

6. Random matrices and covariance estimation

担当：みーとみ

2021 年 7 月 1 日, 7 月 7 日

Table of Contents

6.1 Some preliminaries

6.2 Wishart matrices and their behavior

6.3 Covariance matrices from sub-Gaussian ensembles

6.1 Some preliminaries

- Notation とこの章で使う preliminary results の説明から.

6.1.1 Notation and basic facts

- ・ 行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ with $n \geq m$ に対し, (順序付き) 特異値を

$$\sigma_{\max}(A) = \sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \cdots \geq \sigma_m(A) = \sigma_{\min}(A) \geq 0$$

と書く.

- ・ 最小・最大特異値は次のように characterize される:

$$\sigma_{\max}(A) = \max_{v \in \mathbb{S}^{m-1}} \|Av\|_2 \quad \text{and} \quad \sigma_{\min}(A) = \min_{v \in \mathbb{S}^{m-1}} \|Av\|_2, \quad (6.1)$$

ただし $\mathbb{S}^{d-1} := \{v \in \mathbb{R}^d \mid \|v\|_2 = 1\}$ は \mathbb{R}^d 上の Euclidean unit sphere.

- ・ また次の同値性が成り立つ: $\|A\|_2 = \sigma_{\max}(A)$.

- ・ 対称行列の集合を $\mathcal{S}^{d \times d} := \{Q \in \mathbb{R}^{d \times d} \mid Q = Q^T\}$ とし, その半正定値行列からなる部分集合を

$$\mathcal{S}_+^{d \times d} := \left\{ Q \in \mathcal{S}^{d \times d} \mid Q \succeq 0 \right\} \quad (6.2)$$

と書く.

- ・ 任意の対称行列 $Q \in \mathcal{S}^{d \times d}$ は対角化可能であり, その固有値を

$$\gamma_{\max}(Q) = \gamma_1(Q) \geq \gamma_2 \geq \cdots \geq \gamma_d(Q) = \gamma_{\min}(Q)$$

とする.

- ・ このとき, $Q \succeq 0 \Leftrightarrow \gamma_{\min}(Q) \geq 0$.

- ・ 最小・最大固有値の “Rayleigh – Ritz variational characterization”:

$$\gamma_{\max}(Q) = \max_{v \in \mathbb{S}^{d-1}} v^T Q v \quad \text{and} \quad \gamma_{\min}(Q) = \min_{v \in \mathbb{S}^{d-1}} v^T Q v. \quad (6.3)$$

- ・ 任意の対称行列 Q に対し, その ℓ_2 -operator norm は,

$$\|Q\|_2 = \max \{ \gamma_{\max}(Q), |\gamma_{\min}(Q)| \} = \max_{v \in \mathbb{S}^{d-1}} |v^T Q v|. \quad (6.4)$$

- ・ 最後に, 行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ with $n \geq m$ に対し, m -次元対称行列 $R := A^T A$ を考えると,

$$\gamma_j(R) = (\sigma_j(A))^2 \quad \text{for } j = 1, \dots, m.$$

6.1.2 Set-up of covariance estimation

- $\{x_1, \dots, x_m\}$ は, \mathbb{R}^d 上の zero-mean \cdot covariance $\Sigma = \text{cov}(x_1) \in \mathbb{S}_+^{d \times d}$ なる分布からの n 個の i.i.d. サンプルとする.
- Σ の standard estimator は, 次の *sample covariance matrix* である:

$$\hat{\Sigma} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i x_i^T. \quad (6.5)$$

- 各 x_i は zero-mean なので $\mathbb{E}[x_i x_i^T] = \Sigma$ であり, $\hat{\Sigma}$ は Σ の unbiased estimator.
- したがって $\hat{\Sigma} - \Sigma$ は期待値ゼロとなり, その ℓ_2 -operator norm によって測った error の bound を求めることがこの章の goal となる.

- (6.4) の ℓ_2 -operator norm の表現より, $|||\hat{\Sigma} - \Sigma|||_2 \leq \epsilon$ は以下と同値:

$$\max_{v \in \mathbb{S}^{d-1}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle x_i, v \rangle^2 - v^T \Sigma v \right| \leq \epsilon. \quad (6.6)$$

- つまり, $|||\hat{\Sigma} - \Sigma|||_2$ をコントロールすることは, v で indexed された関数クラス $x \mapsto \langle x, v \rangle^2$ の uniform law of large numbers を示すことと同値になる.

