

## 14 Estimarea parametrilor sistemelor utilizând metoda celor mai mici pătrate (CMMP)

### 14.1 Modele stochastice (sau aleatoare)

Comportarea proceselor reale este influențată de existența perturbațiilor. Este firesc, în aceste condiții, să se considere caracteristicile perturbațiilor la fel de importante ca și dinamica proceselor. Abordările moderne presupun modelarea perturbațiilor ca procese stochastice și exploatarea proprietăților lor.

Perturbațiile trebuie în consecință introduse în modelele proceselor din practică.

In continuare este comentat doar cazul discret pentru a se evita dificultățile care apar la introducerea zgomotului alb continuu.

Schema generală a unui proces perturbat este reprezentată în figura 14.1:

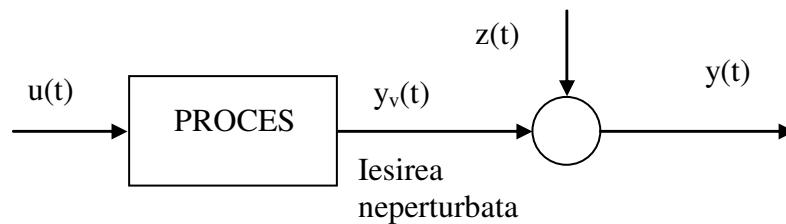


Figura 14.1 Schema bloc a unui proces perturbat

Ieșirea  $y$  este influențată nu numai de intrarea  $u$  ci și de zgomotul aditiv din ieșire  $z(t)$  (se consideră îndeplinita ipoteza de liniaritate) care conține și erorile de măsură, și cele de modelare.

Forma generală a structurii *modelului dinamic, stochastic, discret, liniar* este următoarea (pentru cazul SISO):

$$A(q^{-1})y(t) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u(t) + z(t) \quad (14.1)$$

unde:

$t$ - timp normalizat  $t=1,2,\dots$

$q^{-1}$ - operatorul de întârziere cu un pas

$u(\cdot), y(\cdot)$ - mărimile de intrare și ieșire scalare

respectiv polinoamele:

$$A(q^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{na} a_i q^{-i}$$

$$B(q^{-1}) = b_1 q^{-1} + \dots + b_{nb} q^{-nb} = \sum_{i=1}^{nb} b_i q^{-i} \quad (14.2)$$

$$F(q^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{nf} f_i q^{-i}$$

$z(\cdot)$ - este un proces stochastic discret, cu densitatea spectrală rațională, care poate fi parametrizat utilizând teorema de reprezentare spectrală:

$$z(t) = H(q^{-1})e(t) \quad (14.3)$$

unde:

$e(t)$  - secvența de variabile aleatoare independente de medie zero și varianta  $\sigma^2$ ,

adică este un zgomotul alb discret cu:  $Ee = 0$ ,  $Ee^2 = \sigma^2$

$H(q^{-1})$  - filtru rațional stabil de forma generală

$$H(q^{-1}) = \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} \quad (14.4)$$

$$\text{cu } C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{nc} q^{-nc}$$

$$D(q^{-1}) = 1 + d_1 q^{-1} + \dots + d_{nd} q^{-nd}$$

Pe baza relațiilor (14.2), (14.3), (14.4) modelul general (14.1) devine:

$$A(q^{-1})y(t) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u(t) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e(t) \quad (14.5)$$

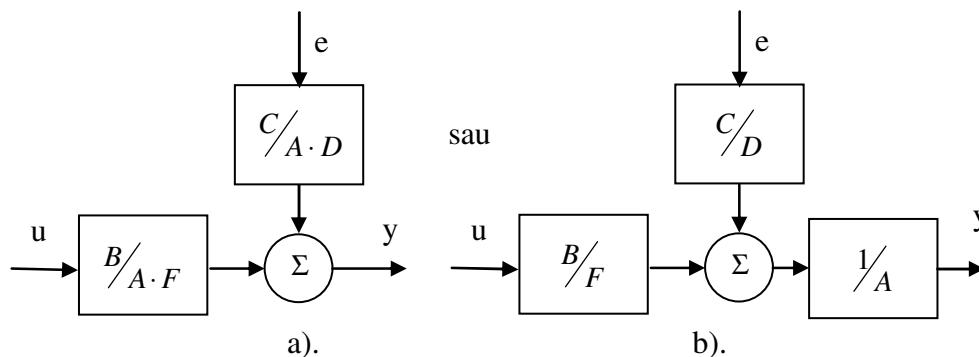


Figura 14.2 Schema bloc a modelului stochastic discret (vezi 14.5)

Modelul (14.5) presupune implicit ca timpul mort al sistemului este unitar.

In aplicații modelul general (14.5) este rareori folosit ca atare, utilizându-se forme particulare ale lui, în care unul sau mai multe dintre polinoamele în operatorul de întârziere se consideră unitare.

Astfel se disting următoarele modele:

- Modelul **ARMAX** – *model tip Autoregresie și Medie alunecătoare cu semnal exogen (AutoRegressive Moving Average with eXogenous signal (inputs))*

In (14.5) se consideră  $nd = nf = 0$ , deci  $D(q^{-1}) = F(q^{-1}) = 1$ . Rezultă

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + C(q^{-1})e(t) \quad \text{model ARMAX} \quad (14.6)$$

sau în forma explicită:

$$\begin{aligned} y(t) + a_1y(t-1) + \dots + a_{na}y(t-n_a) &= b_1u(t-1) + \dots + b_{nb}u(t-nb) + \\ &+ e(t) + c_1e(t-1) + \dots + c_{nc}(t-n_c) \end{aligned}$$

Semnalul exogen măsurabil poate fi o variabilă de comandă  $u(t)$ , fapt pentru care modelul (14.6) mai este referit în literatura ca model **CARMA** (*Controlled Auto Regressive Moving Average*).

