

Подчеркнем, что запись $x \rightarrow x_0$ имеет здесь другой, чем обычно, смысл: она только указывает на то, что рассматриваемое свойство имеет место лишь в некоторой окрестности точки x_0 ; ни о каком пределе здесь речи нет.

ЛЕММА 3. Если $f(x) = \varphi(x)g(x)$, $x \in X$, и существует конечный предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = k,$$

то

$$f(x) = O(g(x)), \quad x \rightarrow x_0.$$

Доказательство. Из существования конечного предела

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = k \quad (\text{см. свойство } 1^0 \text{ пределов функций в п. 5.10})$$

следует существование такой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 , что функция φ ограничена на $X \cap U(x_0)$, т. е. имеется такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in X \cap U(x_0)$ выполняется неравенство $|\varphi(x)| \leq c$, следовательно, и неравенство $|f(x)| = |\varphi(x)g(x)| \leq c|g(x)|$. Это, согласно определению 1, и означает, что $f(x) = O(g(x))$, $x \rightarrow x_0$. \square

Примеры. 1. $\frac{1}{x} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ при $x \rightarrow 0$, поскольку $\left|\frac{1}{x}\right| \leq \frac{1}{x^2}$ при $|x| \leq 1$.

2. $\frac{1}{x^2} = O\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \rightarrow \infty$, так как $\frac{1}{x^2} \leq \left|\frac{1}{x}\right|$ при $|x| \geq 1$.

Запись

$$f(x) = O(1), \quad x \rightarrow x_0,$$

означает, что функция f ограничена в некоторой окрестности точки x_0 , например $\frac{\operatorname{tg} 2x}{x} = O(1)$ при $x \rightarrow 0$, ибо

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x} = 2$ и, значит, функция $\frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$ ограничена в окрестности точки $x = 0$.

Определение 2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что $f = O(g)$ и $g = O(f)$ при $x \rightarrow x_0$, то они называются функциями одного порядка при $x \rightarrow x_0$; это записывается в виде $f(x) \asymp g(x)$, $x \rightarrow x_0$.

Это понятие наиболее содержательно в том случае, когда функции f и g являются либо бесконечно малыми, либо бесконечно большими при $x \rightarrow x_0$. Например, функции $\alpha = x$ и $\beta = x\left(2 + \sin \frac{1}{x}\right)$ являются при $x \rightarrow 0$ бесконечно малыми одного порядка, поскольку

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{1}{\left|2 + \sin \frac{1}{x}\right|} \leq \frac{1}{2 - \left|\sin \frac{1}{x}\right|} \leq 1, \quad \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| = \left|2 + \sin \frac{1}{x}\right| \leq 2 + \left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq 3.$$

ЛЕММА 4. Если существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$, то $f(x) \asymp g(x)$, $x \rightarrow x_0$.

Доказательство. При $x \rightarrow x_0$ определен предел дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$, поэтому существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0 , что для всех точек $x \in X \cap U(x_0)$ выполняется неравенство $g(x) \neq 0$. Для этих x положим $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Тогда $f(x) = \varphi(x)g(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = k$. Следовательно, по лемме 3, $f(x) = O(g(x))$, $x \rightarrow x_0$.

Из условия $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$ следует, что существует и такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0 , что для всех $x \in X \cap U(x_0)$ выполняется неравенство $\frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$ (см. свойство 2⁰ пределов функций в п. 5.10), а следовательно, и неравенство $f(x) \neq 0$. Для $x \in X \cap U(x_0)$ положим $\psi(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$; тогда $g(x) = \psi(x)f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = \frac{1}{k}$. Поэтому снова, согласно лемме 3, $g(x) = O(f(x))$, $x \rightarrow x_0$. \square

В качестве примера возьмем функции $f(x) = 3x^2$ и $g(x) = \sin x^2$. Имеем $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = \frac{1}{3}$ (см. (8.1)), поэтому, согласно лемме 4, функции $3x^2$ и $\sin x^2$ одного порядка при $x \rightarrow 0$.

З а м е ч а н и е. Отметим, что условие (8.19) равносильно следующему: существует такая ограниченная функция $\varphi: X \rightarrow \mathbf{R}$, что в некоторой окрестности точки x_0 для всех $x \in X$ выполняется равенство $f(x) = \varphi(x)g(x)$.