- ・ その ℓ_2 -operator norm をコントロールすることは, $\hat{\Sigma}$ の固有値の一様収束も意味する: Weyl's theorem の corollary より,

$$\max_{j=1,\dots,d} \left| \gamma_j(\hat{\Sigma}) - \gamma_j(\Sigma) \right| \leq \|\hat{\Sigma} - \Sigma\|_2. \quad (6.7)$$

- ・ また最後に, ランダム行列 $X \in \mathbb{R}^{n \times d}$ が, 第 i 行に x_i^T を持つものとする

$$X = \begin{pmatrix} x_1^T \\ \vdots \\ x_n^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times d}$$

と,

$$\hat{\Sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i x_i^T = \frac{1}{n} X^T X$$

なので, $\hat{\Sigma}$ の固有値は X/\sqrt{n} の特異値の 2 乗となる.

6.2 Wishart matrices and their behavior

- ・ サンプル x_i は, d -次元正規分布 $\mathcal{N}(0, \Sigma)$ から i.i.d. で引かれるとする.
- ・ このとき,

$$X = \begin{pmatrix} x_1^T \\ \vdots \\ x_n^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times d}$$

は, Σ -Gaussian ensemble から引かれると言う.

- ・ Sample covariance $\hat{\Sigma} = \frac{1}{n} X^T X$ は, a multivariate Wishart distribution に従う.

Theorem 6.1

$X \in \mathbb{R}^{n \times d}$ は Σ -Gaussian ensemble から引かれるとする. このとき, 任意の $\delta > 0$ に対し, 最大特異値 $\sigma_{\max}(X)$ は以下の upper deviation inequality を満たす:

$$\mathbb{P} \left[\frac{\sigma_{\max}(X)}{\sqrt{n}} \geq \gamma_{\max} \left(\sqrt{\Sigma} \right) (1 + \delta) + \sqrt{\frac{\text{tr}(\Sigma)}{n}} \right] \leq \exp \left(-\frac{n\delta^2}{2} \right). \quad (6.8)$$

さらに $n \geq d$ なら, 最小特異値 $\sigma_{\min}(X)$ は以下の lower deviation inequality を満たす:

$$\mathbb{P} \left[\frac{\sigma_{\min}(X)}{\sqrt{n}} \leq \gamma_{\min} \left(\sqrt{\Sigma} \right) (1 - \delta) - \sqrt{\frac{\text{tr}(\Sigma)}{n}} \right] \leq \exp \left(-\frac{n\delta^2}{2} \right). \quad (6.9)$$

Example 6.2 (Operator norm bounds for the standard Gaussian ensemble)

- $W \in \mathbb{R}^{n \times d}$ は各成分が $\mathcal{N}(0, 1)$ i.i.d. で引かれる random matrix とする ($\Sigma = I_d$) .
- Thm 6.1 より, $n \geq d$ なら, 確率 $1 - 2 \exp\left(-\frac{n\delta^2}{2}\right)$ 以上で

$$\frac{\sigma_{\max}(W)}{\sqrt{n}} \leq 1 + \delta + \sqrt{\frac{d}{n}} \quad \text{and} \quad \frac{\sigma_{\min}(W)}{\sqrt{n}} \geq 1 - \delta - \sqrt{\frac{d}{n}} \quad (6.10)$$

となる.

- よって, 同じ確率で

$$\left\| \left\| \frac{1}{n} W^T W - I_d \right\| \right\|_2 \leq 2\epsilon + \epsilon^2, \quad \text{where } \epsilon = \sqrt{\frac{d}{n}} + \delta. \quad (6.11)$$

- したがって, $d/n \rightarrow 0$ なら, sample covariance $\hat{\Sigma} = \frac{1}{n} W^T W$ は identity matrix I_d の一致推定量となる. ♣

Example 6.3 (Gaussian covariance estimation)

- $X \in \mathbb{R}^{n \times d}$ は Σ -Gaussian ensemble からの random matrix とする.
- このとき $X = W\sqrt{\Sigma}$ と書ける ($W \in \mathbb{R}^{n \times d}$ は standard Gaussian random matrix) ので,

$$\left\| \left\| \frac{1}{n} X^T X - \Sigma \right\| \right\|_2 = \left\| \left\| \sqrt{\Sigma} \left(\frac{1}{n} W^T W - I_d \right) \right\| \right\|_2 \leq \|\Sigma\|_2 \left\| \left\| \frac{1}{n} W^T W - I_d \right\| \right\|_2.$$

- したがって (6.11) より, 任意の $\delta > 0$ に対して確率 $1 - 2 \exp\left(-\frac{n\delta^2}{2}\right)$ で

$$\frac{\|\hat{\Sigma} - \Sigma\|_2}{\|\Sigma\|_2} \leq 2\sqrt{\frac{d}{n}} + 2\delta + \left(\sqrt{\frac{d}{n}} + \delta\right)^2. \quad (6.12)$$

- よって, $\|\hat{\Sigma} - \Sigma\|_2 / \|\Sigma\|_2$ は $d/n \rightarrow 0$ である限り 0 に収束する.



