مینو احمدی ۸۱۰۸۹۷۰۳۲ سوال سوم پایان ترم حل تحلیلی

الف) تابعی که در سوال داده شده بود ←
$$f(x,y) = x^4 + (y-1)^2$$

می دانیم اگر هسین تابع بزرگتر مساوی صفر باشد آنگاه تابع محدب است.

$$\text{if } \nabla^2 f(x,y) \geq 0 \rightarrow f \text{ is convex}$$

$$f_x = 4x^3 \quad f_y = 2(y-1) \quad f_{xx} = 12x^2 \quad f_{yy} = 2 \quad f_{xy} = 0 \rightarrow H = \begin{bmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$ → نیمه معین مثبت است پس تابع محدب است

$$f_x = f_y = 0 \rightarrow x = 0, \; y = 1$$

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 12x^2(2) = 24x^2 \geq 0 \rightarrow$$ نقطه ی حاصل یا min است یا max

$f_{yy} > 0$ و $f_{xx} > 0$ ← پس min تابع است و مقدار تابع در این نقطه $= f(0,1) = 0$ است

ب) نقطه ی شروع $(x_0, y_0) = (1,1)$ و دقت محاسبه $\epsilon = 10^{-4}$ و الگوریتم باید روش گرادیان کاهشی با گام دقیق باشد.

برای اجرای این الگوریتم ابتدا یک مقدار رندوم برای x انتخاب می کنیم سپس مشتق تابع در این نقطه را محاسبه می کنیم در مرحله ی بعد نقطه ی جدید با مشتق ← $x_{new} = x - t\frac{\partial f}{\partial x}$ را حساب می کنیم و بعد مرحله های دوم و سوم را تکرار می کنیم تا به ϵ (دقت) مورد نظر برسیم.

$$(x_0, y_0) = (1,1)$$

$f_y = 2(y-1) = 0 \rightarrow$ پس $y=1$ مقدار بهینه برای تابع می باشد

برای محاسبه ی t از روش exact line search استفاده خواهیم کرد

$$t = \arg\min f\left(x - t\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \arg\min f(x - t(4x^3)) \rightarrow f(x, t(4x^3)) = (x - t(4x^3))^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4(1 - 12tx^2)(x - t(4x^3))^3 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 4(-4x^3)(x - t(4x^3))^3 = 0 \Rightarrow x - t(4x^3) = 0$$
$$1 - t(4x^2) = 0$$

$$t = \frac{1}{4x^2}$$ ← این مقدار بهترین مقدار هست و تمام مقادیر بزرگتر از آن قابل قبولند.

$$x_{new} = x - t\frac{\partial f}{\partial x} = x - \frac{1}{4x^2}\frac{\partial f}{\partial x}$$ در کد پروژه $\frac{1}{5x^2}$ را t قرار دادیم

با توجه به کد ← اعداد حاصل

$$x_{itr(1)} = 0/19 \quad x_{itr(2)} = 0/039 \quad x_{itr(3)} = 0/0079 \quad x_{itr(4)} = 0/0015 \quad x_{itr(5)} = 0/0003$$

$$\epsilon = 10^{-4}$$

$$x_{itr(6)} = 0/0000 \quad x_{itr(7)} \Rightarrow \rightarrow$$ در هفتمین مرحله می شود $|x_{new} - x| < 10^{-4}$

ج) این الگوریتم را به روش بازگشتی با $\alpha , \beta = (۰/۵ , ۰/۵)$ حل می‌کنیم

مراحل انجام مانند قسمت ب است ولی t را به طور بازگشتی حساب می‌کنیم

$t=1 \rightarrow t_{new} = \beta t = ۰/۵ \times 1 = ۰/۵$ $\quad x_{new} = x - t\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - ۰/۵ \times ۴ = -1$

$t_{new} = \beta t = ۰/۵ \times ۰/۵ = ۰/۲۵$ $\quad x_{new} = x - t\frac{\partial f}{\partial x} = -1 - ۰/۲۵ \times ۴ \times (-1) = ۰$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = ۰$

نقطه‌ی $x=۰$ بهینه‌ی تابع می‌باشد.

د) الگوریتم نیوتن با گام دقیق: در این روش مانند گرادیان است فقط نقطه‌ی جدید از فرمول $x_{new} = x - t\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial f}{\partial x}$ بدست می‌آید.

$$t = \min \arg f\left(x - t\frac{\partial^2 x}{\partial f^2}\frac{\partial x}{\partial f}\right) = \arg\min f\left(x - t(12x^2)(4x^3)\right)$$

$$f\left(x - t(12x^2)(4x^3)\right) = \left(x - t(12x^2)(4x^3)\right)^4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4\left(x - t(12x^2)(4x^3)\right)^3\left(1 - t \times 48 \times 5 \times x^4\right) = ۰$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 4(x - t \times 48x^5)^3(-48x^5) = ۰ \longrightarrow x - 48tx^5 = ۰$$

$$1 - 48tx^4 = ۰$$

$t = \frac{1}{48x^4}$ بهترین حالت t محاسبه شد تمام حالت‌های کمتر از آن نیز قابل قبول‌اند در کد پیاده‌سازی شده برای این سوال من از $\frac{1}{49x^4}$ استفاده کردم. و با چهار iteration جواب حاصل شد

$x_{itr(1)} = ۰/۰۲$ $\quad x_{itr(2)} = ۰/۰۰۰۴$ $\quad x_{itr(3)} = 8/4 \times 10^{-6}$

$itr_{(7)} = 1/73 \times 10^{-7} \rightarrow$ در اینجا متوقف می‌شود

$$\sim z^* = (x, y) = (۰, 1)$$