MSI (3)

1. Dacă $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ și $\exists M > 0$ astfel ca
$$|f(z)| \le M(1+|z|)^p, \; p \in \mathbb{N}$$
să se arate că f este un polinom de grad cel mult p.

2. Dacă $f \in \mathcal{H}(|z-a|<R)$, f continuă pe $|z-a|=R$
să se arate că
$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+Re^{it})\,dt$$

3. Dacă u este armonică în discul $|z-a| \le R$,
$a = \alpha + i\beta$ să se arate că
$$u(\alpha,\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\alpha + R\cos t, \beta + R\sin t)\,dt$$

4. Dacă $f \in \mathcal{H}(|z|<R)$, f continuă pe $|z|=R$
să se arate că
$$|f^{(n)}(z)| \le \frac{MRn!}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(R^2+|z|^2-2R|z|\cos t)^{\frac{n+1}{2}}}$$
unde $M = \max\limits_{|z|=R} |f(z)|$

5. Fie $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Să se arate că
dacă $|f(z)| \le M e^{|z|}$ $\forall z \in \mathbb{C}$
$$|a_n| \le M\left(\frac{n}{e}\right)^{-n}, \; n = 1, 2 \ldots$$

6) Să se dezvolte în serie Taylor în jurul punctelor indicate z_0 următoarele funcții
a) $f(z) = \frac{1}{2+z}$, $z_0 = 1$; b) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$, $z_0 = 1+i$,
c) $f(z) = \frac{e^z}{z+1}$, $z_0 = 1$; d) $f(z) = \left(\frac{\operatorname{arctg} z}{z}\right)^2$, $f(0)=1$, $z_0 = 0$
e) $f(z) = \operatorname{ch}^2 3z \cos z$, $z_0 = 0$; f) $f(z) = \frac{\sin z}{z^2+1}$, $z_0 = 0$.

7) Să se găsească primii 5 termeni din dezvoltarea în serie Taylor $z_0 = 0$ a următoarelor funcții a) $f(z) = \frac{\sin z}{e^z+1}$,
b) $f(z) = \frac{e^z}{e^{z^2}+1}$, c) $f(z) = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{ch} 2z + 1}$.

8. Să se găsească funcția f analitică în discul $|z| \leq 1$ dacă pe cercul $|z| = 1$ este egală cu

$$\frac{a - \cos t + i \sin t}{a^2 - 2a\cos t + 1}, \quad a > 1, \quad t = \arg z$$

9) Fie $z(t) = 1 + it$, $t \in [-1, 1]$ și $f(z) = z^2$
Să se găsească lungimea curbei $w(t) = f(z(t))$

10. Fie $D = \{ z \mid z = x + iy,\ x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon],\ y \in [-\varepsilon, \varepsilon]$
$\varepsilon \in (0, \pi) \}$ și $f(z) = e^z$. Să se calculeze aria $f(D)$

11. Dacă $D = \{ z \mid 1 \leq |z| \leq 2,\ -\frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4} \}$, $f(z) = z^2$.
Să se afle aria $f(D)$

12. Să se calculeze:

a) $\int_{1+i}^{2i} (z^3 - z) e^{\frac{z^2}{2}} dz$, b) $\int_0^i z \cos z \, dz$

c) $\int_1^i \frac{\ln z}{z} dz$ dealungul segmentului de dreapta $[1, i]$

13. Să se calculeze: a) $\int_{\mathcal{C}} \operatorname{Re}(\sin z) \cos z \, dz$, $\mathcal{C}: |\operatorname{Im} z| \leq 1$, $\operatorname{Re} z = \frac{\pi}{4}$

b) $\int_{\mathcal{C}} z \operatorname{Im} z^2 \, dz$, $\mathcal{C}$: $\operatorname{Im} z \leq 1$, $\operatorname{Re} z = 1$.