Ovo je zahvala.

Sadržaj

1. Uvod

2. Coq

U ovom poglavlju dajemo pogled svisoka na programski sustav Coq. Prvo ćemo objasniti što je uopće Coq, u kojem je kontekstu nastao, i od kojih komponenti se sastoji. Zatim ćemo dati kratak pregled programiranja u Coqu, nakon čega ćemo se baviti naprednijim konceptima i spomenuti neka ograničenja. Za širi opseg gradiva, čitatelja upućujemo na knjige *Coq'Art* [1], *Software Foundations* [2, 3, 4] i *Certified Programming with Dependent Types* [5] te na službenu dokumentaciju [6].

2.1. Što je Coq?

Alat za dokazivanje Coq[1], punog naziva *The Coq Proof Assistant*, programski je sustav pomoću kojeg korisnici mogu dokazivati matematičke tvrdnje. **Misao:** *ne sluzi samo tome, moze biti i opceniti funkcijski programski jezik, moze sluziti za programiranje sa zavisnim tipovima* Alat se temelji na λ-računu i teoriji tipova, a prva je inačica implementirana godine 1984. [6] Ovaj rad koristi inačicu 8.18 iz rujna godine 2023.

Program Coq može se pokrenuti u interaktivnom ili u skupnom načinu rada. Interaktivni način rada pokreće se naredbom `coqtop`, a korisniku omogućuje rad u ljusci sličnoj `bash` i `python` ljuskama. Interaktivna ljuska (također poznata pod imenom *toplevel*) služi unosu definicija i iskazivanju lema. Skupni način rada pokreće se naredbom `coqc`, a korisniku omogućuje semantičku provjeru i prevođenje izvornih datoteka u jednostavnije formate. Kod formaliziranja i dokazivanja, korisnik će najčešće koristiti interaktivni način rada, po mogućnosti kroz neku od dostupnih razvojnih okolina. [2]

Misao: *spomenuti proof mode? spomenuti workflow dokazivanja? ima jedna zgodna*

[1] `https://coq.inria.fr/`

[2] Autor rada koristio je paket *Proof General* za uređivač teksta *Emacs*. Druge često korištene okoline su *VsCoq* i *CoqIDE*.

slika u QED at Large **Misao:** *treba naglasiti da je Coq interaktivni dokazivač teorema*

Kao programski jezik, Coq se sastoji od više podjezika različitih namjena, od kojih spominjemo *Vernacular*, *Gallinu* i *Ltac*.

Vernacular **Misao:** *vernacular znači "govorni jezik"* je jezik naredbi kojima korisnik komunicira sa sustavom (i u interaktivnom i u skupnom načinu rada); svaka Coq skripta (datoteka s nastavkom `.v`) je niz naredbi. Neke od najčešće korištenih naredbi su `Check`, `Definition`, `Inductive`, `Fixpoint` i `Lemma`. Pomoću naredbi za tvrdnje, kao što je `Lemma`, Coq prelazi iz *toplevela* **Misao:** *treba bolji prevod* u način dokazivanja (*proof mode*).

Gallina je Coqov strogo statički tipiziran specifikacijski jezik. Kako se glavnina programiranja u Coqu svodi upravo na programiranje u Gallini, posvećujemo joj idući odjeljak.

Ltac je Coqov netipiziran jezik za definiciju i korištenje taktika. Taktike su pomoćne naredbe kojima se u načinu dokazivanja konstruira dokaz. Može se reći da je Ltac jezik za metaprogramiranje Galline. Primjeri taktika su `intros`, `destruct`, `apply` i `rewrite`.

Pogledajmo ilustrativan primjer.

```
1  Lemma example_lemma : 1 + 1 = 2.
2  Proof.
3    cbn. reflexivity.
4  Qed.
```

Ključne riječi `Lemma`, `Proof` i `Qed` dio su Vernaculara, izraz `example_lemma : 1 + 1 = 2` dio je Galline, a pomoćne naredbe `cbn` i `reflexivity` dio su Ltaca.

