J. Bauer, P. Caban, J. Gonera
Z. Walczak, K. Warda, G. Wiatrowski

Repetytorium z matematyki

Materiały pomocnicze do zajęć

2021.09.01

Spis treści

Wstęp

Niniejsze materiały pomocnicze są przeznaczony dla studentów pierwszego roku studiów inżynierskich i licencjackich prowadzonych na Wydziale Fizyki i Informatyki Stosowanej Uniwersytetu Łódzkiego. Przedmiot „Repetytorium z matematyki" jest obowiązkowy dla wszystkich studentów pierwszego semestru naszego Wydziału. Zajęcia odbywają się w pierwszych tygodniach semestru i obejmują następujące treści z matematyki szkolnej:

1. Ułamki, potęgi, pierwiastki
   Działania na ułamkach, własności potęg i pierwiastków, wzory skróconego mnożenia drugiego i trzeciego stopnia, upraszczanie wyrażeń algebraicznych.
2. Funkcja liniowa
   Wykres funkcji liniowej, równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty, równania i nierówności liniowe (w tym z wartością bezwględną). Układy dwóch równań liniowych.
3. Funkcja kwadratowa
   Definicja, wykres, wzory na pierwiastki, postać iloczynowa i kanoniczna, równania i nierówności kwadratowe. Równania i nierówności z pierwiastkami.
4. Wielomiany
   Definicja, pierwiastek, pierwiastek wielokrotny, postać iloczynowa, znajdowanie pierwiastków, twierdzenie Bezouta, dzielenie wielomianów, pierwiastki całkowite wielomianu, równania i nierówności wielomianowe.
5. Funkcje wymierne
   Definicja, dziedzina, rozwiązywanie równań i nierówności wymiernych.
6. Trygonometria
   Miara stopniowa i łukowa kąta, definicje funkcji trygonometrycznych (kątów w trójkącie prostokątnym i zmiennej rzeczywistej), ich dziedziny oraz wykresy.
   Wzory trygonometryczne, wzory redukcyjne.
   Tożsamości trygonometryczne, równania i nierówności trygonometryczne.
7. Funkcja wykładnicza
   Definicja (w tym funkcja e^x), wykres, własności w zależności od wartości podstawy, równania i nierówności wykładnicze.
8. Funkcja logarytmiczna
   Definicja i własności logarytmu. Definicja funkcji logarytnicznej (w tym funkcja $\ln x$), wykres, własności w zależności od wartości podstawy, równania i nierówności logarytmiczne.
9. Wektory
   Wektor jako uporządkowana para punktów, wektor swobodny, działania na wektorach (mnożenie przez liczbę, dodawanmie, odejmowanie, iloczyn skalarny), wektor w układzie współrzędnych, współrzędne wektora, działania na wektorach za pomocą współrzędnych (w tym iloczyn skalarny), warunek ortogonalności wektorów za pomocą iloczynu skalarnego. Iloczyn wektorowy wektorów.

Na zajęciach rozwiązywane są zadania oznaczone indeksem górnym $^{\mathsf{K}}$, zadania do obowiązkowego rozwiązania w domu oznaczone zostały indeksem górnym $^{\mathsf{D}}$. Wszystkie zamieszczone zadania zostały przygotowane przez autorów przy wykorzystaniu wybranych zbiorów zadań dostępnych na rynku wydawniczym wymienionych w bibliografii. W bibliografii umieszczono też polecane podręczniki pozwalające powtórzyć omawiany materiał.

Każdy rozdział poprzedzony jest zwięzłym wstępem teoretycznym zawierającym podstawowe wzory i twierdzenia niezbędne do rozwiązania zadań. W niektórych rozdziałach umieszczono też powiązany tematycznie materiał dodatkowy, którego znajomość nie jest potrzebna do rozwiązania zadań z „Repetytorium z matematyki", ale który będzie wykorzystywany i omawiany na innych przedmiotach. Materiał dodatkowy oznaczony został gwiazdką i złożony krojem bezszeryfowym mniejszym stopniem pisma. Autorami poszczególnych części teoretycznych są:

Rozdział 1	—	J. Gonera,
Rozdział 2	—	J. Bauer, Z. Walczak,
Rozdział 3	—	J. Bauer, Z. Walczak,
Rozdział 4	—	K. Warda,
Rozdział 5	—	K. Warda,
Rozdział 6	—	P. Caban,
Rozdział 7	—	G. Wiatrowski.

Skład w LaTeX-u wykonał P. Caban.

Łódź, wrzesień 2021 *Autorzy*

Stosowane oznaczenia

$\mathbb{N}$	—	zbiór liczb naturalnych: $\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	—	zbiór liczb całkowitych
$\mathbb{Q}$	—	zbiór liczb wymiernych
$\mathbb{R}$	—	zbiór liczb rzeczywistych
$\mathbb{R}_+$	—	zbiór liczb rzeczywistych dodatnich
$\mathbb{R}_-$	—	zbiór liczb rzeczywistych ujemnych
$\{a_1, \dots, a_n\}$	—	zbiór skończony o elementach $a_1, \dots, a_n$

Rozdział 1

Ułamki, potęgi, pierwiastki

1.1 Wiadomości teoretyczne

1.1. Definicja (Działania na ułamkach) Niech $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ oraz $b \cdot d \neq 0$ wtedy

(i) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \dfrac{ad + cb}{bd}$;

(ii) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \dfrac{ad - cb}{bd}$;

(iii) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$;

(iv) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{cd}$, $c \neq 0$.

1.2. Uwaga (Rozszerzanie ułamków) Dla każdej liczby $c \neq 0$ zachodzi $\frac{a}{b} = \frac{ca}{cb}$.

1.3. Uwaga (Wspólny mianownik) Dodawanie i odejmowanie ułamków wymaga sprowadzenia do wspólnego mianownika. Jeśli dodawane lub odejmowane ułamki mają wspólny mianownik, to korzystając z 1.2 otrzymujemy

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}.$$

1.4. Uwaga Punkt (iv) definicji 1.1 oznacza, że dzielenie przez ułamek jest równoważne mnożeniu przez jego odwrotność.

1.5. Definicja (Potęga o wykładniku naturalnym) Niech $a \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$ wtedy

$$a^1 = a,$$
$$a^{n+1} = a \cdot a^n.$$

Jeżeli $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ to dodatkowo definiujemy $a^0 = 1$.

1.6. Uwaga Definicja 1.5 oznacza, że $a^n = \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$.

1.7. Definicja (Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym) Niech $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $n \in \mathbb{N}$ wtedy $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

1.8. Definicja (Potęga o wykładniku wymiernym) Niech $a \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ i $n, m \in \mathbb{N}$ wtedy $a^{\frac{m}{n}} =$

$\sqrt[n]{a^m}$.
Niech $a \in \mathbb{R}_+$ i $n, m \in \mathbb{N}$ wtedy $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$.

1.9. Uwaga (Potęga o wykładniku niewymiernym) Zauważmy, że każdą liczbę niewymierną α można przybliżać przez liczby wymierne w taki sposób, aby

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} w_n$$

i w_n był ciągiem liczb wymiernych. Dzięki temu potęgę o wykładniku niewymiernym α możemy zdefiniować jako

$$a^\alpha = \lim_{n\to\infty} a^{w_n}.$$

1.10. Twierdzenie (Własności działań na potęgach) Dla każdego $a, b \in \mathbb{R}_+$ i dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzą następujące relacje

(i) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

(ii) $a^x : a^y = a^{x-y}$;

(iii) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$;

(iv) $(a^x)^y = a^{xy}$;

(v) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$;

(vi) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$;

(vii) jeśli dodatkowo $a > 1$ to $a^x > a^y \iff x > y$;

(viii) jeśli dodatkowo $a < 1$ to $a^x > a^y \iff x < y$;

(ix) jeśli dodatkowo $a \neq 1$ to $a^x = a^y \iff x = y$;

(x) jeśli dodatkowo $x \neq 0$ to $a^x = b^x \iff a = b$;

(xi) jeśli dodatkowo $x > 0$ to $a^x > b^x \iff a > b$;

(xii) jeśli dodatkowo $x < 0$ to $a^x > b^x \iff a < b$.

1.11. Twierdzenie (Wzory skróconego mnożenia) Jeżeli $a, b \in \mathbb{R}$ to

(i) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

(ii) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

(iii) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$;

(iv) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

(v) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;

(vi) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;

(vii) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

1.12.* Definicja (Silnia) Symbol $n!$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, oznacza funkcję silnia, którą definiujemy indukcyjnie wzorami:

$$0! = 1, \qquad (n + 1)! = n!(n + 1).$$

Mamy więc $0! = 1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ i ogólnie dla dowolnego n naturalnego $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

1.13.* Definicja (Współczynniki Newtona) Dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takich, że $0 \leqslant k \leqslant n$ przyjmujemy

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

1.14.* **Twierdzenie (Dwumian Newtona)** Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwy jest wzór:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

1.15.* **Twierdzenie** Zachodzą następujące równości:

(i) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$;

(ii) $\binom{n}{1} = n$;

(iii) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;

(iv) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

1.16.* **Uwaga** Za pomocą ostatniego wzoru z tw. 1.15 można obliczyć kolejne wartości $\binom{n}{k}$ wstawiając je w następującej tablicy zwanej trójkątem Pascala

$n=0$:					1				
$n=1$:				1		1			
$n=2$:			1		2		1		
$n=3$:		1		3		3		1	
$n=4$:	1		4		6		4		1

Liczba znajdująca się w n-tym wierszu tej tablicy na pozycji k odpowiada współczynnikowi Newtona $\binom{n}{k}$. Należy pamiętać, że zarówno wiersze, jak i pozycje w wierszach liczymy od 0. Na przykład liczba 6 stojąca w 4 wierszu odpowiada współczynnikowi $\binom{4}{2}$. Kolejne wiersze powstają w ten sposób, że na początku i na końcu każdego wiersza jest liczba 1, a każda inna jest sumą dwóch liczb, które znajdują się nad nią w wierszu poprzednim. Wykorzystując trókąt Pascala możemy szybko policzyć $(a+b)^n$, na przykład dla $n=4$ mamy:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

1.2 Zadania

Sprawdzić, czy poniższe równości są prawdziwe

1.1$^{\mathsf{K}}$. $\dfrac{1}{7+4\sqrt{3}} + \dfrac{1}{7-4\sqrt{3}} = 12,$

1.2. $\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{3-2\sqrt{2}} = 6,$

1.3. $\dfrac{2}{5+3\sqrt{5}} + \dfrac{2}{5-3\sqrt{5}} = -1,$

1.4. $\dfrac{1}{3+2\sqrt{3}} - \dfrac{1}{3-2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}.$

Poniższe liczby przedstaw w postaci potęgi liczby 2

1.5. $\sqrt[3]{8^{0,5}\cdot\sqrt{2}}$,

1.6. $\sqrt[4]{2\sqrt{8}}\cdot 8\sqrt[3]{16}$.

1.7$^{\mathsf{K}}$**.** $\dfrac{\sqrt[5]{4\sqrt{32}}}{8^2\cdot\sqrt[3]{16}}$.

1.8. Liczbę $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$ przedstaw w postaci pojedynczej potęgi typu a^b.

Oblicz wartość wyrażenia

1.9. $\frac{2}{9}+\frac{1}{12}$,

1.10. $\frac{4}{25}+\frac{2}{15}$,

1.11. $4\frac{7}{8}+1\frac{5}{6}$,

1.12. $(1{,}2)^{50}\cdot(\frac{5}{6})^{50}$,

1.13$^{\mathsf{K}}$**.** $\dfrac{2^3\cdot 2^{-1}+5^{-3}\cdot 5^4}{10^{-3}:10^{-2}-0{,}25^0}$,

1.14. $\dfrac{3^{-1}:9^2-(3^{-2})^3}{(-27)^{-2}}$,

1.15. $[(1\frac{1}{3})^{-1}-2^{-2}]^{-3}$,

1.16. $\dfrac{2\cdot 3^{20}-5\cdot 3^{19}}{9^9}$,

1.17. $3\sqrt{27}\cdot 9^{-1,5}\cdot 3^{-0,75}\cdot 81^2$,

1.18. $x=\dfrac{n}{48}\left[\left(\dfrac{n+2}{n-2}\right)^3:\dfrac{n^2+4n+4}{3n^2-12n+12}\right]$

dla $n=32$,

1.19. $\left[\dfrac{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}+(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2+a^2)^{-\frac{1}{2}}-(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}}\right]^{-2}$

dla $x=a\sqrt{\dfrac{m^2+n^2}{2mn}}$, gdzie $a>0$, $n>m>0$,

1.20. $\dfrac{x^2-2x\sqrt{3}-\sqrt[3]{4}+3}{x-\sqrt{3}}$ dla $x=\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}$,

1.21$^{\mathsf{K}}$**.** $\left[a^{-\frac{3}{2}}\,b\,(ab^{-2})^{-\frac{1}{2}}\,(a^{-1})^{-\frac{2}{3}}\right]^3$

dla $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $b=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$,

1.22. $\dfrac{x+1}{x+\sqrt{x^2+x}}+\dfrac{x-1}{x-\sqrt{x^2-x}}$ dla $x=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Wykonaj wskazane działania

1.23. $\dfrac{27a^5}{20b^3}:\dfrac{9a^4}{12b^4}$,

1.24$^{\mathsf{K}}$**.** $(a+b+c)(a+b-c)+c^2-(a+b)^2$.

Sprowadź do możliwie prostej postaci wyrażenie

1.25. $\left(\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}\right)\left(\frac{x^2+y^2}{2xy}+1\right)\frac{xy}{x^2+y^2}$,

1.28. $\dfrac{x^2+\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}-1}$,

1.26. $\left(\frac{3}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{1-x}\right):\left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+1\right)$,

1.29$^{\mathsf{K}}$. $\frac{1}{(x+y)^2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)+\frac{2}{(x+y)^3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$,

1.27$^{\mathsf{K}}$. $(x^{\frac{1}{2}}+1)(x^{\frac{1}{4}}+1)(x^{\frac{1}{8}}+1)(x^{\frac{1}{8}}-1)$,

1.30. $\frac{a-c}{a^2+ac+c^2}\,\frac{a^3-b^3}{a^2b-bc^2}\left(1+\frac{c}{a-c}-\frac{1+c}{c}\right):\frac{c(1+c)-a}{bc}$,

1.31. $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2}{(y-z)(y-x)}+\frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$,

1.32. $\dfrac{\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}+(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}+\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}-(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}}{\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}+(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}-\left[(a+b)^{-\frac{1}{2}}-(a-b)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}}$,

1.33. $\left[\dfrac{1-a^2}{\left(\frac{1-a\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)\left(\frac{1+a\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right)}+1\right]\sqrt{(1-a)^2}$.

Rozłożyć na czynniki

1.34$^{\mathsf{K}}$. $1-a^6$,

1.37. x^3-8,

1.35. a^4+a,

1.38. x^3+27,

1.36$^{\mathsf{D}}$. a^4+b^4,

1.39. $15x^3+x^2-2x$.

Podać rozwinięcie wykorzystując dwumian Newtona

1.40. $(2x+3)^2$,

1.41. $(3x-1)^3$,

1.42. $(a+b)^5$,

1.43. $(a+b)^7$.

Usunąć niewymierność z mianownika w wyrażeniu

1.44$^{\mathsf{K}}$**.** $\dfrac{3}{1-\sqrt{2}}$,

1.45$^{\mathsf{K}}$**.** $\dfrac{2}{2+\sqrt[3]{3}}$,

1.46$^{\mathsf{K}}$**.** $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$,

1.47$^{\mathsf{D}}$**.** $\dfrac{1}{2+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$.

Rozdział 2

Funkcja liniowa i kwadratowa

2.1 Wiadomości teoretyczne

2.1. Definicja Funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ postaci $f(x) = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ nazywamy funkcją liniową.

2.2. Uwaga Liczbę a nazywamy współczynnikiem kierunkowym, natomiast liczbę b nazywamy wyrazem wolnym.

2.3. Definicja Mówimy, że liczba x jest miejscem zerowym funkcji $f(x)$, jeśli $f(x) = 0$.

2.4. Twierdzenie Funkcja liniowa

(i) nie ma miejsc zerowych, jeśli $a = 0$ i $b \neq 0$;

(ii) ma jedno miejsce zerowe $x = -\frac{b}{a}$, jeśli $a \neq 0$;

(iii) ma nieskończenie wiele miejsc zerowych, jeśli $a = 0$ i $b = 0$.

2.5. Twierdzenie Funkcja liniowa jest

(i) malejąca, jeśli $a < 0$;

(ii) stała, jeśli $a = 0$;

(iii) rosnąca, jeśli $a > 0$.

2.6. Uwaga Wykresem funkcji liniowej w kartezjańskim układzie współrzędnych (OXY) jest prosta przechodząca przez punkt $(0, b)$ taka, że tangens kąta nachylenia tej prostej do osi OX jest równy współczynnikowi kierunkowemu a.

2.7. Twierdzenie W kartezjańskim układzie współrzędnych (OXY) równanie $(y - y_A)(x_B - x_A) = (y_B - y_A)(x - x_A)$ opisuje prostą przechodzącą przez dwa różne punkty $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$.

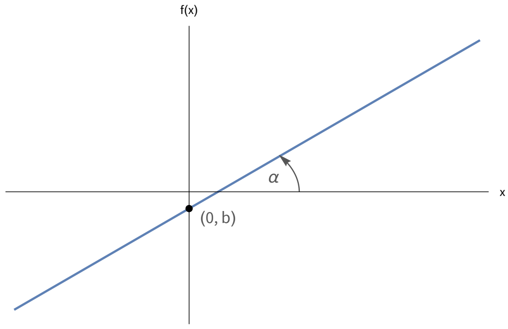
2.8. Twierdzenie Proste $f_1(x) = a_1x + b_1$ i $f_2(x) = a_2x + b_2$ są

(i) równoległe, jeśli $a_1 = a_2$;

(ii) wzajemnie prostopadłe, jeśli $a_1 \cdot a_2 = -1$.

2.9. Definicja Wartością bezwzględną lub modułem liczby rzeczywistej x nazywamy liczbę $|x|$ określoną w następujący sposób

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$



Rysunek 2.1: Wykres funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ dla $a > 0$ i $b < 0$, gdzie $\operatorname{tg}\alpha = a$.

2.10. Twierdzenie Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ prawdziwe są następujące własności

(i) $|x| \geq 0$, $|x| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$;

(ii) $|x| = |y|$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y \vee x = -y$;

(iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$;

(iv) $|x - y| \geq ||x| - |y||$;

(v) $|xy| = |x||y|$;

(vi) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, jeśli $y \neq 0$.

2.11. Definicja (Postać ogólna funkcji kwadratowej) Funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ postaci $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$ nazywamy funkcją kwadratową.

2.12. Uwaga Pierwiastki równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ są miejscami zerowymi funkcji kwadratowej.

2.13. Definicja Liczbę $\Delta = b^2 - 4ac$ nazywamy wyróżnikiem równania kwadratowego.

2.14. Twierdzenie Równanie kwadratowe

(i) ma dwa pierwiastki $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ oraz $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, jeśli $\Delta > 0$;

(ii) ma jeden pierwiastek podwójny $x_0 = -\frac{b}{2a}$, jeśli $\Delta = 0$;

(iii) nie ma rozwiązań w zbiorze liczb rzeczywistych, jeśli $\Delta < 0$.

2.15. Twierdzenie (Wzory Viete'a) Jeśli $a \neq 0$ i $\Delta > 0$, to wówczas $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ oraz $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

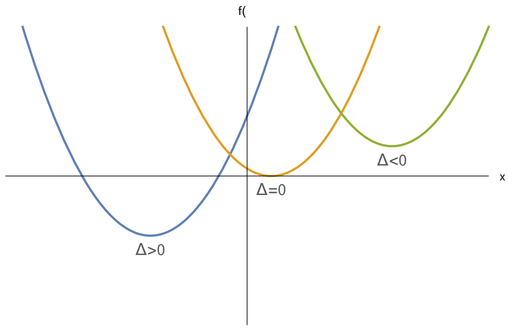
2.16. Twierdzenie (Postać kanoniczna funkcji kwadratowej) Funkcję kwadratową $f(x) = ax^2 + bx + c$ można przedstawić w postaci $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$.

2.17. Twierdzenie (Postać iloczynowa funkcji kwadratowej) Jeśli $\Delta \geq 0$, to wówczas funkcję kwadratową $f(x) = ax^2 + bx + c$ można przedstawić w postaci $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie x_1 i x_2 są pierwiastkami równania kwadratowego.

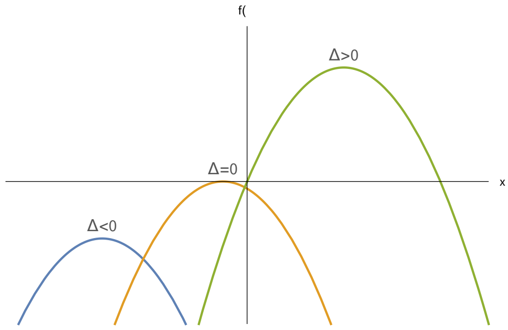
2.18. Uwaga Wykresem funkcji kwadratowej w kartezjańskim układzie współrzędnych (OXY) jest parabola o wierzchołku w punkcie $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, której ramiona skierowane są

(i) do góry, jeśli $a > 0$;

(ii) do dołu, jeśli $a < 0$.



