MSI (2)

1. Să se demonstreze următoarele egalități

a) $sh^{2n-1}x = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-2}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} \binom{2n-1}{k} sh(2n-2k-1)x$

b) $sh^{2n}x = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} 2 \binom{2n}{k} ch2(n-k)x + \binom{2n}{n} \right)$

c) $ch^{2n-1}x = \frac{1}{2^{2n-2}} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n-1}{k} ch(2n-2k-1)x$

d) $ch^{2n}x = \frac{1}{2^{n}} \sum_{k=0}^{n-1} 2 \binom{2n}{k} ch\, 2(n-k)x + \binom{2n}{n}$

2. Se consideră mulțimea $\{ z \mid |z| = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \} = A$

și șirul $a_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} k^{it}}{n}$ $\quad (x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x},$ pt $x>0, \alpha \in \mathbb{C})$

Să se arate că $\lim_{n\to\infty} n^{-it} a_n \in A$.

3. Fie $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, și $g(z,\bar z) = u\left(\frac{z+\bar z}{2}, \frac{z-\bar z}{2i}\right) + i\, v\left(\frac{z+\bar z}{2}, \frac{z-\bar z}{2i}\right)$

Să se arate că f este olomorfă pe domeniul de definiție

dacă $\frac{\partial g}{\partial \bar z} = 0$

4. Să se determine funcțiile olomorfe f dacă $(z = x+iy)$

a) $|f(z)| = (x^2+y^2)e^x$

b) $\arg f(z) = xy$

c) $\arg f(z) = \theta + r\sin\theta$ $\quad (z = re^{i\theta})$

5. Se consideră dreptele: $d_1: x - 2y = 1$

$d_2: 2x + y = 3$

și funcția $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^{z}$. să se genereze

Dacă $C_1 = f(d_1)$ și $C_2 = f(d_2)$

unghiul dintre curbele C_1 și C_2