

Ovo je zahvala.

Sadržaj

1. Uvod	2
2. Coq	3
2.1. Što je Coq?	3
2.2. Programiranje u Coqu	5
2.3. Hijerarhija tipova	8
2.4. Propozicije i tipovi, dokazi i programi	10
2.5. Ograničenja u programiranju i dokazivanju	10
3. Logika prvog reda s induktivnim definicijama	12
3.1. Sintaksa	12
3.2. Semantika	12
3.3. Standardni modeli	12
3.4. Sistem sekvenata s induktivnim definicijama	12
3.5. Adekvatnost	12
4. Ciklički dokazi	13
5. Zaključak	14
Literatura	15
Sažetak	17
Abstract	18

1. Uvod

2. Coq

U ovom poglavlju dajemo pogled svisoka na programski sustav Coq. Prvo ćemo objasniti što je uopće Coq, u kojem je kontekstu nastao, i od kojih komponenti se sastoji. Zatim ćemo dati kratak pregled programiranja u Coqu, nakon čega ćemo se baviti naprednijim konceptima i spomenuti neka ograničenja. Za širi opseg gradiva, čitatelja upućujemo na knjige *Coq'Art* [1], *Software Foundations* [2, 3, 4] i *Certified Programming with Dependent Types* [5] te na službenu dokumentaciju [6].

2.1. Što je Coq?

Alat za dokazivanje Coq¹, punog naziva *The Coq Proof Assistant*, programski je sustav pomoću kojeg korisnici mogu dokazivati matematičke tvrdnje. **Misao:** *ne služi samo tome, može biti i općeniti funkcijski programski jezik, može služiti za programiranje sa zavisnim tipovima* Alat se temelji na λ -računu i teoriji tipova, a prva je inačica implementirana godine 1984. [6] Ovaj rad koristi inačicu 8.18 iz rujna godine 2023.

Program Coq može se pokrenuti u interaktivnom ili u skupnom načinu rada. Interaktivni način rada pokreće se naredbom `coqtop`, a korisniku omogućuje rad u ljusci sličnoj `bash` i `python` ljuskama. Interaktivna ljuska (također poznata pod imenom *toplevel*) služi unosu definicija i iskazivanju lema. Skupni način rada pokreće se naredbom `coqc`, a korisniku omogućuje semantičku provjeru i prevođenje izvornih datoteka u jednostavnije formate. Kod formaliziranja i dokazivanja, korisnik će najčešće koristiti interaktivni način rada, po mogućnosti kroz neku od dostupnih razvojnih okolina.²

Misao: *spomenuti proof mode? spomenuti workflow dokazivanja? ima jedna zgodna*

¹<https://coq.inria.fr/>

²Autor rada koristio je paket *Proof General* za uređivač teksta *Emacs*. Druge često korištene okoline su *VsCoq* i *CoqIDE*.

slika u QED at Large **Misao:** treba naglasiti da je Coq interaktivni dokazivač teorema

Kao programski jezik, Coq se sastoji od više podjezika različitih namjena, od kojih spominjemo *Vernacular*, *Gallinu* i *Ltac*.

Vernacular **Misao:** *vernacular znači “govorni jezik”* je jezik naredbi kojima korisnik komunicira sa sustavom (i u interaktivnom i u skupnom načinu rada); svaka Coq skripta (datoteka s nastavkom `.v`) je niz naredbi. Neke od najčešće korištenih naredbi su `Check`, `Definition`, `Inductive`, `Fixpoint` i `Lemma`. Pomoću naredbi za tvrdnje, kao što je `Lemma`, Coq prelazi iz *toplevela* **Misao:** *treba bolji prevod* u način dokazivanja (*engl.proof mode*).

Gallina je Coqov strogo statički tipiziran specifikacijski jezik. Kako se glavnina programiranja u Coqu svodi upravo na programiranje u Gallini, posvećujemo joj idući odjeljak.