Rysunek 2.2: Wykresy funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ dla $a > 0$ i trzech różnych wartości Δ



Rysunek 2.3: Wykresy funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ dla $a < 0$ i trzech różnych wartości Δ

2.19. Twierdzenie Jeśli $\Delta < 0$, to funkcja kwadratowa przyjmuje tylko wartości

(i) ujemne, gdy $a < 0$;

(ii) dodatnie, gdy $a > 0$.

2.2 Zadania

Znajdź równanie prostej przechodzącej przez punkty A i B

2.1. $A(0, 1)$; $B(3, -2)$.

2.2. $A(1, 2)$; $B(-2, 2)$.

2.3. $A(2, -1)$; $B(2, 3)$.

2.4. $A(-3, -2)$; $B(-4, 1)$.

2.5[K]. Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty $A(-1,4)$, $B(0,-2)$. Czy punkt o współrzędnych $C(5,8)$ należy do tej prostej? Napisz równanie prostej równoległej do prostej przechodzącej przez punkty A i B i przechodzącej przez punkt $D(4,4)$.

2.6[K]. Dana jest prosta k o równaniu $2x - y - 3 = 0$. Napisać równanie

(i) prostej równoległej do k i przechodzącej przez punkt $P(2,4)$,

(ii) prostej prostopadłej do k i przechodzącej przez punkt $P(2,4)$.

2.7[K]. Dana jest funkcja f, której wykresem jest prosta przechodząca przez punkty $A(1,6)$ i $B(-3,-2)$. Rozwiązać równanie $\left|f(2x)\right| = 4$.

Rozwiąż równania i nierówności

2.8. $|x+3| = 2$,

2.9. $-|x-1| = 3$,

2.10. $|x+2| = 1 - x$,

2.11[K]. $|-x+1| + 2x = 0$,

2.12. $|1-x| + 2x = -4$,

2.13[K]. $2|x| - |x+1| = 2$,

2.14. $3x + 7 > 4x + 6$,

2.15. $-6x + 3 \leqslant -4x - 7$,

2.16[K]. $\left|\frac{2x-1}{4}\right| > 0$,

2.17[K]. $|x+3| \leqslant 2$,

2.18. $|x+2| + |x-3| \leq 5$,

2.19. $|x+2| > 2$,

2.20. $|x+1| - |x| > 0$,

2.21[K]. $|1-|x|| < 12$,

2.22[D]. $|x-2| - |x-1| \geqslant |x+1| - 5$.

Naszkicować wykres funkcji

2.23[K]. $f(x) = |x+3| - 5$,

2.24. $y = |2x-6|$,

2.25. $y = |x+2| + |x-1|$,

2.26. $y = |x+1|$,

2.27. $y = ||x+1|-2|$,

2.28. Naszkicować zbiór punktów (x, y), których współrzędne spełniają warunek $|x| + |y| \leqslant 1$.

Wyznacz zbiór wartości funkcji

2.29$^{\mathsf{K}}$. $y = -3x + 2$.

2.30. $y = |x+2| - 3$.

2.31$^{\mathsf{K}}$. $y = |x+1| - |x-1|$.

2.32. $y = -|2x+3| + |1-2x|$.

2.33$^{\mathsf{K}}$. $y = -2x^2 + 4x - 1$.

2.34. $y = x^2 + 4x + 4$.

2.35. $y = 3x^2 + 12x + 7$.

2.36. Rozwiązać układ równań

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ x + y = -2. \end{cases}$$

2.37$^{\mathsf{K}}$. Rozwiązać trzema metodami (przez podstawienie, przeciwnych współczynników i wyznacznikową) układ równań

$$\begin{cases} 5{,}5x + 2y = 10, \\ 3x - 4y = 2. \end{cases}$$

2.38$^{\mathsf{D}}$. Dany jest układ równań

$$\begin{cases} ax + 2y = 1, \\ 8x + ay = b. \end{cases}$$

Przedyskutować liczbę rozwiązań tego układu ze względu na parametry a i b.

Poniższe trójmiany kwadratowe przedstaw w postaci kanonicznej i, jeżeli to możliwe, iloczynowej. Naszkicuj wykresy tych trójmianów.

2.39$^{\mathsf{K}}$. $y = 2x^2 + 2x - 4$,

2.40. $y = 3x^2 + 2x - 1$,

2.41. $y = 2x^2 + 4x + 2$,

2.42. $y = 2x^2 + 3x + 2$.

Rozwiązać następujące równania i nierówności

2.43. $-x^2 - 2x + 5 = 0$,

2.44$^\mathsf{K}$. $x^2 + 3|x - 1| = 0$,

2.45. $x^2 + 2 = 3|x|$,

2.46$^\mathsf{K}$. $-x^2 + 3x - 2 < 0$,

2.47. $-3x^2 - 3x + 6 \geq 0$.

2.48. Niech $x = 3$ będzie pierwiastkiem funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a = -2$. Wyznaczyć współczynniki b i c wiedząc, że suma pierwiastków funkcji f wynosi $\frac{5}{2}$.

2.49. Dla jakich wartości parametru $m \in \mathbb{R}$ pierwiastki równania kwadratowego $x^2 + mx - (2m + 1) = 0$ są dodatnie?

2.50$^\mathsf{K}$. Dla jakich wartości parametru m funkcja $x \mapsto y = x^2 + mx + 4$ przyjmuje tylko wartości nieujemne?

2.51. Przy jakich wartościach parametru m różnica pierwiastków równania $(m - 2)x^2 - (m - 4)x - 2 = 0$ wynosi 3?

Naszkicować wykres funkcji i wskazać jej ekstrema lokalne.

2.52$^\mathsf{K}$. $x \mapsto f(x) = (x + 1)|x - 2|$,

2.53. $y = |x^2 - x - 2| + 1$.

2.54$^\mathsf{K}$. Wyznaczyć współczynniki równania kwadratowego $x^2 + px + q = 0$ tak aby jego pierwiastkami były liczby p i q.

2.55. W jakich granicach powinien się zmieniać parametr m, aby oba pierwiastki równania $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ były zawarte między -2 i 4.

2.56. Suma cyfr liczby dwucyfrowej wynosi 11. Jeśli przestawimy w niej cyfry, to otrzymamy liczbę o 27 większą. Znaleźć tę liczbę.

2.57. Suma cyfr liczby trzycyfrowej wynosi 15. Jeśli zamienimy miejscami cyfrę setek i cyfrę jednostek, to otrzymamy liczbę o 396 większą. Znaleźć tę liczbę, jeśli wiadomo, że cyfra środkowa jest średnią arytmetyczną cyfr skrajnych.

2.58$^{\mathsf{D}}$. Wykazać, że dla liczb dodatnich a i b zachodzi nierówność

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2.$$

2.59. Dla jakich wartości parametru k równanie

$$3x^2 + kx + 3 = 0$$

ma dwa różne pierwiastki?

2.60. Znaleźć trójmian kwadratowy wiedząc, że suma jego pierwiastków jest równa 8, suma odwrotności jego pierwiastków jest równa $\frac{2}{3}$ i dla $x = 0$ przyjmuje on wartość 24.

2.61. Dla jakich wartości parametru a nierówność

$$(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 2 > 0$$

jest spełniona dla każdego x?

2.62$^{\mathsf{K}}$. Dla jakich wartości parametru a suma kwadratów pierwiastków równania

$$x^2 + ax + 4 = 0$$

jest dwa razy większa od sumy tych pierwiastków?

2.63. Ułóż równanie którego pierwiastkami są liczby $\dfrac{1}{10 - \sqrt{72}}$ oraz $\dfrac{1}{10 - 6\sqrt{2}}$.

Rozwiązać równania i nierówności

2.64. $\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 1} = \sqrt{x}$,

2.65$^{\mathsf{K}}$. $\sqrt{5x - 4} - \sqrt{2x - 4} = 2$,

2.66. $\sqrt{15 + x} + \sqrt{7 + x} = 4$,

2.67$^{\mathsf{D}}$. $x^{1/3} + (2x - 3)^{1/3} = (12(x - 1))^{1/3}$,

2.68$^{\mathsf{D}}$**.** $\sqrt{x+2} > \sqrt{2x-8}$,

2.69$^{\mathsf{K}}$**.** $\sqrt{(1-x)(x-3)} > x-2$,

2.70$^{\mathsf{K}}$**.** $\sqrt{2+x-x^2} < 2x-2$,

2.71$^{\mathsf{D}}$**.** $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 7\sqrt{2}$.

Rozdział 3

Wielomiany i funkcja wymierna

3.1 Wiadomości teoretyczne

3.1. Definicja Wielomianem nazywamy funkcję $W\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ postaci

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$ oraz $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$.

3.2. Uwaga Liczby $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ nazywamy współczynnikami wielomianu $W(x)$.

3.3. Definicja Wielomianem zerowym nazywamy wielomian postaci $W(x) = 0$.

3.4. Definicja Mówimy, że wielomian $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ jest stopnia n, jeśli współczynnik $a_n \neq 0$.

3.5. Uwaga Przyjmujemy, że wielomian zerowy nie ma stopnia.

3.6. Uwaga Symbol $\mathrm{st}(W)$ oznacza stopień wielomianu $W(x)$.

3.7. Twierdzenie Dwa niezerowe wielomiany $P(x)$ i $Q(x)$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są tego samego stopnia i mają równe współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej x.

3.8. Uwaga Suma i iloczyn wielomianów jest wielomianem.

3.9. Twierdzenie Jeśli $\mathrm{st}(P) = m$, $\mathrm{st}(Q) = n$, to $\mathrm{st}(P + Q) \leq \max(m, n)$ oraz $\mathrm{st}(P \cdot Q) = m + n$.

3.10. Twierdzenie Niech $W(x)$ i $P(x)$ będą wielomianami, przy czym $P(x)$ nie jest wielomianem zerowym. Wówczas istnieją jednoznacznie wyznaczone wielomiany $Q(x)$ i $R(x)$ takie, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ spełnione są warunki

(1) $W(x) = P(x) \cdot Q(x) + R(x)$;

(2) $\mathrm{st}(R) < \mathrm{st}(P)$ lub $R(x)$ jest wielomianem zerowym.

3.11. Uwaga (do powyższego twierdzenia) Wielomian $Q(x)$ nazywamy ilorazem, natomiast wielomian $R(x)$ nazywamy resztą z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $P(x)$.

3.12. Twierdzenie Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - x_0$ jest równa $W(x_0)$.

3.13. Definicja Jeśli $W(x_0) = 0$, to wówczas liczbę rzeczywistą x_0 nazywamy pierwiastkiem wielomianu $W(x)$.

3.14. Twierdzenie (Bezoute'a) $W(x_0) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $W(x) = (x - x_0)P(x)$, gdzie $P(x)$ jest pewnym wielomianem.

3.15. Twierdzenie Niech $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych takim, że $a_n \neq 0$ i $a_0 \neq 0$. Wówczas

(i) jeśli $W(x_0) = 0$, to x_0 jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0;

(ii) jeśli ułamek nieskracalny $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to p jest dzielnikiem a_0 i q jest dzielnikiem a_n.

3.16. Twierdzenie Jeśli $\mathrm{st}(W) = n$, to wielomian $W(x)$ ma co najwyżej n pierwiastków rzeczywistych (uwzględniając krotność pierwiastków).

3.17. Twierdzenie Każdy wielomian $W(x)$ stopnia n o współczynnikach rzeczywistych można przedstawić w postaci

$$W(x) = c(x - x_1)\cdots(x - x_s)(x^2 + a_1 x + b_1)\cdots(x^2 + a_t x + b_t),$$

gdzie $c, x_1, \ldots, x_s, a_1, \ldots, a_t, b_1, \ldots, b_t \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ oraz $n = s + 2t$, a wielomiany $x^2 + a_i x + b_i$, gdzie $i = 1, \ldots, t$, nie mają pierwiastków w zbiorze liczb rzeczywistych.

3.18. Definicja Funkcję $f\colon \mathbb{R} \setminus S \to \mathbb{R}$ postaci $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie $P(x)$ i $Q(x)$ są wielomianami, przy czym $Q(x)$ nie jest wielomianem zerowym, natomiast S jest zbiorem wszystkich miejsc zerowych wielomianu $Q(x)$ nazywamy funkcja wymierną.

3.19. Uwaga Funkcję wymierną nazywamy właściwą, jeśli $\mathrm{st}(P) < \mathrm{st}(Q)$.

3.20. Definicja Funkcję $f\colon \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{R}$ postaci $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ oraz $ad - bc \neq 0$ i $c \neq 0$ nazywamy funkcją homograficzną.

3.21. Twierdzenie (Postać kanoniczna funkcji homograficznej) Funkcję homograficzną $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ można przedstawić w postaci $f(x) = \dfrac{k}{x - p} + q$, gdzie $k = \frac{bc - ad}{c^2}$, $p = -\frac{d}{c}$ i $q = \frac{a}{c}$.

3.22. Uwaga Wykresem funkcji homograficznej jest hiperbola równoosiowa, której asymptotą poziomą jest prosta o równaniu $y = q$, a asymptotą pionową prosta o równaniu $x = p$.

3.2 Zadania

Wykonać dzielenie wielomianów

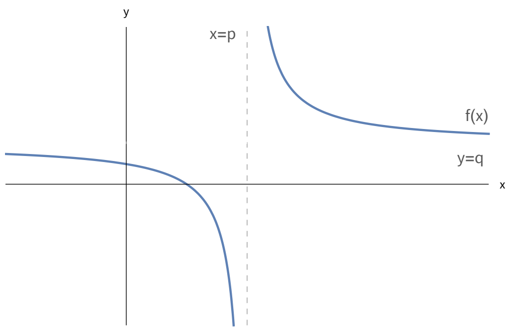
3.1$^{\mathsf{K}}$**.** $(x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 4x + 3) : (x - 1)$,

3.2$^{\mathsf{K}}$**.** $(x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 13x - 15) : (x^2 + x + 1)$,

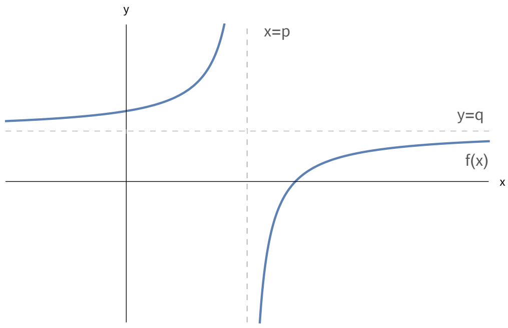
3.3. $(x^4 - 4x^3 - 5x + 3) : (x - 2)$,

3.4. $(x^4 - 3x^3 + x^2 - 1) : (x^2 - 1)$,

3.5. $(x^{10} - 1) : (x^2 + 1)$.



Rysunek 3.1: Wykres funkcji homograficznej $f(x) = \dfrac{k}{x-p} + q$ dla $k > 0$ i $p, q > 0$



Rysunek 3.2: Wykres funkcji homograficznej $f(x) = \dfrac{k}{x-p} + q$ dla $k < 0$ i $p, q > 0$

Rozłożyć wielomian $W(x)$ na czynniki

3.6. $W(x) = 2x^2 + 5x - 3$,

3.7$^{\mathsf{K}}$. $W(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$,

3.8. $W(x) = x^3 - 3x + 2$,

3.9. $W(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 6$,

3.10$^{\mathsf{K}}$. $W(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2$,

3.11. $W(x) = x^6 - 1$,

3.12$^{\mathsf{K}}$. $W(x) = x^8 - 1$,

3.13. $W(x) = x^4 - 5x^2 + 4$,

3.14. $W(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$,

3.15. $W(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$,

3.16. $W(x) = x^3 + 9x^2 + 26x + 24$,

3.17. $W(x) = x^3 + 4x^2 - 4x - 16$,

3.18. $W(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$,

3.19$^{\mathsf{K}}$**.** $W(x) = 2x^5 - x^4 - 15x^3 + 19x^2 + x - 6$,

3.20. $W(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$.

Czy wielomian $W(x)$ dzieli się przez $P(x)$ bez reszty? (odpowiedz bez wykonywania dzielenia).

3.21$^{\mathsf{K}}$**.** $W(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4, \quad P(x) = x - 1$.

3.22$^{\mathsf{K}}$**.** $W(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4, \quad P(x) = x^2 - 3x + 2$.

3.23. $W(x) = x^3 - 7x - 6, \quad P(x) = x^2 + 4x + 3$.

3.24. $W(x) = x^3 - 7x - 6, \quad P(x) = x^2 - x - 6$.

Wyznaczyć resztę z dzielenia $W(x)$ przez $P(x)$ (odpowiedz bez wykonywania dzielenia).

3.25$^{\mathsf{K}}$**.** $W(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 1, \quad P(x) = x - 1$.

3.26. $W(x) = x^5 + 4x^4 - x^2 + 2, \quad P(x) = x - 2$.

Rozwiązać równania i nierówności

3.27. $x^3 + 2x - 12 = 0$,

3.28. $3x^4 - 7x^3 - 4x^2 - 7x + 3 = 0$,

3.29. $(x-3)^2(x+1)(x^2+2) > 0$,

3.30$^{\mathsf{K}}$**.** $(x+2)^3(-x^2+x-1)(x-1) \le 0$,

3.31. $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 < 0$,

3.32. $(x-2)^2(x^2+5)(x-3)^5(x-4)(x-5) > 0$,

3.33$^{\mathsf{K}}$**.** $x^3 - 7x + 6 > 0$,

3.34. $(x-1)^{17}(x+2)^{13}(x+5)^{2012} < 0$,

3.35$^{\mathsf{K}}$**.** $x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2 > 0$,

3.36. $-x^3 - 6x^2 - 11x - 6 \le 0$,

3.37. $|x^3 - 1| < x^2 + x + 1$,

3.38. $\dfrac{1}{8+x^3} - \dfrac{1}{x^3-8} = \dfrac{16}{3(x^4+4x^2+16)}$,

3.39$^{\mathsf{K}}$**.** $\dfrac{4|x|-3}{x} = x$,

3.40^K. $x^3 + \frac{1}{x^3} = 6\left(x + \frac{1}{x}\right)$,

3.41^K. $\frac{(x-2)^4(x+2)(x+\frac{1}{2})}{x^3} \geq 0$,

3.42. $\frac{(2x-3)(x+4)^3}{(x-1)(x+2)} \leq 0$,

3.43. $\frac{x^3+x^2-8x-12}{x^2-x-2} \leq 0$,

3.44^K. $\left|\frac{x-1}{x+2}\right| > 4$,

3.45. $\frac{1}{x} + \frac{x^2+3x+2}{x+1} < 2$,

3.46. $\frac{x}{x-1} - \frac{x}{x+1} \geq 0$,

3.47. $\frac{1}{|x|} > x^2 - |x| + 1$,

3.48. $\frac{x^2+x-6}{x^3-1} > 0$,

3.49^K. $\frac{14}{x^2-5x+6} < \frac{10}{2-x} - 3$,

3.50. $\frac{1}{|x+2|} < \frac{2}{|x-1|}$,

3.51. $\frac{x^2+x-6}{x^2+1} \geqslant 0$,

3.52. $\frac{x^2+x-6}{x^2-1} > 0$.

3.53. Wielomian $W(x) = 2x^3 - 15x^2 + ax + b$ jest podzielny przez $x - 4$ oraz przez $2x - 1$. Obliczyć współczynniki a i b. Wyznaczyć trzeci dzielnik stopnia pierwszego wielomianu $W(x)$.

3.54. Wyznaczyć wyraz wolny równania $6x^3 - 7x^2 - 16x + m = 0$, jeżeli wiadomo, że jeden z pierwiastków jest równy 2 znaleźć pozostałe dwa pierwiastki.

3.55. Wiadomo, że liczby 2 i 3 są pierwiastkami równania $2x^3 + mx^2 - 13x + n = 0$. Wyznaczyć m i n oraz znaleźć trzeci pierwiastek tego równania.

3.56^D. Dla jakiej wartości parametru m przy dzieleniu wielomianu $3x^3 + mx^2 - 4x + 2$ przez dwumian $x - 2$ otrzymamy resztę 6?

3.57^D. Wyznaczyć a i b tak, aby wielomian $x^4 - 3x^3 + 6x^2 + ax + b$ był podzielny przez $x^2 - 1$.

3.58^D. Wyznaczyć sumę współczynników wielomianu $(x^3 - x + 1)^{50} + (2x^2 - 2x + 1)^{30}$.

3.59. Naszkicować wykres funkcji

$$f(x) = \frac{|x+1| + |x-1|}{x}, \quad \text{gdzie} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

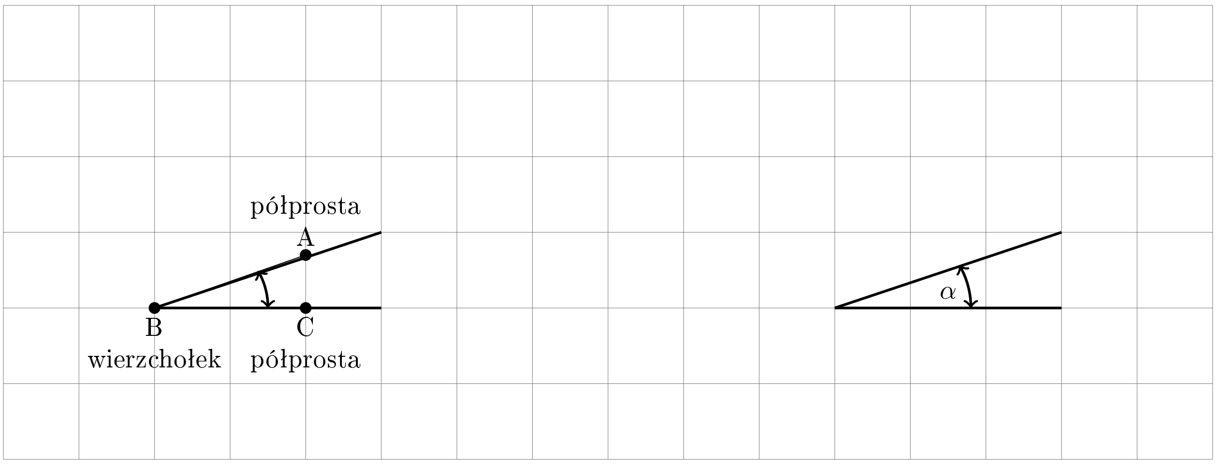
Podać przedziały, w których funkcja jest monotoniczna. Znaleźć jej miejsca zerowe.

