



AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA

Opis projektu

Aproksymacja funkcji cosinus za pomocą szeregu Taylora

z przedmiotu

Systemy dedykowane w układach programowalnych

Elektronika i Telekomunikacja - Systemy Wbudowane, rok I studiów
magisterskich

Miłosz Janik

Piotr Podkówka

22.06.2023

1. Cel projektu

Celem projektu było stworzenie oprogramowania na platformie FPGA służącego do obliczania przybliżonej wartości funkcji cosinus w zakresie od 0 do 90 stopni wykorzystując do tego szereg Taylora.

2. Opis projektu

Projekt zrealizowano w dwóch alternatywnych wersjach. Pierwsza z nich polega na wykorzystaniu modułu *taylor_rtl*, który opiera się na klasycznym wzorze Taylora do aproksymacji funkcji cosinus. Druga natomiast posługuje się modulem *taylor_horner_rtl*, który używa reguły Hornera w celu zredukowania ilości wykonywanych operacji mnożenia.

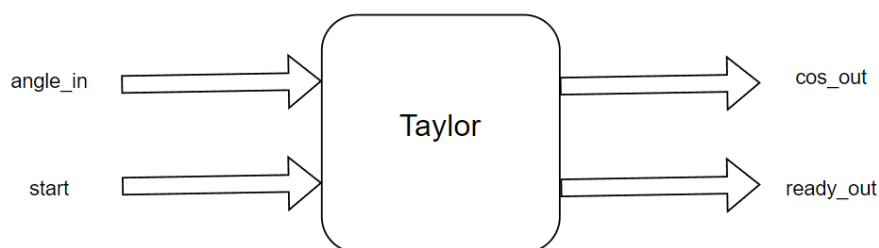
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

$$\cos(x) = 1 - \left(\frac{x^2}{2!} + x^2 \left(-\frac{x^2}{4!} + x^2 \left(\frac{x^2}{6!} \right) \right) \right)$$

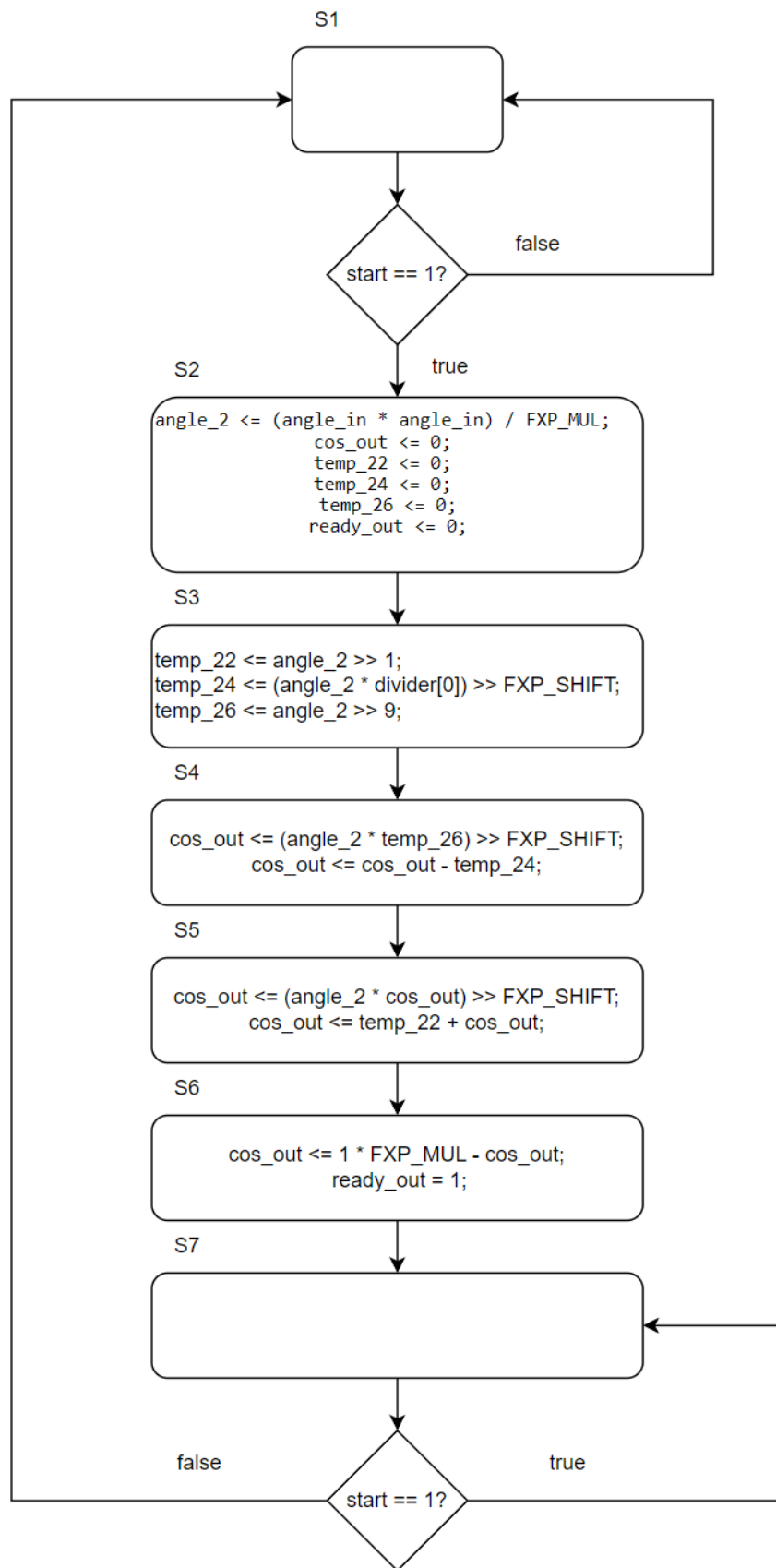
Postacie wzorów wykorzystane do aproksymacji w modułach *taylor_rtl* oraz *taylor_horner_rtl*