Cazuri particulare ale modelului (14.6):

- se presupune ca nu există nici o intrare măsurabilă, deci  $nb = 0 \Rightarrow B(\cdot) = 0$ .

Rezulta modelul **ARMA** (*Model de tip Auto Regresie și Medie Alunecătoare*):

$$A(q^{-1})y(t) = C(q^{-1})e(t) \quad \text{model ARMA} \quad (14.7)$$

In acest caz  $y(t)$  se numește *serie temporală* sau *serie de timp*.

- Daca în plus  $nc = 0 \rightarrow C(q^{-1}) = 1$ ,

obținându-se modelul **AR** (*model de tip AutoRegresie*):

$$A(q^{-1})y(t) = e(t) \quad \text{model AR} \quad (14.8)$$

Modelul AR este frecvent utilizat în prelucrarea semnalelor, (este modelata o serie de timp ideală) el furnizează polii sistemului.

- Daca în (14.6)  $na = 0 \rightarrow A(\cdot) = 1$  obținându-se modelul **MA** (*model de tip Medie Alunecătoare*):

$$y(t) = C(q^{-1})e(t) \quad \text{model MA} \quad (14.9)$$

Modelul MA furnizează zerourile sistemului.

- Când  $A(q^{-1})$  este constrâns să contină un factor de forma  $(1 - q^{-1})$  modelul se numește **ARIMA** – *model de tip AutoRegresiv Integrat cu Medie Alunecătoare (AutoRegressive Integrated Moving Average)*

- Daca în (14.5)  $na = nc = 0 \rightarrow A(\cdot) = C(\cdot) = 1$  obținându-se modelul **FIR** – model la răspuns finit sau model funcție pondere trunchiată (*Finit Impulse Response*):

$$y(t) = B(q^{-1})u(t) + e(t) \quad \text{model FIR} \quad (14.10)$$

- Daca în (14.5)  $nc = 0 \rightarrow C(\cdot) = 1$  obținându-se modelul **ARX** – *model de tip AutoRegresie cu intrări exogene (AutoRegressive model with Exogenous Input sau Controlled AutoRegressive model)*:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + e(t) \quad \text{model ARX} \quad (14.11)$$

- Daca în (14.5)  $na = nc = nd = 0 \rightarrow A(\cdot) = C(\cdot) = D(\cdot) = 1$  se obține modelul **erorii de ieșire** (Output Error):

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} u(t) + e(t) \quad \text{model eroare de ieșire} \quad (14.12)$$

- Dacă în (14.4)  $na = 0 \rightarrow A(\cdot) = 1$ , se obține modelul **BOX-JENKINS**:

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} u(t) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} e(t) \quad \text{model Box-Jenkins} \quad (14.13)$$

## 14.2 Estimatorul CMMP off-line

Se consideră un proces descris de un model discret, liniar, stochastic ARMAX de forma generală:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) + z(t) \quad (14.14)$$

unde polinoamele în operatorul de întârziere  $q^{-1}$  sunt de forma:

$$A(q^{-1}) = 1 + \sum_{i=1}^{na} a_i q^{-i}, \quad (14.15)$$

$$B(q^{-1}) = \sum_{i=1}^{nb} b_i q^{-i}$$

iar  
 $a_i, b_i$  - parametri scalari,  
 $na$  - ordinul mediei alunecătoare  
 $nb$  - ordinul autoregresiei  
 $z(t)$  - zgomot stochastic  
 $t$  - timp discret normalizat,  $t=1,2,\dots$

Modelul (14.14) poate fi rescris în forma:

$$y(t) = -\sum_{i=1}^{na} a_i y(t-i) + \sum_{j=1}^{nb} b_j u(t-j) + z(t) \quad (14.16)$$

Problema care se dorește a fi rezolvată este determinarea (estimarea) parametrilor  $\{a_i, b_j\}$  din măsurători ale mărimilor de intrare  $u$  și de ieșire  $y$ .

In varianta off-line determinarea parametrilor se efectuează prelucrând întregul sir de măsurători intrare/ieșire.

Ca ipoteze de lucru,  $na$  și  $nb$  se presupun cunoscute, iar zgomotul  $z(t)$  poate fi complet caracterizat de momentele de ordin I (matricea de medie) respectiv de ordin II (matricea de covarianță).

Dacă zgomotul este gaussian nu se pierde nici o informație prin restrângerea la cele 2 momente.

Modelul (14.16) poate fi rescris la rândul lui într-o formă de regresie liniară:

$$y(t) = s^T(t)\theta + z(t) \quad (14.17)$$

observația = semnal + zgomot

unde:  $\theta$  este vectorul parametrilor, care poate fi ales într-o formă dorită  
 $s(t)$  este vectorul măsurătorilor (observațiilor) a cărui formă este determinată de alegerea lui  $\theta$

O alegere a vectorului parametrilor de formă:

$$\theta = [a_1 \cdots a_{na}, b_1 \cdots b_{nb}]^T \quad (14.18)$$

implica un vector al măsurătorilor:

$$s(t) = [-y(t-1) \cdots -y(t-na), u(t-1) \cdots u(t-nb)]^T \quad (14.19)$$

Pentru  $t = \overline{1, N}$  (unde  $N$  este numărul măsurătorilor), relația (14.17) devine un sistem de  $N$  ecuații algebrice liniare care pot fi rescrise într-o formă compactă vectorial-matriceală:

$$Y = S\theta + Z \quad (14.20)$$

cu:  $Y = [y(1), y(2) \cdots y(N)]^T$

$$Z = [z(1), z(2) \cdots z(N)]^T$$

$$S = \begin{bmatrix} s^T(1) \\ s^T(2) \\ \vdots \\ s^T(N) \end{bmatrix}$$

$S$  este numita matricea măsurătorilor (sau observațiilor).