Rozdział 4

Trygonometria

4.1 Wiadomości teoretyczne

4.1. Definicja (Kąt płaski) Kąt to część płaszczyzny zawarta między dwiema półprostymi o wspólnym początku (zwanym wierzchołkiem kąta), wraz z tymi półprostymi (zwanymi ramionami kąta — patrz rysunek poniżej).

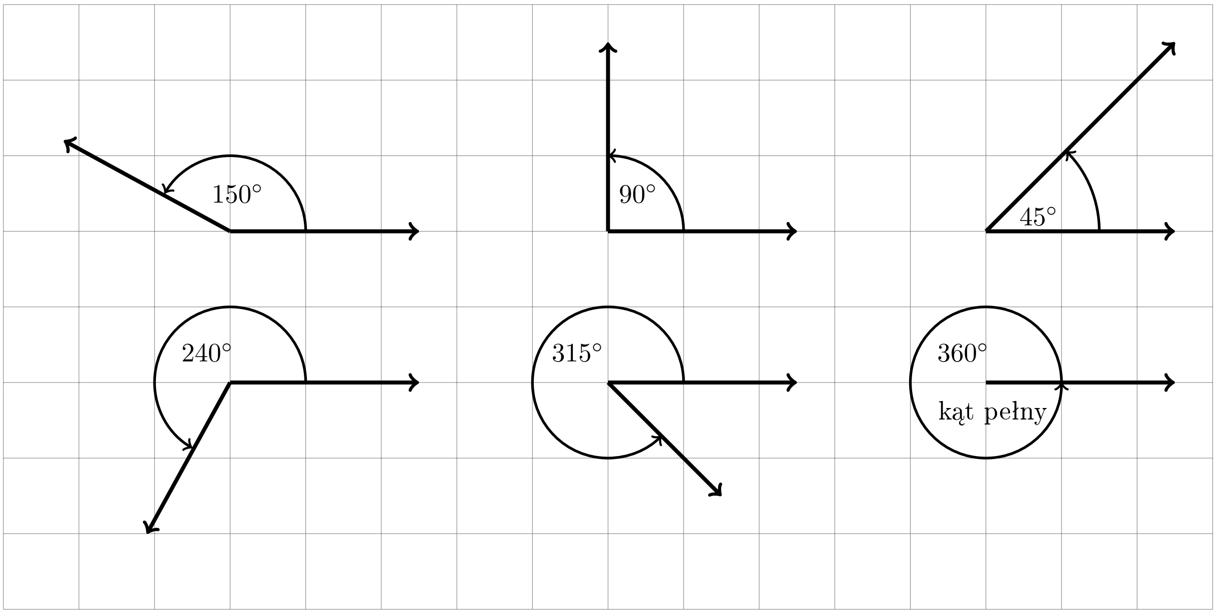


Rysunek 4.1: Elementy składowe kąta płaskiego oraz stosowane typowe oznaczenia

4.2. Uwaga Kąty oznaczamy zazwyczaj małymi literami greckimi. Używana jest też notacja trzyliterowa, na przykład $\measuredangle ABC$, w której środkowa litera oznacza wierzchołek kąta. Każdemu kątowi możemy przypisać jego miarę. Najczęściej stosuje się miarę stopniową i miarę łukową kąta, gdzie jednostkami miary kątów są odpowiednio stopień i radian.

4.3. Definicja (Miara stopniowa) $1°$ (jeden stopień) to miara $\frac{1}{360}$ kąta pełnego.

4.4. Definicja (Miara łukowa) Rozważmy okrąg o promieniu r, $r > 0$ i środku w punkcie O. Rozważmy dalej kąt θ taki, że jego wierzchołek leży w punkcie O (patrz rys. 4.3), a jego ramiona wyznaczają łuk l na okręgu, którego środkiem jest punkt O. Miarą łukową kąta θ nazywamy stosunek długości łuku l do



Rysunek 4.2: Przykładowe miary kątów płaskich pomiędzy wektorami wyrażone w stopniach

długości promienia okręgu r

$$\theta = \frac{\text{długość łuku}}{\text{długość promienia}} = \frac{l}{r}\text{radianów}.$$

4.5. Definicja Radian to jednostka miary kąta płaskiego zdefiniowana jako miara kąta środkowego, w którym długość łuku wyznaczonego przez kąt środkowy jest równa promieniowi okręgu.

4.6. Uwaga Związek między miarą łukową α [rad] wyrażoną w radianach a miarą kątową wyrażoną w stopniach $\alpha^{'}[^\circ]$ zapisujemy w postaci

$$\alpha\ [\text{rad}] = \frac{\pi}{180^\circ}\alpha^{'}[^\circ] \approx 0.01745\alpha^{'}[^\circ]$$

analogicznie związek między miarą w stopniach $\alpha^{'}[^\circ]$ a miarą łukową α [rad] możemy zapisać

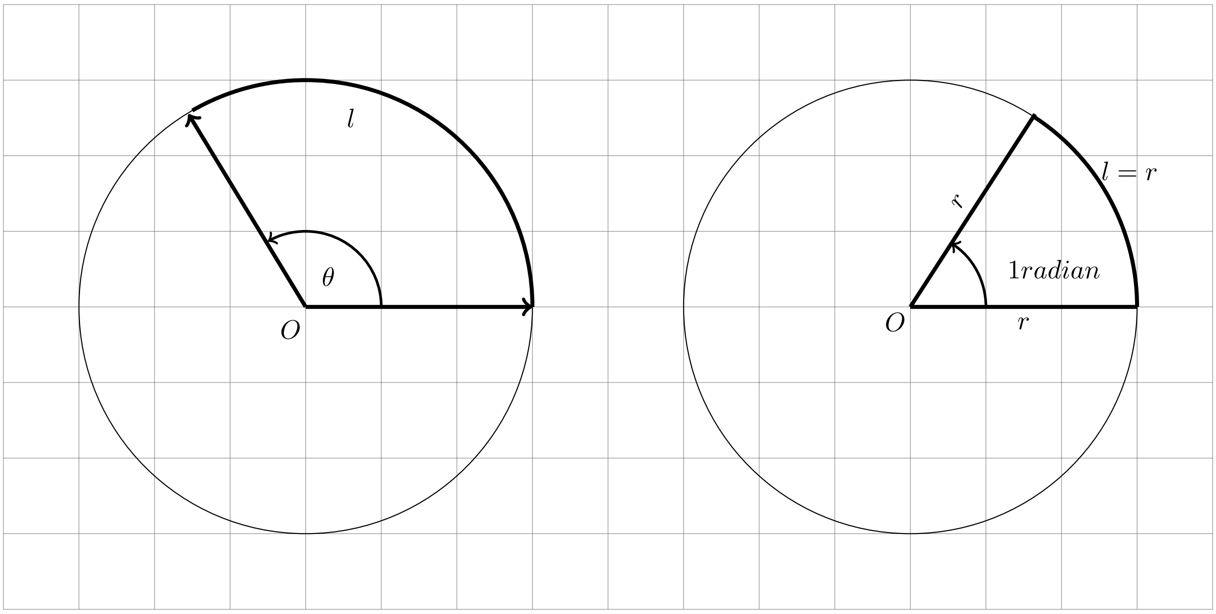
$$\alpha^{'}[^\circ] = \frac{180^\circ}{\pi}\alpha[rad] \approx 57.2958\alpha\ [\text{rad}].$$

4.7. Definicja W trójkącie prostokątnym (rys. 4.4) funkcje trygonometryczne definiujemy w następujący sposób

(i) sinusem kąta nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta do długości przeciwprostokątnej trójkąta, co zapisujemy jako $\sin\theta = \frac{b}{c}$;

(ii) cosinusem kąta nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej przy kącie do długości przeciwprostokątnej trójkąta, co zapisujemy jako $\cos\theta = \frac{a}{c}$;

(iii) tangensem kąta nazywamy stosunek długości przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta do długości drugiej przyprostokątnej trójkąta, co zapisujemy jako $\operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}$;



Rysunek 4.3: Miara łukowa kąta

(iv) cotangensem kąta nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta do długości drugiej przyprostokątnej trójkąta, co zapisujemy jako $\operatorname{ctg}\theta = \frac{a}{b}$.

4.8. Definicja (Kąt skierowany) Parę uporządkowanych półprostych o wspólnym początku nazywamy kątem skierowanym. Pierwszą z prostych nazywamy ramieniem początkowym zaś drugą ramieniem końcowym kąta skierowanego.

4.9. Definicja Przyjmujemy, że kąt skierowany przeciwnie do ruchu wskazówek zegara ma miarę dodatnią zaś kąt skierowany zgodnie z ruchem wskazówek zegara ma miarę ujemną (rys. 4.5).

4.10. Definicja (Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta) Niech t będzie dowolną liczbą rzeczywistą zaś $P(x, y)$ punktem okręgu o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu r ($r > 0$). Promień r reprezentuje końcowe ramię kąta o mierze łukowej t radianów ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$) (rys. 4.6). Podstawowe funkcje trygonometryczne definiujemy w następujący sposób

(i) $\sin\alpha = \dfrac{y}{r}$;

(ii) $\cos\alpha = \dfrac{x}{r}$;

(iii) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$ dla $x \neq 0$;

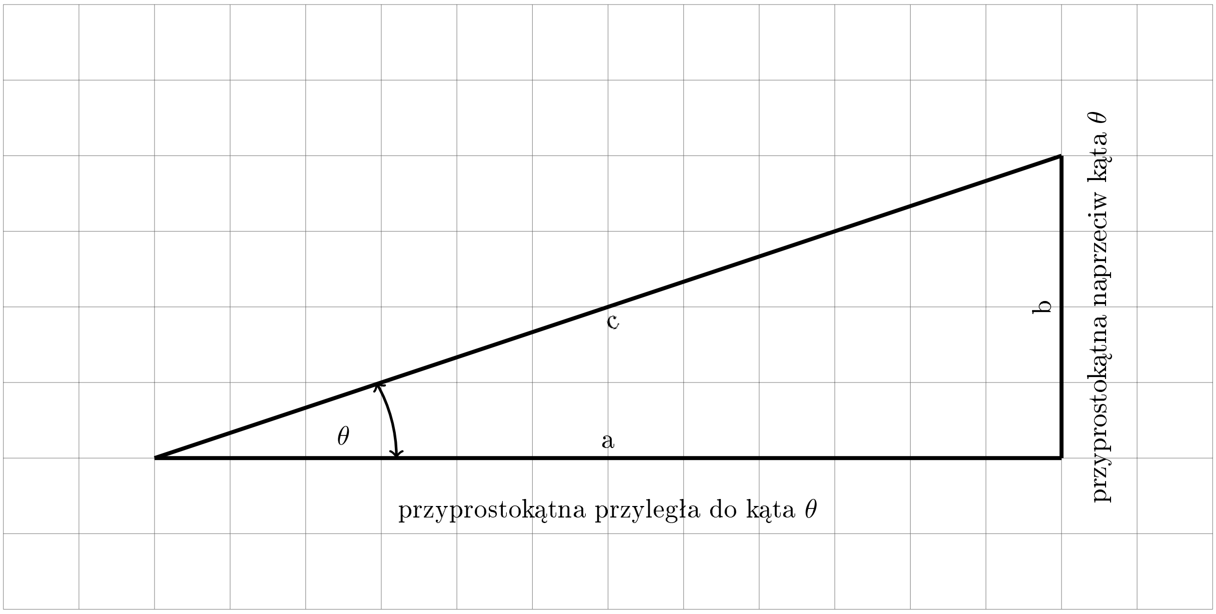
(iv) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{x}{y}$ dla $y \neq 0$.

4.11. Definicja (Funkcja okresowa) Funkcję $f\colon \mathbb{R} \supset D \to \mathbb{R}$ nazywamy okresową, gdy istnieje takie $T > 0$, że dla każdego $x \in D$

$$x + T \in D \quad \text{oraz} \quad f(x) = f(x + T).$$

Najmniejszą z liczb T spełniajacych powyższy warunek nazywamy okresem podstawowym.

4.12. Twierdzenie Funkcje trygonometryczne są okresowe. Dla każdego x należącego do dziedziny



Rysunek 4.4: Trójkąt prostokątny — oznaczenia długości boków trójkąta i kąta θ

oraz $k \in \mathbb{Z}$ zachodzi

(i) $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$;

(ii) $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$;

(iii) $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$;

(iv) $\operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg} x$.

4.13. Uwaga

(i) Okresem podstawowym funkcji sinus i cosinus jast 2π;

(ii) Okresem podstawowym funkcji tangens i cotangens jest π.

4.14. Definicja Funkcje $\sin x$ i $\cos x$ oraz $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$ nazywamy funkcjami dopełniającymi lub inaczej kofunkcjami.

4.15. Twierdzenie (Wzory redukcyjne) Dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{Z}$ prawdziwe są następujące wzory redukcyjne

(i) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$;

(ii) $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$;

(iii) $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x) = \operatorname{ctg} x$ dla $x \neq k\pi$;

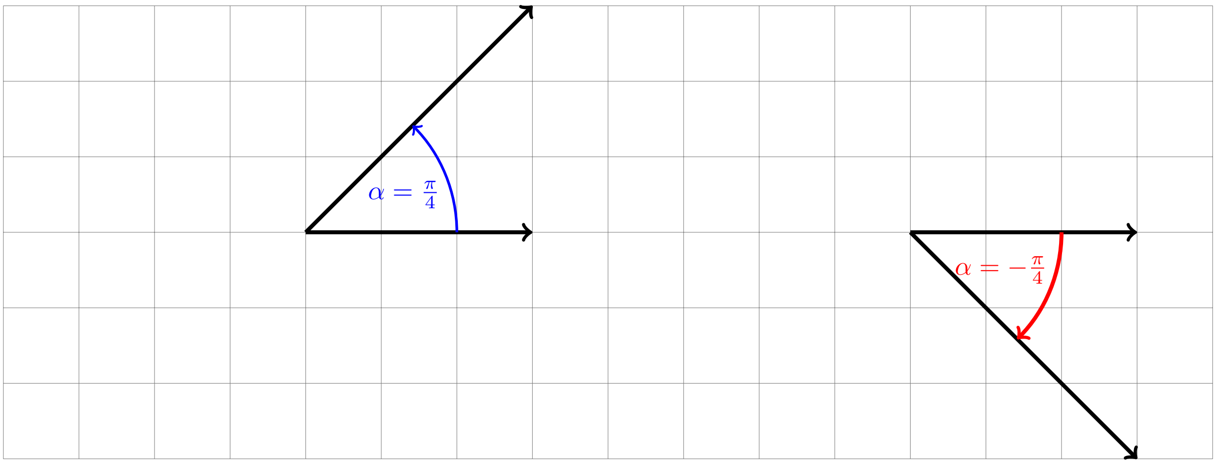
(iv) $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} - x) = \operatorname{tg} x$ dla $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$;

(v) $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$;

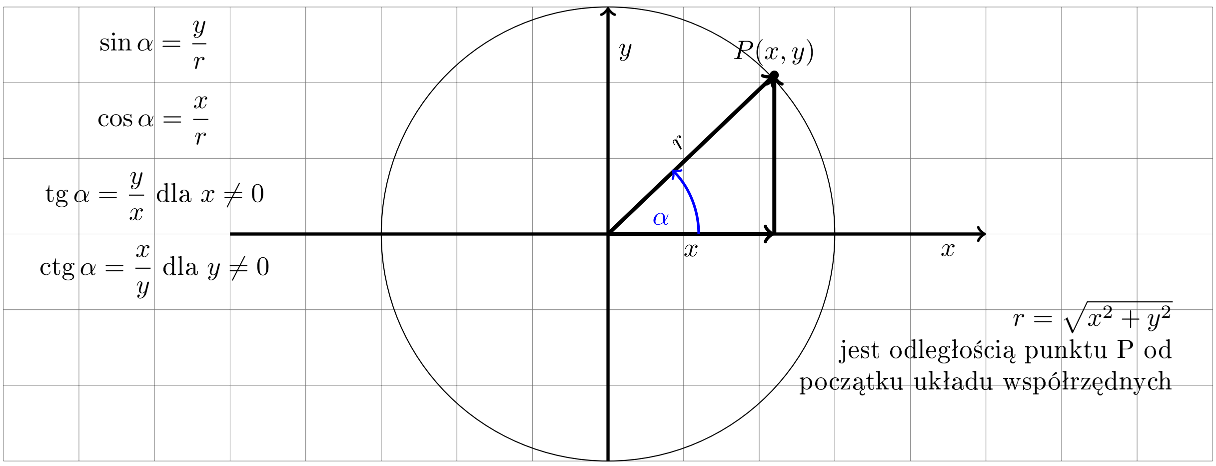
(vi) $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$;

(vii) $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + x) = -\operatorname{ctg} x$ dla $x \neq k\pi$;

(viii) $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} + x) = -\operatorname{tg} x$ dla $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$;



Rysunek 4.5: Kąt skierowany i jego miara dodatnia i ujemna



Rysunek 4.6: Kąt skierowany i funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

(ix) $\sin(\pi - x) = \sin x$;

(x) $\cos(\pi - x) = -\cos x$;

(xi) $\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$ dla $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$;

(xii) $\operatorname{ctg}(\pi - x) = -\operatorname{ctg} x$ dla $x \neq k\pi$;

(xiii) $\sin(\pi + x) = -\sin x$;

(xiv) $\cos(\pi + x) = -\cos x$;

(xv) $\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x$ dla $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$;

(xvi) $\operatorname{ctg}(\pi + x) = \operatorname{ctg} x$ dla $x \neq k\pi$;

(xvii) $\sin(\frac{3\pi}{2} - x) = -\cos x$;

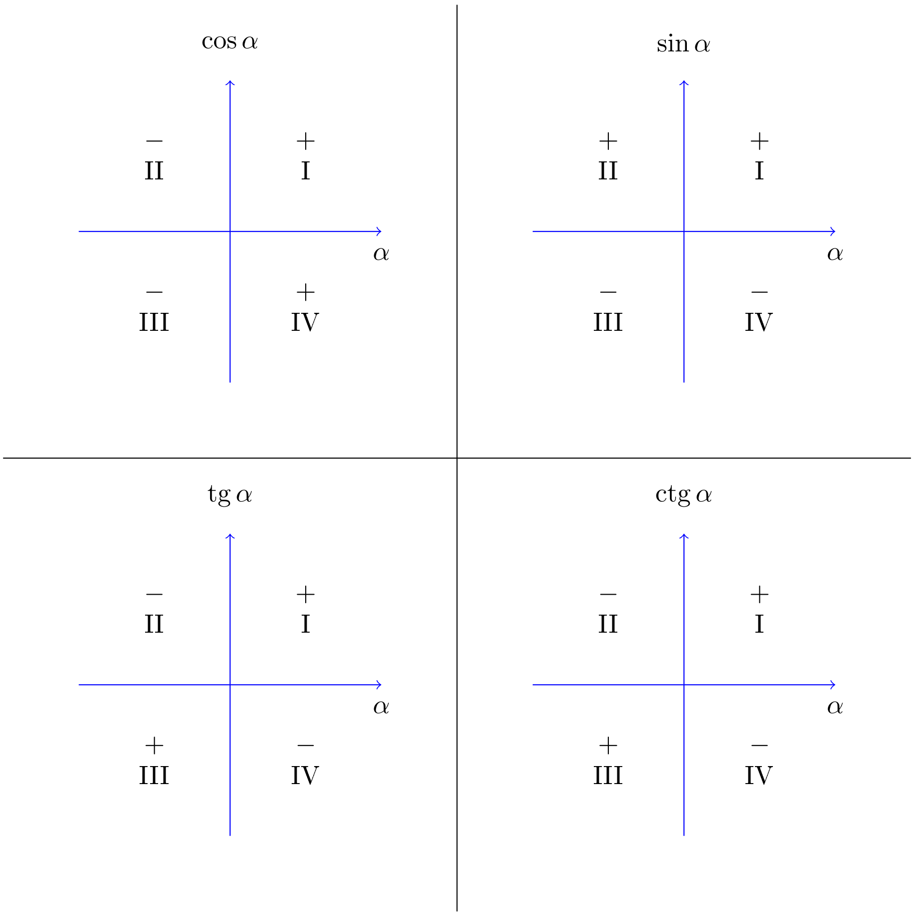
(xviii) $\cos(\frac{3\pi}{2} - x) = -\sin x$;

(xix) $\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2} - x) = \operatorname{ctg} x$ dla $x \neq k\pi$;

(xx) $\operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{2} - x) = \operatorname{tg} x$ dla $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$;

(xxi) $\sin(\frac{3\pi}{2} + x) = -\cos x$;

(xxii) $\cos(\frac{3\pi}{2} + x) = \sin x$;



Rysunek 4.7: Znaki podstawowych funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach układu współrzędnych

(xxiii) $\operatorname{tg}(\frac{3\pi}{2}+x) = -\operatorname{ctg} x$ dla $x \neq k\pi$;

(xxiv) $\operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{2}+x) = -\operatorname{tg}(x)$ dla $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$;

(xxv) $\sin(2\pi - x) = -\sin x$;

(xxvi) $\cos(2\pi - x) = \cos x$;

(xxvii) $\operatorname{tg}(2\pi - x) = -\operatorname{tg} x$ dla $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$;

(xxviii) $\operatorname{ctg}(2\pi - x) = -\operatorname{ctg}(x)$ dla $x \neq k\pi$.