Example 6.4 (Faster rates under trace constraints)

- $\{\gamma_j(\Sigma)\}_{j=1}^d$ は Σ の固有値列で, $\gamma_1(\Sigma)$ がそのうち最大のもの.
- Σ は, 次元に対して独立な定数 C に対し, 次の “trace constraint” を満たすとする:

$$\frac{\text{tr}(\Sigma)}{\|\Sigma\|_2} = \frac{\sum_{j=1}^d \gamma_j(\Sigma)}{\gamma_1(\Sigma)} \leq C. \quad (6.13)$$

- C は Σ の (実質的な) rank と見なせる (\because (6.13) は $C = \text{rank}(\Sigma)$ では常に成立.)
- パラメータ $q \in [0, 1]$ と半径 $R_q > 0$ の the Schatten q -“balls” を, 以下で定義する:

$$\mathbb{B}_q(R_q) := \left\{ \Sigma \in S^{d \times d} \left| \sum_{j=1}^d |\gamma_j(\Sigma)|^q \leq R_q \right. \right\}. \quad (6.14)$$

- $q = 0$ なら, rank R_q 以下の対称行列の集合.
- $q = 1$ なら, trace constraint になる.
- 任意の非零行列 $\Sigma \in \mathbb{B}_q(R_q)$ は, (6.13) を $C = R_q/(\gamma_1(\Sigma))^q$ で満たす.

- ・ (6.13) を満たす任意の Σ に対し, Thm 6.1 は高確率で X の最大特異値が次のように抑えられることを保証する:

$$\frac{\sigma_{\max}(X)}{\sqrt{n}} \leq \gamma_{\max}(\sqrt{\Sigma}) \left(1 + \delta + \sqrt{\frac{C}{n}} \right). \quad (6.15)$$

- ・ $\Sigma = I_d$ のときの bound (6.10) と比べると, C が d に置き換わって “実行的な rank” となっている.



Proof of Theorem 6.1.

- Notation: $\bar{\sigma}_{\max} = \gamma_{\max}(\sqrt{\Sigma})$, $\bar{\sigma}_{\min} = \gamma_{\min}(\sqrt{\Sigma})$.
- 最大/最小特異値の upper/lower bound とともに以下の 2 段階で示す:
 1. 高確率で特異値が期待値に近いことを concentration inequality から示す (Ch.2)
 2. その期待値の bound の導出に Gaussian comparison inequality を用いる (Ch.5)
- ここでは最大特異値の upper bound のみを示す. (最小特異値の lower bound は大体似た方針で示せるがよりテクニカルなので Appendix (Section 6.6) にまわす.)

- $X = W\sqrt{\Sigma}$ と書ける, ただし $W \in \mathbb{R}^{n \times d}$ は i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$ entries をもつ.
- $W \mapsto \frac{\sigma_{\max}(W\sqrt{\Sigma})}{\sqrt{n}}$ を \mathbb{R}^{nd} 上の実数値写像とみると, これは $L = \bar{\sigma}_{\max}/\sqrt{n}$ で Lipschitz w.r.t. Euclidean norm. (cf. Example 2.32)
- Gaussian r.v. に対する Lipschitz 関数の concentration inequality (Thm 2.26) より,

$$\mathbb{P} [\sigma_{\max}(X) \geq \mathbb{E}[\sigma_{\max}(X)] + \sqrt{n}\bar{\sigma}_{\max}\delta] \leq \exp\left(-\frac{n\delta^2}{2}\right).$$

- したがって, あとは以下を示せば良い:

$$\mathbb{E}[\sigma_{\max}(X)] \leq \sqrt{n}\bar{\sigma}_{\max} + \sqrt{\text{tr}(\Sigma)}. \quad (6.16)$$

- $\sigma_{\max}(X) = \max_{v' \in \mathbb{S}^{d-1}} \|Xv'\|_2$ で, $X = W\sqrt{\Sigma}$, $v = \sqrt{\Sigma}v'$ とすると次のように書ける:

$$\sigma_{\max}(X) = \max_{v \in \mathbb{S}^{d-1}(\Sigma^{-1})} \|Wv\|_2 = \max_{u \in \mathbb{S}^{d-1}} \max_{v \in \mathbb{S}^{d-1}(\Sigma^{-1})} \underbrace{u^T W v}_{Z_{u,v}},$$

ただし $\mathbb{S}^{d-1}(\Sigma^{-1}) := \{v \in \mathbb{R}^d \mid \|\Sigma^{-\frac{1}{2}}v\|_2 = 1\}$.