Eroarea (ecuației) sau reziduul corespunzător formei (14.17) este:

$$\varepsilon(t) = y(t) - s^T(t)\theta \quad (14.21)$$

sau corespunzător formei (14.20):

$$\varepsilon = Y - S\theta \quad (14.22)$$

Metoda CMMP are drept scop determinarea „celei mai probabile” valori ale lui  $\theta$ , cu alte cuvinte **estimatul** vectorului parametrilor  $\hat{\theta}$ , definit ca valoarea care minimizează suma pătratelor reziduului, adică o **funcție de cost sau funcție criteriu** de forma:

$$J(\theta) = [Y - S\theta][Y - S\theta]^T = \varepsilon \cdot \varepsilon^T \quad (14.23)$$

Minimizarea funcției de cost (14.23) înseamnă în fapt determinarea vectorului parametrilor care anulează derivatele parțiale în raport cu parametri (gradientul)

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} [Y - S\theta]^T [Y - S\theta] = 0 \quad (14.24)$$

Soluția ecuației (14.24) este:

$$\hat{\theta} = (S^T S)^{-1} S^T Y \quad (14.25)$$

care definește **estimatorul CMMP off-line**.

### 14.3 Comenzi Matlab care implementează estimatori off-line

Comenzile Matlab care implementează estimatori off-line sunt:

- **arx** - implementează metoda celor mai mici pătrate pentru modele ARX:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t - nk) + e(t)$$

având sintaxa:

$$th=arx(z,nn)$$

unde:  $z=[y \ u]$  - matrice ce conține măsurătorile intrării și ieșirii sistemului.

$nn=[na \ nb \ nk]$ - vector ce conține ordinul autoregresiei, al mediei alunecătoare precum și timpul mort  $nk$ .

- **iv4** - implementează metoda variabilei instrumentale pentru modele ARX având sintaxa:

$$th=iv4(z,nn)$$

- **oe** - estimarea parametrilor unui model al erorii de ieșire:

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} u(t - nk) + e(t)$$

având sintaxa:

$$th=oe(z,nn)$$

unde:  $nn=[nb \ nf \ nk]$

- **bj** - estimarea parametrilor unui model Box-Jenkins:

$$y(t) = \frac{B(q)}{F(q)} u(t - nk) + \frac{C(q)}{D(q)} e(t)$$

având sintaxa:

$$th=bj(z,nn)$$

unde:  $nn=[nb \ nc \ nd \ nf \ nk]$

- **armax** - estimarea parametrilor unui model ARMAX:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t - nk) + C(q^{-1})e(t)$$

având sintaxa:

$$th=armax(z,nn)$$

unde:  $nn=[na \ nb \ nc \ nk]$ .

In exemplele următoare se utilizează caracteristicile de frecvență obținute pe baza măsurătorilor intrare-iesire, cu ajutorul comenzi *spa* - identificare utilizând analiza spectrală. Sintaxa acesteia este:

```
[GS,NSS]=spa(z)
```

unde: GS - funcția de transfer estimată  
NSS - spectrul zgromotului estimat

## 14.4 Prezentarea unei sesiuni tipice de estimare a parametrilor în Matlab

In cele ce urmează se prezintă un exemplu de utilizare a unora dintre funcțiile introduse în paragraful 14.3. În sesiunea de lucru prezentată vor mai apărea și alte funcții auxiliare, pentru a căror mai bună înțelegere se recomanda utilizarea comenzi "help".

Se simulează funcționarea unui sistem descris printr-un model de tip ARMAX . Intr-o prima etapă, se construiește modelul procesului:

```
A=[1 -1.5 0.7];
B=[0 1 0.5];
C=[1 -1 0.2];
th0=mktheta(A,B,C);
```

**OBSERVATIE:** comanda *mktheta* a fost înlocuită de *poly2th* (iar mai tarziu de *idpoly*)

In continuare se generează semnalul de intrare *u* ca semnal binar aleator, respectiv zgromotul *e*, ca semnal aleator cu distribuție uniformă, și se determină ieșirea *y* prin simulare.

```
u=sign(randn(300,1));
e=rand(300,1);
y=idsim([u e],th0);
figure
plot(u),title('Semnalul de intrare')
figure
plot(y),title('Semnalul de ieșire')
```

In figura 14.3 se prezintă semnalul de intrare aleator binar (având două valori, +1, respectiv -1), iar în figura 14.4 este răspunsul (ieșirea) sistemului considerat.