4.16. Twierdzenie Dla każdego x należącego do dziedziny funkcji prawdziwe są następujące związki pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi

(i) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

(ii) $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$;

(iii) $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$;

(iv) $\operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1$;

(v) $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$;

(vi) $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$;

(vii) $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$;

(viii) $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$;

(ix) $\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$;

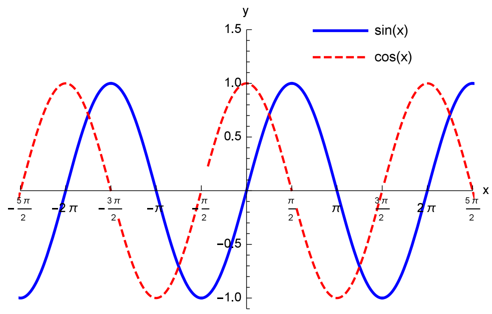
(x) $\operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y}$;

(xi) $\sin x \pm \sin y = 2\sin(\frac{x \pm y}{2})\cos(\frac{x \mp y}{2})$;

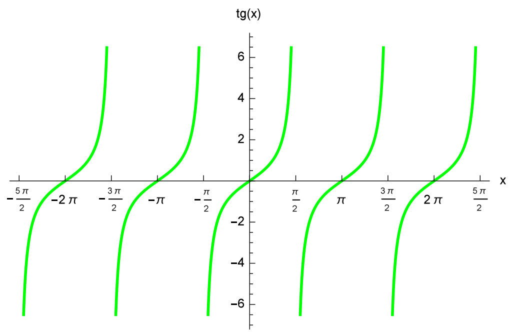
(xii) $\cos x + \cos y = 2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$;

(xiii) $\cos x - \cos y = -2\sin(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$.

4.17. Uwaga Wykresy funkcji trygonometrycznych $y = \sin x$ i $y = \cos x$ oraz $y = \operatorname{tg} x$ i $y = \operatorname{ctg} x$ w kartezjańskim układzie współrzędnych są przedstawione na wykresach poniżej (rysunki 4.8, 4.9, 4.10 odpowiednio).



Rysunek 4.8: Wykresy funkcji $y = \sin x$ i $y = \cos x$



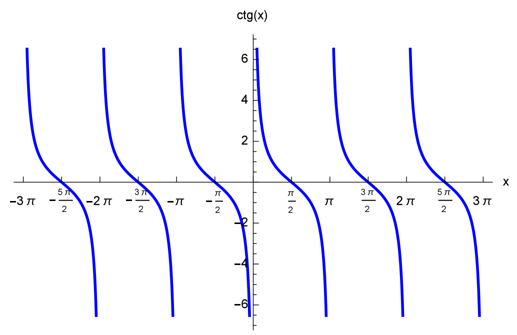
Rysunek 4.9: Wykres funkcji $y = \operatorname{tg} x$

4.18. Uwaga Często używane wartości podstawowych funkcji trygonometrycznych dla argumentów $\alpha \in [0, 2\pi]$ zostały podane w tabeli 4.1.

4.19. Uwaga Podstawowe własności funkcji $\sin x$

(i) dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych;

(ii) zbiorem wartości funkcji jest przedział domknięty $[-1, 1]$;



Rysunek 4.10: Wykres funkcji $y = \operatorname{ctg} x$

α [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
α [°]	0	30	45	60	90	120	135	150
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$
α [rad]	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
α [°]	180	210	225	240	270	300	315	330
$\sin\alpha$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

Tabela 4.1: Główne wartości funkcji $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ oraz $\operatorname{ctg}\alpha$ dla argumentów $\alpha \in [0, 2\pi]$

(iii) funkcja jest nieparzysta — jej wykres jest symetryczny względem początku układu współrzędnych;

(iv) funkcja jest okresowa a jej okresem podstawowym jest liczba 2π.

4.20. Uwaga Podstawowe własności funkcji $\cos x$

(i) dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych;

(ii) zbiorem wartości funkcji jest przedział domknięty $[-1, 1]$;

(iii) funkcja jest parzysta — jej wykres jest symetryczny względem osi Oy;

(iv) funkcja jest okresowa a jej okresem podstawowym jest liczba 2π.

4.21. Uwaga Podstawowe własności funkcji $\operatorname{tg} x$

(i) dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych z wyjątkiem liczb postaci $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$;

(ii) zbiorem wartości funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych;

(iii) funkcja jest nieparzysta — jej wykres jest symetryczny względem początku układu współrzędnych;

(iv) funkcja jest okresowa a jej okresem podstawowym jest liczba π.

4.22. Uwaga Podstawowe własności funkcji $\operatorname{ctg} x$

(i) dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych z wyjątkiem liczb postaci $k\pi$ gdzie $k \in \mathbb{Z}$;

(ii) zbiorem wartości funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych;

(iii) funkcja jest nieparzysta — jej wykres jest symetryczny względem początku układu współrzędnych;

(iv) funkcja jest okresowa a jej okresem podstawowym jest liczba π.

4.23. Twierdzenie Niech k oznacza dowolną liczbę całkowitą.

(i) Równanie $\sin x = a$, gdzie $a \in [-1, 1]$, ma nieskończenie wiele rozwiązań postaci:

$$x = x_0 + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = \pi - x_0 + 2k\pi, \qquad \text{gdzie} \quad \sin x_0 = a.$$

(ii) Równanie $\cos x = a$, gdzie $a \in [-1, 1]$, ma nieskończenie wiele rozwiązań postaci:

$$x = x_0 + 2k\pi \quad \text{lub} \quad x = -x_0 + 2k\pi, \qquad \text{gdzie} \quad \cos x_0 = a.$$

(iii) Równanie $\operatorname{tg} x = a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$, ma nieskończenie wiele rozwiązań postaci:

$$x = x_0 + k\pi, \qquad \text{gdzie} \quad \operatorname{tg} x_0 = a.$$

(iv) Równanie $\operatorname{ctg} x = a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$, ma nieskończenie wiele rozwiązań postaci:

$$x = x_0 + k\pi, \qquad \text{gdzie} \quad \operatorname{ctg} x_0 = a.$$

4.24.* Definicja (Funkcja wzajemnie jednoznaczna) Funkcję f nazywamy wzajemnie jednoznaczną wtedy i tylko wtedy, gdy każdemu y należącemu do zbioru wartości funkcji f odpowiada dokładnie jeden element x z dziedziny funkcji f, dla którego $f(x) = y$.

4.25.* Definicja (Funkcja odwrotna) Dana jest wzajemnie jednoznaczna funkcja f. Zbiór uporządkowanych par $(y; x)$ powstałych ze wszystkich par $(x; y)$ należących do f nazywa się funkcją odwrotną f^{-1} funkcji f.

4.26.* Uwaga Wzajemnie jednoznaczną funkcję f nazywa się też funkcją odwracalną. Dziedziną f^{-1} jest zión wartości f, a zbiorem wartości f^{-1} jest dziedzina f.

4.27.* Uwaga (Funkcje odwrotne do funkcji trygonometrcznych)

Funkcje trygonometryczne $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ nie są wzajemnie jednoznaczne w swoich dziedzinach, a więc nie są odwracalne. Można jednak wybrać przedziały, w których te funkcje są rosnące lub malejące a więc odwracalne. Standardowy wybór takich przedziałów został podany w tabeli 4.2. Funkcję odwrotną do $\sin x$ oznaczamy $\arcsin x$ (co czytamy „arkus sinus"), analogicznie oznaczamy funkcje odwrotne do $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ (patrz tabela 4.2). Funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych nazywamy funkcjami cyklometrycznymi.

4.28.* Uwaga Wykres funkcji cyklometrycznych $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arc\,tg} x$ i $\operatorname{arc\,ctg} x$ w kartezjańskim układzie współrzędnych są przedstawione na rysunkach 4.11, 4.12, 4.13 i 4.14 odpowiednio.

4.29.* Uwaga Podstawowe własności funkcji $\arcsin x$

(i) dziedziną funkcji jest przedział $[-1, 1]$;

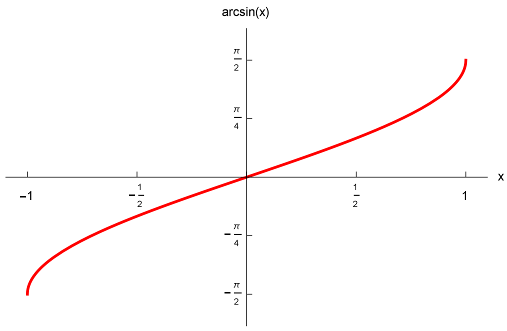
(ii) zbiorem wartości funkcji jest przedział domknięty $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;

(iii) funkcja jest nieparzysta — jej wykres jest symetryczny względem początku układu współrzędnych;

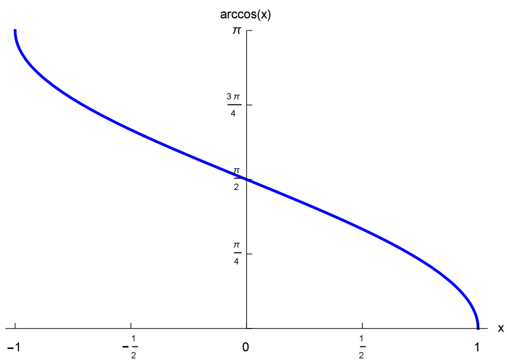
(iv) funkcja jest rosnąca.

Funkcja trygonometryczna		Funkcja odwrotna	
$f(x) = \sin x$	$f\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$	$f^{-1}(x) = \arcsin x$	$f^{-1}\colon [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$f(x) = \cos x$	$f\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$	$f^{-1}(x) = \arccos x$	$f^{-1}\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$	$f^{-1}(x) = \operatorname{arc\,tg} x$	$f^{-1}\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$f\colon (0, \pi) \to \mathbb{R}$	$f^{-1}(x) = \operatorname{arc\,ctg} x$	$f^{-1}\colon \mathbb{R} \to (0, \pi)$

Tabela 4.2: Funkcje odwrotne do podstawowych funkcji trygonometrycznych



Rysunek 4.11: Wykres funkcji $y = \arcsin x$



Rysunek 4.12: Wykres funkcji $y = \arccos x$

4.30.* Uwaga Podstawowe własności funkcji $\arccos x$

(i) dziedziną funkcji jest przedział $[-1, 1]$;

(ii) zbiorem wartości funkcji jest przedział $[0, \pi]$;

(iii) funkcja jest malejąca;

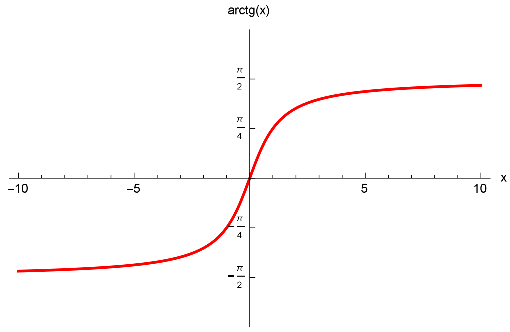
4.31.* Uwaga Podstawowe własności funkcji $\operatorname{arc\,tg} x$

(i) dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych;

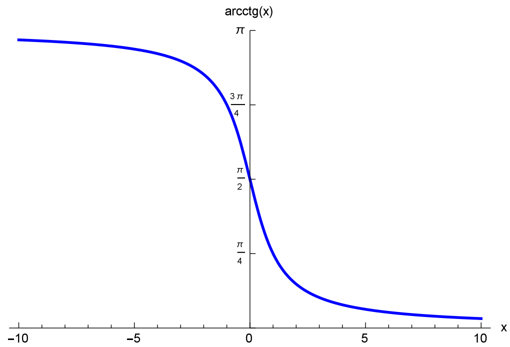
(ii) zbiorem wartości funkcji jest przedział $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;

(iii) funkcja jest nieparzysta — jej wykres jest symetryczny względem początku układu współrzędnych;

(iv) funkcja jest rosnąca.



Rysunek 4.13: Wykres funkcji $y = \operatorname{arc\,tg} x$



Rysunek 4.14: Wykres funkcji $y = \operatorname{arc\,ctg} x$

4.32.* **Uwaga** Podstawowe własności funkcji $\operatorname{arc\,ctg} x$

(i) dziedziną funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych;

(ii) zbiorem wartości funkcji jest przedział $[0, \pi]$;

(iii) funkcja jest nieparzysta — jej wykres jest symetryczny względem początku układu współrzędnych;

(iv) funkcja jest malejąca.

4.2 Zadania

Wyraź kąt α w mierze łukowej

4.1. $\alpha = 30°$,

4.2. $\alpha = 45°$,

4.3. $\alpha = 60°$,

4.4. $\alpha = 90°$,

4.5. $\alpha = 180°$,

4.6. $\alpha = 270°$,

4.7^{K}. $\alpha = 225°$,

4.8^{K}. $\alpha = 135°$,

4.9. $\alpha = 240°$,

4.10. $\alpha = 315°$,

4.11. $\alpha = 120°$,

4.12. $\alpha = 210°$,

4.13. $\alpha = 150^\circ$,

4.14. $\alpha = 300^\circ$.

Korzystając ze wzorów redukcyjnych wyznacz wartość $\sin x_0$, $\cos x_0$, $\operatorname{tg} x_0$ dla

4.15$^\mathsf{K}$. $x_0 = \frac{2}{3}\pi$.

4.16. $x_0 = \frac{3}{4}\pi$.

4.17. $x_0 = \frac{5}{4}\pi$.

4.18. $x_0 = \frac{4}{3}\pi$.

4.19$^\mathsf{K}$. $x_0 = \frac{7}{4}\pi$.

Naszkicować wykresy funkcji i wyznaczyć ich okresy podstawowe

4.20. $y = \sin x$,

4.21. $y = 2\sin(x + \pi/4)$,

4.22$^\mathsf{K}$. $y = \cos^2 x - \sin^2 x$,

4.23. $y = 2\sin(\frac{1}{2}x)$,

4.24. $y = 2\cos x$,

4.25. $y = 2\cos(x - \pi/4)$,

4.26. $y = 2\cos(2x)$,

4.27. $y = |\cos(2x)|$,

4.28$^\mathsf{K}$. $y = |-2\sin(x + \pi/4)|$.

4.29$^\mathsf{K}$. Obliczyć wartość wyrażenia $\dfrac{\sin^2(\frac{2\pi}{3})\cos(-\pi)}{\operatorname{tg}(-\frac{3\pi}{4})\operatorname{ctg}(\frac{9\pi}{4})}$.

4.30. Przedstawić w postaci iloczynowej wyrażenie $1 + \sin\alpha + \cos\alpha$.

Wykazać prawdziwość tożsamości

4.31. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{2}{\sin 2\alpha}$,

4.32$^\mathsf{K}$. $\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\dfrac{\cos x}{1+\cos x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$,

4.33$^\mathsf{K}$. $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2\alpha$,

4.34. $\dfrac{\cos(\alpha)+\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)-\sin(\alpha)} = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \alpha)$.

4.35$^\mathsf{K}$. Wiedząc, że $3\sin x = 2(1 - \cos x)$ obliczyć $\operatorname{tg} x$.

Rozwiązać następujące równania i nierówności

4.36$^{\mathsf{K}}$. $\operatorname{tg}(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{5}) = -1$

4.37$^{\mathsf{K}}$. $2\cos 2x + 3 = 4\cos x$,

4.38. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$,

4.39. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$,

4.40$^{\mathsf{K}}$. $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1$,

4.41. $\sin 3x - \sin x = \sin 2x$,

4.42. $|\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x| = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$,

4.43. $\sin^4 x + \cos^4 x = \dfrac{5}{8}$,

4.44. $\sin x + \cos x = 1$,

4.45. $3\sin x = 2\cos^2 x$,

4.46. $\dfrac{(1-\sqrt{3})\operatorname{tg}(x)}{\sqrt{3} - \operatorname{tg}^2 x} = 1$,

4.47$^{\mathsf{D}}$. $\sin^4 x - \cos^4 x = \dfrac{1}{2}$,

4.48$^{\mathsf{K}}$. $\dfrac{1}{2} \leqslant \sin x < 1$,

4.49. $|\cos^2 x - \sin^2 x| \leqslant \dfrac{1}{2}$,

4.50. $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < |\sin x| < 1$,

4.51$^{\mathsf{K}}$. $\cos^2 x - 5\cos x < 0$,

4.52. $|\operatorname{tg} x| > \operatorname{tg} x + \dfrac{2}{\cos x}$,

4.53$^{\mathsf{K}}$. $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 2x > \dfrac{2}{\sqrt{3}}$,

4.54$^{\mathsf{D}}$. $2\sin^2 3x + \sin^2 6x < 2$,

4.55. $|\sin x| > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

4.56$^{\mathsf{D}}$. Naszkicować wykres funkcji $f(x) = \sin x + |\sin x|$, a następnie podać liczbę rozwiązań równania $x = \sin x + |\sin x|$.

4.57. Dla jakiej wartości parametru $m \in [0, 2\pi]$ równanie $(2\cos m - 1)x^2 - 2x + \cos m = 0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste?

4.58. Uprościć wyrażenie

$$\sin\alpha - \sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha} \quad \text{dla} \quad \pi < \alpha < 2\pi.$$

Rozdział 5

Funkcja wykładnicza

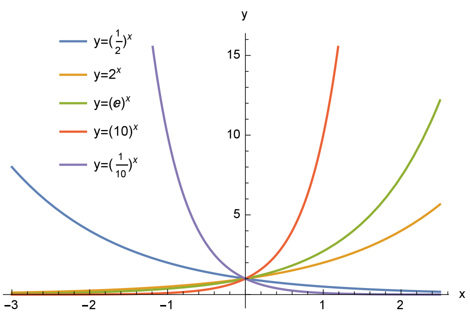
5.1 Wiadomości teoretyczne

5.1. Definicja (Funkcja wykładnicza) Niech $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$. Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję określoną wzorem

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \qquad f(x) = a^x.$$

Dziedziną funkcji wykładniczej jest $\mathbb{R}$, zbiorem wartości $(0,\infty)$.

5.2. Uwaga (Wykres funkcji wykładniczej) Wykres funkcji wykładniczej przedstawiony jest na rys. 5.1.



Rysunek 5.1: Wykresy funkcji wykładniczych $f(x) = (\frac{1}{2})^x$, $f(x) = 2^x$, $f(x) = 10^x$, $f(x) = (\frac{1}{10})^x$, $f(x) = e^x$

5.3. Twierdzenie (Własności funkcji wykładniczej) Niech $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$. Prawdziwe są następujące własności

(i) dla $a > 1$ funkcje wykładnicze są rosnące, dla argumentów zbliżających się do zera wykres funkcji zbliża się asymptotycznie do ujemnej osi x;

(ii) dla $0 < a < 1$ funkcje wykładnicze są malejące, dla argumentów nieograniczenie dużych wykres funkcji zbliża się asymptotycznie do dodatniej osi x;

(iii) ponieważ $a^x = e^{xlna}(a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R})$ więc możliwe jest sprowadzenie każdej funkcji wykładniczej do funkcji wykładniczej $y = e^x$;

(iv) funkcje wykładnicze nie mają miejsc zerowych;

(v) wykresy funkcji wykładniczych przechodzą przez punkt $(0,1)$.

5.2 Zadania

Naszkicować wykres funkcji. Na podstawie wykresu wyznaczyć asymptoty, ekstrema i przedziały monotoniczności funkcji.

5.1$^{\mathsf{K}}$. $x \mapsto y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-|x|}$,

5.2$^{\mathsf{K}}$. $y = -2^x + 1$,

5.3. $y = 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$,

5.4. $y = 2^{x+|x|}$.