Wykorzystano obliczenia o podwyższonej precyzji, na danych w reprezentacji Fixed-Point [12:10]. Moduły mają sekwencyjny tryb pracy a konkretny diagram stanów został zamieszczony w dalszej części dokumentacji. Mając na uwadze zasoby sprzętowe wartości $1/n!$ zostały wcześniej przygotowane i zapisane w postaci binarnej Fixed Point.

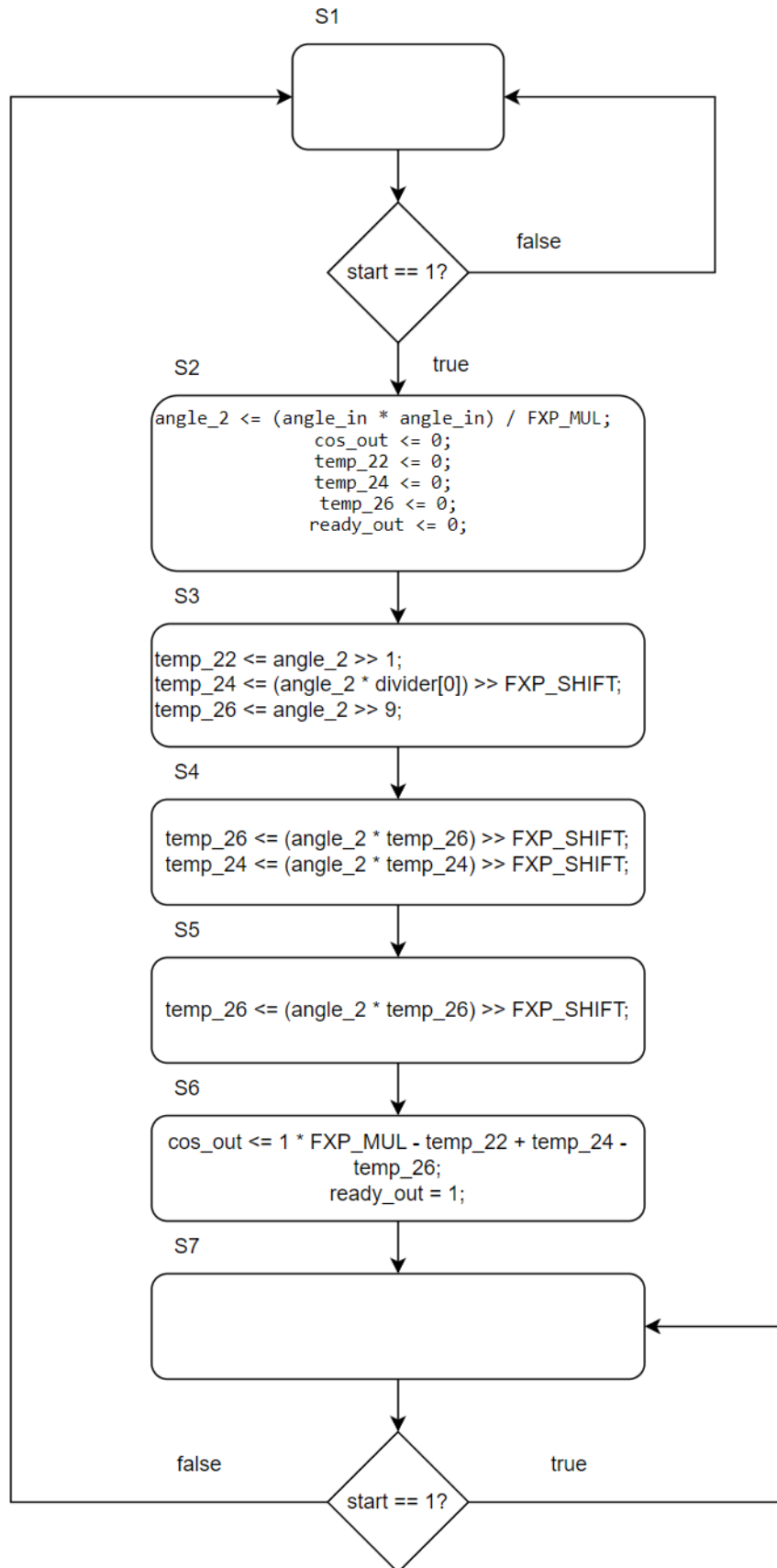
Moduły wykorzystują maszynę stanów FSM, zgodnie z poniższym schematem