- $\{Z_{u,v}, (u,v) \in \mathbb{T}\}$ where $\mathbb{T} := \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{S}^{d-1}(\Sigma^{-1})$ は zero-mean Gaussian process とみなせる.
- 別の Gaussian process $\{Y_{u,v}, (u,v) \in \mathbb{T}\}$ で $\mathbb{E}[(Z_{u,v} - Z_{\tilde{u}\tilde{v}})^2] \leq \mathbb{E}[(Y_{u,v} - Y_{\tilde{u}\tilde{v}})^2]$ for all $(u,v), (\tilde{u}, \tilde{v}) \in \mathbb{T}$ となるようなものを construct することを考える.
- すると Sudakov-Fernique comparison (Thm. 5.27) から以下が言える:

$$\mathbb{E}[\sigma_{\max}(X)] = \mathbb{E} \left[\max_{(u,v) \in \mathbb{T}} Z_{u,v} \right] \leq \mathbb{E} \left[\max_{(u,v) \in \mathbb{T}} Y_{u,v} \right]. \quad (6.17)$$

- $(u, v), (\tilde{u}, \tilde{v}) \in \mathbb{T}$ を given とし, $\|v\|_2 \leq \|\tilde{v}\|_2$ とする.
- まず $Z_{u,v} = u^T W v = \langle \langle W, uv^T \rangle \rangle$ となる, where $\langle \langle A, B \rangle \rangle := \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^d A_{jk} B_{jk}$.
- W は i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$ entries をもつので,

$$\mathbb{E} [(Z_{u,v} - Z_{\tilde{u}\tilde{v}})^2] = \mathbb{E} [\langle \langle W, uv^T - \tilde{u}\tilde{v}^T \rangle \rangle^2] = \|uv^T - \tilde{u}\tilde{v}^T\|_F^2.$$

- Frobenius norm を変形すると,

$$\begin{aligned} & \|uv^T - \tilde{u}\tilde{v}^T\|_F^2 \\ &= \|u(v - \tilde{v})^T - (u - \tilde{u})\tilde{v}^T\|_F^2 \\ &= \| (u - \tilde{u})\tilde{v}^T \|_F^2 + \|u(v - \tilde{v}) - \mathbf{T}\|_F^2 + 2\langle \langle u(v - \tilde{v})^T, (u - \tilde{u})\tilde{v}^T \rangle \rangle \\ &\leq \|\tilde{v}\|_2^2 \|u - \tilde{u}\|_2^2 + \|u\|_2^2 \|v - \tilde{v}\|_2^2 + 2(\|u\|_2^2 - \langle u, \tilde{u} \rangle)(\langle v, \tilde{v} \rangle - \|\tilde{v}\|_2^2). \end{aligned}$$

- ここで, $\|u\|_2 = \|\tilde{u}\|_2 = 1$ より $\|u\|_2^2 - \langle u, \tilde{u} \rangle \geq 0$.
- 一方, Cauchy-Schwarz と仮定 $\|v\|_2 \leq \|\tilde{v}\|_2$ より, $|\langle v, \tilde{v} \rangle| \leq \|v\|_2 \|\tilde{v}\|_2 \leq \|\tilde{v}\|_2^2$.
- したがって,

$$\|uv^T - \tilde{u}\tilde{v}^T\|_F^2 \leq \|\tilde{v}\|_2^2 \|u - \tilde{u}\|_2^2 + \|v - \tilde{v}\|_2^2.$$

- $\mathbb{S}^{d-1}(\Sigma^{-1})$ の定義より, $\|\tilde{v}\|_2 \leq \bar{\sigma} = \gamma_{\max}(\sqrt{\Sigma})$ なので,

$$\mathbb{E}[(Z_{u,v} - Z_{\tilde{u},\tilde{v}})^2] \leq \bar{\sigma}_{\max}^2 \|u - \tilde{u}\|_2^2 + \|v - \tilde{v}\|_2^2.$$

- Gaussian process $Y_{u,v} := \bar{\sigma}_{\max} \langle g, u \rangle + \langle h, v \rangle$ を定義する (ただし $g \in \mathbb{R}^n, h \in \mathbb{R}^d$ は standard Gaussian rv's) と,

$$\mathbb{E}[(Y_{u,v} - Y_{\tilde{u},\tilde{v}})^2] = \bar{\sigma}_{\max}^2 \|u - \tilde{u}\|_2^2 + \|v - \tilde{v}\|_2^2.$$