Jezgra programskog sustava Coq je algoritam za provjeru tipova (*type checking*) implementiran u OCamlu — svaka tvrdnja koja se dokazuje izrečena je pomoću tipova. Ostatak sustava u načelu služi za knjigovodstvo i poboljšanje korisničkog iskustva. Nužno je da jezgra sustava bude relativno mala kako bismo se mogli uvjeriti u njenu točnost. U suprotnom, možemo li biti sigurni da su naše dokazane tvrdnje doista istinite? **Misao:**

kažem istinite, ali u stvari mislim dokazive, no to je nespretno za napisati i diskusija oko toga je preopćenita

Prve inačice Coqa implementirale su račun konstrukcija, no kasnije je dodana podrška za induktivno i koinduktivno definirane tipove [7, 8]. Danas se može reći da Coq implementira polimorfni kumulativni račun induktivnih konstrukcija [9]. **Misao:** *mogu spomenuti i preteče računa konstrukcija i jezike koji ih implementiraju, npr. Lisp je implementacija λ-računa* Coq se, osim kao dokazivač teorema, može koristiti i za programiranje sa zavisnim tipovima. U toj sferi konkuriraju jezici Agda[3], Idris[4] i Lean[5]. Coq se između njih ističe po usmjerenosti prema dokazivanju, posebno po korištenju taktika (jezik Ltac) i nepredikativnoj sorti `Prop` (o kojoj će kasnije biti riječi). Još jedna prednost Coqa je mehanizam *ekstrakcije* pomoću kojeg korisnik može proizvoljnu funkciju[6] prevesti u jezik niže razine apstrakcije.[7] Mehanizam ekstrakcije nije dokazano točan, no poželjno je da funkcije zadržavaju točnost i nakon ekstrakcije pa se radi na verifikaciji ekstrakcije [9].

2.2. Programiranje u Coqu

Gallina je funkcijski programski jezik, što znači da su funkcije prvoklasni objekti — funkcije mogu biti argumenti i povratne vrijednosti drugih funkcija. Dodatno, varijable su nepromjenjive (*immutable*) te se iteracija ostvaruje rekurzijom. Za uvod u funkcijsko programiranje, čitatelja upućujemo na knjigu *Programming in Haskell* [10]. Primjeri koje ćemo vidjeti u ostatku ovog odjeljka dijelom se oslanjanju na tipove i funkcije definirane u Coqovoj standardnoj knjižnici.[8]

Gallina je strogo statički tipiziran jezik, što znači da se svakom termu prilikom prevođenja dodjeljuje tip[9]. Naredbom `Check` možemo provjeriti tip nekog terma ili doznati da se termu ne može dodijeliti tip. Dalje u radu pod "term" mislimo na dobro formirane terme, odnosno na one terme kojima se može dodijeliti tip. Kažemo da je term *stanov-*

[3] `https://wiki.portal.chalmers.se/agda/`
[4] `https://www.idris-lang.org/`
[5] `https://lean-lang.org/`
[6] Za koju je dokazao točnost, štogod to značilo.
[7] Trenutno su podržani Haskell, OCaml i Scheme.
[8] `https://coq.inria.fr/library/`
[9] Tipovi su kolekcije srodnih objekata.

nik tipa koji mu je dodijeljen. Za tip kažemo da je *nastanjen*, odnosno *nenastanjen*, ako postoji, odnosno ne postoji, stanovnik tog tipa. Kako su u Coqu i tipovi termi, radi razumljivosti i zvučnosti umjesto "tip tipa" kažemo "sorta tipa".

Kao i u ostalim jezicima, kod programiranja u Coqu korisnik se oslanja na dostupne primitivne izraze, od kojih su najvažniji:

- `forall`, pomoću kojeg se konstruiraju funkcijski tipovi i zavisni produkti;
- `match`, pomoću kojeg se provodi *pattern matching*;
- `fun`, pomoću kojeg se definiraju funkcije;
- `fix`, pomoću kojeg se definiraju rekurzivne funkcije i
- `cofix`, pomoću kojeg se definiraju korekurzivne funkcije.

Jedna od osnovnih naredbi za stvaranje novih terma je naredba `Definition`.

```
1 Definition negb (b : bool) : bool :=
2 match b with
3 | false => true
4 | true => false
5 end.
```

U gornjem kodu definirana je funkcija `negb` čiji se argument `b` tipa `bool` destrukturira te se vraća njegova negacija, također tipa `bool`. Važno je napomenuti da svaki `match` izraz mora imati po jednu granu za svaki konstruktor tipa.[10] U ovom su primjeru konstante `false` i `true` jedini konstruktori tipa *bool*. Funkcija `negb` je tipa `bool→bool`.

```
1 Definition mult_zero_r : Prop := forall (n : nat), n * 0 = 0.
```

Ovdje je definirana propozicija (tip) imena `mult_zero_r` kao univerzalno kvantificirana tvrdnja po prirodnim brojevima.