Ltac je Coqov netipiziran jezik za definiciju i korištenje taktika. Taktike su pomoćne naredbe kojima se u načinu dokazivanja konstruira dokaz. Može se reći da je Ltac jezik za metaprogramiranje Galline. Primjeri taktika su `intros`, `destruct`, `apply` i `rewrite`.

Pogledajmo ilustrativan primjer.

```
1  Lemma example_lemma : 1 + 1 = 2.
2  Proof.
3    cbn. reflexivity.
4  Qed.
```

Ključne riječi `Lemma`, `Proof` i `Qed` dio su Vernaculara, izraz `example_lemma : 1 + 1 = 2` dio je Galline, a pomoćne naredbe `cbn` i `reflexivity` dio su Ltaca.

Jezgra programskog sustava Coq je algoritam za provjeru tipova (*engl.type checking*) implementiran u OCamlu — svaka tvrdnja koja se dokazuje izrečena je pomoću tipova. Ostatak sustava u načelu služi za knjigovodstvo i poboljšanje korisničkog iskustva. Nužno je da jezgra sustava bude relativno mala kako bismo se mogli uvjeriti u njenu točnost. U suprotnom, možemo li biti sigurni da su naše dokazane tvrdnje doista istinite? **Misao:**

kažem istinite, ali u stvari mislim dokazive, no to je nespreno za napisati i diskusija oko toga je preopćenita

Prve inačice Coqa implementirale su račun konstrukcija, no kasnije je dodana podrška za induktivno i koinduktivno definirane tipove [7, 8]. Danas se može reći da Coq implementira polimorfni kumulativni račun induktivnih konstrukcija [9]. **Misao:** *moгу spomenuti i preteče računa konstrukcija i jezike koji ih implementiraju, npr. Lisp je implementacija λ -računa* Coq se, osim kao dokazivač teorema, može koristiti i za programiranje sa zavisnim tipovima. U toj sferi konkuriraju jezici Agda³, Idris⁴ i Lean⁵. Coq se između njih ističe po usmjerenosti prema dokazivanju, posebno po korištenju taktika (jezik Ltac) i nepredikativnoj sorti Prop (o kojoj će kasnije biti riječi). Još jedna prednost Coqa je mehanizam *ekstrakcije* pomoću kojeg korisnik može proizvoljnu funkciju⁶ prevesti u jezik niže razine apstrakcije.⁷ Mehanizam ekstrakcije nije dokazano točan, no poželjno je da funkcije zadržavaju točnost i nakon ekstrakcije, pa se radi na verifikaciji ekstrakcije [9].

2.2. Programiranje u Coqu

Gallina je funkcijski programski jezik, što znači da su funkcije prvoklasni objekti — funkcije mogu biti argumenti i povratne vrijednosti drugih funkcija. Dodatno, varijable su nepromjenjive (engl. *immutable*) te se iteracija ostvaruje rekurzijom. Za uvod u funkcijsko programiranje, čitatelja upućujemo na knjigu *Programming in Haskell* [10]. Primjeri koje ćemo vidjeti u ostatku ovog odjeljka dijelom se oslanjaju na tipove i funkcije definirane u Coqovoj standardnoj knjižnici.⁸

Gallina je strogo statički tipiziran jezik, što znači da se svakom termu prilikom prevođenja dodjeljuje tip⁹. Naredbom Check možemo provjeriti tip nekog terma ili doznati da se termu ne može dodijeliti tip. Dalje u radu pod “term” mislimo na dobro formirane terme, odnosno na one terme kojima se može dodijeliti tip. Kažemo da je term *stanov-*

³<https://wiki.portal.chalmers.se/agda/>

⁴<https://www.idris-lang.org/>

⁵<https://lean-lang.org/>

⁶Za koju je dokazao točnost, što god to značilo.

⁷Trenutno su podržani Haskell, OCaml i Scheme.

⁸<https://coq.inria.fr/library/>

⁹Tipovi su kolekcije srodnih objekata.

nik tipa koji mu je dodijeljen. Za tip kažemo da je *nastanjen*, odnosno *nenastanjen*, ako postoji, odnosno ne postoji, stanovnik tog tipa. Kako su u Coqu i tipovi termi, radi razumljivosti i zvučnosti umjesto “tip tipa” kažemo “sorta tipa”.

