6. Random matrices and covariance estimation

担当：みーとみ

2021 年 6 月 30 日, 7 月 7 日

- サンプル x_i は, d-次元正規分布 $\mathcal{N}(0, \Sigma)$ から i.i.d. で引かれるとする.
- このとき,

$$X = \begin{pmatrix} x_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ x_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times d}$$

  は, Σ-*Gaussian ensemble* から引かれると言う.
- Sample covariance $\widehat{\Sigma} = \frac{1}{n} X^{\mathrm{T}} X$ は, a multivariate Wishart distribution に従う.

Theorem 6.1

$X \in \mathbb{R}^{n\times d}$ は Σ-Gaussian ensemble から引かれるとする. このとき, 任意の $\delta > 0$ に対し, 最大特異値 $\sigma_{\max}(X)$ は以下の upper deviation inequality を満たす:

$$\mathbb{P}\left[\frac{\sigma_{\max}(X)}{\sqrt{n}} \geq \gamma_{\max}\left(\sqrt{\Sigma}\right)(1+\delta) + \sqrt{\frac{\mathrm{tr}(\Sigma)}{n}}\right] \leq \exp\left(-\frac{n\delta^2}{2}\right). \tag{6.8}$$

さらに $n \geq d$ なら, 最小特異値 $\sigma_{\min}(X)$ は以下の lower deviation inequality を満たす:

$$\mathbb{P}\left[\frac{\sigma_{\min}(X)}{\sqrt{n}} \leq \gamma_{\min}\left(\sqrt{\Sigma}\right)(1-\delta) - \sqrt{\frac{\mathrm{tr}(\Sigma)}{n}}\right] \leq \exp\left(-\frac{n\delta^2}{2}\right). \tag{6.9}$$

Example 6.2 (Operator norm bounds for the standard Gaussian ensemble)

- $W \in \mathbb{R}^{n\times d}$ は各成分が $\mathcal{N}(0,1)$ i.i.d. で引かれる random matrix とする（$\Sigma = I_d$）.
- Thm 6.1 より, $n \geq d$ なら, 確率 $1 - 2\exp\left(-\frac{n\delta^2}{2}\right)$ 以上で

$$\frac{\sigma_{\max}(W)}{\sqrt{n}} \leq 1 + \delta + \sqrt{\frac{d}{n}} \quad \text{and} \quad \frac{\sigma_{\min}(W)}{\sqrt{n}} \geq 1 - \delta - \sqrt{\frac{d}{n}} \tag{6.10}$$

  となる.
- よって, 同じ確率で

$$\left|\left|\left|\frac{1}{n}W^{\mathrm{T}}W - I_d\right|\right|\right|_2 \leq 2\epsilon + \epsilon^2, \quad \text{where} \epsilon = \sqrt{\frac{d}{n}} + \delta. \tag{6.11}$$

- したがって, $d/n \to 0$ なら, sample covariance $\widehat{\Sigma} = \frac{1}{n}W^{\mathrm{T}}W$ は identiry matrix I_d の一致推定量となる.

♣