Formelsamling for Matematikk 1
TDAT1004A/S1 - høst 2016

A. Komplekse tall

Standardform:	$z = a + i\,b$
Polarform:	$z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\,\sin\theta)$
De Moivres:	$(\cos\theta + i\,\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\,\sin n\theta$
Konjugert:	$\bar{z} = a - b\,i$
Argument:	$\arg z = \theta$
Absoluttverdi:	$\lvert z\rvert = \sqrt{a^2+b^2}$
Realdelen:	$\mathrm{Re}(z) = a$
Imaginærdelen:	$\mathrm{Im}(z) = b$

B. Lineær algebra

1. Matriseoperasjoner

Gitt matrisene $A = [a_{ij}]$ og $B = [b_{ij}]$.

Sum:	$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$
Multiplikasjon med skalar:	$kA = [k\,a_{ij}]$
Produkt:	$AB = \left[\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right]$
Transponering:	$A^T = [a_{ji}]$ $(AB)^T = B^TA^T$

2. Spesielle kvadratiske matriser

Diagonal matrise $D = \mathrm{diag}(a_{11}, \cdots, a_{nn})$	$a_{ij} = 0$, når $i \neq j$.
Enhetsmatrise	$I = \mathrm{diag}(1, 1, \ldots, 1)$
ÿvre triangulær matrise	$a_{ij} = 0$ når $i > j$
Nedre triangulær matrise	$a_{ij} = 0$ når $i < j$
Symmetrisk matrise	$A^T = A$
Skjevsymmetrisk matrise	$A^T = -A$
Singulær matrise	$\det A = 0$

3. Rangen til en matrise

rank A = antall pivotelementer i en trappematrise for A.

$$\mathrm{rank}(A^T) = \mathrm{rank}(A)$$

4. Invers matrise

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Gauss Jordan:

$$[A|I] \sim [I|A^{-1}]$$

Kofaktormetoden

$$A^{-1} = \frac{(\mathrm{kof}\ A)^T}{\det A}$$

Følgende er ekivalent for kvadratiske matriser:

1. A er inverterbar (A^{-1} eksisterer.)
2. $\det A \neq 0$.
3. A har maksimal rang.

5. Ortogonale matriser.

$$A^T = A^{-1} \Leftrightarrow AA^T = A^TA = I$$

6. Determinanter

Kofaktor: $\mathrm{kof}(a_{ij}) = (-1)^{i+j}D_{ij}$, der D_{ij} er underdeterminanten en får ved å fjerne rad i og søyle j fra det A.

Utvikling langs rad nr. i og langs søyle nr. j:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\mathrm{kof}(a_{ik}) \qquad \det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\,\mathrm{kof}(a_{kj}).$$

- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$
- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

7. Lineære transformasjoner

En transformasjon T fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ kalles lineær hvis og bare hvis

1. $T(c\mathbf{x}) = cT(\mathbf{x})$, for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ og alle $c \in \mathbb{R}$.
2. $T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$, for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

Transformasjonsmatrisen til T er matrisen

$$\begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \cdots & T(\mathbf{e}_n) \end{bmatrix}$$

8. Geometriske transformasjoner i $\mathbb{R}^2$:

De første fem er lineære. Den sjette er en fiktiv transformasjonsmatrise.

1. Speiling om 1. akse:	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
2. Speiling om 2. akse:	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
3. Speiling om linjen $x_1 = x_2$:	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
4. Rotasjon om origo:	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$
5. Skalering:	$\begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$
6. Translasjon:	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. Lineært avhengig/uavhengig vektorsett:

Rangmetoden: Innfør matrisen $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_k \end{bmatrix}$ så er $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ l.a. hvis $\operatorname{rank}(A) < k$ og l.u. hvis $\operatorname{rank}(A) = k$.

Alternativ metode: $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ er l.u. hvis og bare hvis $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_k\mathbf{a}_k = 0$ kun har løsningen $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$.

10. Underrom, lineært spenn:

En vektormengde V i $\mathbb{R}^n$ er et underrom i $\mathbb{R}^n$ hvis og bare hvis

1. $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er vilkårlige vektorer i V, så er $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ en vektor i V,
2. c er et vilkårlig tall og $\mathbf{u}$ er en vilkårlig vektor i V, så er $c\mathbf{u}$ en vektor i V.

Vektorsettet S er et **generatorsett** for V hvis og bare hvis enhver vektor i V kan skrives som en lineærkombinasjon over S.

$V = \operatorname{linsp} S$ (det **lineære spennet** til S).

En **basis** for V er et l.u. generatorsett for V.

Elementære linjeoperasjoner på en matrise bevarer eventuelle lineære sammenhenger mellom søylene i matrisen.

11. Egenverdier og egenvektorer:

$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, $x \neq 0$. $\mathbf{x}$ = **egenvektor**, λ = **egenverdi**. E_λ = **egenrommet hørende til egenverdien** λ. m_λ = **multiplisiteten** av en repetert egenverdi λ,

$$1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda.$$

Hvis $\dim(E_\lambda) < m_\lambda$ for en repetert egenverdi λ, er A defekt.

12. Diagonalisering av A, ($n \times n$-matrise)

$$K^{-1}AK = D,$$

Egenvektormatrise: (Diagonaliseringsmatrise)

$$K = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_2 & \cdots & \mathbf{k}_n \end{bmatrix},$$

der $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \ldots, \mathbf{k}_n\}$ er l.u. og egenvektorer.

Egenverdimatrise: $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_1)$

C. Logikk

1. Logikklovene

Kommutative lover
$p \vee q \equiv q \vee p$ $\quad$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$
Assosiative lover
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
Distributive lover
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Identitetslover
$p \vee \mathbf{c} \equiv p$ $\quad$ $p \wedge \mathbf{t} \equiv p$
Negasjonslover
$p \vee \sim p \equiv \mathbf{t}$ $\quad$ $p \wedge \sim p \equiv \mathbf{c}$
Dobbel negasjon
$\sim (\sim p) \equiv p$
Idempotens
$p \vee p \equiv p$ $\quad$ $p \wedge p \equiv p$
Universalgrense
$p \vee \mathbf{t} \equiv \mathbf{t}$ $\quad$ $p \wedge \mathbf{c} \equiv \mathbf{c}$
DeMorgan
$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
Absorbsjon
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $\quad$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
Negasjon av t og c
$\sim \mathbf{t} \equiv \mathbf{c}$ $\quad$ $\sim \mathbf{c} \equiv \mathbf{t}$

2. Gyldige argumenter

Et *argument* er en sekvens av premisser $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$, og en konklusjon Q. Argumentet er *gyldig* hvis og bare hvis konklusjonen er sann hver gang alle premissene er sanne.

4. Inferensregler

Modus Ponens	$p \to q$ p $\therefore\ q$
Modus Tollens	$p \to q$ $\sim q$ $\therefore\ \sim p$
Generalisering	p $\therefore\ p \vee q$
Spesialisering	$p \wedge q$ $\quad$ $p \wedge q$ $\therefore\ p$ $\quad$ $\therefore\ q$
Konjunksjon	p q $\therefore\ p \wedge q$
Eliminasjon	$p \vee q$ $\quad$ $p \vee q$ $\sim q$ $\quad$ $\sim p$ $\therefore\ p$ $\quad$ $\therefore\ q$
Transitivitet	$p \to q$ $q \to r$ $\therefore\ p \to r$
Oppdeling i tilfeller	$p \vee q$ $p \to r$ $q \to r$ $\therefore\ r$
Motsigelse	$\sim p \to \mathbf{c}$ $\therefore\ p$