Kao i u ostalim jezicima, kod programiranja u Coqu korisnik se oslanja na dostupne primitivne izraze, od kojih su najvažniji:

- `forall`, pomoću kojeg se konstruiraju funkcijski tipovi i zavisni produkti¹⁰;
- `match`, pomoću kojeg se provodi *pattern matching*;
- `fun`, pomoću kojeg se definiraju funkcije;
- `fix`, pomoću kojeg se definiraju rekurzivne funkcije i
- `cofix`, pomoću kojeg se definiraju korekurzivne funkcije.

Jedna od osnovnih naredbi za stvaranje novih terma je naredba `Definition`.

```
1 Definition negb (b : bool) : bool :=
2   match b with
3   | false => true
4   | true  => false
5   end.
```

U gornjem kodu definirana je funkcija `negb` čiji se argument `b` tipa `bool` destruktuira te se vraća njegova negacija, također tipa `bool`. Važno je napomenuti da svaki `match` izraz mora imati po jednu granu za svaki konstruktor tipa.¹¹ U ovom su primjeru konstante `false` i `true` jedini konstruktori tipa `bool`. Funkcija `negb` je tipa `bool → bool`.

```
1 Definition mult_zero_r : Prop := forall (n : nat), n * 0 = 0.
```

Ovdje je definirana propozicija (tip) imena `mult_zero_r` kao univerzalno kvantificirana tvrdnja po prirodnim brojevima.

¹⁰Može se reći da je `forall` jedini primitivni konstruktor, dok ostale definira korisnik. U tom smislu je `forall` *the star of the show*.

¹¹Posljedično, svaka je funkcija totalna.

Naredbom `Inductive` definira se *induktivni* tip te se automatski za njega generiraju principi *indukcije* i *rekurzije*.

```
1 Inductive nat : Set :=
2   | 0 : nat
3   | S : nat -> nat.
```

Ovim kodom definirali smo tri terma:

- `nat` (tip prirodnih brojeva) je term sorte `Set`,
- `0` (broj nula) je term tipa `nat` i
- `S` (funkcija sljedbenika) je term tipa `nat → nat`.

Za term `nat` kažemo da je konstruktor tipa (engl. *type constructor*), a za terme `0` i `S` kažemo da su konstruktori objekata (engl. *object constructors*).

Rekurzija nad induktivnim tipovima može se ostvariti pomoću naredbe `Fixpoint`, koja u pozadini koristi izraz `fix`.

```
1 Fixpoint plus (n m : nat) {struct n} : nat :=
2   match n with
3   | 0 => m
4   | S n' => S (plus n' m)
5   end.
```

U ovom primjeru definirana je funkcija `plus` koja prima dva argumenta tipa `nat`. Funkcija je rekurzivna po prvom argumentu što je vidljivo oznakom `{struct n}`. Napominjemo da su induktivni tipovi dobro utemeljeni, to jest svaki term induktivnog tipa je konačan. Time je, u kombinaciji sa strukturalnom rekurzijom, osigurana odlučivost svake funkcije.

Osim induktivnih, u Coqu postoje i koinduktivni tipovi, koji nisu dobro utemeljeni, zbog čega za njih nije moguće definirati principe indukcije i rekurzije. Umjesto rekurzije, koinduktivni tipovi koriste se u korekurzivnim funkcijama. Standardan primjer koinduktivnog tipa je beskonačna lista.

```
1 CoInductive Stream (A : Type) : Type :=  
2 | Cons : A -> Stream A -> Stream A.
```

Ovime smo definirali familiju tipova `Stream` indeksiranu tipskom varijablom `A`. Svaki `Stream` ima glavu i rep koji je također `Stream`.