Naredbom `Inductive` definira se *induktivni* tip te se automatski za njega generiraju

[10] U tandemu s uvjetom strukturalne rekurzije, ovime je osigurana totalnost svake funkcije.

principi *indukcije* i *rekurzije*.

```
Inductive nat : Set :=
| O : nat
| S : nat -> nat.
```

Ovim kodom definirali smo tri terma:

- `nat` (tip prirodnih brojeva) je term sorte `Set`,
- `O` (broj nula) je term tipa `nat` i
- `S` (funkcija sljedbenika) je term tipa `nat`→`nat`.

Za term `nat` kažemo da je konstruktor tipa (*type constructor*), a za terme `O` i `S` kažemo da su konstruktori objekata (*object constructors*).

Rekurzija nad induktivnim tipovima može se ostvariti naredbom `Fixpoint`, koja u pozadini koristi izraz `fix`.

```
Fixpoint plus (n m : nat) {struct n} : nat :=
match n with
| O => m
| S n' => S (plus n' m)
end.
```

U ovom primjeru definirana je funkcija `plus` koja prima dva argumenta tipa `nat`. Funkcija je rekurzivna po prvom argumentu što je vidljivo oznakom `{struct n}`. Napominjemo da su induktivni tipovi dobro utemeljeni, to jest svaki term induktivnog tipa je konačan.

Osim induktivnih, u Coqu postoje i koinduktivni tipovi, koji nisu dobro utemeljeni, zbog čega za njih nije moguće definirati principe indukcije i rekurzije. Umjesto rekurzije, koinduktivni tipovi koriste se u korekurzivnim funkcijama. Standardan primjer koinduktivnog tipa je beskonačna lista.

```
Set Primitive Projections.
```

```
CoInductive Stream (A : Type) := {
      hd : A;
      tl : Stream A;
    }.
```

Ovime smo definirali familiju tipova `Stream` indeksiranu tipskom varijablom `A`. Svaki `Stream` ima glavu i rep koji je također `Stream`.

Stanovnici koinduktivnih tipova konstruiraju se korekurzivnim funkcijama naredbom `CoFixpoint`, koja u pozadini koristi `cofix`.

```
CoFixpoint from (n : nat) : Stream nat := Cons _ n (from (n + 1)).
```

Ovime je definirana funkcija `from` koja za ulazni argument `n` vraća niz prirodnih brojeva od n na dalje.

Razlika induktivnih i koinduktivnih tipova može se izreći epigramom:

"Induktivni tipovi su domene rekurzivnih funkcija, a koinduktivni tipovi su kodomene korekurzivnih

Time se želi reći da se termi induktivnih tipova destrukturiraju u rekurzivnim funkcijama, dok se termi koinduktivnih tipova konstruiraju u korekurzivnim funkcijama.

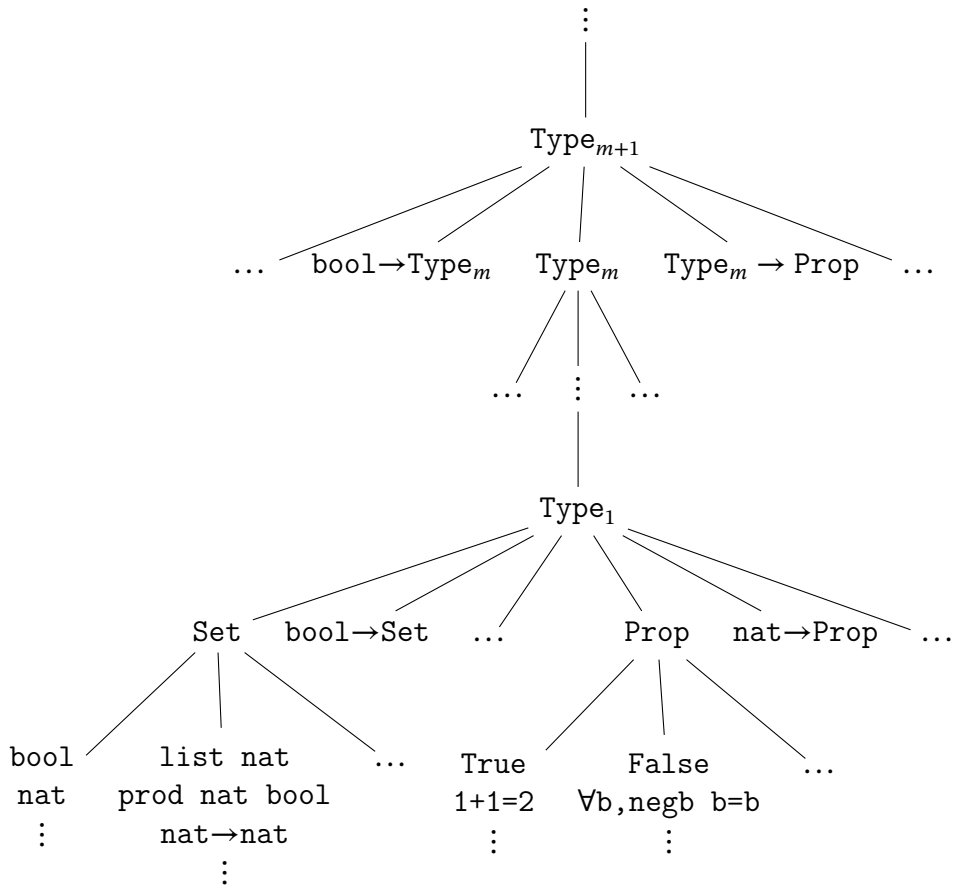
Misao: *Barendregtova kocka, term koji ovisi o termu, term koji ovisi o tipu, tip koji ovisi o termu, tip koji ovisi o tipu*