Rozwiązać równania i nierówności

5.5$^{\mathsf{K}}$. $e^{5x} = \frac{1}{e}$,

5.6. $\frac{1}{4}2^{x^2} = 2^x$,

5.7$^{\mathsf{K}}$. $4^x + 2 \cdot 2^x = 8$,

5.8. $3^{x+1} + 3^{-x+1} = 10$,

5.9. $5^{x^2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-3x-4}$,

5.10. $32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0{,}25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$,

5.11. $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$,

5.12$^{\mathsf{K}}$. $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$,

5.13. $0{,}125 \cdot 4^{2x-3} = (\frac{\sqrt{2}}{8})^{-x}$,

5.14. $0{,}5^{x^2} \cdot 2^{2x+2} = \frac{1}{64}$,

5.15$^{\mathsf{K}}$. $\left[2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 4$,

5.16. $2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{-0{,}5x^{-0{,}5}} = 4^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}}$,

5.17. $a^{\frac{3}{x^2-1}} \cdot a^{\frac{1}{2x-2}} \cdot \sqrt[4]{a^{-1}} = 1$,

5.18$^{\mathsf{D}}$. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$,

5.19. $16^x + 4^{x+2} - 36 = 0$,

5.20. $5^{x-1} - 5 \cdot 2^x = 5^{x-2} + 5 \cdot 2^{x-2}$,

5.21. $3 \cdot 4^x - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^x = 0$,

5.22$^{\mathsf{K}}$. $2^{4\cos^2 x+1} + 16 \cdot 2^{4\sin^2 x-3} = 20$,

5.23. $5^x - 5^{3-x} = 20$,

5.24. $49^x - 6 \cdot 7^x + 5 = 0$,

5.25. $2^{3x} \cdot 7^{x-2} = 4^{x+1}$,

5.26$^{\mathsf{K}}$. $8^x + 18^x - 2 \cdot 27^x = 0$,

5.27$^{\mathsf{K}}$. $e^x < \dfrac{1}{\sqrt{e}}$,

5.28. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x} < \dfrac{1}{4}$,

5.29$^{\mathsf{K}}$. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x} > \sqrt[4]{1{,}5}$,

5.30. $9 \cdot 3^{2x} - 2 \cdot 3^{x+2} - 27 \geq 0$,

5.31. $3^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}+3} > 84$,

5.32$^{\mathsf{D}}$. $|x-1|^{x^4-4x^3+3x^2} < 1$,

5.33. $9^x - 36 > 3^{x+2}$,

5.34. $2^{x+2} - 5^{x+1} \geq 20 \cdot 5^x$,

5.35. $2^{4-|x^2-4x|} > 4$,

5.36$^{\mathsf{K}}$. $x^2 \cdot 2^x + x \cdot 2^{x-1} > 0$,

5.37. $\dfrac{1}{2^x - 1} > \dfrac{1}{1 - 2^{x-1}}$,

5.38. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1-x} \geqslant 1$,

5.39. $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{6}{x}} \leq 4^{-\frac{1}{3}}$,

5.40. $5^x - 3^{x+1} > 2(5^{x-1} - 3^{x-2})$,

5.41. $\dfrac{2^x + 1 - 2^{1-x}}{1 - 2^{2-x}} \geq 0$.

5.42$^{\mathsf{D}}$. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} \sqrt[x-y]{x+y} = 2\sqrt{3}, \\ (x+y)2^{y-x} = 3. \end{cases}$$

Rozdział 6

Funkcja logarytmiczna

6.1 Wiadomości teoretyczne

6.1. Definicja (Logarytm) Niech $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$, $b \in (0,\infty)$. Logarytmem przy podstawie a z b nazywamy taką liczbę c, że $a^c = b$. Logarytm przy podstawie a z b oznaczamy $\log_a b$. Mamy zatem

$$\log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b, \qquad\qquad a \in (0,1) \cup (1,\infty), b \in (0,\infty).$$

Jeżeli podstawa logarytmu jest równa liczbie e to logarytm nazywamy logarytmem naturalnym i oznaczamy $\ln b$

$$\ln b \equiv \log_e b, \qquad\qquad b \in (0,\infty).$$

Logarytm przy podstawie równej 10 oznaczamy $\log b$, czyli

$$\log b \equiv \log_{10} b, \qquad\qquad b \in (0,\infty).$$

6.2. Uwaga Ograniczenia, które nakładamy na liczbę logarytmowaną i podstawę logarytmu w Definicji 6.1 gwarantują, że $\log_a b$ jest dobrze określony dla wszystkich dopuszczalnych wartości a i b.

6.3. Twierdzenie (Własności logarytmu) Niech $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$, $b, c \in (0,\infty)$, $n \in \mathbb{R}$. Prawdziwe są następujące własności

(i) $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$;

(ii) $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$;

(iii) $\log_a b^n = n \log_a b$.

6.4. Twierdzenie (O zamianie podstawy logarytmu) Niech $a, c \in (0,1) \cup (1,\infty)$, $b \in (0,\infty)$. Wtedy

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

6.5. Twierdzenie Niech $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$, $b \in (0,\infty)$, $c \in \mathbb{R}$. Wtedy zachodzi następująca równość

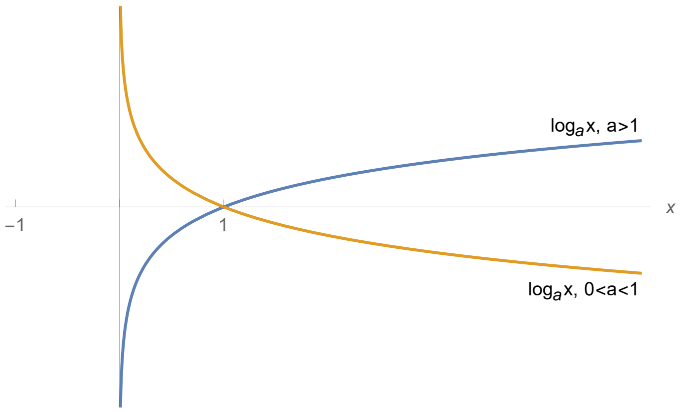
$$b^c = a^{c \log_a b}.$$

6.6. Definicja (Funkcja logarytmiczna) Niech $a \in (0,1)\cup(1,\infty)$. Funkcją logarytmiczną nazywamy odwzorowanie f określone wzorem:

$$f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \log_a x.$$

Dziedziną funkcji logarytmicznej jest zatem zbiór liczb rzeczywistych dodatnich, zbiorem wartości zbiór wszystkich liczb rzeczywistych.

6.7. Uwaga (Wykres funkcji logarytmicznej) Poniżej przedstawiamy wykres funkcji logarytmicznej



Wykres funkcji logarytmicznej

Z wykresu tego widać, że własności funkcji logarytmicznej zależą od tego czy podstawa logarytmu a należy do przedziału $(0,1)$, czy też jest większa od 1.

6.8. Twierdzenie (Własności funkcji logarytmicznej)

(i) Dla wszystkich $a \in (0,1)\cup(1,\infty)$ funkcja $f(x) = \log_a x$ jest różnowartościowa.

(ii) Dla wszystkich $a \in (0,1)\cup(1,\infty)$ jedynym miejscem zerowym funkcji $f(x) = \log_a x$ jest $x_0 = 1$.

(iii) Dla $a \in (0,1)$ funkcja $f(x) = \log_a x$ jest malejąca oraz $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty$.

(iv) Dla $a \in (1,\infty)$ funkcja $f(x) = \log_a x$ jest rosnąca oraz $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty$.

6.2 Zadania

Policzyć

6.1$^{\mathsf{K}}$. $\ln\sqrt{e}$,

6.2. $\log_2 \dfrac{1}{8}$,

6.3$^{\mathsf{K}}$. $\ln 1$,

6.4. $\log_5 \dfrac{1}{\sqrt{125}}$,

6.5. $\log_{0,5}(4\sqrt{32})$,

6.6$^{\mathsf{K}}$. $\log_{\sqrt{2}} \dfrac{4}{\sqrt[3]{8}}$,

6.7. $\log_4 \sqrt{8}$,

6.8. $\ln \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$,

6.9. $\log_{7\sqrt{7}} 49$,

6.10$^{\mathsf{K}}$. $10 \cdot 100^{\frac{1}{2}\log 9 - \log 2}$,

6.11. $\log_2(\log 100)$,

6.12$^{\mathsf{K}}$. $5^{\frac{\log 5}{\log 25}}$,

6.13. $\log_{3\sqrt{3}} 27$,

6.14$^{\mathsf{K}}$. $\log_3 5 \cdot \log_{25} 27$,

6.15. $\log_2 \frac{1}{4}$,

6.16. $\log_{\frac{2}{3}} 2.25$,

6.17. $\log_6 1$,

6.18. $\log_5(5\sqrt{5})$,

6.19. $\log_{\frac{1}{9}}(3\sqrt[3]{3})$.

Wyznaczyć dziedzinę funkcji

6.20. $y = \log_p \left(\frac{x+3}{2-x}\right)$,

6.21$^{\mathsf{K}}$. $y = \log_2 \left[1 - \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6)\right]$,

6.22. $y = \sqrt{\log_{0,1}(2x-1) - \log_{0,1}(5-3x)}$.

Narysować wykres funkcji. Na podstawie wykresu wyznaczyć asymptoty, ekstrema i przedziały monotoniczności funkcji

6.23. $y = -\log_2 x + 1$,

6.24. $y = \log_3 |x-1|$,

6.25$^{\mathsf{K}}$. $y = \log_2(|x|)$,

6.26$^{\mathsf{K}}$. $y = |\log_2(x)|$.

Rozwiązać równania i nierówności

6.27$^{\mathsf{K}}$. $\log_3(x^2+4) = \log_3(4x)$,

6.28. $\log_4(x+3) - \log_4(x-1) = 2 - \log_4 8$,

6.29$^{\mathsf{K}}$. $\log_4 \left\{2\log_3 \left[1 + \log_2(1 + \log_2 x)\right]\right\} = \frac{1}{2}$,

6.30. $\log_3^3 x - 2\log_3 x^2 + 3 = 0$,

6.31. $\log 10^{\log(x^2+21)} - 1 = \log x$,

6.32. $x^{\log_2(x-2)+\log_2(x-3)} = \frac{1}{x}$,

6.33. $|\log_2(3x-1) - \log_2 3| = |\log_2(5-3x) - 1|$,

6.34$^{\mathsf{D}}$. $4(\log_2 \cos x)^2 + \log_2(1+\cos 2x) = 3$,

6.35. $\log(x-2) - \log(4-x) = 1 - \log(13-x)$,

6.36. $\log\sqrt{x-5} + \log\sqrt{2x-3} + 1 = \log 30$,

6.37$^{\mathsf{K}}$. $\dfrac{1}{1+\ln x} + \dfrac{5}{3-\ln x} = 3$,

6.38. $\log_2(9-2^x) = 3-x$,

6.39. $\log_2(x^2-2x-3) - \log_2(x+1) \le 0$,

6.40$^{\mathsf{K}}$. $\log_{\frac{1}{3}}\left[\log_4(x^2-5)\right] > 0$,

6.41. $|3\log x - 1| < 2$,

6.42$^{\mathsf{K}}$. $\log_{\frac{1}{3}} x > \log_{\frac{1}{4}} x$,

6.43$^{\mathsf{K}}$. $\log_{\frac{1}{3}} x + 2\log_3 x < 3$,

6.44. $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x+1} < 1 + \log_{\frac{1}{3}}\sqrt{4-x^2}$,

6.45$^{\mathsf{D}}$. $2x + \log(1+4^x) \ge x\log 25 + \log 6$,

6.46. $\log_x \sqrt{x+12} > 1$,

6.47. $\log^2(x-1) - 2\log(x-1) > 0$,

6.48. $\log_2(x+14) + \log_2(x+2) \geqslant 6$,

6.49. $3^{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+7)} < 1$,

6.50. $\log_{2x+3} x^2 < 1$,

6.51$^{\mathsf{K}}$. $\log_x\left(\dfrac{2x-1}{x-1}\right) > 1$,

6.52. $\log_{2x-3}(3x^2-7x+3) < 2$.

6.53$^{\mathsf{K}}$. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} xy = 100, \\ \log^2 x + \log^2 y = 10. \end{cases}$$

6.54$^{\mathsf{D}}$. Pokazać, że

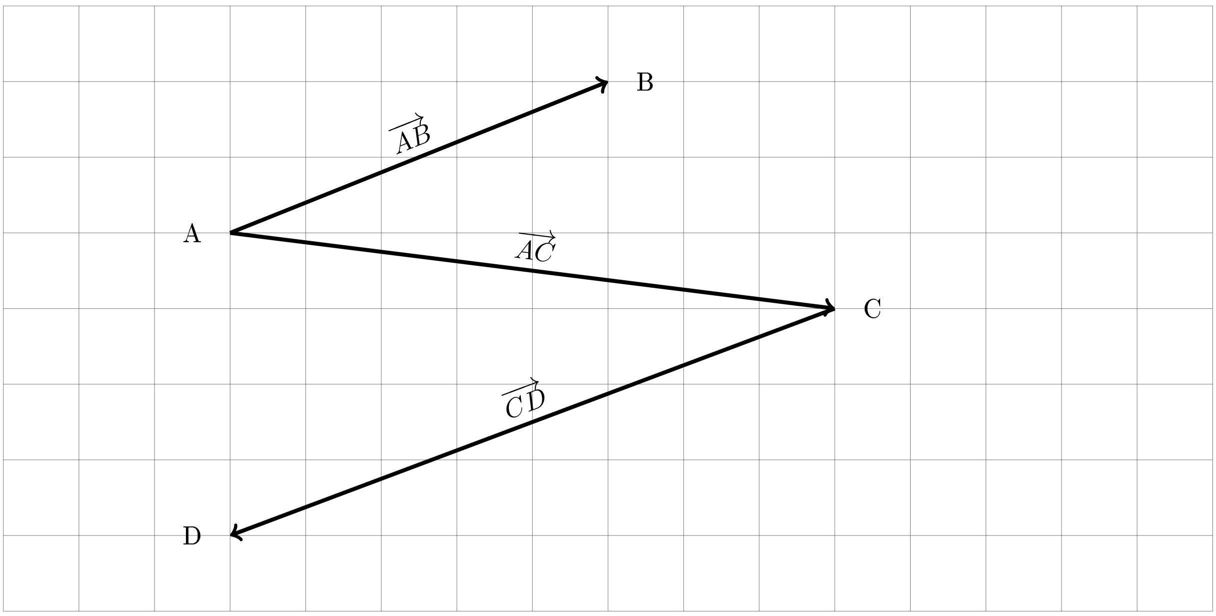
$$\frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_5 3} > 2.$$

Rozdział 7

Wektory

7.1 Wiadomości teoretyczne

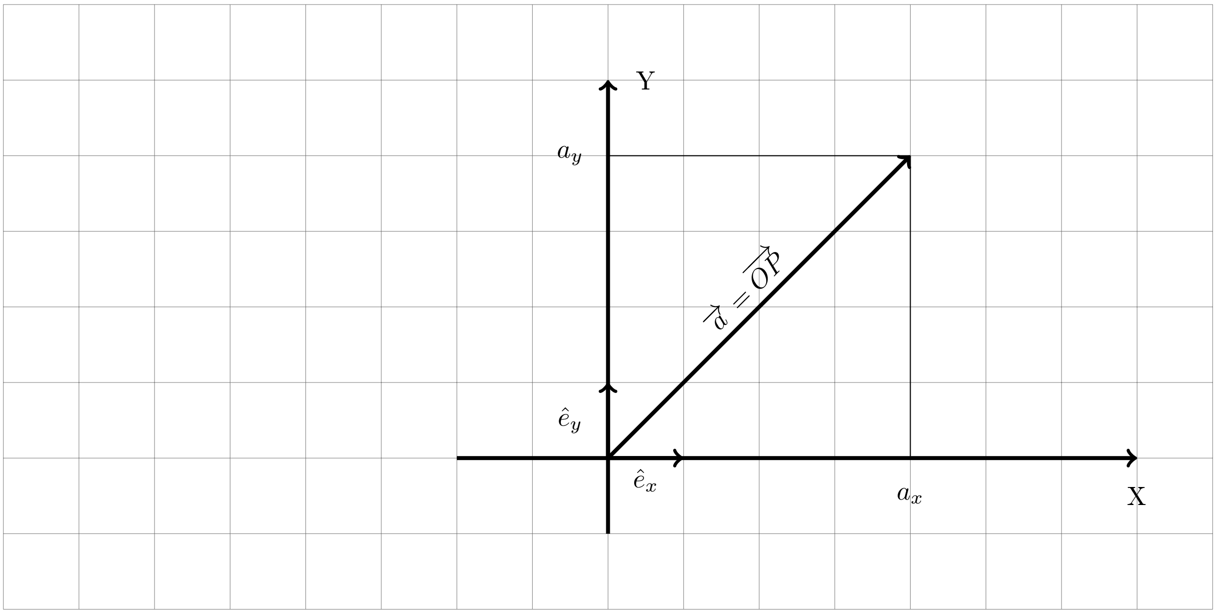
7.1. Definicja (Wektor) Wektorem $\overrightarrow{AB}$ nazywamy uporządkowaną parę punktów A i B, z których punkt A nazywamy początkiem, a punkt B końcem tego wektora.



Rysunek 7.1: Wektory związane o początkach i końcach w różnych punktach

7.2. Definicja W układzie współrzędnych XYZ , gdzie punkt A ma współrzędne (a_x, a_y, a_z) i punkt B ma współrzędne (b_x, b_y, b_z), wówczas wektor $\overrightarrow{AB}$ ma współrzędne $[b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z]$.

7.3. Definicja Sumą wektorów $\vec{w}$ i $\vec{u}$ w układzie współrzędnych XYZ jest wektor o współrzędnych $[w_x + u_x, w_y + u_y, w_z + u_z]$ gdzie $\vec{w} = [w_x, w_y, w_z]$ i $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$.



Rysunek 7.2: Wektor w układzie współrzędnych opisanych wersorami osi

7.4. Twierdzenie (Geometryczna konstrukcja sumy wektorów (reguła równoległoboku)) Niech $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, $b, c \in (0, \infty)$, $n \in \mathbb{R}$. Prawdziwe są następujące własności

(i) Sumą wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$ o wspólnym początku w punkcie A jest wektor o $\overrightarrow{AC}$ początku również w punkcie A utworzony przez przekątną równoległoboku $ABCD$ o bokach złożonych z wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$, odpowiednio.

(ii) Wektor sumy $\overrightarrow{AC}$ jest zwany również wypadkową wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$.

(iii) W powyższym równoległoboku $ABCD$ druga przekątna między wierzchołkami B i D tworzy wektor $\overrightarrow{BD}$ będący różnicą wektorów $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$.

7.5. Uwaga Sumę dwóch wektorów $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ tworzy wektor $\overrightarrow{AC}$ o początku w punkcie A i końcu w punkcie C.

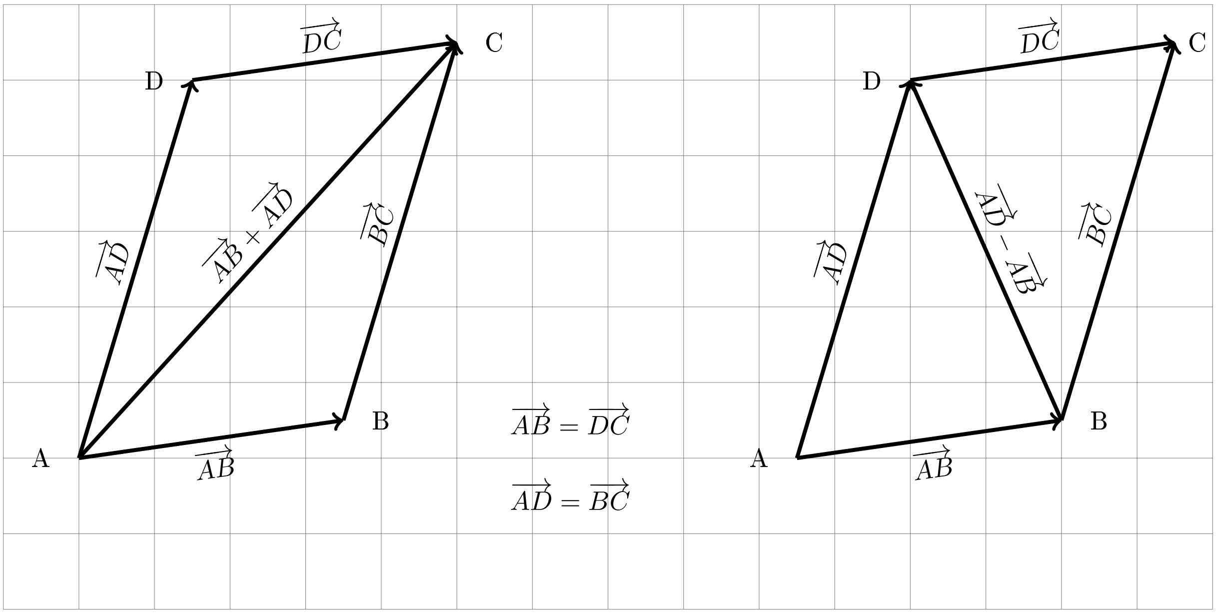
7.6. Uwaga Trzy wektory $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{CD}$ tworzą trójkąt wtedy i tylko wtedy, gdy ich suma jest wektorem zerowym.

7.7. Twierdzenie Dodawanie wektorów jest przemienne.

7.8. Definicja Iloczynem wektora $\vec{w} = [w_x, w_y, w_z]$ przez skalar $\alpha \neq 0$ nazywamy wektor $\alpha\vec{w} = [\alpha w_x, \alpha w_y, \alpha w_z]$. W szczególności, wektor $(-1)\vec{w} = [-w_x, -w_y, -w_z]$ nazywamy wektorem przeciwnym do wektora $\vec{w}$.

7.9. Definicja Iloczynem skalarnym wektorów $\vec{w} = [w_x, w_y, w_z]$ i $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$ jest skalar określony wzorem $\vec{w} \cdot \vec{u} = w_x u_x + w_y u_y + w_z u_z$.

7.10. Definicja Wektory $\vec{w}$ i $\vec{u}$ nazywamy prostopadłymi, jeśli ich iloczyn skalarny jest równy zero $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$.



Rysunek 7.3: Reguła równoległoboku przy dodawaniu i odejmowaniu wektorów

7.11. Definicja Wektory $\vec{w}$ i $\vec{u}$ nazywamy równoległymi, jeśli istnieje taki skalar $\alpha > 0$, że $\vec{w} = \alpha\vec{u}$.

7.12. Definicja Długością wektora $\vec{w} = [w_x, w_y, w_z]$ nazywamy dodatni skalar $|\vec{w}|$, taki, że

$$|\vec{w}| = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}.$$

7.13. Twierdzenie Kwadrat długości wektora $|\vec{w}|^2$ jest równy iloczynowi skalarnemu $\vec{w} \cdot \vec{w}$.

7.14. Definicja Kąt φ między wektorami $\vec{w} = [w_x, w_y, w_z]$ i $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$ jest określony przez relację $\cos\varphi = \frac{\vec{w}\cdot\vec{u}}{(|\vec{w}||\vec{u}|)}$.

