بهینه سازی محدب

گزارش پیاده سازی سوال ۳

استاد درس: دکتر هادی امیری

دانشجو: مینو احمدی

810897032

دانشکده علوم مهندسی، دانشگاه تهران

Miinouahmadii@gmail.com

برای ران کردن کد ها از google colab استفاده کنید. با تشکر

سوال سوم قسمت الف :

در این قسمت من ابتدا گرادیان تابع و سپس هسین ان را محاسبه کردم

بعد از تشکیل ماتریس هسین دیده میشود که تمام درایه های ان مثبت است پس این ماتریس مثبت نیمه معین است چون ماتریس هسین مثبت معین شد پس تابع ما کانوکس بوده است .

سوال سه قسمت ب :

در این سوال line search ما به صورت دقیق بوده به همین دلیل t ای که ارگمان تابع f را مینیموم کند را ابتدا پیدا کردیم و سپس با توجه به ان t مراحل گرادیان کاهشی را انقدر تکرار کردیم تا e یا همان خطای ما کمتر از عدد مورد نظر صورت سوال شد . تفاوت اصلی این بخش و بخش بعدی در نحوه ی محاسبه ی tمیباشد.

```
cur_x = cur_x - 1/(5 * cur_x**2) * df(prev_x) #Grad descent
```

اینجا ما ابتدا سوال را به روش تحلیلی حل کردیم و tحاصل شده برابر با 1/(4*x^2)شد .

حل تحلیل در زیر امده :

برای محاسبه‌ی t از روش exact line search استفاده خواهیم کرد

$$t = \arg\min f\left(x - t\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \arg\min f(x - t(4x^3)) \rightarrow f(x, t(4x^3)) = (x - t(4x^3))^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4(1-12tx^2)(x - t(4x^3))^3 = 0 \,,\quad \frac{\partial f}{\partial t} = 4(-4x^3)(x - t(4x^3))^3 = 0 \Rightarrow x - t(4x^3) = 0$$

$$1 - t(4x^2) = 0$$

$$t = \frac{1}{4x^2}$$ ← این مقدار بهترین مقدار هست و تمام مقادیر نزدیکتر از آن قابل قبول‌اند .

$$x_{new} = x - t\frac{\partial f}{\partial x} = x - \frac{1}{4x^2}\frac{\partial f}{\partial x}$$

در کد پروژه $\frac{1}{5x^2}$ را t قرار دادیم

این tبهترین tحاصل شده با روش خط دقیق است . جواب های کوچکتر از ان نیز کاملا قابل قبپلند فقط هرچه کوچکتر شود در واقع به تعداد ایتریشن های بیشتری نیاز داریم .

در اینجا هربار مقدار t ما با توجه به نسبتی که با xدارد تغییر میکند.

در اینجا الگوریتم به پایان رسیده و جواب حاصل میشود با این راه ما توانستیم با ۷ مرحله به جواب برسیم. خروجی های هر مرحله در زیر امده است :

```
Iteration 1
X value is 0.19999999999999996
Iteration 2
X value is 0.03999999999999998
Iteration 3
X value is 0.007999999999999993
Iteration 4
X value is 0.0015999999999999999
Iteration 5
X value is 0.00031999999999999976
Iteration 6
X value is 6.399999999999993e-05
Iteration 7
X value is 1.2799999999999993e-05
The local minimum occurs at 1.2799999999999993e-05
```

سوال سوم قسمت پ :

در این قسمت روش محاسبه tمورد نظر ما با روش بازگشتی محاسبه شده برای این کار نیاز به بتای داده شده در سوال داریم یعنی هر بار t ما در بتا ضرب شده و سپس برای t مرحله بعد دوباره عدد مرحله ی قبلی در بتا ضرب میشود .

```
rate *= beta
cur_x = cur_x - rate * df(prev_x) #Grad descent with backtracking line
search
```

در نتیجه خروجی با سه بار ایتریشن حاصل میشود خروجی هر مرحله در زیر امده است :

```
0.5
Iteration 1
X value is -1.0
0.25
Iteration 2
X value is 0.0
0.125
Iteration 3
X value is 0.0
The local minimum occurs at 0.0
```

سوال سوم قسمت اخر :

در اینجا از روش نیوتن استفاده شده است که تنها تفاوت ان در رابطه ی ایکس جدید با قدیم است که ضریب t تغییر کرده است در واقع مشتق دوم تابع بر حسب ایکس نیز به ضریب tاضافه شده است .

```
cur_x = cur_x - 1/(49 * cur_x**4) * df2(prev_x) * df(prev_x) #Newton's algorithm with exact line search
```

با توجه به انکه ضریب داخل fتغییر میکند برای پیدا کردن t ای که ارگمان تابع را مینیموم کند از روش تحلیلی استفاده کردیم و با مشتق گیری رابطه بین t و x مشخص شد در واقع t=1/(48*x^4) است با توجه به اینن موضوع تمام مقادیر کوچکتر از tنیز مناسبند فقط تعداد ایتریشن ها تغییر خواهد کرد .

حل تحلیل پیدا کردن t در زیر امده است :

د) الگوریتم نیوتن با گام دقیق: در این روش مانند گرادیان است فقط نقطه‌ی جدید از فرمول $x_{new} = x - t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial x}$ بدست می‌آید.

$$t = \min \arg f\left(x - t \frac{\partial^2 x}{\partial f^2} \frac{\partial x}{\partial f}\right) = \arg\min f\left(x - t(12x^2)(4x^3)\right)$$

$$f\left(x - t(12x^2)(4x^3)\right) = \left(x - t(12x^2)(4x^3)\right)^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4\left(x - t(12x^2)(4x^3)\right)^3\left(1 - t \times 48 \times 5 \times x^4\right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 4\left(x - t \times 48x^5\right)^3\left(-48x^5\right) = 0 \longrightarrow x - 48tx^5 = 0$$

$$1 - 48tx^4 = 0$$

$t = \frac{1}{48x^4}$ ← بهترین حالت t محاسبه شد تمام حالت‌های کمتر از آن نیز قابل قبول‌اند در کد پیاده‌سازی شده برای این سوال من از $\frac{1}{49x^4}$ استفاده کردم و با چهار iteration جواب حاصل شد

با این روش خروجی جواب ها با ۴ ایتریشن حاصل شد . میتوانید خروجی هارا مشاهده کنید :

```
Iteration 1
X value is 0.020408163265306145
Iteration 2
X value is 0.00041649312786338696
Iteration 3
X value is 8.499859752314075e-06
Iteration 4
X value is 1.7346652555742955e-07
The local minimum occurs at 1.7346652555742955e-07
```