- よって Sudakov-Fernique bound (6.17) より,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\sigma_{\max}(X)] &\leq \mathbb{E} \left[\sup_{(u,v) \in \mathbb{T}} Y_{u,v} \right] = \bar{\sigma}_{\max} \mathbb{E} \left[\sup_{u \in \mathbb{S}^{d-1}} \langle g, u \rangle \right] + \mathbb{E} \left[\sup_{v \in \mathbb{S}^{d-1}(\Sigma^{-1})} \langle h, v \rangle \right] \\ &= \bar{\sigma}_{\max} \mathbb{E}[\|g\|_2] + \mathbb{E}[\|\sqrt{\Sigma}h\|_2]. \end{aligned}$$

- Jensen's inequality から, $\mathbb{E}[\|g\|_2] \leq \sqrt{n}$ ans

$$\mathbb{E}[\|\sqrt{\Sigma}h\|_2] \leq \sqrt{\mathbb{E}[h^T \Sigma h]} = \sqrt{\text{tr}(\Sigma)} \text{ となり, (6.16) が示された.}$$

□

6.3 Covariance matrices from sub-Gaussian ensembles

- Random vector $x_i \in \mathbb{R}^d$ は zero-mean で, sub-Gaussian with parameter at most σ , つまり各 $v \in \mathbb{S}^{d-1}$ に対し,

$$\mathbb{E} [\exp (\lambda \langle v, x_i \rangle)] \leq \exp \left(\frac{\lambda^2 \sigma^2}{2} \right) \quad \text{for all } \lambda \in \mathbb{R} \quad (6.18)$$

が成り立つとする.

- 例 1) $x_{ij} \in \mathbb{R}$ は zero-mean, sub-Gaussian with $\sigma = 1$
($x_{ij} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ や Rademacher variable, サポート $[-1, 1]$ の分布など)
- 例 2) $x_i \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$ とすると, 任意の $v \in \mathbb{S}^{d-1}$ に対し $\langle v, x_i \rangle \sim \mathcal{N}(0, v^T \Sigma v)$ で $v^T \Sigma v \leq |||\Sigma|||_2$ より, x_i は sub-Gaussian with parameter at most $\sigma^2 = |||\Sigma|||_2$.
- このとき, $X \in \mathbb{R}^{n \times d}$ は row-wise σ -sub-Gaussian ensemble からのサンプルであるという.

Theorem 6.5

ある定数 c_0, c_1, c_2, c_3 が存在して, 任意の row-wise σ -sub-Gaussian ランダム行列 $X \in \mathbb{R}^{n \times d}$ について, 標本共分散 $\hat{\Sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i x_i^T$ は次の bound

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\lambda |||\hat{\Sigma} - \Sigma|||_2 \right) \right] \leq \exp \left(c_0 \frac{\lambda^2 \sigma^2}{n} + 4d \right) \quad \text{for all } |\lambda| < \frac{n}{64e^2 \sigma^2} \quad (6.19a)$$

を満たし, したがって,

$$\mathbb{P} \left[\frac{|||\hat{\Sigma} - \Sigma|||_2}{\sigma^2} \geq c_1 \left\{ \sqrt{\frac{d}{n}} + \frac{d}{n} \right\} + \delta \right] \leq c_2 \exp \left(-c_3 n \min\{\delta, \delta^2\} \right) \quad \text{for all } \delta \geq 0. \quad (6.19b)$$

Remarks:

- (6.19a) を given とすると, Chernoff technique (Ch.2) からただちに (6.19b) が示される.
- $\Sigma = I_d$ で x_i が sub-Gaussian w/ $\sigma = 1$ のとき, (6.19b) は高確率で

$$|||\hat{\Sigma} - I_d|||_2 \lesssim \sqrt{\frac{d}{n}} + \frac{d}{n}$$

となることを含意する.

- $n \geq d$ のとき, これは定数 $c' > 1$ について

$$1 - c' \sqrt{\frac{d}{n}} \leq \frac{\sigma_{\min}(X)}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sigma_{\max}(X)}{\sqrt{n}} \leq 1 + c' \sqrt{\frac{d}{n}} \quad (6.20)$$

を意味し, standard Gaussian matrix についての result (6.10) の sub-Gaussian version とみなせる.