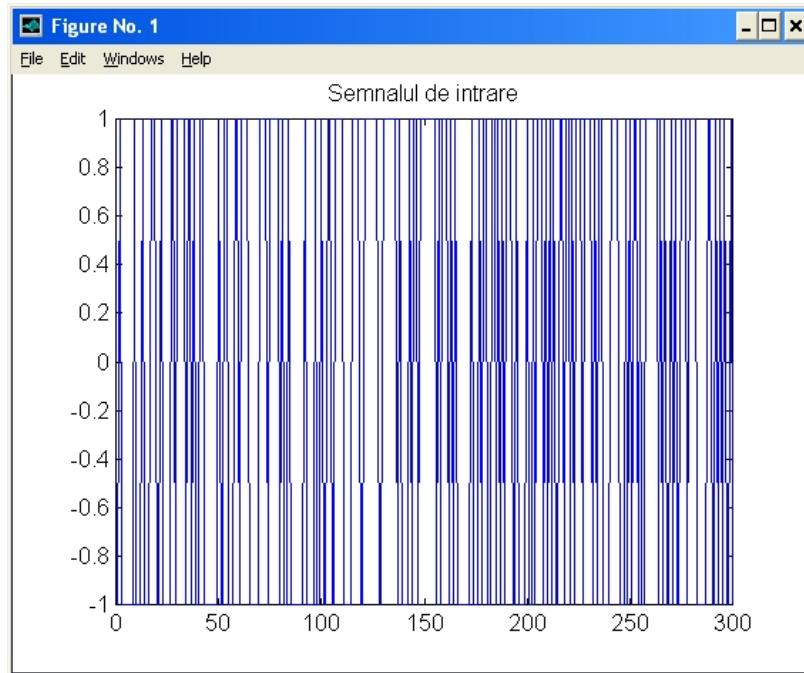


Figura 14.3 Semnalul de intrare

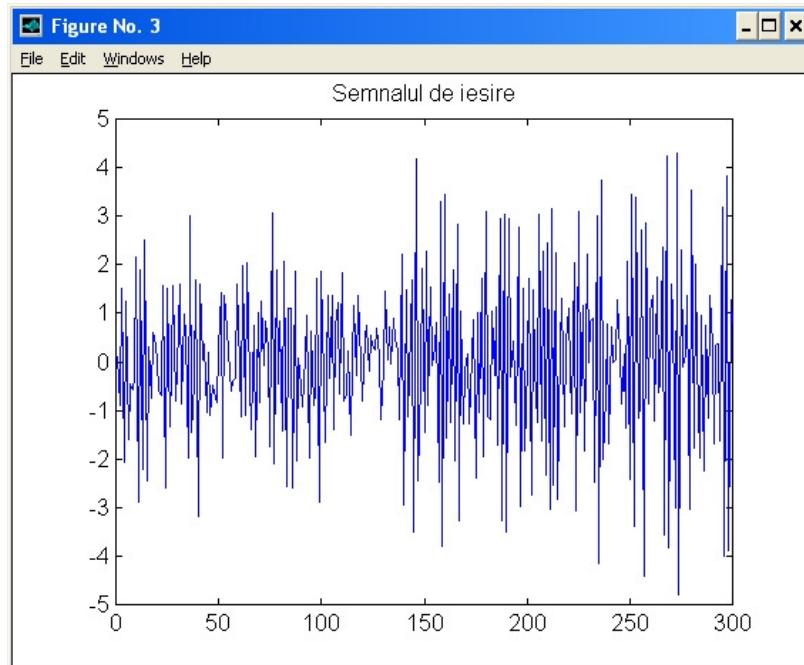


Figura 14.4 Semnalul de ieșire

In continuare se estimează parametrii prin diferite metode de estimare și se compara rezultatele obținute.

Aprecierea comportării estimatorilor se face prin compararea diagramele Bode trasate pe baza unui set de date intrare/ieșire.

Trasarea diagramele Bode corespunzătoare sistemului considerat, pe baza datelor de intrare/ieșire obținute prin simulare, utilizând analiza spectrală, se face prin executarea următoarelor comenzi:

```
z=[y u];
[GS,NSS]=spa(z);
figure
bodeplot(GS)
```

Astfel se obțin diagramele Bode amplitudine-pulsărie, respectiv faza-pulsărie reprezentate în figura 14.5.

