**Вар.**	$\overline{a}$	$\overline{b}$	**Вар.**	$\overline{a}$	$\overline{b}$
1	$5\overline{i}+\overline{j}$	$2\overline{i}-3\overline{j}$	**2**	$2\overline{i}+3\overline{j}$	$\overline{i}-2\overline{j}$	**3**	$\overline{i}+5\overline{j}$	$4\overline{i}-\overline{j}$	**4**	$2\overline{i}+4\overline{j}$	$3\overline{i}-\overline{j}$
5	$3\overline{i}-4\overline{j}$	$2\overline{i}+3\overline{j}$	**6**	$2\overline{i}+\overline{j}$	$\overline{i}+2\overline{j}$	**7**	$\overline{i}-3\overline{j}$	$4\overline{i}+\overline{j}$	**8**	$2\overline{i}-4\overline{j}$	$3\overline{i}+2\overline{j}$
9	$3\overline{i}+2\overline{j}$	$2\overline{i}-\overline{j}$	**10**	$2\overline{i}-\overline{j}$	$\overline{i}-3\overline{j}$	**11**	$\overline{i}+4\overline{j}$	$4\overline{i}-3\overline{j}$	**12**	$4\overline{i}+\overline{j}$	$3\overline{i}-2\overline{j}$
13	$5\overline{i}-2\overline{j}$	$2\overline{i}+\overline{j}$	**14**	$2\overline{i}-4\overline{j}$	$\overline{i}+3\overline{j}$	**15**	$\overline{i}+3\overline{j}$	$4\overline{i}-2\overline{j}$	**16**	$4\overline{i}+3\overline{j}$	$5\overline{i}-\overline{j}$
17	$5\overline{i}+3\overline{j}$	$4\overline{i}-3\overline{j}$	**18**	$2\overline{i}-5\overline{j}$	$3\overline{i}+\overline{j}$	**19**	$3\overline{i}-4\overline{j}$	$4\overline{i}+2\overline{j}$	**20**	$4\overline{i}-2\overline{j}$	$5\overline{i}+\overline{j}$

5. На векторах $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ построена треугольная пирамида $OABC$. Разложения этих векторов в ортонормированном базисе $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ приведены в таблице 7.5. Найти:

а) длину ребра OA;

б) величину φ угла AOC;

в) площадь S треугольника OAC;

г) объем V пирамиды $OABC$;

д) высоту h пирамиды, опущенную из вершины B.

Таблица 7.5.