Stanovnici koinduktivnih tipova konstruiraju se korekurzivnim funkcijama naredbom `CoFixpoint`, koja u pozadini koristi `cofix`.

```
1 CoFixpoint from (n : nat) : Stream nat := Cons _ n (from (n + 1)).
```

Ovime je definirana funkcija `from` koja za ulazni argument `n` vraća niz prirodnih brojeva od `n` na dalje.

Razlika induktivnih i koinduktivnih tipova može se izreći epigramom:

“Induktivni tipovi su domene rekurzivnih funkcija, a koinduktivni tipovi su domene korekurzivnih funkcija”.

Time se želi reći da se termi induktivnih tipova destruktuiraju u rekurzivnim funkcijama, dok se termi koinduktivnih tipova konstruiraju u korekurzivnim funkcijama.

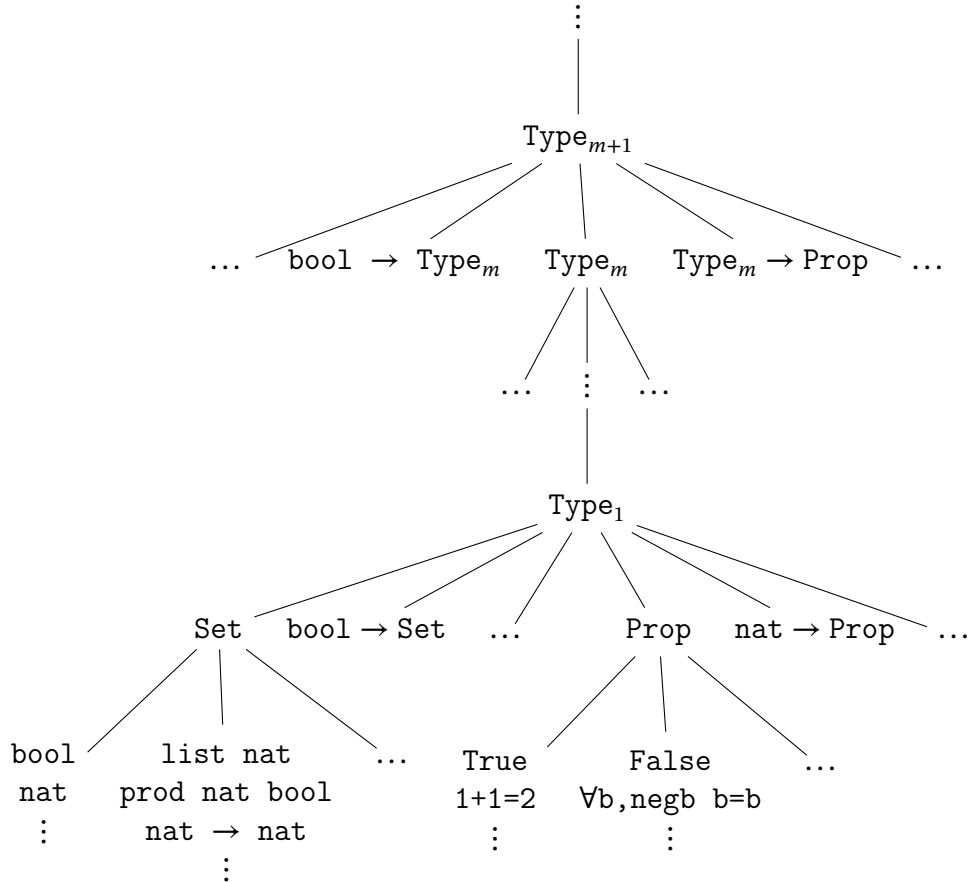
Misao: *Barendregtova kocka, term koji ovisi o termu, term koji ovisi o tipu, tip koji ovisi o termu, tip koji ovisi o tipu*

2.3. Hijerarhija tipova

U usporedbi s tradicionalnim programskim jezicima, Coqov tipski sustav je ekspresivniji jer dopušta tipove koji mogu ovisiti o termima. Takvi tipovi se u Coqu konstruiraju pomoću `forall` izraza. Primjer jednog takvog tipa je “lista duljine n ”, gdje je n neki prirodan broj, a čiji su stanovnici n -torke. Općeniti tip tada glasi “za svaki n , lista duljine n ” — on ovisi o stanovniku drugog tipa (u ovom slučaju, tipa `nat`).

