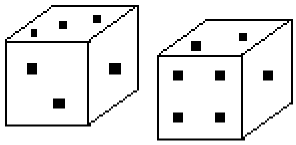
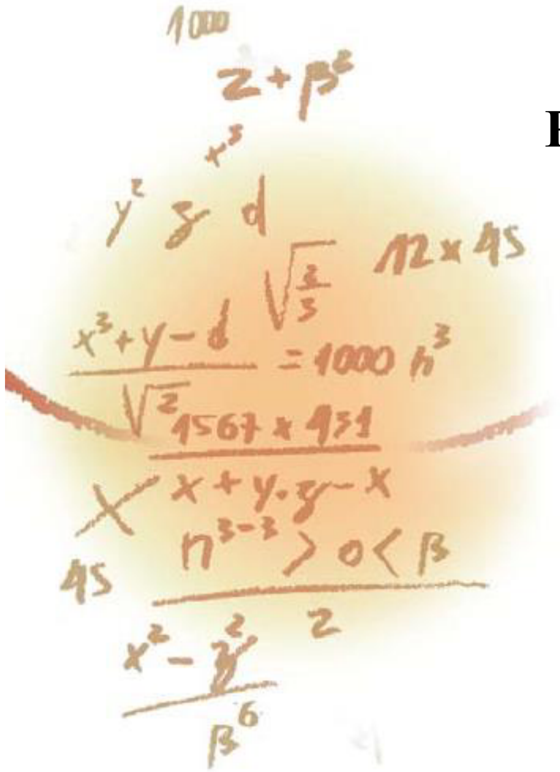
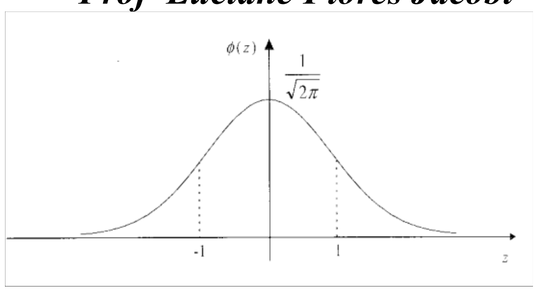




P R O B A B I L I D A D E   I

Profª Luciane Flores Jacobi



Sumário

1 – Probabilidade

É o estudo de experimentos aleatórios ou não determinados. Os fenômenos estudados pela Estatística são fenômenos cujo resultado, mesmo em condições normais de experimentação variam de uma observação para outra, dificultando dessa maneira a previsão de um resultado futuro. Para a explicação desses fenômenos – fenômenos aleatórios – adota-se um modelo matemático probabilístico, que avalia com que probabilidade os resultados podem ocorrer.

O trabalho estatístico se desenvolve a partir da observação de determinados fenômenos e emprega dados numéricos relacionados aos mesmos, para tirar conclusões que permitam conhecê-los e explicá-los a ponto de poder, com determinado grau de crença, obter o desenvolvimento teórico do fenômeno. Para tanto é necessário que se formule um modelo que ajude a melhor elucidá-lo.

No campo da estatística, os modelos matemáticos utilizados são denominados, modelos não-determinísticos ou probabilísticos, ou seja, que avaliam com que probabilidade os resultados podem ocorrer.

1.1 Noções de experimento, espaço amostral e eventos

1.1.1 Experimento aleatório [Simbologia: E]

É uma das realizações do fenômeno sob observação. Se o fenômeno seguir um modelo não-determinístico, tem-se um experimento aleatório, com as seguintes características:

- O experimento pode ser repetido;
- Embora não seja possível afirmar que resultado em particular ocorrerá, é possível descrever o conjunto de todos os resultados possíveis do experimento;
- À medida que aumenta o número de repetições aparece uma certa regularidade que torna possível a construção de um modelo matemático.

1.1.2 Espaço amostral [Simbologia: S]

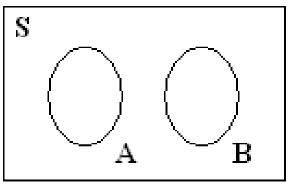
É o conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório.

1.1.3 Evento [Simbologia: A, B, C, ...]

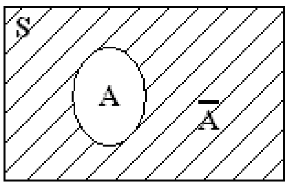
É qualquer subconjunto do espaço amostral de um experimento.