Вар.	$\overline{OA}$	$\overline{OB}$	$\overline{OC}$	**Вар.**	$\overline{OA}$	$\overline{OB}$	$\overline{OC}$
1	$-2\overline{i}+2\overline{j}-\overline{k}$	$2\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$	$\overline{i}+\overline{j}-\overline{k}$	**2**	$2\overline{i}+2\overline{j}-\overline{k}$	$-2\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$	$\overline{i}-\overline{j}-2\overline{k}$
3	$-2\overline{i}+2\overline{j}+\overline{k}$	$\overline{i}+2\overline{j}+\overline{k}$	$\overline{i}-\overline{j}+\overline{k}$	**4**	$2\overline{i}+2\overline{j}+\overline{k}$	$-\overline{i}+2\overline{j}+\overline{k}$	$\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$
5	$-2\overline{i}+\overline{j}+2\overline{k}$	$\overline{i}+\overline{j}+2\overline{k}$	$\overline{i}-\overline{j}-\overline{k}$	**6**	$2\overline{i}+\overline{j}+2\overline{k}$	$-\overline{i}+\overline{j}+2\overline{k}$	$3\overline{i}+\overline{j}-\overline{k}$
7	$-2\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$	$3\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$	$2\overline{i}+\overline{j}-\overline{k}$	**8**	$2\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$	$-3\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$	$3\overline{i}-\overline{j}+\overline{k}$
9	$-\overline{i}+2\overline{j}-2\overline{k}$	$\overline{i}+3\overline{j}+\overline{k}$	$2\overline{i}-\overline{j}+\overline{k}$	**10**	$\overline{i}+2\overline{j}+2\overline{k}$	$-\overline{i}+3\overline{j}+\overline{k}$	$3\overline{i}-\overline{j}-\overline{k}$
11	$-\overline{i}+2\overline{j}-2\overline{k}$	$\overline{i}+\overline{j}+3\overline{k}$	$2\overline{i}-\overline{j}-\overline{k}$	**12**	$-\overline{i}+2\overline{j}+2\overline{k}$	$-\overline{i}+\overline{j}+3\overline{k}$	$\overline{i}+3\overline{j}-\overline{k}$
13	$-2\overline{i}-2\overline{j}+\overline{k}$	$4\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$	$\overline{i}+2\overline{j}-\overline{k}$	**14**	$2\overline{i}-2\overline{j}-\overline{k}$	$-4\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$	$\overline{i}-3\overline{j}+\overline{k}$
15	$-2\overline{i}+2\overline{j}+\overline{k}$	$\overline{i}+4\overline{j}+\overline{k}$	$\overline{i}-2\overline{j}+\overline{k}$	**16**	$2\overline{i}-2\overline{j}+\overline{k}$	$-\overline{i}+4\overline{j}+\overline{k}$	$\overline{i}-3\overline{j}-\overline{k}$
17	$-2\overline{i}+\overline{j}-2\overline{k}$	$\overline{i}+\overline{j}+4\overline{k}$	$\overline{i}-2\overline{j}-\overline{k}$	**18**	$2\overline{i}+\overline{j}-2\overline{k}$	$-\overline{i}+\overline{j}+4\overline{k}$	$\overline{i}+\overline{j}-3\overline{k}$
19	$-2\overline{i}-\overline{j}+2\overline{k}$	$\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$	$\overline{i}+\overline{j}-2\overline{k}$	**20**	$2\overline{i}-\overline{j}-2\overline{k}$	$-\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$	$\overline{i}+\overline{j}-3\overline{k}$

6. Координаты точек A и B в прямоугольной системе координат Oxy приведены в таблице 7.6. Составить следующие уравнения прямой AB:

а) каноническое;

б) параметрическое;

в) общее;

г) нормированное;

д) в отрезках;

е) разрешенное относительно y (т.е. с угловым коэффициентом).

Вычислить:

ж) расстояние ρ от прямой AB до начала координат O;

з) площадь S треугольника, образованного этой прямой с координатными осями;

и) величину α угла между этой прямой и положительным направлением оси абсцисс.

Таблица 7.6.

Вар.	A	B	**Вар.**	A	B	**Вар.**	A	B	**Вар.**	A	B
1	(1,2)	(0,–2)	**2**	(–1,1)	(0,2)	**3**	(2,1)	(3,–1)	**4**	(0,–1)	(1,1)
5	(–1,2)	(3,0)	**6**	(1,–1)	(3,2)	**7**	(–2,2)	(3,1)	**8**	(0,–2)	(–1,1)
9	(1,–2)	(2,0)	**10**	(–1,1)	(–3,0)	**11**	(–1,0)	(1,–1)	**12**	(0,–3)	(1,–1)
13	(1,3)	(2,–1)	**14**	(1,1)	(3,–2)	**15**	(0,2)	(–1,1)	**16**	(0,1)	(3,–1)
17	(1,–3)	(2,1)	**18**	(2,–2)	(3,1)	**19**	(–2,0)	(1,1)	**20**	(0,2)	(1,–1)

7. Координаты вершин треугольника ABC в прямоугольной системе координат Oxy приведены в таблице 7.7. Требуется:

а) составить общее уравнение серединного перпендикуляра к стороне BC;

б) составить каноническое уравнение прямой, содержащей медиану AM;

в) составить общее уравнение прямой, содержащей высоту AH;

г) составить параметрическое уравнение прямой, содержащей биссектрису AL;

д) найти расстояние от вершины A до прямой BC (т.е. высоту AH треугольника);

е) найти величину φ угла между прямыми AC и BC;

ж) найти координаты точки O', симметричной точке O относительно прямой AB.