Spomenuli smo da su i tipovi termi te im se može dodijeliti sorta. Postoji li najveći tip, odnosno postoji li tip `Type` čiji su stanovnici svi dobro formirani termi? Prisjetimo se, svaki term ima svoj tip. Kada bi takav `Type` postojao, tada bi vrijedilo `Type : Type`, što

može dovesti do paradoksa lašca¹². Takav dokazivač teorema bio bi inkonzistentan te bismo njime mogli dokazati kontradikciju, čime dokazivač efektivno gubi svoju svrhu. Umjesto jedne “velike” sorte $Type$, u Coqu postoji niz monotonno rastućih sorti $Type_n$ za sve prirodne brojeve n , takav da vrijedi $Type_n : Type_m$ kad god vrijedi $n < m$. Ilustracija ove **kumulativne hijerarhije tipova** prikazana je na slici 2.1. Dvije najvažnije sorte u Coqu su sorta Set i sorta $Prop$.



Slika 2.1. Kumulativna hijerarhija tipova

Naziv Set sinonim je za sortu $Type_0$, a njeni stanovnici su **programi**. Primjerice, tipovi nat i $bool$ su programi. Dodatno, funkcije koje primaju i vraćaju programe su također programi. Tada su i produkti, sume, liste i stabla programa također programi. Intuitivno se može reći da su programi oni tipovi s čijim se stanovnicima može efektivno računati. Stanovnici sorte $Prop$ su **propozicije**. Za razliku od programa, sa propozicijama ne možemo efektivno računati, već ih moramo dokazivati.

Za dokazivače teorema, poželjna je mogućnost definicije predikata (propozicija) nad

¹²Ova rečenica je lažna. U teoriji skupova to je Russellov paradoks, u teoriji tipova to je Girardov paradoks

proizvoljnim tipovima. Zbog toga u Coqu prilikom definicije terma sorte Prop možemo raditi kvantifikaciju po proizvoljno velikim tipovima (što uključuje i sortu Prop).

```
1 Inductive isNat : Set -> Prop :=  
2 | IsNat : isNat nat.
```

Tako je ovdje isNat predikat nad sortom Set, a u primjeru ispod not je predikat nad sortom Prop.

```
1 Definition not (P : Prop) := P -> False.
```

Ovaj stil kvantifikacije omogućuje nam definiciju proizvoljnih propozicija i propozicijskih veznika. Kažemo da je sorta Prop **nepredikativna**. S druge strane, sorta Set je **predikativna**, to jest *ne dopušta* kvantifikaciju po proizvoljno velikim tipovima. Na praktičnoj strani, predikativnost ograničava korisnika da prilikom definicije programa smije koristiti samo druge programe.

2.4. Propozicije i tipovi, dokazi i programi

Ukratko objasniti što je to Curry–Howard, možda najlakše pomoću BHK interpretacije.

Primjeri dokaznih terma, recimo ručno napisan dokazni term za komutiranje univerzalnih kvantifikacija, pa neki jednostavni induktivni dokaz.

Principi indukcije kao rekurzivne funkcije.

2.5. Ograničenja u programiranju i dokazivanju

Tu prvenstveno mislim na uvjete pozitivnosti i produktivnosti za induktivne i koinduktivne tipove, te na eliminaciju propozicija kod definiranja nečega u Type.

	Logika	Program	Logički term	Programski term
	konjunkcija	produktni tip	and	prod
	disjunkcija	zbrojni tip	or	sum
	implikacija	funkcijski tip	->	->
	univerzalna kvantifikacija	zavisni produkt	forall x, P x	forall x, P x
	egzistencijalna kvantifikacija	zavisni koprodukt	ex	sigT
	istina	jedinični tip	True	unit
	laž	prazni tip	False	Empty_set
	modus ponens	poziv funkcije		
	teorem	tip		
	dokaz	term		
	pretpostavka	varijabla		
	dokazivanje	programiranje		
	dokazivost	nastanjenost tipa		

Tablica 2.1. Korespondencija logike i programiranja

3. Logika prvog reda s induktivnim definicijama

3.1. Sintaksa

Signatura. Term. Formula.

