Подчеркнем,что запись $x \to x_0$ имеет здесь другой, чем обычно,смысл:она только указывает на то,что рассматриваемое свойство имеет место лишь в некоторой окрестности точки x_0; ни о каком пределе здесь речи нет.

ЛЕММА 3. *Если $f(x) = \phi(x)g(x), x \in X$, и существует конечный предел.*

$$\lim_{x\to\infty} \phi(x) = k,$$

то

$$f(x) = O(g(x)), x \to x_0.$$

Доказательство. Из существования конечного предела $\lim\limits_{x\to 0} \phi(x) = k$ (см.свойсво 1^0 пределов функций в п.5.10) следует существование такой окрестности $U(x_0)$ точки x_0, что функции ϕ ограничена на $X \cap U(x_0)$, т.е. имеется такая постоянная $c > 0$, что для всех $x \in X \cap U(x_0)$ выполняется неравенство $|\phi(x)| \leqslant c$, следовательно, и неравенство $|f(x)| = |\phi(x)||g(x)| \leqslant c|g(x)|$.Это, согласно определению 1, и означает, что $f(x) = O(g(x)), x \to x_0$. $\square$

Примеры. 1. $\frac{1}{x} = O(\frac{1}{x^2})$ при $x \to x_0$, поскольку $|\frac{1}{x}| \leqslant \frac{1}{x^2}$ при $|x| \leqslant 1$.

2. $\frac{1}{x^2} = O(\frac{1}{x})$ *при* $x \to \infty$, *так как* $\frac{1}{x^2} \leqslant |\frac{1}{x^2}|$ *при* $|x| \geqslant 1$.

Запись

$$f(x) = O(1), x \to x_0,$$

означает, что функция f ограничена в некоторой окрестности точки x_0, например $\frac{tg2x}{x} = O(1)$ при $x \to 0$, ибо $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg2x}{x} = 2$ и, значит, функция $\frac{tg2x}{x}$ ограничена в окрестности точки $x = 0$.

Определение 2. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ такие, что $f = O(g)$ и $g = O(f)$ при $x \to x_0$, то они называются функциями одного порядка при $x \to x_0$; это записывается в виде $f(x) \asymp g(x)$, $x \to x_0$.*

Это понятие наиболее содержательно в том случае, когда функция f и g являются либо бесконечно малыми, либо бесконечно большими при $x \to x_0$. Например, функция $\alpha = x$ и $\beta = x(2 + sin\frac{1}{x})$ являются при $x \to 0$ бесконечно малыми одного порядка, поскольку

$$|\frac{\alpha}{\beta}| = \frac{1}{|2 + sin\frac{1}{x}|} \leqslant \frac{1}{2 - |sin\frac{1}{x}|} \leqslant 1, |\frac{\beta}{\alpha}| = |2+sin\frac{1}{x}| \leqslant 2+|sin\frac{1}{x}| \leqslant 3.$$

ЛЕММА 4. *Если сущесвует конечный предел* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$, *то* $f(x) \asymp g(x), x \to x_0$.

Доказательство. При $x \to x_0$ опеределен предел дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$, поэтому существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для всех точек $x \in X \cap U(x_0)$ выполняется неравенство $g(x) \neq 0$. Для этих x положим $\phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Тогда $f(x) = \phi(x)g(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \phi(x) = k$. Следовательно, по лемме 3, $f(x), x \to x_0$.

Из условия $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$ следует, что существует и такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для всех $x \in X \cap U(x_0)$ выполняется неравенство $\frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$ (см. свойсво 2^0 пределов функции в п.5.10), а следовательно, и неравенство $f(x) \neq 0$. Для $x \in X \cap U(x_0)$ положим $\psi(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$; тогда $g(x) = \psi(x)f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \psi(x) = \frac{1}{k}$. Поэтому снова, согласно лемме 3, $g(x) = O(f(x)), x \to x_0$. $\square$

В качестве примера возьмем функции $f(x) = 3x^2$ и $g(x = sinx^2)$. Имеем $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{3} \lim\limits_{x\to x_0} \frac{sinx^2}{x^2} = \frac{1}{3}$(см. 8.1)), поэтому, согласно лемме 4, функции $3x^2$ и $sinx^2$ одного порядка при $x \to x_0$.

Заме чание. Отметим, что условие (8.19) равносильно следующему:существует такая ограниченная функция ϕ: $X \to R$, что в некоторой окрестности точки x_0 для всех $x \in X$ выполнятеся равенство $f(x) = \phi(x)g(x)$.