7.15. Definicja Wektorem unormowanym dla niezerowego wektora $\vec{w}$ nazywamy wektor $\hat{w} = \frac{1}{|\vec{w}|}\vec{w}$.

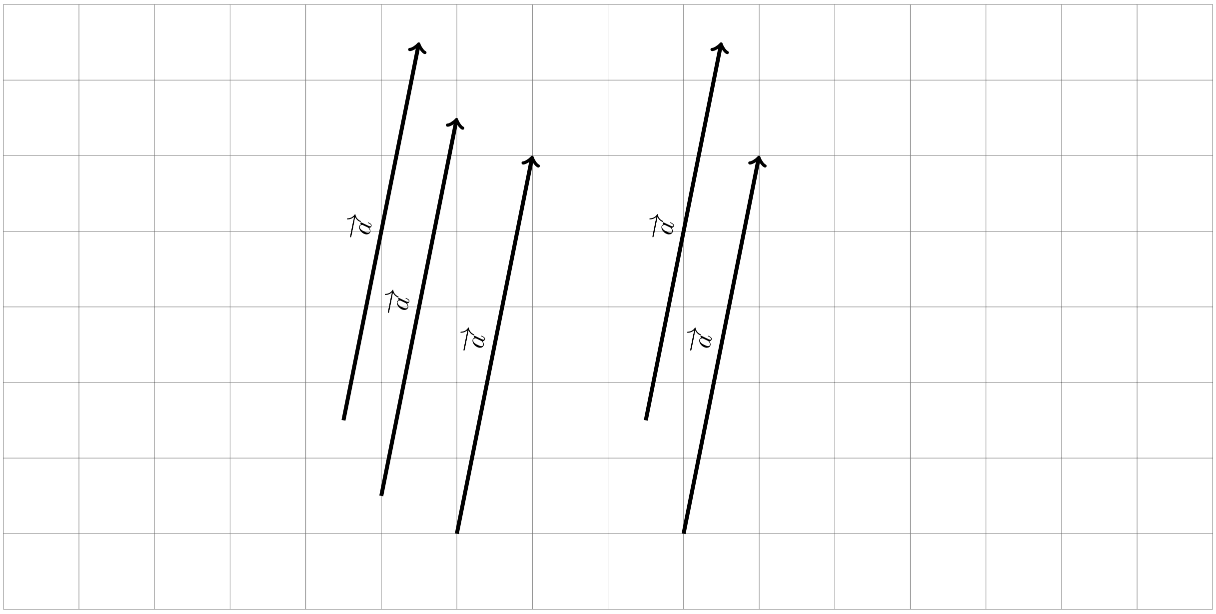
7.16. Twierdzenie Każdy wektor unormowany jest wektorem jednostkowym, czyli ma długość równą 1.

7.17. Twierdzenie W układzie współrzędnych XYZ, gdy osie układu współrzędnych posiadają swoje kierunkowe wektory jednostkowe: $\hat{e}_x = [1, 0, 0]$, $\hat{e}_y = [0, 1, 0]$, $\hat{e}_z = [0, 0, 1]$, wówczas każdy wektor $\vec{w} = [w_x, w_y, w_z]$ jest postaci sumy wektorowej $\vec{w} = w_x\hat{e}_x + w_y\hat{e}_y + w_z\hat{e}_z$.

7.18. Definicja Iloczynem wektorowym wektorów $\vec{w} = [w_x, w_y, w_z]$ i $\vec{u} = [u_x, u_y, u_z]$ nazywamy wektor $\vec{w} \times \vec{u} = [w_y u_z - w_z u_y, w_z u_x - w_x u_z, w_x u_y - w_y u_x]$.

7.19. Twierdzenie Długość wektora iloczynu wektorowego $\vec{w} \times \vec{u}$ jest równa $|\vec{w} \times \vec{u}| = |\vec{w}||\vec{u}|\sin\varphi$, gdzie φ jest kątem między tymi wektorami.

7.20. Twierdzenie Wektor iloczynu wektorowego $\vec{w} \times \vec{u}$ jest prostopadły do każdego z wektorów $\vec{w}$ i



Rysunek 7.4: Wektory równoległe

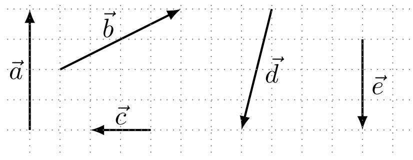
$\vec{u}$ czyli jest prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez te wektory.

7.21. Twierdzenie Każdy wektor $\vec{w}$ prostopadły na płaszczyźnie do prostej l o równaniu ogólnym $ax + by = d$ jest równoległy do wektora $\vec{n} = [a, b]$ (zwanego wektorem normalnym do prostej l) lub do wektora $-\vec{n}$.

7.22. Twierdzenie Każdy wektor $\vec{w}$ prostopadły w przestrzeni do płaszczyzny π o równaniu ogólnym $ax + by + cz = d$ jest równoległy do wektora $\vec{n} = [a, b, c]$ (zwanego wektorem normalnym do płaszczyzny π) lub do wektora $-\vec{n}$.

7.2 Zadania

Dane są następujące wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ i $\vec{e}$:



Skonstruować wektory

7.1$^{\mathsf{K}}$. $\vec{a} + \vec{b}$,

7.2$^{\mathsf{K}}$. $\vec{a} - \vec{b}$,

7.3. $\vec{a} + \vec{e}$,

7.4. $\vec{a} - \vec{e}$,

7.5$^{\mathsf{K}}$. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}$,

7.6. $\vec{a}+\vec{b}-\vec{d}$,

7.7. $\vec{a}-(\vec{c}+\vec{d})$,

7.8. $-\vec{c}+\vec{d}-\vec{e}$.

7.9. Przyjmując, że początek wektora $\vec{a}$ położony jest w punkcie o współrzędnych $(0,0)$ i bok każdej kratki ma długość jeden, wyznaczyć współrzędne wektorów $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ i $\vec{e}$.

Przyjmując, że wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ i $\vec{e}$ mają współrzędne wyznaczone w poprzednim zadaniu, policzyć

7.10. $\vec{a}\cdot\vec{b}$,

7.11. $(\vec{b}+\vec{e})\cdot\vec{d}$,

7.12. $\vec{d}^2$,

7.13. $(\vec{a}+2\vec{e})\cdot\vec{c}$,

7.14. $(\vec{b}+\vec{d})\cdot\vec{c}$,

7.15. $(\vec{a}+\vec{c})\cdot\vec{b}$.

7.16. Dane są dwa punkty $A(3,-1,2)$ i $B(-1,2,1)$. Znaleźć współrzędne i długość wektora $\overrightarrow{AB}$.

7.17$^{\mathsf{K}}$. Znaleźć współrzędne końca B wektora $\overrightarrow{AB}=[-2,5,-3]$, jeśli jego początek znajduje się w punkcie $A(-1,5,-3)$.

7.18$^{\mathsf{K}}$. Dane są wektory: $\vec{a}=[1,0,-2]$, $\vec{b}=[0,2,-3]$, $\vec{c}=[1,-1,2]$. Obliczyć długość wektora $\vec{v}=2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$.

7.19$^{\mathsf{K}}$. Obliczyć iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, jeśli $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=6$ oraz $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{6}$.

7.20$^{\mathsf{K}}$. Obliczyć iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, jeśli $\vec{a}=3\vec{p}-2\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-5\vec{q}$, gdzie $\vec{p}$ i $\vec{q}$ są wektorami jednostkowymi oraz $\vec{p}\perp\vec{q}$.

7.21$^{\mathsf{K}}$. Znaleźć długość wektora $\vec{a}=6\vec{p}-8\vec{q}$, gdzie $\vec{p}$ i $\vec{q}$ są wektorami jednostkowymi oraz $\vec{p}\perp\vec{q}$.

7.22. Znaleźć długość przekątnych równoległoboku zbudowanego na wektorach $\vec{a}=2\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{b}=\vec{p}-2\vec{q}$, gdzie $\vec{p}$ i $\vec{q}$ są wektorami jednostkowymi oraz $\sphericalangle(\vec{p},\vec{q})=\frac{\pi}{3}$.

7.23$^{\mathsf{K}}$. Znaleźć kąt między wektorami $\vec{p}$ i $\vec{q}$, jeśli wektory $\vec{a} = 2\vec{p} + \vec{q}$ i $\vec{b} = -4\vec{p} + 5\vec{q}$ są prostopadłe oraz $|\vec{p}| = |\vec{q}|$.

7.24$^{\mathsf{D}}$. Dany jest kwadrat $ABCD$. Obliczyć kąt między wektorami $\overrightarrow{AK}$ i $\overrightarrow{AL}$, gdzie K i L są środkami boków BC i CD.

7.25$^{\mathsf{K}}$. Dany jest wektor $\vec{a} = [-3, 1, 2]$. Znaleźć wektor jednostkowy $\vec{b}$ równoległy do $\vec{a}$, o zwrocie przeciwnym do $\vec{a}$.

7.26$^{\mathsf{K}}$. Dane są wektory: $\vec{a} = [1, 1]$, $\vec{b} = [-1, 2]$, $\vec{c} = [2, 5]$. Dobrać liczby α i β tak, aby z wektorów $\alpha\vec{a}$, $\beta\vec{b}$ i $\vec{c}$ można było zbudować trójkąt.

7.27. Dane są wektory: $\vec{a} = [2, 1, 2]$, $\vec{b} = [-2, 1, 1]$, $\vec{c} = [1, -2, -1]$. Znaleźć kąt między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{d}$, gdzie $\vec{d} = (\vec{a} \cdot \vec{a})\,\vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{b})\,\vec{c} + (\vec{c} \cdot \vec{c})\,\vec{a}$.

7.28. Wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ o długościach $u = 3$ i $v = 5$ tworzą kąt $\frac{2}{3}\pi$. Obliczyć długość sumy i długość różnicy oraz iloczyn skalarny tych wektorów.

Dane są dwa wektory $\vec{a} = [3, -5, 8]$, $\vec{b} = [-1, 1, 4]$. Znaleźć

7.29$^{\mathsf{K}}$. $|\vec{a} + \vec{b}|$,

7.30$^{\mathsf{K}}$. $|\vec{a} - \vec{b}|$,

7.31$^{\mathsf{K}}$. $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Dane są dwa wektory $\vec{a} = [2, -4, 4]$ i $\vec{b} = [-3, 2, 6]$. Znaleźć

7.32$^{\mathsf{K}}$. cosinus kąta pomiędzy wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$,

7.33$^{\mathsf{K}}$. długość wektora $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

7.34. Obliczyć długość wektora $\vec{x} = -2\vec{a} + 5\vec{b}$ wiedząc, że $\vec{a}$ i $\vec{b}$ tworzą kąt $\frac{\pi}{3}$ oraz $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$.

7.35$^{\mathsf{K}}$. Dla jakiej wartości parametru m wektory $\vec{a} = [2 - m, 3, m]$ i $\vec{b} = [m, m, 1 - m]$ są prostopadłe?

Wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ o długościach $a = 3$ i $b = 5$ tworzą kąt $\frac{\pi}{3}$. Obliczyć

7.36$^{\mathsf{K}}$. $\vec{a} \cdot \vec{b}$,

7.37. $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$,

7.38. $(\vec{a} + \vec{b})^2$,

7.39. $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$,

7.40$^{\mathsf{K}}$. $(\vec{a}-\vec{b})^2$,

7.41$^{\mathsf{K}}$. $|\vec{a}\times\vec{b}|$.

7.42$^{\mathsf{K}}$. Dane są dwa wektory $\vec{a}=4\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$, gdzie $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, są wersorami osi odpowiednio x, y i z w prawoskrętnym układzie współrzędnych kartezjańskich. Znaleźć wektory $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$ oraz wektor $\vec{c}$ taki, że $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=0$.

Dane są wektory $\vec{a}=-\vec{j}+3\vec{k}$ oraz $\vec{b}=2\vec{i}+5\vec{j}-2\vec{k}$, gdzie $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, są wersorami osi odpowiednio x, y i z w prawoskrętnym układzie współrzędnych kartezjańskich:

7.43$^{\mathsf{K}}$. wyznaczyć współrzędne wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$,

7.44$^{\mathsf{K}}$. znaleźć współrzędne wektora $\vec{a}\times\vec{b}$,

7.45$^{\mathsf{K}}$. przedstawić wektor $\vec{a}\times\vec{b}$ jako kombinację liniową wersorów osi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Dany jest wektor $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$

7.46$^{\mathsf{D}}$. wyznaczyć cosinusy kątów między wektorem $\vec{a}$ a osiami układu współrzędnych (tak zwane cosinusy kierunkowe),

7.47$^{\mathsf{D}}$. sprawdzić ile wynosi suma kwadratów cosinusów kierunkowych.

Trzy leżące w jednej płaszczyźnie wektory $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, określone względem prostokątnego układu współrzędnych mają współrzędne x i y odpowiednio $[-2,4]$, $[2,-2]$, $[1,-1]$

7.48. przedstaw te wektory jako kombinacje liniowe wektorów $\vec{i}$, $\vec{j}$, które są wersorami osi x i y,

7.49. znaleźć długości wektorów sił $|\vec{a}|,|\vec{b}|,|\vec{c}|$,

7.50. znaleźć wektor wypadkowy $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, oraz $\vec{a}+\vec{b}$,

7.51. znaleźć długość wektora $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, oraz $\vec{a}-\vec{b}$,

7.52. znaleźć wektor $\vec{d}=s(\vec{a}+\vec{b})$ powstały przez pomnożenie przez skalar $s=2$.

7.53. Dana jest prosta m o równaniu $3x+2y-1=0$. Wyznaczyć wektory jednostkowe
(a) równoległe do prostej m,
(b) prostopadłe do prostej m.

Rozdział 8

Odpowiedzi do zadań

8.1 Ułamki, potęgi, pierwiastki

1.1. Nie

1.2. Tak

1.3. Tak

1.4. Nie

1.5. $2^{2/3}$

1.6. $2^{119/24}$

1.7. $2^{-193/30}$

1.8. $3^{7/8}$

1.9. $\frac{11}{36}$

1.10. $\frac{22}{75}$

1.11. $\frac{161}{24}$

1.12. 1

1.13. -10

1.14. 2

1.15. 8

1.16. 3

1.17. $3^{27/4}$

1.18. $\frac{34}{15}$

1.19. $\begin{cases} \frac{m^2}{n^2} & m < n \\ \frac{n^2}{m^2} & m \geq n \end{cases}$

1.20. 0

1.21. 1

1.22. 1

1.23. $\frac{9ab}{5}$

1.24. 0

1.25. $\frac{x+y}{x-y}$

1.26. $\sqrt{1-x}$

1.27. $x-1$

1.28. $x+1$

1.29. $\frac{1}{x^2y^2}$

1.30. $\frac{a^3-b^3}{a^4+a^3c-ac^3-c^4}$

1.31. 1

1.32. $-\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}$

1.33. $-\frac{2}{\operatorname{sgn}(a-1)}$

1.34. $-(a-1)(a+1)\left(a^2-a+1\right)\left(a^2+a+1\right)$

1.35. $a(a+1)\left(a^2-a+1\right)$

1.36. $-\left(-a^2+\sqrt{2}ab-b^2\right)\left(a^2+\sqrt{2}ab+b^2\right)$

1.37. $(x-2)\left(x^2+2x+4\right)$

1.38. $(x+3)\left(x^2-3x+9\right)$

1.39. $x(3x-1)(5x+2)$

1.40. $4x^2+12x+9$

1.41. $27x^3-27x^2+9x-1$

1.42. $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

1.43. $a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$

1.44. $-3\left(1+\sqrt{2}\right)$

1.45. $\frac{2}{11}\left(4-2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)$

1.46. $\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)$

1.47. $\frac{1}{2}\left(2-\sqrt[3]{4}\right)$

8.2 Funkcja liniowa i kwadratowa

2.1. $y=-x+1$

2.2. $y=2$

2.3. $x=2$

2.4. $y=-3x-11$

2.5. $y=-6x-2, \text{Nie}, y=-6x+28$

2.6. (i) $y=2x$, (ii) $y=-\frac{x}{2}+5$

2.7. $x=-2 \lor x=0$

2.8. $x=-5 \lor x=-1$

2.9. $x \in \emptyset$

2.10. $x=-\frac{1}{2}$

2.11. $x=-1$

2.12. $x=-5$

2.13. $x=-1 \lor x=3$

2.14. $x<1$

2.15. $x \geq 5$

2.16. $x \neq \frac{1}{2}$

2.17. $x \in [-5,-1]$

2.18. $x \in [-2,3]$

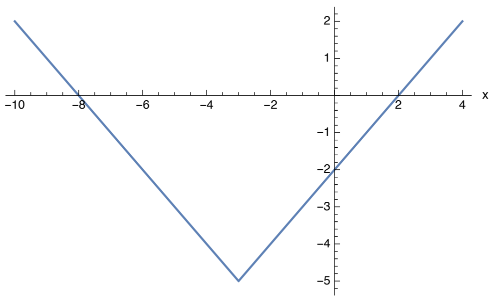
2.19. $x<-4 \lor x>0$

2.20. $x>-\frac{1}{2}$

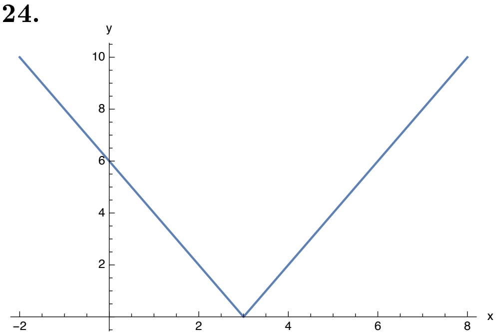
2.21. $x \in (-13,13)$

2.22. $-7 \leq x \leq 3$

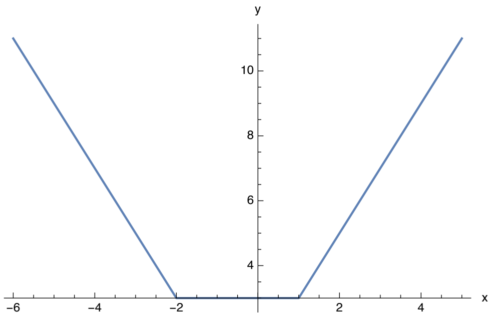
2.23.



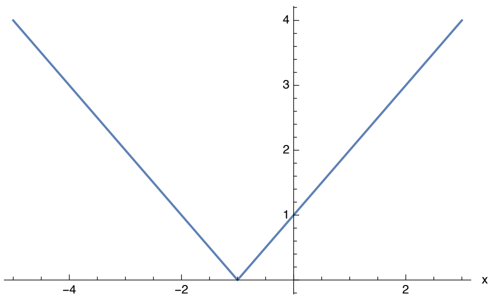
2.24.



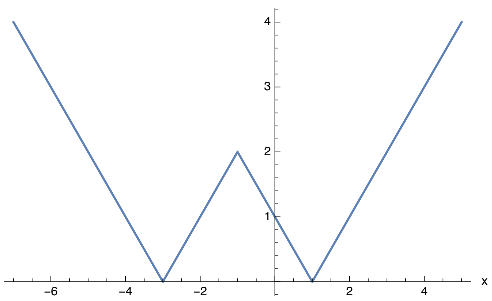
2.25.



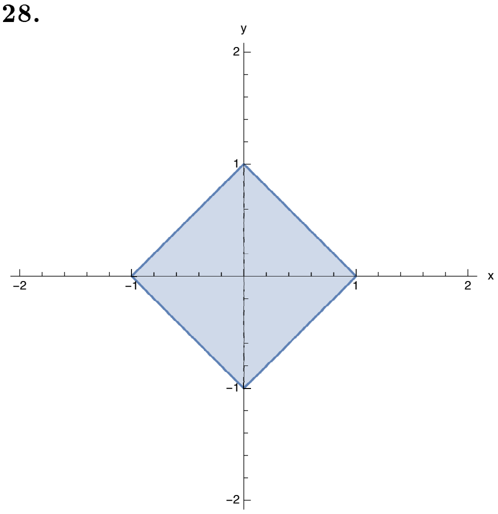
2.26.



2.27.



2.28.



2.29. $y \in \mathbb{R}$

2.30. $y \in [-3, \infty)$

2.31. $y \in [-2, 2]$

2.32. $y \in [-4, 4]$

2.33. $y \in (-\infty, 1]$

2.34. $y \in [0, \infty)$

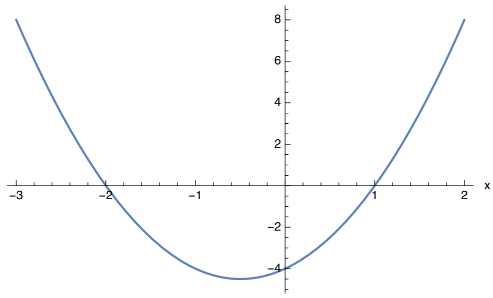
2.35. $y \in [-5, \infty)$

2.36. $x = -1$, $y = -1$

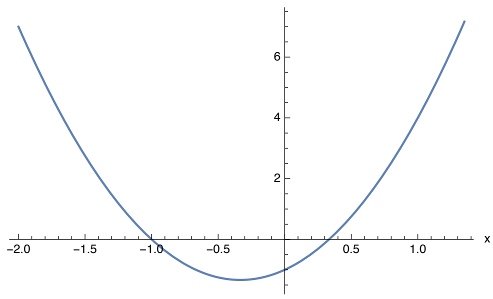
2.37. $x = \frac{11}{7}, y = \frac{19}{28}$

2.38. Układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań, gdy $(a, b) = (\pm 4, \pm 2)$. Układ równań ma jedno rozwiązanie, gdy $a \neq 4 \vee a \neq -4$. Układ równań nie ma rozwiązań, gdy $(a = 4 \wedge b \neq 2) \vee (a = -4 \wedge b \neq -2)$.