Таблица 7.7.

Вар.	A	B	C	**Вар.**	A	B	C
1	(6,4)	(2,0)	(0,4)	**2**	(–4,6)	(4,0)	(–4,2)
3	(3,–8)	(1,–4)	(7,–2)	**4**	(–4,–6)	(–1,–3)	(–5,–1)
5	(3,–4)	(5,0)	(1,–2)	**6**	(–3,–8)	(–7,–2)	(–1,4)
7	(–1,3)	(–3,5)	(–5,–1)	**8**	(3,–4)	(1,–3)	(5,1)
9	(–1,–3)	(–3,1)	(–7,3)	**10**	(5,5)	(2,4)	(6,0)
11	(–3,–1)	(–4,–3)	(2,5)	**12**	(0,–5)	(3,1)	(5,–3)
13	(–3,4)	(–1,3)	(–7,1)	**14**	(–1,–3)	(0,–5)	(–6,–3)
15	(4,2)	(7,1)	(7,5)	**16**	(3,1)	(–5,0)	(–1,4)
17	(0,–2)	(3,1)	(5,–3)	**18**	(–3,1)	(3,4)	(1,0)
19	(–2,4)	(–1,7)	(3,1)	**20**	(–4,–1)	(–1,2)	(3,0)

8. Координаты вершин A, B и C треугольной пирамиды $OABC$ в прямоугольной системе координат $Oxyz$ приведены в таблице 7.2. Требуется:

а) составить общее уравнение плоскости грани ABC;

б) найти расстояние h от вершины O до плоскости грани ABC;

в) составить каноническое уравнение прямой BC;

г) найти расстояние от вершины A до прямой BC (т.е. высоту AH треугольника ABC);

д) составить общее и каноническое уравнения прямой, содержащей высоту AH треугольника ABC;

е) найти величину φ угла между плоскостями граней OAB и ABC;

ж) найти величину ψ угла между ребром OA и плоскостью грани ABC пирамиды;

з) найти проекцию O_1 вершины O на плоскость основания ABC;

и) составить каноническое уравнение прямой, проходящей через вершину O и точку M пересечения медиан треугольника ABC;

к) найти величину γ угла между прямыми OM и AB;

л) найти расстояние d между прямыми OM и AB;

м) найти проекцию C_1 вершины C на прямую AB;

н) составить уравнение прямой, симметричной прямой OM относительно плоскости основания ABC.

9. Уравнения 1), 2) линий второго порядка в данной прямоугольной системе координат Oxy приведены в таблице 7.8.

9.1. Уравнение 1) привести к каноническому виду, выполняя преобразование данной системы координат (без поворота), определить название линии, найти координаты (x_0, y_0) начала O' канонической системы координат $O'x'y'$ в данной системе координат Oxy, записать формулы, выражающие координаты x, y через канонические координаты x', y', построить линию в данной системе координат Oxy.

9.2. Для уравнения 2) вычислить ортогональные инварианты, по ним определить название линии и составить каноническое уравнение, вычислить угол φ, на который повернута каноническая система координат $O'x'y'$ относительно данной системы координат Oxy, найти координаты (x_0, y_0) начала O' в данной системе координат, записать формулы, выражающие координаты x, y через канонические координаты x', y', построить линию в данной системе координат Oxy.

Таблица 7.8.

Вар.	**Уравнение 1)**	**Уравнение 2)**
1	$4x^2 - y^2 - 8x + 2y + 3 = 0$	$8x^2 + 12xy + 17y^2 + 40x + 80y + 80 = 0$
2	$4x^2 + 9y^2 - 8x - 18y - 23 = 0$	$7x^2 + 8xy + y^2 - 36x - 18y + 45 = 0$

