MSI (1)

(1) a) Dacă $z = x + iy$ să se arate că

$$\frac{|x| + |y|}{\sqrt{2}} \le |z|$$

b) Dacă $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ să se arate că:

$$\left|\frac{|a| - |b|}{|c| + |d|}\right| \le \left|\frac{a+b}{c+d}\right| \le \left|\frac{|a| + |b|}{|c| - |d|}\right|.$$

d) Dacă $z_k \in \mathbb{C}$, $|z_k| \le 1$, $k = 1, 2 \ldots n$ atunci

$$\left|\prod_{k=1}^{n} z_k - 1\right| \le \sum_{k=1}^{n} |z_k - 1|$$

e) Caracterizați numerele complexe z pt care au loc inegalitatea $|1+z| \ge \frac{1+|z|}{\sqrt{2}}$

(2). Fie $a_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$ și $c = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$. Să se arate că:

a) $$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 = |c|^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |a_k - c|^2$$

b) $$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |z - a_k|^2 = |z - c|^2 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |a_k - c|^2$$

c) $$\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k\right|^2 \le \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2$$

(3). a) Dacă $a, b \in \mathbb{C}$ și $|\arg a - \arg b| \le \theta \le \pi$ să se arate că $|a - b|^n \le (|a|^n + |b|^n) \max\left(1, 2^{n-1} \sin^n \frac{\theta}{2}\right)$ și

b) Dacă $z_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$, $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\arg z_k \in (-\theta, \theta)$ $k = \overline{1, n}$ să se arate că

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \ge \cos\theta \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

c) Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ și $\arg f(x) \in (-\theta, \theta)$, f continuă ($\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$) atunci: $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \ge \cos\theta \int_a^b |f(x)|\,dx$

(4) Fie $z_1, \ldots z_n \in \mathbb{C}$, $|z_k| = r$, $k = \overline{1, n}$. Să se calculeze $\left|\frac{S_k}{S_{n-k}}\right|$, S_k fiind sumele simetrice de ordin k a numerelor $z_1, \ldots z_n$.

5. Dacă $x\in(0,2)$, $m,n\in\mathbb{N}^*$ $m>n$, atunci

a) $\left|\sum_{k=0}^{m-n} e^{i\pi x(n+k)}\right| \le \frac{1}{\sin\frac{\pi x}{2}}$

b) $\left|\sum_{k=0}^{m-n} \sin(n+k)\pi x\right| \le \frac{1}{\sin\frac{\pi x}{2}}$

6. Dacă $z\in\mathbb{C}$ $|z|>1$ arătați că

a) $\left|\sum_{k=0}^{n} z^k\right| \ge |z|^n$ dacă $\operatorname{Re} z>0$

b) $\left|\sum_{k=0}^{n} z^k\right| \le |z|^n$ dacă $\operatorname{Re} z<0$

7. a) Arătați că $x^{2n+1}+1=(x+1)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2+2x\cos\frac{2k\pi}{2n+1}+1\right)$

b) Calculați $\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n+1}$ și $\prod_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{2n+1}$

și $\prod_{k=1}^{n}\operatorname{tg}\frac{k\pi}{2n+1}$

8. Să se determine funcție olomorfă $f=u+iv$

dacă a) $u(x,y)=x^2+axy-y^2$ b) $v(x,y)=\varphi(x^2+y^2)$

unde $\varphi\in C^{\infty}(\mathbb{R})$. c) $u+v=\frac{(x-y)(\sin 2x-\operatorname{ch}2y)}{\cos 2x+\operatorname{ch}2y}$

9. Să se scrie condițiile C-R în cazul în care $z=re^{i\theta}$, $\theta\in(0,2\pi)$

10. Să se demonstreze următoarele inegalități

a) $\operatorname{sh}|\operatorname{Im} z|\le|\sin z|\le\operatorname{ch}|\operatorname{Im} z|$, $\operatorname{sh}|\operatorname{Im} z|\le|\cos z|\le\operatorname{ch}|\operatorname{Im} z|$

$|\cos z|\le\operatorname{ch}|z|$

b) $\frac{2e^{-xy}}{1+e^{-xy}}\le|\operatorname{tg} z-i|\le\frac{2e^{-xy}}{1-e^{-xy}}$ dacă $y>0$

$\frac{2e^{xy}}{1+e^{xy}}\le|\operatorname{tg} z+i|\le 2\frac{e^{xy}}{1-e^{xy}}$ dacă $y<0$