2.3. Hijerarhija tipova

U usporedbi s tradicionalnim programskim jezicima, Coqov tipski sustav je ekspresivniji jer dopušta tipove koji mogu ovisiti o termima. Takvi tipovi se u Coqu konstruiraju `forall` izrazom. Primjer jednog takvog tipa je "lista duljine n", gdje je n neki prirodan broj, a čiji su stanovnici n-torke. Općeniti tip tada glasi "za svaki n, lista duljine n" — on ovisi o stanovniku drugog tipa (u ovom slučaju, tipa `nat`).

Spomenuli smo da su i tipovi termi te im se može dodijeliti sorta. Postoji li najveći tip, odnosno postoji li tip `Type` čiji su stanovnici svi dobro formirani termi? Prisjetimo

se, svaki term ima svoj tip. Kada bi takav Type postojao, tada bi vrijedilo Type : Type, što može dovesti do paradoksa lašca[11]. Takav dokazivač teorema bio bi inkonzistentan te bismo njime mogli dokazati kontradikciju, čime dokazivač efektivno gubi svoju svrhu. Umjesto jedne "velike" sorte Type, u Coqu postoji niz monotono rastućih sorti $\texttt{Type}_n$ za sve prirodne brojeve n, takav da vrijedi $\texttt{Type}_n : \texttt{Type}_m$ kad god vrijedi $n < m$. Ilustracija ove **kumulativne hijerarhije tipova** prikazana je na slici 2.1. Dvije najvažnije sorte u Coqu su sorta Set i sorta Prop.



Slika 2.1. Kumulativna hijerarhija tipova

Naziv Set sinonim je za sortu $\texttt{Type}_0$, a njeni stanovnici su **mali tipovi**. **Misao:** *NB: Tu je prije pisalo da su stanovnici od Set programi, no to nije tako. Stanovnici sorte Set su mali tipovi (ne znam kako ih drugačije nazvati), a tek onda su stanovnici malih tipova programi.* Primjerice, tipovi nat i bool su mali tipovi. Dodatno, funkcije koje primaju i vraćaju male tipove su također mali tipovi. Tada su i produkti, sume, liste i stabla malih tipova također mali tipovi. Intuitivno se može reći da su mali oni tipovi

[11] Ova rečenica je lažna. U teoriji skupova to je Russellov paradoks, u teoriji tipova to je Girardov paradoks

s čijim se stanovnicima može efektivno računati. Stanovnike malih tipova nazivamo **programima**.

Stanovnici sorte `Prop` su **propozicije**. Za razliku od programa, sa propozicijama ne možemo efektivno računati, već ih moramo dokazivati. Stanovnici propozicija su njihovi **dokazi**.

Za dokazivače teorema, poželjna je mogućnost definicije predikata (propozicija) nad proizvoljnim tipovima. Zbog toga u Coqu prilikom definicije terma sorte `Prop` možemo raditi kvantifikaciju po proizvoljno velikim tipovima (što uključuje i sortu `Prop`).

```
1 Inductive isNat : Set -> Prop :=
2 | IsNat : isNat nat.
```

Tako je ovdje `isNat` predikat nad sortom `Set`, a u primjeru ispod `not` je predikat nad sortom `Prop`.

```
1 Definition not (P : Prop) := P -> False.
```

Ovaj stil kvantifikacije omogućuje nam definiciju proizvoljnih propozicija i propozicijskih veznika. Kažemo da je sorta `Prop` **nepredikativna**. S druge strane, sorta `Set` je **predikativna**, to jest *ne dopušta* kvantifikaciju po proizvoljno velikim tipovima. Na praktičnoj strani, predikativnost ograničava korisnika da prilikom definicije programa smije koristiti samo druge programe.