3	$x^2-4y^2-2x+8y-7=0$	$9x^2-12xy+4y^2-78x+52y+117=0$
4	$x^2-2x+6y+7=0$	$4x^2+10xy+4y^2+4x-4y+1=0$
5	$x^2-y^2-2x+2y+1=0$	$5x^2+8xy+5y^2-2x+2y-7=0$
6	$9x^2+y^2-18x-2y+1=0$	$16x^2-24xy+9y^2-60x-80y+500=0$
7	$4x^2-9y^2-16x-36y-20=0$	$9x^2+24xy+16y^2+120x-90y+750=0$
8	$4x^2+y^2+16x+2y+1=0$	$x^2+6xy-7y^2-12x-4y+12=0$
9	$9x^2-y^2+36x+2y+35=0$	$13x^2+18xy+37y^2-80x-240y+360=0$
10	$x^2+2x+6y-11=0$	$4x^2+12xy+9y^2-52x-78y+117=0$
11	$4x^2-y^2+8x-4y+4=0$	$9x^2+6xy+y^2-60x-20y+10=0$
12	$9x^2+y^2+18x+4y+4=0$	$3x^2+8xy-3y^2-20x-10y+20=0$
13	$4x^2-9y^2+8x-36y+4=0$	$16x^2-24xy+9y^2+90x+120y+750=0$
14	$x^2-y^2+4x-2y+4=0$	$9x^2+24xy+16y^2+80x-60y+500=0$
15	$4x^2+y^2-8x-2y+1=0$	$x^2-8xy+7y^2+18x-36y+45=0$
16	$x^2+4y^2-2x-16y-19=0$	$7x^2+6xy-y^2-4x+12y-12=0$
17	$4x^2+9y^2+8x+36y+4=0$	$x^2-6xy+9y^2-20x+60y+10=0$
18	$x^2-4y^2-4x+8y-4=0$	$17x^2-12xy+8y^2+80x-40y+80=0$
19	$y^2+4x+2y-7=0$	$3x^2+8xy-3y^2-10x+20y-20=0$
20	$4x^2-9y^2+16x+18y+43=0$	$37x^2-18xy+13y^2+240x-80y+360=0$

10. Уравнения 1), 2) поверхностей второго порядка в данной прямоугольной системе координат $Oxyz$ приведены в таблице 7.9.

10.1. Уравнение 1) привести к каноническому виду, выполняя преобразование данной системы координат (без поворотов), определить название поверхности, найти координаты (x_0, y_0, z_0) начала O' канонической системы координат $O'x'y'z'$ в данной системе координат $Oxyz$, записать формулы, выражающие координаты x, y, z через канонические координаты x', y', z', построить поверхность в данной системе координат $Oxyz$.

10.2. Для уравнения 2) вычислить ортогональные инварианты, по ним определить название поверхности и составить каноническое уравнение, найти координаты базисных векторов $\overline{s}_1$, $\overline{s}_2$, $\overline{s}_3$ и координаты (x_0, y_0, z_0) начала O' канонической системы координат $O'x'y'z'$ относительно данной системы координат $Oxyz$, записать формулы, выражающие координаты x, y, z через канонические координаты x', y', z', построить поверхность в канонической системе координат $O'x'y'z'$.

Таблица 7.9.