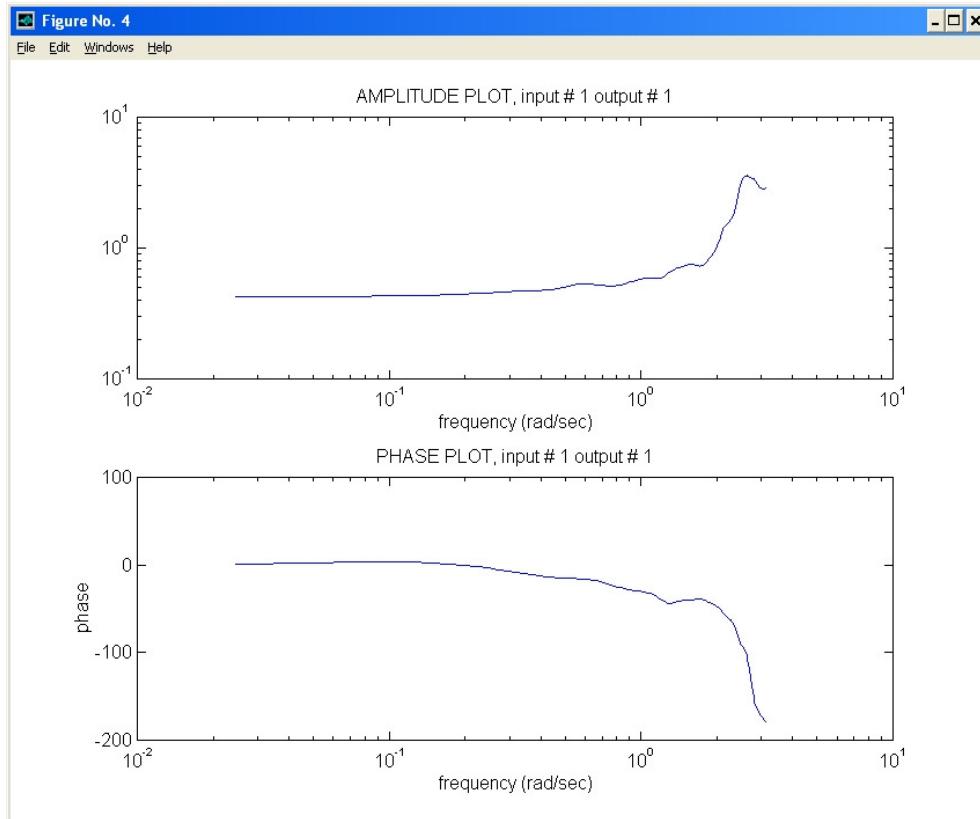


Figura 14.5 Diagramele Bode corespunzătoare sistemului considerat

In continuare se pune problema ca pe baza datelor de intrare/ieșire obținute prin simulare (pe baza modelului ARMAX inițial) sa se estimeze parametrii unui model de tip ARX. Se utilizează atât metoda celor mai mici pătrate, implementată de comanda *arx*, prezentată în paragraful 14.3, cat și metoda variabilei instrumentale, implementată de comanda *iv4*, prezentată în paragraful 14.3.

Utilizarea metodei celor mai mici pătrate presupune următoarea secvență de comenzi:

```
a2=arx(z,[2 2 1]);
present(a2)
```

rezultatul fiind afișat sub forma:

```
This matrix was created by the command ARX
Loss fcn: 0.5332  Akaike's FPE: 0.5476 Sampling interval 1
The polynomial coefficients and their standard deviations are
```

```
B =
0 1.0664 -0.6029
0 0.0424 0.0700
```

```
A =
1.0000 0.3749 -0.2168
0 0.0518 0.0425
```

Utilizarea metodei variabilei instrumentale presupune urmatoarea secventa de comenzi:

```
i2=iv4(z,[2 2 1]);
present(i2)
```

care furnizează urmatorul rezultat:

```
This matrix was created by the command IV4
Loss fcn: 0.1217  Akaike's FPE: 0.125 Sampling interval 1
The polynomial coefficients and their standard deviations are
```

```
B =
0 1.0104 0.5237
0 0.0185 0.0239
```

```
A =
1.0000 1.4869 0.6877
0 0.0127 0.0116
```

Pentru a compara rezultatele obținute prin cele două metode de estimare considerate (CMMR și variabilă instrumentală), se construiesc caracteristicile de frecvență (diagramele Bode) utilizând parametrii corespunzători celor două modele ARX estimate.

```
Ga2=trf(a2);
Gi2=trf(i2);
figure
bodeplot([GS Ga2 Gi2]);
```

In figura 14.6 se prezintă diagramele Bode obținute. Compararea performanțelor estimatorilor considerați se face prin compararea diagramelor Bode, obținute pe baza datelor de intrare/ieșire generate utilizând cele două modele obținute.

Se poate observa o comportare asemănătoare a celor doi estimatori în domeniul frecvențelor joase, în timp ce la frecvențe mari, estimarea pe baza comenzi *iv4* conduce la rezultate mai bune.

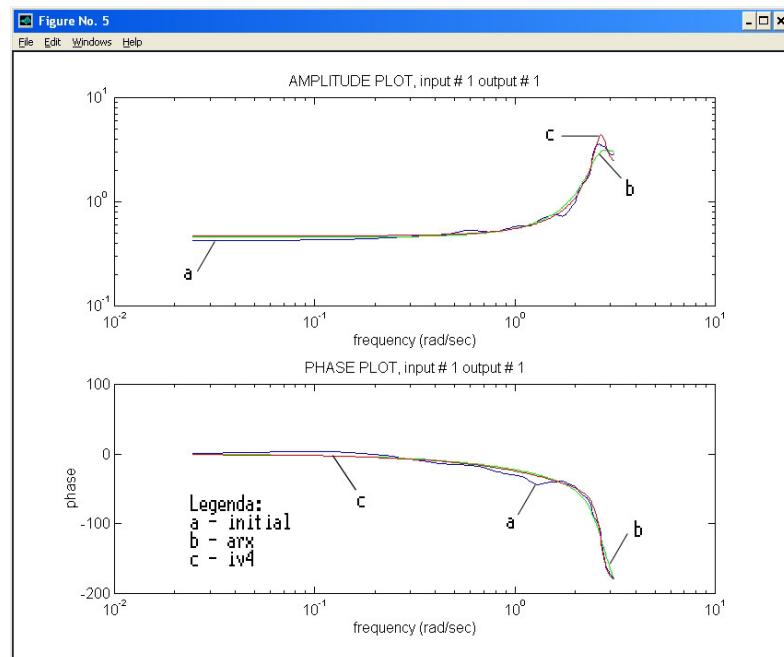


Figura 14.6 Comparație între diagramele Bode

Totodată, se pot compara reziduurile (erorile) corespunzătoare celor două metode implementate prin comenziile *arx* și respectiv *iv4*:

```
figure
e11=resid(z,a2);
figure
e21=resid(z,i2);
figure
subplot(211)
plot(e11);title('arx')
subplot(212)
plot(e21);title('iv4')
```

In figura 14.7 se prezintă autocorelația reziduurilor, respectiv intercorelația dintre reziduuri și intrare, în cazul utilizării comenzi *arx*. Se observă ca autocorelația este în zona admisă (intervalul cuprins între cele două linii punctate), în vreme ce intercorelația ia și valori în afara acesteia.