Wejścia i wyjścia modułów



Maszyna stanów FSMD dla modułu *taylor_horner_rtl*, z wykorzystaniem reguły Hornera



Maszyna stanów FSMD dla modułu *taylor_rtl* , bez użycia reguły Hornera

3. Uzyskane rezultaty

```
COM7 - PuTTY
Enter angle (in degrees, three digits 000 to 360)000
Cosinus value is 1,0

Enter angle (in degrees, three digits 000 to 360)020
Cosinus value is 0,94

Enter angle (in degrees, three digits 000 to 360)090
Cosinus value is 0,00

Enter angle (in degrees, three digits 000 to 360)260
Cosinus value is -0,17

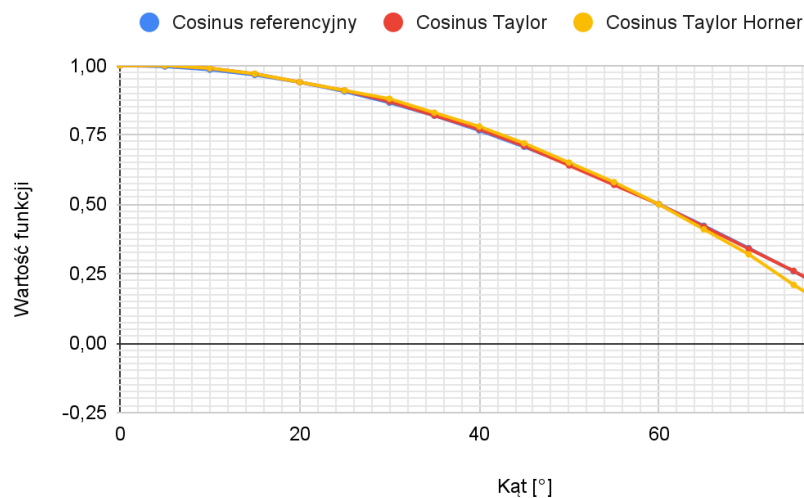
Enter angle (in degrees, three digits 000 to 360)300
Cosinus value is 0,50

Enter angle (in degrees, three digits 000 to 360)
```

Działanie modułu *taylor rtl*

Aby sprawdzić poprawność działania modułu, wykorzystano mikrokontroler ARM, komunikujący się z modułem przez magistralę AXI. Przy pomocy Vivado SDK stworzono aplikację w języku C, która za pośrednictwem interfejsu UART pozwala użytkownikowi na obliczenie wartości funkcji cosinus dla kąta z zakresu od 0 do 360 stopni.

Porównanie wyników działania wykonanych modułów



Na powyższym wykresie zestawiono porównanie wartości aproksymacji funkcji za pomocą modułów posługujących się klasycznym wzorem Taylora oraz jego przekształceniem, zgodnie z regułą Hornera. Dla kątów większych niż 70° można zauważyć, że moduł wykorzystujący regułę Hornera niedokładnie aproksymuje funkcję cosinus. Wraz ze wzrostem tego kąta, rośnie również wartość błędu. Moduł wykorzystujący klasyczny wzór Taylora, działa bardzo precyzyjnie. Różnica w działaniu może wynikać z innej kolejności wykonywanych operacji, co wpłynęło na błędy numeryczne i utratę dokładności.