Вар.	Уравнение 1)	Уравнение 2)
1	$9x^2+4y^2-36z^2-18x+16y-72z-11=0$	$11x^2+20y^2-31z^2+40xy-56xz-$ $-20yz+90x+180z-180=0$
2	$y^2+z^2-8x-2y+4z-19=0$	$5x^2+5y^2-7z^2-14xy-10xz-$ $-10yz+24x-24y+12=0$
3	$9x^2+4y^2+36z^2+36x-8y-216z+328=0$	$25x^2+16y^2+4z^2-40xy+20xz-$ $-16yz-120x-120y+60z=0$
4	$x^2+4y^2+8x-16y+8z+16=0$	$5x^2+5y^2+14z^2-2xy-20xz-$ $-20yz-12x+12y+12=0$
5	$x^2-4y^2+z^2+2x+8y-4z-3=0$	$8x^2+5y^2+5z^2-4xy-4xz-$ $-8yz-48x-6y-24z+45=0$
6	$x^2-4y^2+4z^2+6x-8y-8z+13=0$	$5x^2+14y^2-19z^2-20xy+10xz-$ $-44yz+60y+120z-150=0$
7	$x^2-4y^2+z^2-2x-16y-4z-7=0$	$7x^2+7y^2+22z^2+2xy+8xz+$ $+8yz-12x+12y-12=0$
8	$4x^2-36y^2+9z^2+16x-72y-18z-11=0$	$4x^2+y^2+z^2-4xy-4xz+2yz+$ $+24x-12y-12z+12=0$
9	$x^2-9y^2+z^2-4x+18y+6z+13=0$	$8y^2+4xy-2xz-4yz+8x-30y-4z-2=0$
10	$4x^2-y^2-z^2-8x+4y-2z+3=0$	$22x^2+7y^2+7z^2-8xy+8xz-$ $-2yz-12y-12z-12=0$
11	$4x^2+y^2+z^2+16x-2y+2z+14=0$	$5x^2+5y^2-7z^2-14xy+10xz+$ $+10yz-24x+24y+36=0$
12	$9x^2-y^2-z^2-18x-6y+4z-13=0$	$13x^2+13y^2+4z^2-22xy+4xz+$ $+4yz-12x-12y-24z+12=0$
13	$x^2+4y^2+z^2+2x+16y-2z+14=0$	$4x^2+16y^2+25z^2+16xy+20xz+$ $+40yz+60x+120y-120z=0$
14	$x^2-4y^2-z^2-4x-8y-6z-9=0$	$4x^2+13y^2+13z^2-4xy+4xz+$ $+22yz-24x+12y-12z+12=0$
15	$x^2-9y^2+9z^2-6x+18y+18z=0$	$14x^2+5y^2+5z^2+20xy-20xz+$ $+2yz-12y-12z+12=0$
16	$9y^2+z^2-18x+18y-6z=0$	$19x^2-14y^2-5z^2-44xy-10xz-$ $-20yz-120x+60y+150=0$

17	$x^2 - y^2 + 4z^2 + 6x + 4y + 8z + 9 = 0$	$20x^2 + 11y^2 - 31z^2 + 40xy + 20xz +$ $+ 56yz + 90y - 180z - 180 = 0$
18	$x^2 + z^2 + 4x - 8y - 2z - 19 = 0$	$x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 2xz + 4yz -$ $- 12x + 24y + 12z + 12 = 0$
19	$x^2 + 9y^2 + z^2 + 6x - 18y + 2z + 10 = 0$	$7x^2 - 5y^2 - 5z^2 - 10xy + 10xz -$ $- 14yz - 24y - 24z - 12 = 0$
20	$4x^2 - y^2 - z^2 + 16x + 4y + 2z + 7 = 0$	$5x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 8xy - 4xz + 4yz -$ $- 24x + 6y - 48z + 45 = 0$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1984.

2. *Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре / Под ред. Д.В. Беклемишева. – М.: Наука, 1987.

3. *Бортаковский А.С., Пантелеев А.В.* Аналитическая геометрия в примерах и задачах: Учеб. пособие – М.: Высшая школа, 2005.

4. *Бортаковский А.С., Пантелеев А.В.* Практикум по линейной алгебре и аналитической геометрии // Учебное пособие. – М.: Высшая школа, 2007.

5. *Бортаковский А.С., Пантелеев А.В.* Практический курс линейной алгебры и аналитической геометрии: учеб. пособ. с мультимедиа сопровождением. – М.: Университетская книга; Логос, 2008.

6. *Ильин В.А., Ким Г.Д.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебник. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998.

7. *Клетеник Д.В*. Сборник задач по аналитической геометрии.– М.: Наука,1980.

8. *Цубербиллер О.Н*. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1966.

Учебное издание

Бортаковский Александр Сергеевич

Пегачкова Елена Александровна

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Корректура: Яковлева С.Ю.

Издательство «Доброе слово»
www.dobroeslovo.info

Подписано в печать: 29.09.2014
П.л. 11. Формат 60x90/8
Тираж 20 экз.