Proof

- $Q := \hat{\Sigma} - \Sigma$ の ℓ_2 -operator norm の moment 母関数の bound を求めたい.
- まず Section 6.1 より $|||Q|||_2 = \max_{v \in \mathbb{S}^{d-1}} |\langle v, Qv \rangle|$.
- Example 5.8 より, \mathbb{S}^{d-1} には $N(\leq 17^d)$ 個のベクトルからなる $\frac{1}{8}$ -covering が存在し, これを $\{v^1, \dots, v^N\}$ とかく.
- 任意の $v \in \mathbb{S}^{d-1}$ は $v = v^j + \Delta$ where $\|\Delta\|_2 \leq \frac{1}{8}$ とかけ, よって

$$\langle v, Qv \rangle = \langle v^j, Qv^j \rangle + 2\langle \Delta, Qv^j \rangle + \langle \Delta, Q\Delta \rangle.$$

- 三角不等式と operator norm の定義から

$$\begin{aligned} |\langle v, Qv \rangle| &\leq |\langle v^j, Qv^j \rangle| + 2\|\Delta\|_2 |||Q|||_2 \|v^j\|_2 + |||Q|||_2 \|\Delta\|_2^2 \\ &\leq |\langle v^j, Qv^j \rangle| + \frac{1}{4} |||Q|||_2 + \frac{1}{64} |||Q|||_2 \\ &\leq |\langle v^j, Qv^j \rangle| + \frac{1}{2} |||Q|||_2. \end{aligned}$$

- $v \in \mathbb{S}$ について \sup をとると,

$$|||Q|||_2 = \max_{v \in \mathbb{S}^{d-1}} |\langle v, Qv \rangle| \leq 2 \max_{j=1, \dots, N} |\langle v^j, Qv^j \rangle|.$$

- よって,

$$\mathbb{E} \left[e^{\lambda |||Q|||_2} \right] \leq \mathbb{E} \left[\exp \left(2\lambda \max_{j=1, \dots, N} |\langle v^j, Qv^j \rangle| \right) \right] \leq \sum_{j=1}^N \left\{ \mathbb{E} \left[e^{2\lambda \langle v^j, Qv^j \rangle} \right] + \mathbb{E} \left[e^{-2\lambda \langle v^j, Qv^j \rangle} \right] \right\}. \quad (6.21)$$

- ここで, 任意の $u \in \mathbb{S}^{d-1}$ に対して以下が成り立つ (証明は後で) :

$$\mathbb{E} \left[e^{t \langle u, Qu \rangle} \right] \leq e^{512 \frac{t^2}{n} e^4 \sigma^4} \quad \text{for all } |t| \leq \frac{n}{32e^2 \sigma^2}. \quad (6.22)$$

- (6.21) (6.22) より,

$$\mathbb{E} \left[e^{\lambda |||Q|||_2} \right] \leq 2N e^{2048 \frac{\lambda^2}{n} e^4 \sigma^4} \leq \exp \left(c_0 \frac{\lambda^2 \sigma^4}{n} + 4d \right) \quad \text{for all } |\lambda| < \frac{n}{64e^2 \sigma^2}$$

となり (2 つ目の不等号は $2 \cdot 17^d \leq e^{4d}$ より), (6.19a) が示された.

Proof of the bound (6.22)

- $Q = \hat{\Sigma} - \Sigma$ の定義と i.i.d. の仮定より,

$$\mathbb{E} \left[e^{t \langle u, Qu \rangle} \right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E} \left[e^{\frac{t}{n} \{ \langle x_i, u \rangle^2 - \langle u, \Sigma u \rangle \}} \right] = \left(\mathbb{E} \left[e^{\frac{t}{n} \{ \langle x_1, u \rangle^2 - \langle u, \Sigma u \rangle \}} \right] \right)^n. \quad (6.23)$$

- $\epsilon \in \{-1, 1\}$ を Rademacher 変数とすると, symmetrization argument (Prop.4.11) より

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x_1} \left[e^{\frac{t}{n} \{ \langle x_1, u \rangle^2 - \langle u, \Sigma u \rangle \}} \right] &\leq \mathbb{E}_{x_1, \epsilon} \left[e^{\frac{2t}{n} \epsilon \langle x_1, u \rangle^2} \right] \stackrel{(i)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{2t}{n} \right)^k \mathbb{E} \left[\epsilon^k \langle x_1, u \rangle^{2k} \right] \\ &\stackrel{(ii)}{=} 1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{(2\ell)!} \left(\frac{2t}{n} \right)^{2\ell} \mathbb{E} \left[\langle x_1, u \rangle^{4\ell} \right] \end{aligned}$$

となる, ただし (i) は指数関数の冪乗展開, (ii) は奇数次項は Rademacher term が 0 になることより.