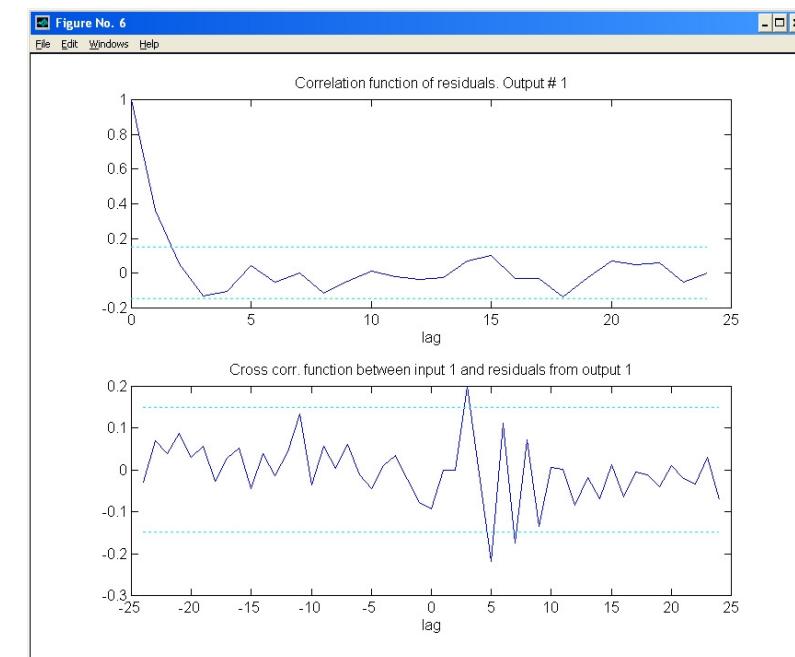


Figura 14.7 Autocorelația, respectiv intercorelația reziduurilor corespunzătoare comenzi *arx*

In figura 14.8 se prezintă autocorelația reziduurilor și respectiv intercorelația dintre reziduuri și intrare, în cazul utilizării comenzi *iv4*. Se observă ca atât autocorelația cat și intercorelația se încadrează în zona admisă.

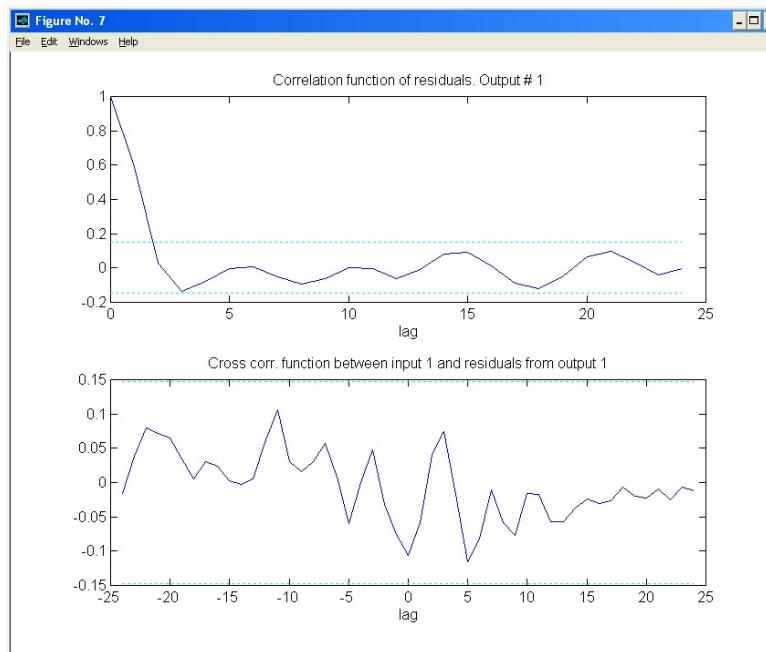


Figura 14.8 Autocorelația, respectiv intercorelația reziduurilor corespunzătoare comenzi *iv4*

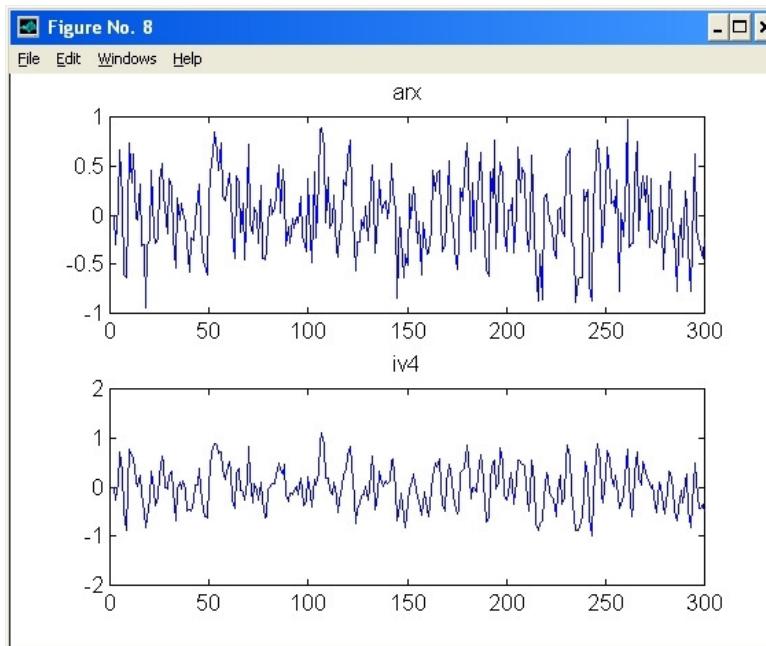


Figura 14.9 Reziduurile corespunzătoare comenziilor *arx* și *iv4*

In figura 14.9 se prezintă reziduurile corespunzătoare utilizării comenzi *arx*, respectiv *iv4*.