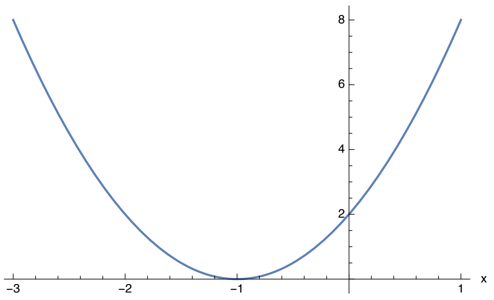
2.39. $y = 2(x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{2}, y = 2(x - 1)(x + 2)$



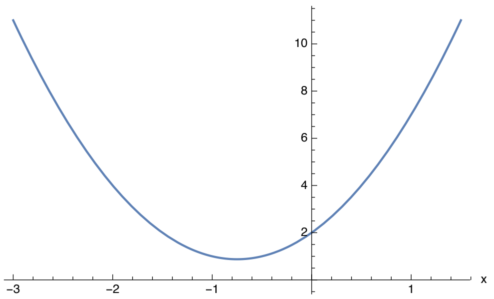
2.40. $y = 3(x + \frac{1}{3})^2 - \frac{4}{3}, y = (3x - 1)(x + 1)$



2.41. $y = 2(x + 1)^2$, $y = 2(x + 1)^2$



2.42. $y = 2(x + \frac{3}{4})^2 + \frac{7}{8}$



2.43. $x = -1 - \sqrt{6} \vee x = \sqrt{6} - 1$

2.44. $x \in \emptyset$

2.45. $x = -2 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 2$

2.46. $x < 1 \vee x > 2$

2.47. $-2 \leq x \leq 1$

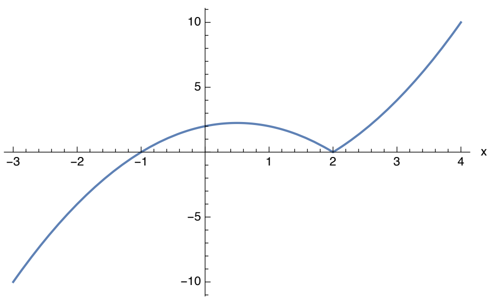
2.48. $b = 5,\ c = 3$

2.49. $m \leq 2\left(-2 - \sqrt{3}\right) \vee 2\left(\sqrt{3} - 2\right) \leq m < -\frac{1}{2}$

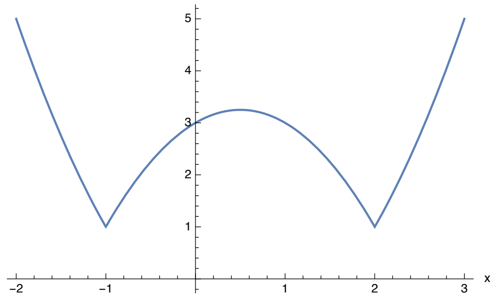
2.50. $m \in [-4, 4]$

2.51. $m = \frac{3}{2} \vee m = 3$

2.52. Maksimum lokalne w $x = \frac{1}{2}$, minimum lokalne w $x = 2$



2.53. Maksimum lokalne w $x = \frac{1}{2}$, minima lokalne w $x = -1$ i $x = 2$



2.54. $(p = 0 \wedge q = 0) \vee (p = 1 \wedge q = -2)$

2.55. $-1 \leq m \leq 3$

2.56. 47

2.57. 357

2.58.

2.59. $k < -6 \vee k > 6$

2.60. $y = 2x^2 - 16x + 24$

2.61. $a < -3 \vee a > 1$

2.62. $a = -4$

2.63. $\left(x - \frac{1}{10 - 6\sqrt{2}}\right)^2 = 0$

2.64. $x \in \emptyset$

2.65. $x = \frac{20}{9} \vee x = 4$

2.66. $x = -6$

2.67. $x = 3$

2.68. $4 \leq x < 10$

2.69. $1 \leq x < \frac{1}{2}(4 + \sqrt{2})$

2.70. $\frac{1}{10}(9 + \sqrt{41}) < x \leq 2$

2.71. $x = 15$

8.3 Wielomiany i funkcja wymierna

3.1. $x^3 - 3x^2 - 4$, reszta: -1.

3.2. $x^2 + 2x - 15$

3.3. $x^3 - 2x^2 - 4x - 13$, reszta: -23.

3.4. $x^2 - 3x + 2$, reszta: $1 - 3x$.

3.5. $x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1$, reszta: -3.

3.6. $(x+3)(2x-1)$

3.7. $(x-2)\left(x^2+1\right)$

3.8. $(x-1)^2(x+2)$

3.9. $(x+3)\left(x^2+2\right)$

3.10. $(x-1)(x+1)^2(x+2)$

3.11. $(x-1)(x+1)\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)$

3.12. $(x-1)(x+1)(x^2+1)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)$

3.13. $(x-2)(x-1)(x+1)(x+2)$

3.14. $(x-1)^2(x+2)^2$

3.15. $(x+1)(x+2)(x+3)$

3.16. $(x+2)(x+3)(x+4)$

3.17. $(x-2)(x+2)(x+4)$

3.18. $(x-1)(x+3)(2x+1)$

3.19. $(x-2)(x-1)^2(x+3)(2x+1)$

3.20. $(x-1)(x+3)^2$

3.21. Tak

3.22. Tak

3.23. Nie

3.24. Tak

3.25. 1

3.26. 94

3.27. $x = 2$

3.28. $x = \frac{1}{3} \vee x = 3$

3.29. $-1 < x < 3 \vee x > 3$

3.30. $x \leq -2 \vee x \geq 1$

3.31. $x < 2 \vee 3 < x < 4$

3.32. $3 < x < 4 \vee x > 5$

3.33. $-3 < x < 1 \vee x > 2$

3.34. $-2 < x < 1$

3.35. $x < -1 \vee -1 < x < 1 \vee x > 2$

3.36. $-3 \leq x \leq -2 \vee x \geq -1$

3.37. $0 < x < 2$

3.38. $x = -1 \vee x = 1$

3.39. $x = -3 \vee x = -1 \vee x = 1 \vee x = 3$

3.40. $x = \frac{1}{2}(-3-\sqrt{5}) \vee x = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) \vee x = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-3) \vee x = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$

3.41. $-2 \leq x \leq -\frac{1}{2} \vee x > 0$

3.42. $-4 \leq x < -2 \vee 1 < x \leq \frac{3}{2}$

3.43. $x < -1 \vee 2 < x \leq 3$

3.44. $-3 < x < -2 \vee -2 < x < -\frac{7}{5}$

3.45. $x < 0$

3.46. $-1 < x \leq 0 \vee x > 1$

3.47. $-1 < x < 0 \vee 0 < x < 1$

3.48. $-3 < x < 1 \vee x > 2$

3.49. $\frac{2}{3} < x < 1 \vee 2 < x < 3$

3.50. $x < -5 \vee -1 < x < 1 \vee x > 1$

3.51. $x \leq -3 \vee x \geq 2$

3.52. $x < -3 \vee -1 < x < 1 \vee x > 2$

3.53. $a = 31,\ b = -12,\ x - 3$

3.54. $m = 12,\ x = -\frac{3}{2},\ x = \frac{2}{3}$

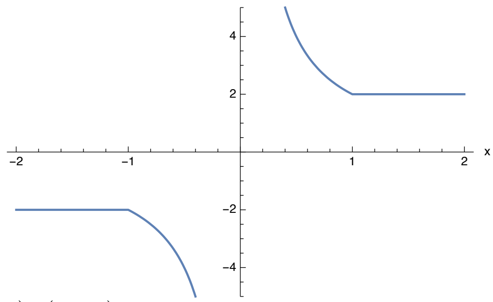
3.55. $m = -5,\ n = 30,\ x = -\frac{5}{2}$

3.56. $m = -3$

3.57. $a = 3,\ b = -7$

3.58. 2

3.59.



$(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$, brak miejsc zerowych

8.4 Trygonometria

4.1. $\pi/6$

4.2. $\pi/4$

4.3. $\pi/3$

4.4. $\pi/2$

4.5. π

4.6. $3\pi/2$

4.7. $5\pi/4$

4.8. $3\pi/4$

4.9. $4\pi/3$

4.10. $7\pi/4$

4.11. $2\pi/3$

4.12. $7\pi/4$

4.13. $5\pi/6$

4.14. $5\pi/3$

4.15. $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{2\pi}{3} = -1/2$, $\text{tg}\,\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$

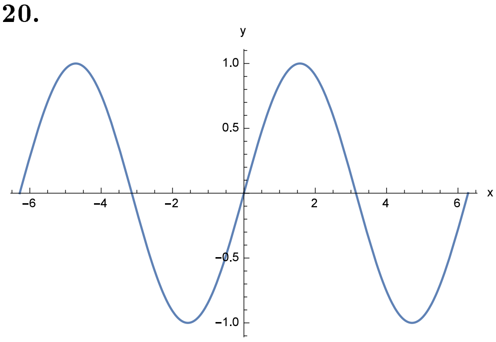
4.16. $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{3\pi}{4} = -\sqrt{2}/2$, $\text{tg}\,\frac{3\pi}{4} = -1$

4.17. $\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{5\pi}{4} = -\sqrt{2}/2$, $\text{tg}\,\frac{5\pi}{4} = 1$

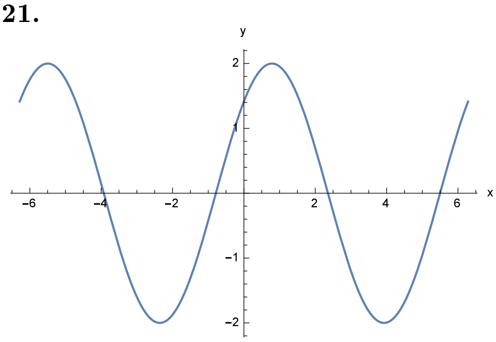
4.18. $\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{4\pi}{3} = -1/2$, $\text{tg}\,\frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}$

4.19. $\sin\frac{7\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{7\pi}{4} = \sqrt{2}/2$, $\text{tg}\,\frac{7\pi}{4} = -1$

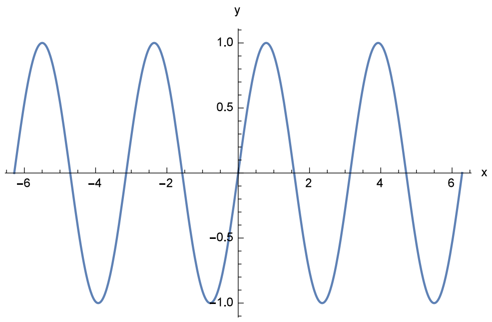
4.20.



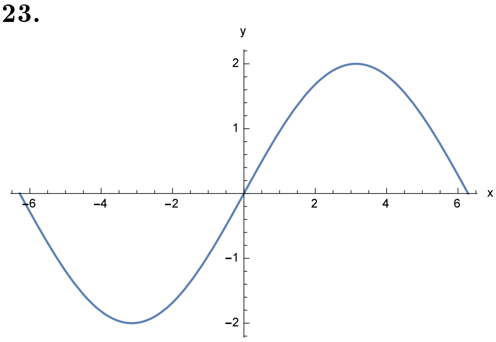
4.21.



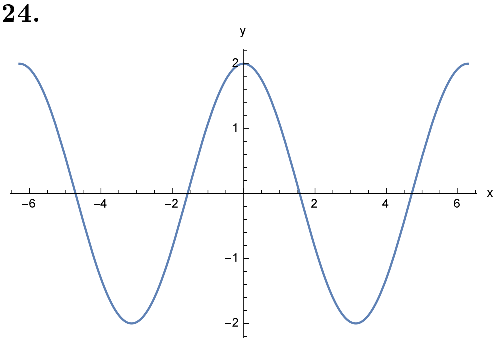
4.22.



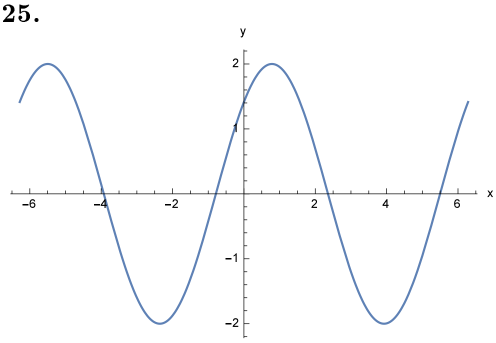
4.23.



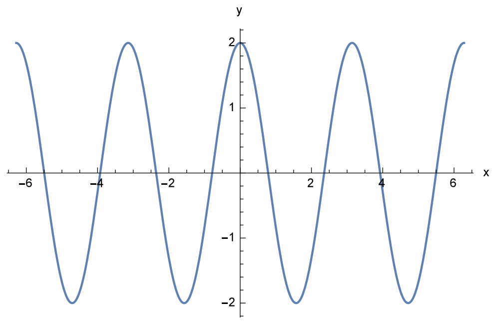
4.24.



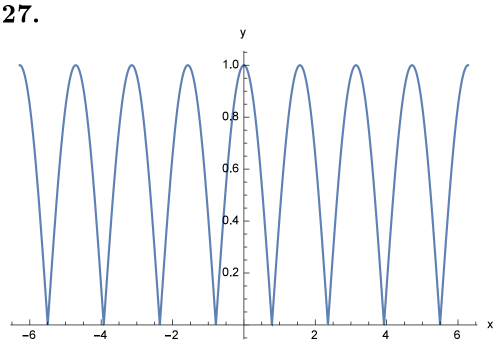
4.25.



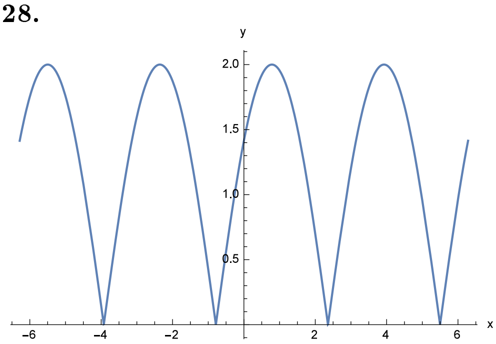
4.26.



4.27.



4.28.



4.29. $-3/4$

4.30. $1+\sin x+\cos x = 2\cos\frac{x}{2}(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})$

4.31. Tożsamość prawdziwa

4.32. Tożsamość prawdziwa

4.33. Tożsamość prawdziwa

4.34. Tożsamość prawdziwa

4.35. $\operatorname{tg} x = -\frac{12}{5}$ lub $\operatorname{tg} x = 0$

4.36. $x = -\frac{\pi}{5} + 4k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}$

4.37. $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \cup x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \wedge k \in \mathbb{Z}$

4.38. $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \vee x=2k\pi \vee x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \vee x=\pi+2k\pi \wedge k\in\mathbb{Z}$

4.39. $x=2k\pi \vee x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi \vee x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \vee x=\pi+2k\pi \wedge k\in\mathbb{Z}$

4.40. $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \vee x=\frac{11\pi}{6}+2k\pi \wedge k\in\mathbb{Z}$

4.41. $x=2k\pi \vee x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi \vee x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \vee x=\pi+2k\pi \wedge k\in\mathbb{Z}$

4.42. $\operatorname{ctg} x = \mp\sqrt{\frac{1}{3}(11-4\sqrt{7})} \vee \operatorname{ctg} x = \mp\sqrt{\frac{1}{3}(11+4\sqrt{7})}$, $x=\mp\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{\frac{1}{3}(11-4\sqrt{7})}+k\pi \vee x=\mp\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{\frac{1}{3}(11+4\sqrt{7})}+k\pi \wedge k\in\mathbb{Z}$

4.43. $x=\mp\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee x=\mp\frac{2\pi}{3}+2k\pi \vee x=\mp\frac{5\pi}{6}+2k\pi \vee x=\mp\frac{\pi}{6}+2k\pi \wedge k\in\mathbb{Z}$

4.44. $x=2k\pi \vee x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \wedge k\in\mathbb{Z}$

4.45. $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi \wedge k\in\mathbb{Z}$

4.46. $x=2\operatorname{arc\,tg}(1\mp\sqrt{2})+2k\pi \vee x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee x=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi \wedge k\in\mathbb{Z}$

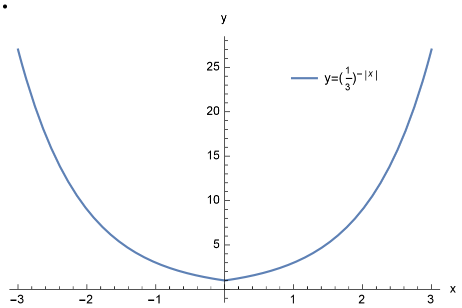
4.47. $x=\mp\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee x=\mp\frac{2\pi}{3}+2k\pi \wedge k\in\mathbb{Z}$

4.48. $\frac{\pi}{6}+2k\pi \le x < \frac{\pi}{2}+2k\pi \vee \frac{\pi}{2}+2k\pi < x \le \frac{5\pi}{6}+2k\pi \wedge k\in\mathbb{Z}$

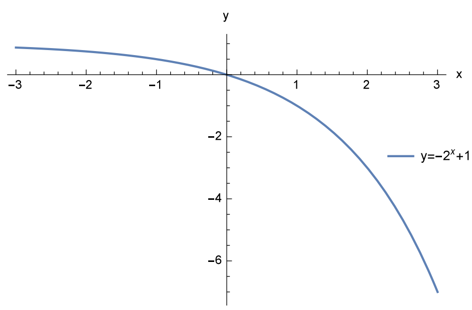
4.49. $-\frac{5\pi}{6}+2k\pi \le x \le -\frac{2\pi}{3}+2k\pi \vee -\frac{\pi}{3}+2k\pi \le x \le -\frac{\pi}{6}+2k\pi \vee \frac{\pi}{6}+2k\pi \le x \le \frac{\pi}{3}+2k\pi \vee \frac{2\pi}{3}+2k\pi \le x \le \frac{5\pi}{6}+2k\pi \wedge k\in\mathbb{Z}$

8.5 Funkcja wykładnicza

5.1.



5.2.



5.3.

4.50. $-\frac{\pi}{2}+2k\pi < x < -\frac{\pi}{4}+2k\pi \vee \frac{5\pi}{4}+2k\pi < x < \frac{3\pi}{2}+2k\pi \vee \frac{\pi}{4}+2k\pi < x < \frac{\pi}{2}+2k\pi \vee \frac{\pi}{2}+2k\pi < x < \frac{3\pi}{4}+2k\pi \wedge k\in\mathbb{Z}$

4.51. $-\frac{\pi}{2}+2k\pi < x < \frac{\pi}{2}+2k\pi \wedge k\in\mathbb{Z}$

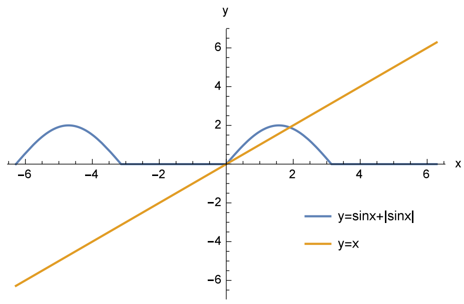
4.52. $-\pi+2k\pi < x < -\frac{\pi}{2}+2k\pi \vee \frac{\pi}{2}+2k\pi < x < \pi+2k\pi \wedge k\in\mathbb{Z}$

4.53. $\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{4} \wedge k\in\mathbb{Z}$

4.54. $-\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}k\pi < x < -\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}k\pi \vee -\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}k\pi < x < \frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}k\pi \vee \frac{2}{3}k\pi < x < \frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}k\pi \wedge k\in\mathbb{Z}$

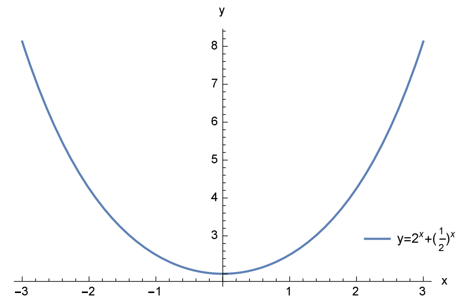
4.55. $-\frac{2\pi}{3}+2k\pi < x < -\frac{\pi}{3}+2k\pi \vee \frac{\pi}{3}+2k\pi < x < \frac{2\pi}{3}+2k\pi \wedge k\in\mathbb{Z}$

4.56. Równanie $x=\sin x+|\sin x|$ posiada 2 rozwiązania

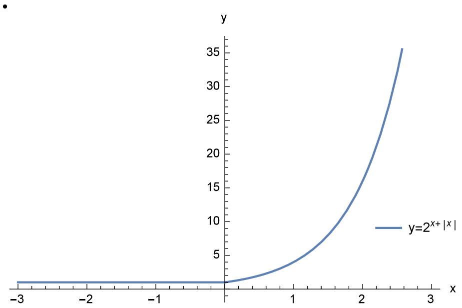


4.57. $m\in(0,\frac{\pi}{3})\cup(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})\cup(\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3})\cup(\frac{5\pi}{3},2\pi)$

4.58. $\frac{-\cos 2x}{\sin x}$



5.4.