- Thm.2.6 の sub-Gaussian の同値条件より,

$$\mathbb{E} \left[\langle x_1, u \rangle^{4\ell} \right] \leq \frac{(4\ell)!}{2^{2\ell}(2\ell)!} (\sqrt{8}e\sigma)^{4\ell} \quad \text{for all } \ell = 1, 2, \dots,$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x_1} \left[e^{\frac{t}{n} \{ \langle x_1, u \rangle^2 - \langle u, \Sigma u \rangle \}} \right] &\leq 1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{(2\ell)!} \left(\frac{2t}{n} \right)^{2\ell} \frac{(4\ell)!}{2^{2\ell}(2\ell)!} (\sqrt{8}e\sigma)^{4\ell} \\ &\leq 1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{16t}{n} e^2 \sigma^2 \right)}_{f(t)}^{2\ell} \end{aligned}$$

となる, ただし最後の不等号は $(4\ell)! \leq 2^{2\ell}[(2\ell)!]^2$ より.

$$\cdot f(t) = \frac{16t}{n}e^2\sigma^2 < \frac{1}{2} \text{ なら}$$

$$1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} [f^2(t)]^{\ell} = \frac{1}{1 - f^2(t)} \stackrel{(i)}{\leq} \exp(2f^2(t))$$

となる ((i) は $1/(1 - a) \leq e^{2a}$ for all $a \in [0, 1/2]$ より) ので, (6.23) と合わせて $|t| < \frac{n}{32e^2\sigma^2}$ に対して $\mathbb{E}[e^{t\langle u, Qu \rangle}] \leq e^{2nf^2(t)}$, つまり (6.22) が示された. \square

6.4 Bounds for general matrices

- より一般的な条件下での bound を求める.
- そのために covariance matrices だけでなくより general な random matrices を考える.
- Main result の Theorem 6.15 と 6.17 は Hoeffding · Bernstein bounds の matrix-based analogs である.

6.4.1 Background on matrix analysis

- ・ 対称行列 $Q \in \mathcal{S}^{d \times d}$ の対角化 $Q = U^T \Gamma U$ を考える:
 - ・ $U \in \mathbb{R}^{d \times d}$ はユニタリ行列 $U^T U = I_d$.
 - ・ $\Gamma := \text{diag}(\gamma(Q))$ は固有値 $\gamma(Q) \in \mathbb{R}^d$ からなる対角行列.

- ・ 関数 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $\mathcal{S}^{d \times d}$ 上の関数に以下のように拡張する:

$$Q \mapsto f(Q) := U^T \text{diag}(f(\gamma_1(Q)), \dots, f(\gamma_d(Q))) U.$$

- ・ このとき, f はユニタリ不変, つまり

$$f(V^T Q V) = V^T f(Q) V \quad \text{for all unitary matrices } V \in \mathbb{R}^{d \times d}.$$

- ・ また, 固有値は次のように変換される (*spectral mapping property*):

$$\gamma(f(Q)) = \{f(\gamma_j(Q)), j = 1, \dots, d\}.$$

- 特に matrix exponential と matrix logarithm の 2 つの関数がこの章では重要.
- Matrix exponential:
 - Power-series expansion が成立: $e^Q = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Q^k}{k!}$.
 - Spectral mapping property より, e^Q の固有値は常に正, よって e^Q は常に正定値.
- Matrix logarithm は matrix exponential の inverse.
- 関数 f が単調であるとは, $Q \preceq R$ ならば $f(Q) \preceq f(R)$ が成り立つことをいう.
- Matrix logarithm は単調である (Löwner-Heinz theorem)
- Matrix exponential は単調でない.
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が連続かつ非減少なら, 任意の対称行列 $Q \preceq R$ に対し,

$$\mathrm{tr}(f(Q)) \leq \mathrm{tr}(f(R)) \quad (6,25)$$

が成り立つ (*trace inequality*) .

6.4.2 Tail conditions for matrices

- ・ 対称ランダム行列 $Q \in \mathcal{S}^{d \times d}$ に対し, polynomial moment $\mathbb{E}[Q^j]$ が存在すると仮定する.
- ・ Q の variance は $\text{var}(Q) := \mathbb{E}[Q^2] - (\mathbb{E}[Q])^2$ で, これは半正定値 (Ex.6.6)
- ・ Q の moment generating function $\Psi_Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}^{d \times d}$ は以下で与えられる:

$$\Psi_Q(\lambda) := \mathbb{E}[e^{\lambda Q}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \mathbb{E}[Q^k]. \quad (6.26)$$

- ・ Ch.2 の議論と同様に, この moment generating function を用いて random matrix の sub-Gaussian と sub-exponential が定義される.