3.2. Semantika

Struktura. Okolina. Evaluacija. Relacija ispunjivosti. Substitution sanity leme.

3.3. Standardni modeli

Produkcije. Skup induktivnih definicija. Operator φ_Φ . Aproksimanti. Standardni model.

3.4. Sistem sekvenata s induktivnim definicijama

LKID. Dopustiva pravila. Primjeri dokaza.

3.5. Adekvatnost

Lokalne adekvatnosti za pravila izvoda. Glavni teorem.

4. Ciklički dokazi

Koinduktivni tip podatka i koinduktivna propozicija. Jedan primjer su Streamovi i predikat `Infinite`. Jednostavniji primjer bi možda bio koinduktivni `nat` i koinduktivni `le`.

Kako bi izgledali ciklički dokazi u LKID? Ono što je tamo “repeat funkcija” je u Coqu `cofix`.

5. Zaključak

Literatura

- [1] Y. Bertot i P. Castéran, *Interactive theorem proving and program development: Coq'Art: the Calculus of Inductive Constructions*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [2] B. C. Pierce, A. A. de Amorim, C. Casinghino, M. Gaboardi, M. Greenberg, C. Hrițcu, V. Sjöberg, i B. Yorgey, *Logical Foundations*, ser. Software Foundations, B. C. Pierce, Ur. Electronic textbook, 2023., sv. 1, version 6.5, <http://softwarefoundations.cis.upenn.edu>.
- [3] B. C. Pierce, A. A. de Amorim, C. Casinghino, M. Gaboardi, M. Greenberg, C. Hrițcu, V. Sjöberg, A. Tolmach, i B. Yorgey, *Programming Language Foundations*, ser. Software Foundations, B. C. Pierce, Ur. Electronic textbook, 2024., sv. 2, version 6.5, <http://softwarefoundations.cis.upenn.edu>.
- [4] A. W. Appel, *Verified Functional Algorithms*, ser. Software Foundations, B. C. Pierce, Ur. Electronic textbook, 2023., sv. 3, version 1.5.4, <http://softwarefoundations.cis.upenn.edu>.
- [5] A. Chlipala, *Certified programming with dependent types: a pragmatic introduction to the Coq proof assistant*. MIT Press, 2022.
- [6] The Coq Development Team, “The Coq Reference Manual, Release 8.18.0”, <https://coq.inria.fr/doc/v8.18/refman/>, 2023.
- [7] F. Pfenning i C. Paulin-Mohring, “Inductively Defined Types in the Calculus of Constructions”, u *Proceedings of the 5th International Conference on Mathematical Foundations of Programming Semantics*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1989., str. 209–228.

- [8] E. Giménez, “Codifying guarded definitions with recursive schemes”, u *Types for Proofs and Programs*, P. Dybjer, B. Nordström, i J. Smith, Ur. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1995., str. 39–59.
- [9] M. Sozeau, S. Boulier, Y. Forster, N. Tabareau, i T. Winterhalter, “Coq Coq correct! verification of type checking and erasure for Coq, in Coq”, *Proceedings of the ACM on Programming Languages*, sv. 4, br. POPL, str. 1–28, 2019.
- [10] G. Hutton, *Programming in Haskell*, 2. izd. Cambridge University Press, 2016.

Sažetak

Primjene Coq alata za dokazivanje u matematici i računarstvu

Miho Hren

Unesite sažetak na hrvatskom.

Ključne riječi: prva ključna riječ; druga ključna riječ; treća ključna riječ

Abstract

Applications of the Coq Proof Assistant in mathematics and computer science

Miho Hren

Enter the abstract in English.

Keywords: the first keyword; the second keyword; the third keyword