5.5. $x = -\frac{1}{5}$

5.6. $x = \pm 2$

5.7. $x = 1$

5.8. $x = \pm 1$

5.9. $x = 1 \vee x = 4$

5.10. $x = 10$

5.11. $x = 1$

5.12. $x = -1$

5.13. $x = 6$

5.14. $x = -2 \vee x = 4$

5.15. $x = \frac{15+3\sqrt{21}}{2} \approx 14.374$

5.16. $x = 0.065 \vee x = 137.932$

5.17. $a \neq 0, x = -3 \vee x = 7$

5.18. $x = 2 \vee x = \frac{2\log(2+\sqrt{3})}{\log(2-\sqrt{3})}$

5.19. $x = \frac{1}{2}$

5.20. $x = 4$

5.21. $x = \frac{\log 2}{\log 2 - \log 5} \approx -0.756 \vee x = \frac{\log 3}{\log 2 - \log 5} \approx 1.199$

5.22. $x = \frac{\pi}{6} + \pi k \vee x = \frac{\pi}{3} + \pi k \vee x = \frac{2\pi}{3} + \pi k \vee x = \frac{5\pi}{6} + \pi k \wedge k \in \mathbb{Z}$

5.23. $x = 2$

5.24. $x = 0 \vee x = \frac{\log 5}{\log 7} \approx 0.827$

5.25. $x = 2$

5.26. $x = 0$

5.27. $x < -\frac{1}{2}$

5.28. $x > 1$

5.29. $x < -\frac{1}{4}$

5.30. $x \geq 1$

5.31. $0 < x < \frac{\log(3)}{-2\log(2)+\log(3)-\log(7)+\log(37)}$, $\frac{\log(3)}{-2\log(2)+\log(3)-\log(7)+\log(37)} \approx 0.798$

5.32. $0 < x < 1 \vee 2 < x < 3$

5.33. $x > \frac{2\log(2)+\log(3)}{\log(3)}$, $\frac{2\log(2)+\log(3)}{\log(3)} \approx 2.262$

5.34. $x \leq 2$

5.35. $2-\sqrt{6} < x < 2-\sqrt{2} \vee 2+\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{6}$

5.36. $x < -\frac{1}{2} \vee x > 0$

5.37. $0 < x < \frac{2\log(2)-\log(3)}{\log(2)} \vee x > 1$, $\frac{2\log(2)-\log(3)}{\log(2)} \approx 0.415$

5.38. $x \leqslant -1$

5.39. $0 < x \leqslant 18$

5.40. $x > 3$

5.41. $x \leqslant 0 \vee x > 2$

5.42. $x = 7, y = 5$

8.6 Funkcja logarytmiczna

6.1. $\frac{1}{2}$

6.2. 3

6.3. 0

6.4. $-\frac{3}{2}$

6.5. $-\frac{9}{2}$

6.6. 2

6.7. $\frac{3}{4}$

6.8. $-\frac{3}{2}$

6.9. $]\ \frac{4}{3}$

6.10. $\dfrac{45}{2}$

6.11. 1

6.12. $\sqrt{5}$

6.13. 2

6.14. $\dfrac{3}{2}$

6.15. -2

6.16. -2

6.17. 0

6.18. $\frac{3}{2}$

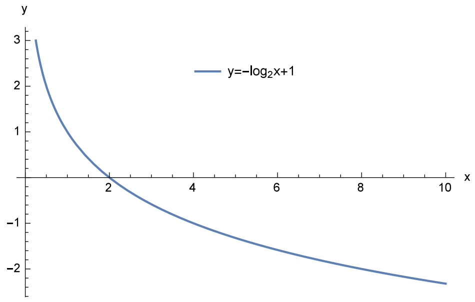
6.19. $-\frac{2}{3}$

6.20. $D = (-3, 2)$

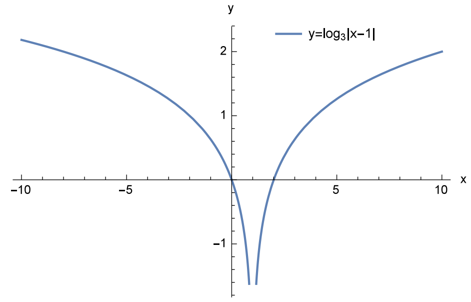
6.21. $x < \frac{5-\sqrt{3}}{2} \vee x > \frac{5+\sqrt{3}}{2}$

6.22. $\frac{6}{5} \leq x < \frac{5}{3}$

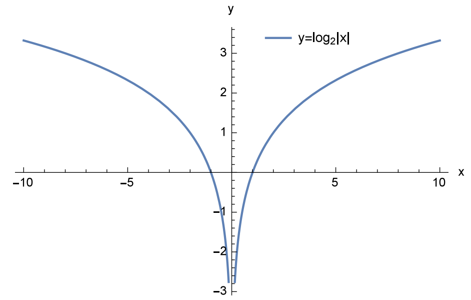
6.23.



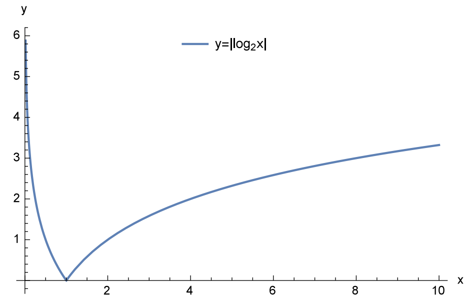
6.24.



6.25.



6.26.



6.27. $x = 2$

6.28. $x = 5$

6.29. $x = 8$

6.30. $x_1 = 3, x_2 = 3^{\frac{-1-\sqrt{13}}{2}}, x_3 = 3^{\frac{-1+\sqrt{13}}{2}}$

6.31. $x_1 = 3, x_2 = 7$

6.32. $x = \frac{5+\sqrt{3}}{2}$

6.33. $\frac{17}{15}$

6.34. $x_1 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, x_2 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ gdzie $k \in C$

6.35. $x = 3$

6.36. $x = \frac{13+\sqrt{97}}{4}$

6.37. $x_1 = e, x_2 = e^{-\frac{1}{3}}$

6.38. $x = 0, x = 3$

6.39. $3 < x \leq 4$

6.40. $-3 < x < -\sqrt{6} \vee \sqrt{6} < x < 3$

6.41. $10^{\frac{1}{3}} < x < 10$

6.42. $0 < x < 1$

6.43. $0 < x < 27$

6.44. $\frac{-9+\sqrt{61}}{2} < x < 2$

6.45. $x \geqslant \frac{1}{2}$

6.46. $1 < x < 4$

6.47. $1 < x < 2 \vee x > 101$

6.48. $x \leqslant -18 \vee x \geqslant 2$

6.49. $x < 2 \vee x > 3$

6.50. $0 < x < 3$

6.51. $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1}{2} \vee 1 < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

6.52. $x > 2$

6.53. $x_1 = 1000, y_1 = \frac{1}{10} \vee x_2 = \frac{1}{10}, y_2 = 1000$

6.54. Nierówność prawdziwa

8.7 Wektory

7.1. $[4, 6]$

7.2. $[-4, 2]$

7.3.] $[0, 2]$

7.4.] $[0, 7]$

7.5. $[1, -1]$

7.6. $[5, 10]$

7.7. $[3, 8]$

7.8. $[1, -1]$

7.9. $\overrightarrow{a} = [0, 4]$, $\overrightarrow{b} = [4, 2]$, $\overrightarrow{c} = [-2, 0]$, $\overrightarrow{d} = [-1, -4], \overrightarrow{e} = [0, 3]$

7.10. 8

7.11. 0

7.12. 17 (uwaga: $\overrightarrow{a}^2 = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a}$ rozumiemy jako kwadrat długości wektora $\overrightarrow{a}$)

7.13. 0

7.14. -6

7.15. 0

7.16. $\overrightarrow{AB} = [-4, 3, -1], |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{26}$

7.17. $B(-3, 10, -6)$

7.18. $|\overrightarrow{v}| = 5\sqrt{3}$

7.19. $15\sqrt{3}$

7.20. 13 (wskazówka: $\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{p} = 1, \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} = 0$)

7.21. 10

7.22. $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| = \sqrt{7}, |\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}| = \sqrt{13}$

7.23. $\frac{\pi}{3}$

7.24. $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

7.25. $\overrightarrow{b} = -\frac{1}{\sqrt{14}}, \overrightarrow{a} = [\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, -\frac{2}{\sqrt{14}}]$

7.26. $\alpha = -3, \beta = -1$

7.27. $\frac{11}{3\sqrt{26}}$

7.28. $\sqrt{19}, 7$

7.29. $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| = 2\sqrt{41}$

7.30. $|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}| = 2\sqrt{17}$

7.31. 24

7.32. $\frac{5}{21}$

7.33.] $8\sqrt{26}$

7.34. $4\sqrt{7}$

7.35. $m_1 = 0 \vee m_2 = 3$

7.36. $\frac{15}{2}$

7.37. $\frac{33}{2}$

7.38. 49

7.39. 43

7.40. 19

7.41. $\frac{15\sqrt{3}}{2}$

7.42. $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = [3, -2, 5], \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = [5, -4, -3]$, $\overrightarrow{c} = [-5, 4, 3]$

7.43. $\overrightarrow{a} = [0, -1, 3]$, $\overrightarrow{b} = [2, 5, -2]$

7.44. $[-13, 6, 2]$

7.45. $-13\overrightarrow{i} + 6\overrightarrow{j} + 2\overrightarrow{k}$

7.46. $\cos(\alpha_x) = \frac{\sqrt{6}}{6}$, $\cos(\alpha_y) = -\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos(\alpha_z) = \frac{\sqrt{6}}{6}$

7.47. 1

7.48. $\overrightarrow{a} = [-2, 4] = -2\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{b} = [2, -2] = 2\overrightarrow{i} + (-2)\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{c} = [1, -1] = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$

7.49. $2\sqrt{5}, 2\sqrt{2}, \sqrt{2}$

7.50. $[1, 1], [0, 2]$

7.51. $\sqrt{2}, 2$

7.52. $[0, 4]$

7.53. $[\frac{2}{\sqrt{13}}, -3\sqrt{13}], [3\sqrt{13}, \frac{2}{\sqrt{13}}]$

Rozdział 9

Przykładowe testy zaliczeniowe

Na następnych stronach zamieszczamy przkładowe testy wstępne/zaliczeniowe oraz odpowiedzi do nich. Przy ocenie testów stosowana jest następująca punktacja:

Punkty	Ocena
0 – 63	2
64 – 80	3
81 – 89	3+
90 – 100	4
101 – 109	4+
110 – 130	5

Zwolnienie z przedmiotu – uzyskanie na teście wstępnym co najmniej 4.

Zaliczenie testu po zakończeniu przedmiotu od 3.

....	....	Liczba punktów	
Nazwisko i imię	Data		

Czas trwania testu: 60 min. **Liczba zadań: 10**

Każde zadanie składa się z trzech podpunktów. Odpowiedzi należy udzielić na każdy z podpunktów zadania. Odpowiedzi podajemy w tabelce wpisując w odpowiedniej rubryce jedno ze słów TAK lub NIE. Za każdą poprawną odpowiedź cząstkową otrzymuje się 1 punkt. Za niepoprawną odpowiedź cząstkową lub jej brak otrzymuje się 0 punktów. Za trzy poprawne odpowiedzi cząstkowe do jednego zadania otrzymuje się dodatkowo 10 punktów (zatem za odpowiedź do każdego z zadań można otrzymać 0, 1, 2 lub 13 punktów). Wśród odpowiedzi cząstkowych każda z odpowiedzi TAK, NIE może wystąpić 0, 1, 2 lub 3 razy.

---

1. Liczba $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{16}$ jest równa:

a) $\frac{3}{4}$,

b) $-\log_3 \sqrt[3]{81}$,

c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-2}$.

a)	
b)	
c)	

---

2. Niech $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$. Wtedy

a) $f(x) = 1$ dla $x > 0$.

b) $f(x) = -1$ dla $x < 0$.

c) $f(0) = 1$.

a)	
b)	
c)	

---

3. Dla równania $x^2 - 5x + 5 = 0$ prawdziwe są następujące stwierdzenia:

a) Suma pierwiastków równania wynosi -5.

b) Iloczyn pierwiastków równania wynosi 5.

c) Kwadrat różnicy pierwiastków równania wynosi 5.

a)	
b)	
c)	

---

4. Dany jest wielomian $W(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$. Prawdziwe są stwierdzenia:

a) Pierwiastkami wielomianu $W(x)$ są liczby $-2, 1, 2$.

b) Wynikiem dzielenia wielomianu $W(x)$ przez wielomian $x^2 + ax + b$ jest $x+2$ z resztą $x + 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$, $b = -2$.

c) $W(x) > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-2, -1) \cup (1, +\infty)$.

a)	
b)	
c)	

---

5. Niech $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x - 1}$. Wtedy

a) $f(x) \geq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-\infty, -1\rangle \cup (1, +\infty)$.

b) Pierwiastkami równania $f(x) = 0$ są liczby 1 i -1 .

c) $f(2^{-2}) > 0$.

a)	
b)	
c)	

VERTE

6. Niech $\cos\frac{1}{8}\pi = x$. Prawdziwe są następujące zależności:

a) $\sin\frac{5}{8}\pi = x$.

b) $\sin\frac{3}{8}\pi = x$.

c) $\sin\frac{15}{8}\pi = x$.

a)	
b)	
c)	

---

7. Dane jest rówanie $\operatorname{tg}(2x) = 0$. Równanie to:

a) Posiada taki sam zbiór rozwiązań jak równanie $\sin(2x) = 0$.

b) W przedziale $(-\pi, \pi)$ posiada dokładnie 3 pierwiastki.

c) W przedziale $(-\frac{3}{2}\pi, -\pi)$ nie posiada pierwiastków.

a)	
b)	
c)	

---

8. Dana jest funkcja $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Prawdziwe są następujące stwierdzenia:

a) $x = 0$ jest jedynym pierwiastkiem równania $f(2x) - 3f(x) + 2 = 0$.

b) Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = 2^x$.

c) $f(x) < \sqrt{2}$ dla $x < -\frac{1}{2}$.

a)	
b)	
c)	

---

9. Dana jest funkcja $f(x) = \log_x x$. Prawdziwe są następujące stwierdzenia:

a) Dziedziną funkcji f jest zbiór $(0, +\infty)$.

b) Funkcja f jest stała w swojej dziedzinie.

c) Dla każdego x należącego do dziedziny funkcji f prawdziwy jest wzór $f(x) + f(\frac{1}{x}) = 1$.

a)	
b)	
c)	

---

10. Dany jest wektor $\vec{a} = (1, 2, -1)$ oraz $\vec{b}$ prostopadły do $\vec{a}$ i o długości $|\vec{b}| = 3$.

a) Wektor $2\vec{a}$ jest prostopadły do wektora $-3\vec{b}$.

b) $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 3$.

c) $|\vec{a} \times \vec{b}| = 3\sqrt{6}$.

a)	
b)	
c)	

.... Nazwisko i imię

.... Data

Liczba punktów

Czas trwania testu: 60 min. **Liczba zadań: 10**

Każde zadanie składa się z trzech podpunktów. Odpowiedzi należy udzielić na każdy z podpunktów zadania. Odpowiedzi podajemy w tabelce wpisując w odpowiedniej rubryce jedno ze słów TAK lub NIE. Za każdą poprawną odpowiedź cząstkową otrzymuje się 1 punkt. Za niepoprawną odpowiedź cząstkową lub jej brak otrzymuje się 0 punktów. Za trzy poprawne odpowiedzi cząstkowe do jednego zadania otrzymuje się dodatkowo 10 punktów (zatem za odpowiedź do każdego z zadań można otrzymać 0, 1, 2 lub 13 punktów). Wśród odpowiedzi cząstkowych każda z odpowiedzi TAK, NIE może wystąpić 0, 1, 2 lub 3 razy.

1. Niech $a = 2^{\log_4 8}$, $b = \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{8}}(\frac{1}{\sqrt{2}})}$. Wówczas:

a) $a^2 > b$,

b) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$,

c) $a^b = 2^8$.

a)	
b)	
c)	

2. Niech $f(x) = |x+1| + |x-2|$. Wówczas

a) Równanie $f(x) = 3$ posiada nieskończenie wiele rozwiązań.

b) Zbiorem wartości funkcji f jest $\langle 0, \infty)$.

c) Istnieje takie a, że równanie $f(x) = a$ posiada dokładnie jedno rozwiązanie.

a)	
b)	
c)	

3. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 - 2(a+1)x + a^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Wtedy:

a) Równanie $f(x) = 0$ nie posiada rozwiązań gdy $a < -1$.

b) Równanie $f(x) = 0$ posiada dwa różne pierwiastki wtedy i tylko wtedy, gdy $a > 1$.

c) Istnieje taka wartość a, że równanie $f(x) = 2a^2$ posiada pierwiastek podwójny.

a)	
b)	
c)	

4. Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - 3x^2 + 4$. Prawdziwe są stwierdzenia:

a) 2 jest pierwiastkiem dwukrotnym wielomianu $W(x)$.

b) Równanie $\frac{W(x)}{x-2} = 0$ ma dwa pierwiastki.

c) $W(x) < 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x < -1$.

a)	
b)	
c)	

5. Dana jest funkcja $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x+1}$. Wówczas

a) Rozwiązaniem nierówności $f(x) < 0$ jest $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

b) Dla wszystkich $x \neq -1$ zachodzi $f(x) = x^2 + 1$.

c) Nierówność $f(x) \geq 0$ ma taki sam zbiór rozwiązań jak nierówność $\frac{1}{f(x)} \geq 0$.

a)	
b)	
c)	

6. Niech $\mathrm{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Prawdziwe są następujące zależności:

a) $\mathrm{tg} x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

b) $\mathrm{tg}^2 x = 1 - 2\sqrt{6}$.

c) $\sin^2(2x) = \frac{1}{3}$.

a)	
b)	
c)	

7. Dana jest funkcja $f(x) = \mathrm{tg}\,(2x)$. Wtedy

a) Jedynym rozwiązaniem równania $f(x) = f^2(x) - f(x) + 1$ w przedziale $(0, \pi)$ jest liczba $\frac{\pi}{8}$.

b) Dziedziną funkcji f jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych różnych od $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

c) $f(x)f(\frac{\pi}{4} - x) = 1$ dla wszystkich x dla których to wyrażenie jest określone.

a)	
b)	
c)	

8. Dana jest funkcja $f(x) = 2^x$. Prawdziwe są następujące stwierdzenia:

a) Równanie $f(2x) - 2f(x) = 8$ ma dwa różne rozwiązania.

b) Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $f(2x) = f(x)\, f(x)$.

c) Dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $f(x)\, f(-x) = 2$.

a)	
b)	
c)	

9. Dana jest funkcja $f(x) = \log_2(4 - x)$. Prawdziwe są następujące stwierdzenia:

a) Dziedziną funkcji f jest zbiór $(-\infty, 4)$.

b) Równanie $f(x) = f(-x)$ nie posiada rozwiązań.

c) Funkcja $g(x) = f(x + 4)$ jest rosnąca.

a)	
b)	
c)	

10. Dany jest wektor $\vec{a} = (1, \sqrt{2}, -1)$ oraz $\vec{b}$ taki, że $|\vec{b}| = 4$ i kąt między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$ wynosi $\frac{\pi}{4}$. Wtedy

a) Długość wektora $\vec{a} - 2\vec{b}$ wynosi $2\sqrt{17 - 4\sqrt{2}}$.

b) $2|\vec{a}| > |\vec{b}|$.

c) Wektor $2\vec{a} + \vec{b}$ jest prostopadły do wektora $2\vec{a} - \vec{b}$.

a)	
b)	
c)	

9.1 Odpowiedzi do testu I

1.
a) NIE
b) TAK
c) NIE

2.
a) TAK
b) TAK
c) NIE

3.
a) NIE
b) TAK
c) TAK

4.
a) NIE
b) TAK
c) TAK

5.
a) TAK
b) NIE
c) NIE

6.
a) TAK
b) TAK
c) NIE

7.
a) TAK
b) TAK
c) TAK

8.
a) NIE
b) TAK
c) NIE

9.
a) NIE
b) TAK
c) NIE

10.
a) TAK
b) NIE
c) TAK

9.2 Odpowiedzi do testu II

1.
a) TAK
b) TAK
c) NIE

2.
a) TAK
b) NIE
c) NIE

3.
a) TAK
b) NIE
c) NIE

4.
a) TAK
b) NIE
c) TAK

5.
a) NIE
b) NIE
c) NIE

6.
a) TAK
b) NIE
c) TAK

7.
a) NIE
b) TAK
c) TAK

8.
a) NIE
b) TAK
c) NIE

9.
a) TAK
b) NIE
c) NIE

10.
a) TAK
b) NIE
c) TAK

Bibliografia

[1] Norbert Dróbka, Karol Szymański, *Zbiór zadań z matematyki dla klasy III i IV liceum ogólnokształcącego*, Wydawnictwo Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa, 1977.

[2] Monika Fabijańczyk, Andrzej Fabijańczyk, *Repetytorium z wybranych działów matematyki szkolnej*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź, 2008.

[3] Bogusław Gdowski, Edmund Pluciński, *Zbiór zadań z matematyki dla kandydatów na wyższe uczelnie*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1999.

[4] Robert Kowalczyk, Kamil Niedziałomski, Cezary Obczyński, *Matematyka dla studentów i kandydatów na wyższe uczelnie. Repetytorium.*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2017.