2.4. Propozicije i tipovi, dokazi i termi

U decimalnom zapisu broja π, barem jedna znamenka pojavljuje se beskonačno mnogo puta. Doista, kada bi se svaka znamenka javljala samo konačno mnogo puta, broj π bio bi racionalan. Međutim, nije jasno *koja* znamenka ima to svojstvo. Da bismo odgovorili na to pitanje, morali bismo prebrojiti *sve* broja π, što nije moguće u konačno mnogo koraka.

Sličnim pitanjima bavili su se logičari dvadesetog stoljeća. *Klasični* logičari bi gornju tvrdnju smjesta prihvatili, dok bi *konstruktivisti* tražili konkretnu znamenku. Između ostalog, ovakva razmatranja rezultirala su fundamentalnim uvidom u povezanost pro-

gramiranja i dokazivanja. Naime, želimo li dokazati konjunkciju, dovoljno je zasebno dokazati njene konjunkte. S druge strane, želimo li konstruirati par objekata, dovoljno je zapakirati prvi i drugi objekt u konstruktor para. Na sličan način, želimo li dokazati implikaciju, dovoljno je pretpostaviti njen antecedent te pomoću njega dokazati konzekvens. Ako pak želimo konstruirati funkciju, smijemo uzeti jedan argument i pomoću njega konstruirati povratnu vrijednost. Dodatno, nemoguće je dokazati laž, a istina trivijalno vrijedi. S druge strane, ako tip nema konstruktore, nije moguće definirati vrijednost tog tipa. Ako pak tip ima barem jedan konstruktor, tada postoje i njegovi stanovnici. Kroz ove primjere vidimo fenomen **Curry–Howardove korespondencije**, koju možemo sažeti epigramom:

"Propozicije su tipovi, dokazi su programi."

Time se dokazivanje svodi na programiranje. Pogledi na dvije strane ovog novčića mogu se vidjeti u tablici 2.1.

Dokazivanje	Programiranje
propozicija	tip
dokaz	program
laž	prazan tip
istina	nastanjen tip
konjunkcija	produktni tip
disjunkcija	zbrojni tip
implikacija	funkcijski tip
univerzalna kvantifikacija	zavisni produkt
egzistencijalna kvantifikacija	zavisni koprodukt

Tablica 2.1. Sličnosti dokazivanja i programiranja

Za bolju ilustraciju, prikazujemo princip matematičke indukcije u Coqu. Prisjetimo se, za proizvoljni predikat P nad prirodnim brojevima, princip matematičke indukcije glasi:

$$P(0) \land (\forall n, P(n) \to P(n+1)) \to \forall n, P(n).$$

Tvrdnju dokazujemo analizom broja n. Ako je $n = 0$, tvrdnja slijedi iz *baze* indukcije.

Ako pak je $n = n' + 1$ za neki n', tada rekurzivno konstruiramo dokaz za $P(n')$, a konačna tvrdnja slijedi primjenom *koraka* indukcije na rekurzivno konstruirani dokaz.

```
Definition nat_ind (P : nat -> Prop) (baza : P 0) (korak : forall n, P n -> P (S n))
  : forall n, P n :=
  fix F (n : nat) : P n :=
    match n with
    | O => baza
    | S n' => korak n' (F n')
    end.
```

Za term `nat_ind` kažemo da je dokazni objekt (*proof object*) za tvrdnju matematičke indukcije. Princip matematičke indukcije je samo poseban slučaj **principa indukcije**, kojeg Coq automatski generira za svaki induktivno definiran tip.

2.5. Ograničenja tipskog sustava

Kao što smo već vidjeli, Coqov tipski sustav je ekspresivniji od tipskih sustava tradicionalnih programskih jezika. Međutim, kako bi se sačuvala poželjna svojstva algoritma provjere tipova, ipak se tipski sustav mora ograničiti.

