CURS 2 - MSI

$(\mathbb{C}, |\,|)$ sp. metric complet

$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} z_n$, $(z_n \; S_n)$ → termgen → sume part

conv. dc $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} z_n \Rightarrow$ seria e conv.

$\sum_{n=p}^{\infty} z_n$

Crit lui Cauchy.

Seria $\sum z_n$ conv $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$ a.î. $\forall n \geq N(\varepsilon)$ $\forall m \in \mathbb{N}$ $|S_{n+m} - S_n| < \varepsilon$

$z_0 \in \mathbb{C}$ fixat s.n serie de puteri cu term gen $a_n \in \mathbb{C}$ centrată în z_0 seria sumă.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = S(z) \qquad z = z_0 \; (1)$$

↳ nu poate avea mult de conv vidă

Teoremă

Dacă seria (1) e conv în pct $z_1 \neq z_0$ are prop $\forall z$, $|z - z_0| \leq |z_1 - z_0|$ seria e conv.

Dacă seria (1) e divergentă pt $z = z_1$ at ea e div pt $\forall z \in \mathbb{C}$ cu proc că $|z - z_0| \geq |z_1 - z_0|$

Raza de conv a unei seri $R \in \mathbb{R}_+$ care are urm prop.

$\forall z_0 |z - z_0| < R$ seria (1) e conv și

$\forall z_0 |z - z_0| > R$ seria (1) e divergent

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \quad \text{→ lim. superioară}$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

- Crit raportului.

Dc $\exists$ $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \Rightarrow$ se poate înlocui

$z - z_0 = w$.

Stud conv $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ - conv dc $|w| < R$

$\Rightarrow$ serie conv $|z - z_0| < R$

$f: I \to \mathbb{C}$ $\quad\quad\quad\quad I \subseteq \mathbb{R}$

$f(t) = x(t) + j\,y(t)$

$D \subset \mathbb{C}$, $f: D \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(x,y) + j\,v(x,y)$

$\forall z = x + jy$.

$\underline{P}(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k$, $a_k \in \mathbb{C}$ $\quad\quad \in \ddot{\Pi}\ldots$

• funcț rat. $Q(z) = \frac{P_1(z)}{P_2(z)}$, P_1, P_2-polinoame cu coef complexi

• funct expo $\quad \exp(z)$ sau e^z

Def $\quad \exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\exp z = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

$R = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n \to \infty} n+1 = \infty \Rightarrow$ converge in tot planul complex (de la $n+1$ incolo)

Dc. $a > 0$, $a \neq 1$ at $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$,

$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

$(\mathbb{R}, +)$ grup $\quad (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$

nu e implicată

$\boxed{T}$ $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ are loc: $\exp(z_1 + z_2) = \exp z_1 \cdot \exp z_2$

Dem $\quad e^{t(z_1+z_2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n (z_1+z_2)^n}{n!} \overset{?}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m z_1^m}{m!} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p z_2^p}{p!}$

evident $= \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \Rightarrow$

$a_n = \sum_{m+p=n} \frac{z_1^m + z_2^p}{m!\,p!} \Rightarrow \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{n} \frac{n!\, z_1^m z_2^{n-m}}{m!\,(n-m)!} = \frac{1}{n!}$

$p = \cancel{m}\ n - m$

$= \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} z_1^m z_2^{n-m} = \frac{1}{n!} (z_1 + z_2)^n$

$z = x + jy$, $e^z = e^{x+jy} = e^x \cdot e^{jy}$

$e^{jy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(jy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} j^{2n} \frac{y^{2n}}{(2n)!} + j \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n+1} \cdot j^{2n}}{(2n+1)!}$

serii taylor

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{2n}}{(2n)!} + j \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$e^{jy} = \cos y + j \sin y \quad \forall y \in \mathbb{R}$

$e^{z} = e^{x} \cdot (\cos(y) + j \sin y)$

$\mathrm{Re}\, e^{z} = e^{x} \cos y$.
$\mathrm{Im}\, e^{z} = e^{x} \sin y$
$|e^{z}| = e^{x}$

$\boxed{\mathrm{T}}$ Funct e^{z} este periodică de perioadă
$T = 2\pi j \Rightarrow$ nu poate fi injectivă
Dem $\Leftarrow$ teorem

$e^{z+2\pi j} = e^{z} \quad f(z+T) = f(z)$
$e^{z} \cdot e^{2\pi j} = e^{z} (\cos 2\pi + j \sin 2\pi) = e^{z}$.

OBS $\Rightarrow$ funct exp. nu e injectivă

Def. $z \in \mathbb{C}^*$ s.n. logaritm al nr. complex z $\forall$ sol a ecuației $e^{w} = z$. (în w)

$w = a + jb$.
$\Rightarrow e^{a} \cdot e^{jb} = z. \Rightarrow e^{a} \cdot \underbrace{|e^{jb}|}_{1} = |z|$

$\Rightarrow e^{a} = |z| \Rightarrow a = \ln |z|$
$\Rightarrow e^{jb} \cdot |z| = |z| (\cos \theta + j \sin \theta)$
$e^{jb} = \cos(\theta) + j \sin \theta$
$\cos b + i \sin b - \cos \theta + i \sin \theta \Rightarrow b = \arg z + 2k\pi$
$w \in \{\ln |z| + j \cdot (2k\pi) \arg z. \mid k \in \mathbb{Z}.\}$

$e^{z} = e^{x} (\cos y + j \sin y)$
$e^{jx} = \cos x + j \sin x$
$e^{-jx} = \cos(-x) - j \sin x$ $\Big\} \overset{(+)}{\Rightarrow}$

$$\boxed{\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}; \quad \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}}$$