In continuare se compara rezultatele obținute utilizând comenziile *armax* și *bj* în mod similar celor considerate anterior. În continuare se prezintă doar secvențele corespunzătoare comenziilor *armax* și *bj*.

```
am2=armax(z,[2 2 2 1]);
bj2=bj(z,[2 2 2 2 1]);
Gam2=trf(am2);
Gbj2=trf(bj2);
bodeplot([Gam2 Gbj2 Gi2 GS])
```

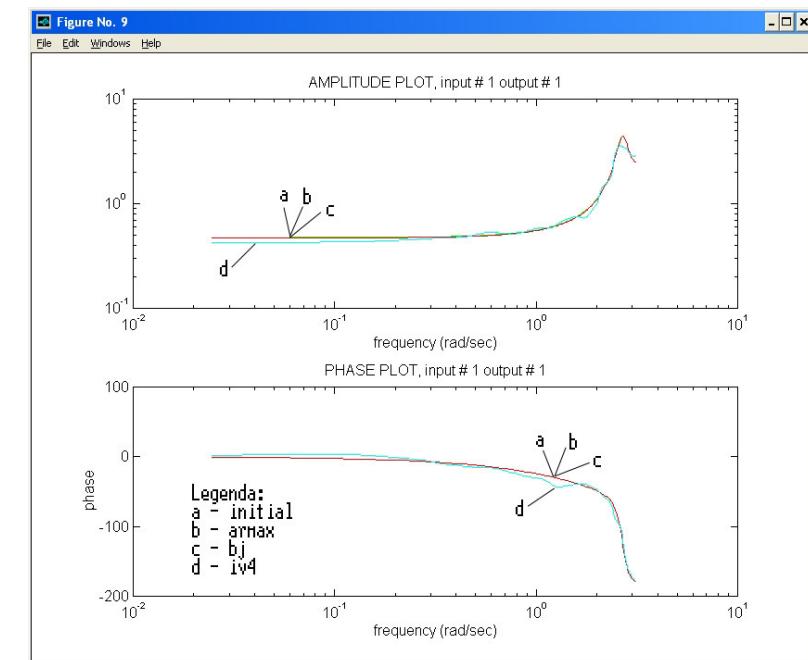


Figura 14.10 Comparație între diagramele Bode

In figura 14.10 se prezintă diagramele Bode corespunzătoare sistemului inițial și respectiv celor furnizate de comenziile *iv4*, *armax* și *bj*. Se observă suprapunerea caracteristicilor obținute pe baza modelelor estimate prin utilizarea comenziilor *armax* și *bj* peste cele ale sistemului inițial.

Analog, se compara reziduurile corespunzătoare comenziilor *armax* și *bj*:

```
figure
e12=resid(z,am2);
figure
```

```
e22=resid(z,bj2);
figure
subplot(211)
plot(e11);title('armax')
subplot(212)
plot(e21);title('bj')
```

In figurile 14.11 și 14.12 se prezintă autocorelația reziduurilor, respectiv intercorelația dintre reziduuri și intrare, în cazul utilizării comenzi *armax* și *bj*. Se observă ca în ambele situații, atât autocorelația cat și intercorelația se încadrează în zona admisă.

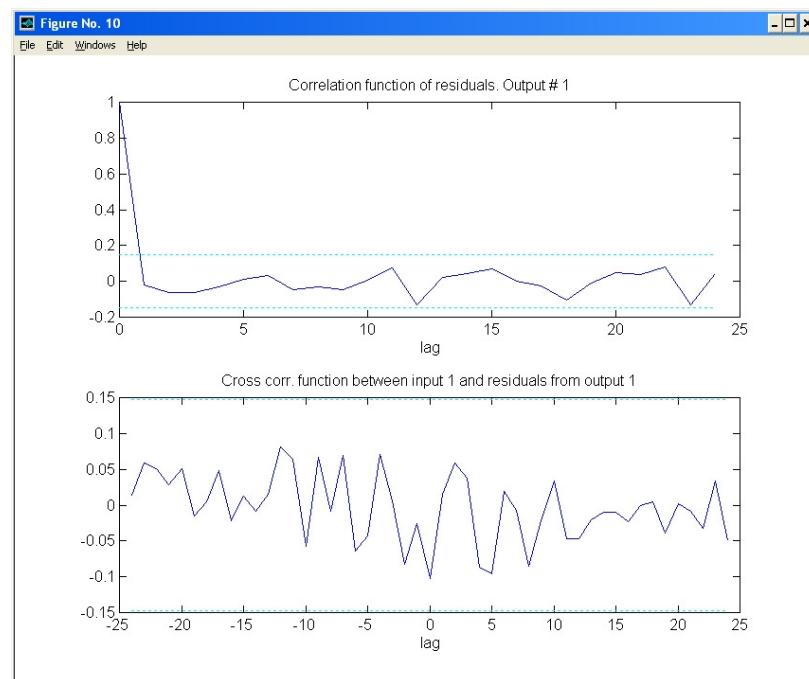


Figura 14.11 Autocorelația, respectiv intercorelația reziduurilor corespunzătoare comenzi *armax*