Uvjet pozitivnosti odnosi se na definiciju induktivnih i koinduktivnih tipova. **Misao:** *NB: uvjet pozitivnosti mora vrijediti i u pozitivnim i u negativnim koinduktivnim tipovima.* Ovo ograničenje zabranjuje *negativne* pojave tipa kojeg definiramo u argumentima njegovih konstruktora.

```
Inductive Lam :=
| LamVar (n : nat)
| LamApp (M N : Lam)
| LamAbs (M : Lam -> Lam).
```

Pokretanje primjera iznad rezultira greškom `Non strictly positive occurrence of "Lam" in "(Lam -> Lam) -> Lam"` — drugim riječima, tip `Lam` se javlja negativno u konstruktoru `LamAbs`, odnosno kao argument funkcije koja je parametar konstruktora. Ovaj uvjet štiti korisnika od inkonzistentnosti, a za točnu definiciju pozitivnosti čitate-

lja upućujemo na dokumentaciju.[12] Uz uvjet pozitivnosti za induktivne tipove vezan je **uvjet strukturalne rekurzije**. Ovim uvjetom osigurava se totalnost rekurzivno definirane funkcije tako da se argument po kojem je funkcija rekurzivna strukturalno smanjuje u svakom koraku rekurzije.

Uvjet produktivnosti odnosi se na definiciju korekurzivnih funkcija, a dualan je uvjetu strukturalne rekurzije. Ovaj uvjet također štiti korisnika od inkonzistentnosti, a glasi: svaki korekurzivni poziv smije se javljati točno kao izravan argument konstruktora koinduktivnog tipa čiji element definiramo.[13] Zbog tog uvjeta, iduća definicija nije moguća.

```
1 Set Primitive Projections.
2 CoInductive NatStream := {
3     nat_hd : nat;
4     nat_tl : NatStream;
5   }.
6
7 CoFixpoint foo : NatStream := foo.
```

Greška koju sustav javlja glasi `Unguarded recursive call in "foo"`, što znači da se korekurzivni poziv `foo` *ne* javlja kao izravni argument konstruktora. S druge strane, definicija

```
1 CoFixpoint bar : NatStream := {| nat_hd := 0; nat_tl := bar |}.
```

je sasvim legalna. **Misao:** *Tu se baš i ne vidi zašto se `bar` javlja kao izravan argument konstruktora jer koristimo negativni koinduktivni tip. Ispod haube je to sve zamotano u neki `Build_NatStream`.*

Misao: *Bili smo spomenuli četiri ograničenja na sastanku. Uvjet strukturalne rekurzije i uvjet produktivnosti su na neki način dualni. Treće ograničenje bio je uvjet pozitivnosti. Čovjek očekuje da onda postoji nešto dualno uvjetu pozitivnosti za koinduktivne tipove. Nije*

[12] https://coq.inria.fr/doc/v8.18/refman/language/core/inductive.html#well-formed-inductive-definitions

[13] https://coq.inria.fr/doc/v8.18/refman/language/core/coinductive.html#co-recursive-functions-cofix

li to opet uvjet pozitivnosti?

Misao: *Ipak neću spomenuti razlike između pozitivnih i negativnih koinduktivnih tipova. Mislim da je to izvan dosega ovog rada.*

Posljednje ograničenje koje spominjemo vezano je uz irelevantnost dokaza (*proof irrelevance*). Naime, mnogi teoremi mogu se dokazati na više načina, ali svaki pojedini dokaz (dakle, postupak kojim smo od pretpostavka došli do konkluzije) *nije bitan*. Matematičarima su bitni samo iskaz teorema i činjenica da se teorem *može dokazati*. Sam postupak dokazivanja smatra se "implementacijskim detaljom". Upravo zato analiza dokaza ima smisla samo kada se dokazuje, ali ne i kada se programira. U našoj terminologiji to znači da se *pattern matching* nad dokazima smije provoditi samo kod definiranja terma sorte `Prop`. U suprotnom, mogli bismo definirati programe koji ovise o *konkretnom dokazu*, umjesto o iskazanom teoremu. **Ograničenje eliminacije propozicije** nastalo je radi ekstrakcije — svi termi sorte `Prop` se "brišu" prilikom prevođenja iz Coqovog tipskog sustava u tipske sustave niže razine apstrakcije. Kada ovog ograničenja ne bi bilo, ekstrakcija u jednostavnije jezike naprosto ne bi bila moguća.

3. Logika prvog reda s induktivnim definicijama

U ovom poglavlju predstavljamo glavne rezultate diplomskog rada koji uključuju formalizaciju logike prvog reda s induktivnim definicijama FOL_{ID} te dokaznog sustava $LKID$, koje je prvi uveo Brotherston [11]. Definicije, leme i dokazi u ovom poglavlju preuzete su iz Brotherstonove disertacije [12].