Definition 6.6

Zero-mean 対称ランダム行列 $Q \in \mathcal{S}^{d \times d}$ が sub-Gaussian with matrix parameter $V \in \mathcal{S}_+^{d \times d}$ であるとは、以下が成り立つことをいう:

$$\Psi_Q(\lambda) \preceq e^{\frac{\lambda^2 V}{2}} \quad \text{for all } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (6.27)$$

Example 6.7

- $Q = \epsilon B$ で, $\epsilon \in \{-1, 1\}$ は Rademacher 変数, $B \in \mathcal{S}^{d \times d}$ は fixed matrix とする.
- このとき, $\mathbb{E}[Q^{2k+1}] = 0$ かつ $\mathbb{E}[Q^{2k}] = B^{2k}$ なので,

$$\mathbb{E}[e^{\lambda Q}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} B^{2k} \preceq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda^2 B^2}{2} \right)^k = e^{\frac{\lambda^2 B^2}{2}}$$

となり, Q は sub-Gaussian w/ $V = B^2 = \text{var}(Q)$.

- より一般に, $Q = gB$ で $g \in \mathbb{R}$ が zero-mean σ -sub-Gaussian なら, Q は $V = \sigma^2 B^2$ で sub-Gaussian となる.

Example 6.8

- $Q = \epsilon C$ で, ϵ は Rademacher 変数, C は ϵ と独立で $\|C\|_2 \leq b$ なるランダム行列とする.
- まず C を固定して ϵ について期待値をとると $\mathbb{E}_\epsilon[e^{\lambda\epsilon C}] \preceq e^{\frac{\lambda^2}{2}C^2}$.
- さらに $\|C\|_2 \leq b$ より $e^{\frac{\lambda^2}{2}C^2} \preceq e^{\frac{\lambda^2}{2}b^2I_d}$ となり, よって

$$\Psi_Q(\lambda) \preceq e^{\frac{\lambda^2}{2}b^2I_d} \quad \text{for all } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- したがって, Q は sub-Gaussian w/ matrix parameter $V = b^2I_d$.



Definition 6.9

Zero-mean ランダム行列 Q が sub-exponential with parameters (V, α) であるとは, 以下が成り立つことをいう:

$$\Psi_Q(\lambda) \preceq e^{\frac{\lambda^2 V}{2}} \quad \text{for all } |\lambda| < \frac{1}{\alpha}. \quad (6.28)$$

- 任意の sub-Gaussian 行列は sub-exponential w/ $(V, 0)$.
- Sub-exponential だが sub-Gaussian でないランダム行列はありうる:
 - 例) $M = \epsilon g^2 B$ where ϵ は Rademacher 変数, $g \sim \mathcal{N}(0, 1)$ でそれぞれ独立.

- Sub-exponential の 1 つの判定方法は, 次の Bernstein condition である.

Definition 6.10 (Bernstein's condition for matrices)

Zero-mean 対称ランダム行列 Q が Bernstein condition with parameter $b > 0$ を満たすとは, 以下が成り立つことをいう.

$$\mathbb{E}[Q^j] \preceq \frac{1}{2} j! b^{j-2} \text{var}(Q) \quad \text{for } j = 3, 4, \dots \quad (6.29)$$

- Q が bounded operator norm を持つ, つまり $\|Q\|_2 \leq b$ almost surely の場合, 次が成り立つ.

$$\mathbb{E}[Q^j] \preceq b^{j-2} \text{var}(Q) \quad \text{for all } j = 3, 4, \dots \quad (6.30)$$

- ・ 次の Lemma は, Bernstein condition が sub-exponential condition を含意することを示す.

Lemma 6.11

Bernstein condition を満たす任意の zero-mean 対称行列に対し, 以下が成り立つ:

$$\Psi_Q(\lambda) \preceq \exp\left(\frac{\lambda^2 \text{var}(Q)}{2(1 - b|\lambda|)}\right) \quad \text{for all } |\lambda| < \frac{1}{b}. \quad (6.31)$$

Proof

- $\mathbb{E}[Q] = 0$ なので, matrix exponential の power-series expansion より

$$\mathbb{E}[e^{\lambda Q}] = I_d + \frac{\lambda^2 \text{var}(Q)}{2} + \sum_{j=3}^{\infty} \frac{\lambda^j \mathbb{E}[Q^j]}{j!}$$

$$\stackrel{(i)}{\preceq} I_d + \frac{\lambda^2 \text{var}(Q)}{2} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} |\lambda|^j b^j \right\}$$

$$\stackrel{(ii)}{=} I_d + \frac{\lambda^2 \text{var}(Q)}{2(1 - b|\lambda|)}$$

$$\stackrel{(iii)}{\preceq} \exp \left(\frac{\lambda^2 \text{var}(Q)}{2(1 - b|\lambda|)} \right),$$

ただし (i) は Bernstein condition, (ii) は $|\lambda| < 1/b$ で成立, (iii) は matrix inequality $I_d + A \preceq e^A$ (for any symmetric matrix A) より.