CURS 5 - MSI

Def $f \in \mathcal{H}(D)$, $a \in D$ s.n zerou de ordinul k ($k \in \mathbb{N}^*$) dacă $\exists g \in \mathcal{H}(D)$ cu prop. că $g(a) \neq 0$ și $f(z) = (z-a)^k \cdot g(z)$ $\forall z \in D$

$\boxed{T_1}$ Pct. $a \in D$ e zerou de ord k $\overset{\text{ddacă}}{\Leftrightarrow}$ $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(k+1)}(a) = 0$, $f^{(k)}(a) = 0$

Dem. $f'(z) = k(z-a)^{k-1} g(z) + (z-a)^k g'(z)$

$$= (z-a)^{k-1} \underbrace{[k g(z) + (z-a) g'(z)]}_{g(z) \in \mathcal{H}(D)}$$

$$f^{(k)}(z) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} g^{(k-i)}(z) A_k^i \cdot (z-a)^{k-i}$$

$$f^{(k)}(a) = g(a)\, k! \neq 0.$$

$f(z) \in \mathcal{H}(D)$ se dezv în serie Taylor în jurul lui a.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{n!} f^{(n)}(n) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

$$= (z-a)^k \Big[\underbrace{\frac{1}{k!} f^{(k)}(a) + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(z-a)^{n-k}}{n!} f^{(n)}(a)}_{g\ ??} \Big]$$

=> Teorema e demonstrată

$\boxed{T_2}$ Da. $f \in \mathcal{H}(D)$ at. mulțimea zerourilor funct. f este o mulț rară (adică interiorul ei este mulț vidă)

Dem. pp. $f \neq 0$ $\exists a$ cu prop că $\exists f(z_n) = 0$; $(z_n)_n \to a$

$\lim_{n\to\infty} z_n = a$.

a $V = (D(a, \frac{1}{n}) \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$

$z_n \in V \Rightarrow d(z_n, a) < \frac{1}{n} \to 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} z_n = a$

$\exists z_n \to a$, $f(z_n) = 0$. $f(z) = (z - z_n)^k \cdot g(z)$

$g(z_n) \neq 0$.

$f(a) = (a - z_n)^k \cdot g(a)$ $\quad n \to \infty$ $f(a) = 0$.

$\Rightarrow f(z) = (z-a)^m \cdot g_1(z)$; $z = z_n \Rightarrow$

$0 = \underbrace{(z_n - a)^m}_{\neq 0} \cdot g_1(z_n)$

$\Rightarrow g_1(z_n) = 0 \overset{n\to\infty}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} g_1(z_n) = g(a) = 0$

=> contradicție => Rezolvat

Exemplu

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=0$

$f(x)=0 \qquad \sin\frac{1}{x}=0 \Rightarrow \frac{1}{x}=n\pi \Rightarrow x_n=\frac{1}{n\pi}\to 0$ - sir zerouri

Corolar

$f,g\in\mathcal{H}(D)$, fie a pct acumulare a lui D a.î. $f(a)=g(a)$ atunci $\Rightarrow f(z)=g(z)$ pt $\forall z\in D$.

Dem. $h(z)=f(z)-g(z)$

Pp. că h nu e funcț nulă pe $D\Rightarrow \exists\, b\in D$ a.î. $h(b)\neq 0$

$h(z)=(z-a)^p\cdot g_2(z)$

$\Rightarrow z_n\in D;\ z_n\to a;\ h(z_n)=0 \Rightarrow f(z)=g(z)\ \forall$ pct.

???? f $D(0,1)$ (Disc) $f.\ \dfrac{a-\cos t+i\sin t}{a^2-2a\cos t+1} \Leftrightarrow |z|=1 \quad a>1.$

Gasiți funcț f

$\dfrac{a-e^{it}}{(a-e^{-it})(a-e^{it})}\Rightarrow \dfrac{a}{a^2-a\underbrace{(e^{it}+e^{-it})}_{2a\cos t}+1}\Rightarrow f(z);g(z)$

nu Bună

$g(z)=\dfrac{1}{a-z}$

$\forall$ pct de pe cerc e pct de acumulare

$\Rightarrow f(z)=g(z)=\dfrac{1}{a-z}$

!! ex. $F(s)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-st}\cdot t^5\,dt$ → integrală abs. conv $\qquad \operatorname{Re}s>0.$

abs conv: $\displaystyle\int_0^\infty |e^{-st}|t^5\,dt=\int_0^\infty e^{-t\operatorname{Re}s}\,t^5\,dt=\Gamma(6$

Gamma

$\boxed{\Gamma(a)=\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}\,t^{a-1}\,dt}\ =\dfrac{1}{(\operatorname{Re}s)^6}\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^5\,dx=\dfrac{5!}{(\operatorname{Re}s)^6}=\dfrac{120}{(\operatorname{Re}s)^6}$

mult evident: $(0,\infty)$

$\Rightarrow F(s)=\dfrac{5!}{x^6} \Rightarrow F(s)=\dfrac{5!}{s^6}\Rightarrow$

T3 (T. maximului modulului) !

fie $f\in\mathcal{H}(D)$ și cont. pe frontiera ($\operatorname{Fr}D$) lui D at $|f(z)|$ se atinge pe frontiera dom D dacă f e diferită de funcț constantă

maxim.

Dem. $\max\limits_{z\in D} |f(z)| = |f(a)|$ $\quad a \in \text{Int } D$

$\Rightarrow \exists\, r>0$ a.î. $D(a,r) \subset D$ ← domeniu.