Prvo ćemo definirati sintaksu i semantiku logike FOL_{ID}, nakon čega ćemo definirati standardne modele te logike. Zatim ćemo prikazati dokazni sustav $LKID$ te konačno dokazati adekvatnost sustava $LKID$ s obzirom na standardnu semantiku, što je ujedno i glavni rezultat ovog diplomskog rada.

Svaka definicija i lema u ovom poglavlju biti će popraćena svojim pandanom u Coqu. Jedan je od ciljeva diplomskog rada prikazati primjene Coqa u matematici, zbog čega leme nećemo dokazivati "na papiru", već se dokaz svake leme može pronaći na GitHub repozitoriju rada.[1] Zainteresiranom čitatelju predlažemo interaktivni prolazak kroz dokaze lema.

3.1. Sintaksa

Kao i u svakom izlaganju logike, na početku je potrebno definirati sintaksu.

Definicija 1. *Jezik prvog reda s induktivnim predikatima* (kratko: **signatura**), u oznaci Σ, je skup simbola od kojih razlikujemo

- funkcijske simbole,
- *obične* predikatne simbole i

[1] TODO: REPO LINK

- *induktivne* predikatne simbole.

Napomena. Svaki simbol signature ima pripadajuću arnost. Funkcijski simboli arnosti nula nazivaju se *konstante*, a predikatni simboli arnosti nula nazivaju se *propozicije*.

Već smo vidjeli da se propozicije, odnosno skupovi, u Coqu mogu reprezentirati tipovima. Tako i ovdje skupove funkcijskih, običnih predikatnih i induktivnih predikatnih simbola prikazujemo tipovima. Tada je arnost pojedinog simbola funkcija sa skupa odgovarajućih simbola u $\mathbb{N}$.

```
Structure signature := {
    FuncS : Type;
    fun_ar : FuncS -> nat;
    PredS : Type;
    pred_ar : PredS -> nat;
    IndPredS : Type;
    indpred_ar : IndPredS -> nat
  }.
```

Misao: *Stavljam i primjere? Tu je dobar primjer Σ_{PA}.*

U ostatku poglavlja promatramo jednu proizvoljnu, ali fiksiranu, signaturu Σ. Fiksiranje nekog proizvoljnog objekta je česta pojava u matematici, prvenstveno zato što fiksiranjem ne trebamo spominjati argumente eksplicitno. Coq omogućuje fiksiranje varijable naredbama `Variable` i `Context`, pod uvjetom da se korisnik nalazi u `Section` okolini.[2] Većina definicija i lema u ovom radu su napisane upravo unutar `Section` okoline.

Definicija 2. *Varijabla* je prirodan broj. Skup **terma** je najmanji skup izraza zatvoren na iduća pravila:

1. svaka varijabla je term;
2. ako je f funkcijski simbol arnosti n te su $t_1, \ldots, t_n$ termi[3], onda je $f(t_1, \ldots, t_n)$ također term.

[2] `https://coq.inria.fr/doc/v8.18/refman/language/core/sections.html`

[3] Primijetimo, broj terma ovisi o arnosti funkcijskog simbola. U Coq implementaciji ovog "konstruktora" možemo vidjeti da je on zavisnog tipa.

U općenitijim razmatranjima bi varijable bile članovi proizvoljnog skupa, no mi smo uzeli prirodne brojeve jer je s njima lakše raditi u Coqu.

```
Inductive term  : Type :=
  | var_term : var -> term
  | TFunc : forall (f : FuncS ), vec term (fun_ar f) -> term.
```

Definicija 3. Skup svih **formula** je najmanji skup zatvoren na iduća pravila:

1. ako je Q obični ili induktivni predikatni simbol arnosti n te su $t_1, \ldots, t_n$ termi, onda je $Q(t_1, \ldots, t_n)$ formula;
2. ako je φ formula, onda su $\neg\varphi$ i $\forall\varphi$ također formule;
3. ako su φ i ψ formule, onda je $\varphi \to \psi$ također formula.

Za univerzalnu kvantifikaciju odstupamo od tradicionalne defincije formule. Umjesto kvantificiranja po eksplicitnoj varijabli, mi ćemo implicitno kvantificirati po varijabli 0. Ovaj pristup kvantifikaciji (ili općenitije, vezivanju varijabli), imena "de Bruijnovo indeksiranje", bitno olakšava rad sa supstitucijama, a uveden je u članku [**?**]. O samoj implementaciji de Bruijnovog indeksiranja više se može pročitati u knjizi *Types and Programming Languages* [**?**]. Za potrebe ovog rada koristili smo paket *Autosubst2*[4] za automatsko generiranje tipova terma i formula te pripadajućih funkcija supstitucija i pomoćnih lema. Kod je generiran pomoću konfiguracijske datoteke:

Definicija 4. Produkcija. Skup induktivnih definicija.