Formulele lui Euler

Putem def. funct trigo in $\mathbb{C}$

Def
$$\boxed{\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{jz}+e^{-jz}}{2} \\ \sin z &= \frac{e^{jz}-e^{-jz}}{2j} \end{aligned}}$$

- $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$
- $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

cos, sin periodice de perioadă 2π

$$\cos(z+2\pi) = \frac{e^{j(z+2\pi)}+e^{-j(z+2\pi)}}{2} = \frac{e^{jz}+e^{-jz}}{2}$$

OBS. Toate formulele de trigo (?) din real sunt adevărarte și în complex

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta = E$

$\cos(z_1+z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \sin z_1 \cdot \sin z_2 = E$

$$E = \frac{(e^{jz_1}+e^{-jz_1})(e^{jz_2}+e^{-jz_2})}{4} + \frac{(e^{jz_1}-e^{-jz_1})(e^{jz_2}-e^{-jz_2})}{+4}$$

$$E = \frac{2e^{j(z_1+z_2)}+2e^{-j(z_1+z_2)}}{4} = \frac{e^{j(z_1+z_2)}+e^{-j(z_1+z_2)}}{2}.$$

$= \cos(z_1+z_2)$

- În $\mathbb{C}$ $\cos(z)$ și $\sin z$ sunt nemărginite

$\left|\frac{e^{jz}-e^{-jz}}{2}\right| \le M.$ $\forall z \in \mathbb{C}$ și pt $z = jy$.

$\left|\frac{e^{-y}-e^{y}}{2}\right| \le M$ $\forall y \in \mathbb{R}$ nu e adev.

$\Rightarrow e^{y}\left|\frac{e^{-2y}-1}{2}\right| \overset{y\to\infty}{\Longrightarrow} \infty \le M$ contradicție

0

$\cos z = 5$

$\frac{e^{jz}+e^{-jz}}{2} = 5$, $e^{jz} = w$

$w + \frac{1}{w} = 10$; $w^2 - 10w + 1 = 0$

$w_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{6}$.

$e^{jz} = 5 \pm 2\sqrt{6}$. (nu poate fi + și - ??)

$\Rightarrow jz \in \{ \ln|5 \pm 2\sqrt{6}| + j \cdot 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$.

$z \in \{ -j \ln|5 \pm 2\sqrt{6}| + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$

Derivata unei funcții de var complexă.

$f: G \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$a \in G$, $\exists r > 0$, $B(a, r) \subset G$ - potența.

Def. $z \in G$. spunem că funct f e deriv în z de $\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z)$

$f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$

$h = h_1 + j h_2$. at. $f'(z) = \lim_{h \to 0}$. $u(x+h_1, y+h_2)$

$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h_1, y+h_2) + v(x+h_1 + y+h_2) - u(x,y) - i v(x,y)}{h_1 + j h_2}$

$h_2 = 0$ $f'(z) = \lim_{h_1 \to 0} \frac{u(x+h_1, y) - u(x,y)}{h_1} + j \frac{v(x+h_1, y) - v(x,y)}{h_1}$

$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x}$ (2) $\frac{1}{j} = -j$???

$h_1 = 0$

$f'(z) = \lim_{h_2 \to 0} -j \frac{u(x, y+h_2) - u(x,y)}{h_2} + \frac{v(x, y+h_2) - v(x,y)}{h_2}$

$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - j \frac{\partial u}{\partial y}$

$(f'(z) = f'(z) \Rightarrow$

=> De f' în x, y tre satisfăcute urm cond.
u, v au 'parț în (x, y) și să aibă loc egalitățile

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$ Cond. Cauchy-Rieman.

Funct deriv într-un punct tre să îndeplinească cond C-R.

Dacă u și v - funct diferențiabile și sunt verif cond C-R (în o sys) at f e deriv în $z = x + j y$.

• Cond C-R. => f deriv pe G

$f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ at =>

u, v sunt f armonice => $\Delta u = \Delta v = 0$.

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$\boxed{T}$ De f e deriv pe G (f e olomorfă pe G <=> $f \in \mathcal{H}(G)$) at u și v sunt armonice.

DEM.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{aligned}\right\} \overset{+}{=>} \Delta u = 0.$$

Δv C. R (1)$'_y$; (2)$'_x$ => $\Delta v = 0$.

$f(z) = u(x, y) + j\,v(x, y)$ știind că $u(x, y) = \varphi(ax+by)$
$a, b \in \mathbb{R}$, φ - are deriv de $\forall$ ordin

Calc $\Delta u = 0$ => φ => v.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a\,\varphi'(ax+by)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \varphi''(ax+by) =>$$

$$\Delta u = a^2 \cdot \varphi''(ax+by) + b^2 \varphi''(ax+by)$$
$$= (a^2+b^2)\,\varphi''(ax+by) = 0$$

$ax+by-t$

$\varphi''(t)=0 \Rightarrow \varphi(t)=\alpha t+\beta.$

$\Rightarrow u(x,y)=\alpha(ax+by)+\beta$

$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot dy \overset{R\text{-}C}{=} -\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot dx$

$=-\alpha b\,dx+\alpha\cdot a\cdot dy.$

$=d(-\alpha\beta x+\alpha a\cdot y)$

$\Rightarrow v(x,y)=-\alpha\beta x+\alpha a\cdot y+\gamma$

$\Leftrightarrow\infty$ funcț cu prop că Re e gr I