Cauchy $\Rightarrow f(a) = \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{|z-a|=r} f(z)\cdot\frac{1}{z-a}\,dz =$ $\quad z=a+re^{jt}$, $t\in(0,2\pi)$

$\Rightarrow \frac{1}{2\pi j}\int_0^{2\pi}\frac{f(a+re^{jt})}{re^{jt}}\, r\cancel{j}e^{jt}\,dt$

$\Rightarrow |f(a)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(a+re^{jt})|\cdot dt < \frac{1}{2\pi}|f(a)|\cdot\int_0^{2\pi}dt =$

$< \frac{1}{2\pi}|f(a)|\cdot 2\pi = f(a)$

$\Rightarrow$ Contradicție $\Rightarrow$ Gata

• $D: \; x^{\frac{2}{2n+1}} + y^{\frac{2}{2n+1}} = 1$ → curba astroid (închisă??)

închisă $\Rightarrow \exists$ pătrat

$x=\cos^{2n+1}t \qquad t\in[0,2\pi]$

$y=\sin^{2n+1}t$

$f(x,y)=x^2+y^2$ ← Val maximă

$f(z)=\bar{z} \qquad |f(z)| = \sqrt{x^2+y^2}$

$f(\cos^{2n+1}t, \sin^{2n+1}t) =$

$= \sqrt{\cos^{4n+2}t + \sin^{4n+2}t}$

$\sin^2 t = x$, $x\in[0,1] \Rightarrow g(x) = \cancel{\cos}^2(1-x^2)^{2n+1} + x^{2n+1}$

$g'(x) = -2x\cdot(2n+1)\cdot(1-x^2)^{2n} + (2n+1)\cdot x^{2n}$

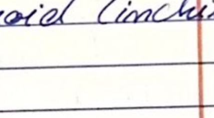
$= (2n+1)(-2x(1-x^2)^{2n} + x^{2n})$

$\Rightarrow$ Rădec $\Rightarrow$ max at. $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ max funct de sub $\sqrt{\ }$

SAU. $\cos^{2n+1}t = \alpha$ și scoatem celălalt.
↳ $\frac{\pi}{2}$ cred

SERII LAURENT

coroană circulară →



$f(z) \quad f: \{r<|z-a|<R,\ z\in\mathbb{C}\} \to \mathbb{C}$

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$

$n=-m \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(z-a)^n$

Def. S.n. serie Laurent centrată în a o serie de forma:

$$(1)\quad \boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}}_{I} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n}_{II}}$$

↳ generealizează seria Taylor

$\boxed{T}$ Dacă seria Laurent e conv at. mult. de conv e o coroană circulară de forma $r<|z-a|<R$ $(r<R)$

II conv pt $|z-a|<R$; $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim \left[\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}\right]$

I. $w=\frac{1}{z-a}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$; conv ⇐ $|w|<R_1$; $R_1=\lim_{n\to}\left|\frac{a_{-n}}{a_{-n+1}}\right|$

$\frac{1}{|z-a|}<R_1$, $|z-a|>\frac{1}{R_1}=r.$

⇒ ~~$|z|$~~ $r<|z-a|<R$ și mult de conv e o coroană circ cu centrul în a și de rază r și R.

- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(2n)!}$ $R=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!}{(2n)!}=\infty$

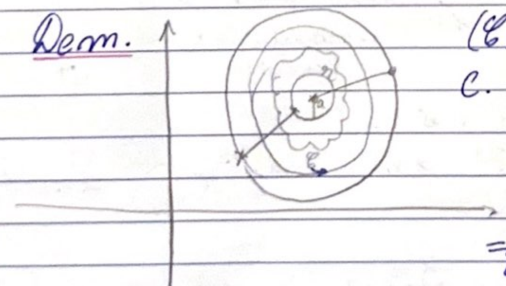
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^n}{n!}$ $|w|<\infty$ → e conv. ; conv de $\frac{1}{|z|}<\infty$

Adev de $|z|>0$ ⇒ $r=0$, $R=\infty$ ⇒ conv în tot planul

- $f\in H(r<|z-a|<R)$ ⇒ $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\cdot(z-a)^n$;
$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$

C - simplă închisă, a cărei img e în coroana circ

Dem.



$(C): |z+a| = R_1$, $r<R_1<R$

C.

fie ~~z~~ ∈ Cor

$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(w)}{w-z}dw$

$=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{|z-a|=R}\frac{f(w)}{w-z}dw-\int_{|z-a|=r}\frac{f(w)}{w-z}dw\right)$

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{|w-a|=R} \frac{f(w)}{w-a-(z-a)}\,dw = \frac{1}{2\pi j}\int_{|w-a|=R} \frac{f(w)}{(w-a)\left(1-\frac{z-a}{w-a}\right)}\,dw$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{|w-a|=R} \frac{f(w)}{(w-a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(w-a)^n}\,dw = \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi j}\int_{|w-a|=R} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw}_{a_n}$$

• pe cercu mic:

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{w-a-(z-a)} = -\frac{1}{2\pi j}\int_{|w-a|=r} \frac{f(w)}{(z-a)\left(1-\frac{w-a}{z-a}\right)}\,dw$$

$$= -\frac{1}{2\pi j}\int_{|w-a|=r} f(w)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}\right) dw.$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \cdot \frac{1}{2\pi j}\int_{|w-a|=r} f(w)\cdot(w-a)^{n+1}\,dw.$$

$n+1=-m$

$$= -\sum_{m=-\infty}^{-1} (z-a)^m \frac{1}{2\pi j}\int_{|w-a|=r} f(w)\cdot\frac{1}{(w-a)^{m+1}}\,dw$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \ ;$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi j}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz.$$

! la ex nu calc coef cu formula
ci cu dezv

Cozi: - array ...