3.2. Semantika

Definicija 5. Struktura.

Definicija 6. Okolina, evaluacija.

Definicija 7. Ispunjivost formule.

Lema 1. *Substitution sanity.*

[4] `https://github.com/uds-psl/autosubst2?tab=readme-ov-file`

3.3. Standardni modeli

Operator φ_Φ. Aproksimanti. Standardni model.

3.4. Sistem sekvenata s induktivnim definicijama

LKID. Dopustiva pravila. Primjeri dokaza.

3.5. Adekvatnost

Lokalne adekvatnosti za pravila izvoda. Glavni teorem.

4. Ciklički dokazi

Koinduktivni tip podatka i koinduktivna propozicija. Jedan primjer su `Streamovi` i predikat `Infinite`. Jednostavniji primjer bi možda bio koinduktivni `nat` i koinduktivni `le`.

Kako bi izgledali ciklički dokazi u LKID? Ono što je tamo "repeat funkcija" je u Coqu `cofix`.

5. Zaključak

Literatura

[1] Y. Bertot i P. Castéran, *Interactive theorem proving and program development: Coq'Art: the Calculus of Inductive Constructions*. Springer Science & Business Media, 2013.

[2] B. C. Pierce, A. A. de Amorim, C. Casinghino, M. Gaboardi, M. Greenberg, C. Hriţcu, V. Sjöberg, i B. Yorgey, *Logical Foundations*, ser. Software Foundations, B. C. Pierce, Ur. Electronic textbook, 2023., sv. 1, version 6.5, http://softwarefoundations.cis.upenn.edu.

[3] B. C. Pierce, A. A. de Amorim, C. Casinghino, M. Gaboardi, M. Greenberg, C. Hriţcu, V. Sjöberg, A. Tolmach, i B. Yorgey, *Programming Language Foundations*, ser. Software Foundations, B. C. Pierce, Ur. Electronic textbook, 2024., sv. 2, version 6.5, http://softwarefoundations.cis.upenn.edu.

[4] A. W. Appel, *Verified Functional Algorithms*, ser. Software Foundations, B. C. Pierce, Ur. Electronic textbook, 2023., sv. 3, version 1.5.4, http://softwarefoundations.cis.upenn.edu.

[5] A. Chlipala, *Certified programming with dependent types: a pragmatic introduction to the Coq proof assistant*. MIT Press, 2022.

[6] The Coq Development Team, "The Coq Reference Manual, Release 8.18.0", https://coq.inria.fr/doc/v8.18/refman/, 2023.

[7] F. Pfenning i C. Paulin-Mohring, " Inductively Defined Types in the Calculus of Constructions", u *Proceedings of the 5th International Conference on Mathematical Foundations of Programming Semantics*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1989., str. 209–228.

[8] E. Giménez, “Codifying guarded definitions with recursive schemes”, u *Types for Proofs and Programs*, P. Dybjer, B. Nordström, i J. Smith, Ur. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1995., str. 39–59.

[9] M. Sozeau, S. Boulier, Y. Forster, N. Tabareau, i T. Winterhalter, “Coq Coq correct! verification of type checking and erasure for Coq, in Coq”, *Proceedings of the ACM on Programming Languages*, sv. 4, br. POPL, str. 1–28, 2019.

[10] G. Hutton, *Programming in Haskell*, 2. izd. Cambridge University Press, 2016.

[11] J. Brotherston, “Cyclic proofs for first-order logic with inductive definitions”, u *Automated Reasoning with Analytic Tableaux and Related Methods*, B. Beckert, Ur. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2005., str. 78–92.

[12] ——, “Sequent calculus proof systems for inductive definitions”, doktorska disertacija, School of Informatics, University of Edinburgh, 2006.

Sažetak

Primjene Coq alata za dokazivanje u matematici i računarstvu

Miho Hren

Unesite sažetak na hrvatskom.

Ključne riječi: prva ključna riječ; druga ključna riječ; treća ključna riječ

Abstract

Applications of the Coq Proof Assistant in mathematics and computer science

Miho Hren

Enter the abstract in English.

Keywords: the first keyword; the second keyword; the third keyword