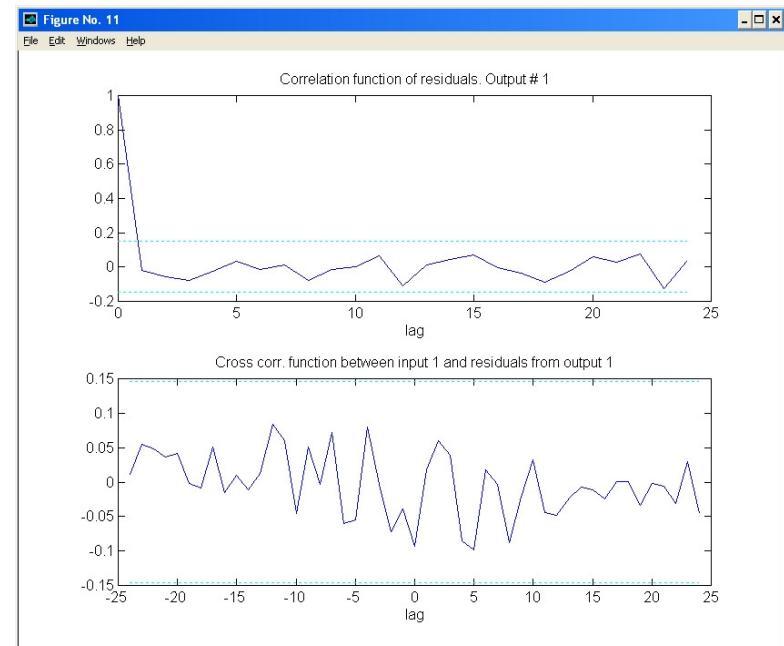


Figura 14.12 Autocorelația, respectiv intercorelația reziduurilor corespunzătoare comenzi *bj*

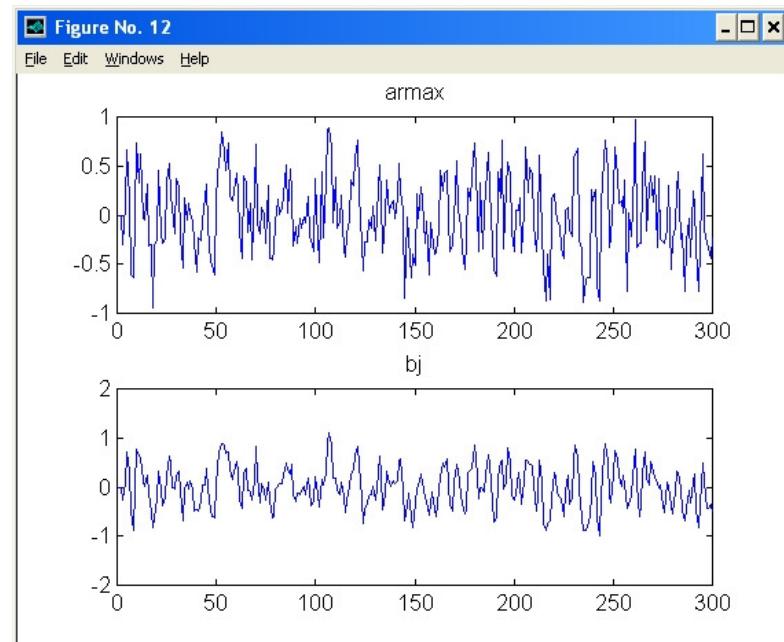


Figura 14.13 Reziduurile corespunzătoare comenzi *armax* și *bj*

In figura 14.13 se prezintă reziduurile corespunzătoare utilizării comenzi *armax*, respectiv *bj*.

Compararea ieșirii *y* a modelului inițial cu ieșirile obținute prin simulare corespunzător modelelor determinate prin utilizarea comenzi *armax* (*yam2*) și respectiv *bj* (*ybj2*) se poate realiza printr-o secvență de comenzi de forma:

```
yam2=idsim(u,am2);
ybj2=idsim(u,bj2);
plot([y yam2 ybj2])
```

Rezultatul este prezentat în Figura 14.14.

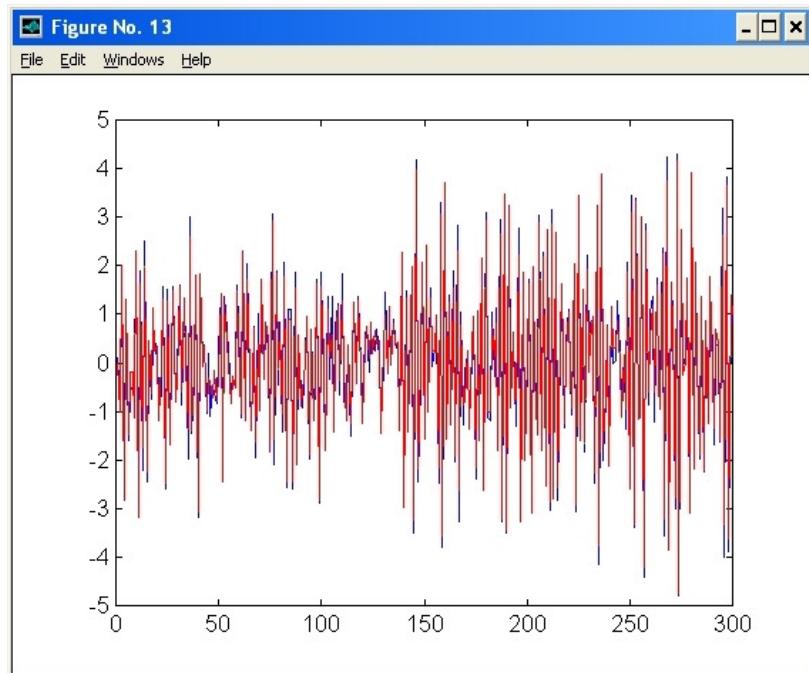


Figura 14.14 Ieșirea corespunzătoare sistemului inițial, respectiv estimatoarelor furnizate de comenziile *armax* și *bj*

2. Sa se studieze influența lungimii secvențelor de date intrare- ieșire disponibile, precum și a raportului semnal/zgomot asupra preciziei estimării.

## 14.5 Probleme de studiat

1. Sa se realizeze programe pentru estimarea prin fiecare dintre metodele prezentate, și se vor compara rezultatele.