Tipos de eventos:

1. Eventos mutuamente exclusivos: dois eventos A e B são denominados mutuamente exclusivos, se eles não puderem ocorrer juntos, isto é, $A \cap B = \varnothing$;



2. Eventos complementares: são os eventos que se completam em relação ao espaço amostral, isto é, $A \cup \bar{A} = S$, onde $\bar{A}$ é o evento complementar de A;

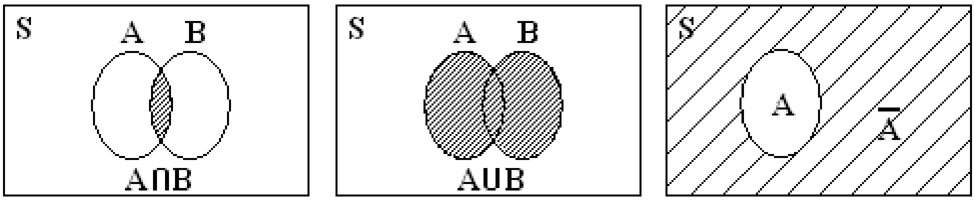


3. Eventos impossíveis: são eventos que não possuem elementos no espaço amostral, isto é, A = ∅ e P(A) = 0;
4. Eventos certos: são eventos que possuem todos os elementos do espaço amostral, isto é, A = S e P(A) = 1;
5. Eventos independentes: são eventos que podem ocorrer simultaneamente, isto é, $A \cap B \neq \varnothing$ e $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
6. Eventos dependentes: são eventos em que a ocorrência de um deles está condicionada à ocorrência de outro, acontece um evento se o outro já ocorreu, isto é, $A \cap B \neq \varnothing$ e $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$, com $P(A) \neq 0$.
7. Evento elementar: é aquele formado por um único elemento de um dado espaço amostral.

Álgebra de eventos

Podem-se combinar os eventos da mesma maneira que se faz com os conjuntos. As operações a seguir serão usadas para construção de novos eventos, a partir de eventos conhecidos.

1. Se A e B forem dois eventos, $A \cap B$ significa que A e B ocorrem;
2. Se A e B forem dois eventos, $A \cup B$ significa que A ou B ocorrem;
3. Se A for um evento, $\overline{A}$ será o evento que ocorrerá se, e somente se, A não ocorrer, sendo $\overline{A}$ o evento complementar de A.



Propriedades dos eventos

Sejam A, B e C eventos associados a um espaço amostral S. As seguintes propriedades são válidas:

a) Idempotentes: $A \cap A = A$ $\quad A \cup A = A$
b) Comutativas: $A \cup B = B \cup A$ $\quad A \cap B = B \cap A$
c) Associativas: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $\quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
d) Distributivas: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $\quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
e) Absorções: $A \cup (A \cap B) = A$ $\quad A \cap (A \cup B) = A$
f) Identidades: $A \cap S = A$ $\quad A \cup S = S$ $\quad A \cap \phi = \phi$ $\quad A \cup \phi = A$
g) Complementares: $\overline{S} = \phi$ $\quad \overline{\phi} = S$ $\quad A \cap \overline{A} = \phi$ $\quad A \cup \overline{A} = S$ $\quad (\overline{\overline{A}}) = A$
h) Leis das Dualidades ou Leis de De Morgan: $(\overline{A \cap B}) = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\qquad (\overline{A \cup B}) = \overline{A} \cap \overline{B}$

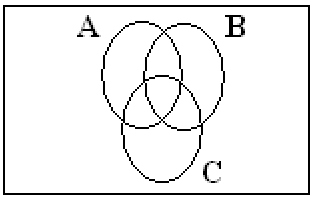
Exemplo 1.1: Sejam A, B e C três eventos de um espaço amostral. Expressar os eventos abaixo, usando as operações união, intersecção, e complementação.

a) Somente A ocorrer: $\{ A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \}$
b) A, B e C ocorrerem: $\{ A \cap B \cap C \}$
c) A e C ocorrerem, mas B não: $\{ A \cap \overline{B} \cap C \}$
d) Pelo menos um ocorrer: $\{ A \cup B \cup C \}$
e) Exatamente um ocorrer: $\{ (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \}$
f) Nenhum ocorrer: $\{ \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \}$
g) Exatamente dois ocorrerem: $\{ (\overline{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \}$
h) Pelo menos dois ocorrerem: $\{ (\overline{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap C) \}$

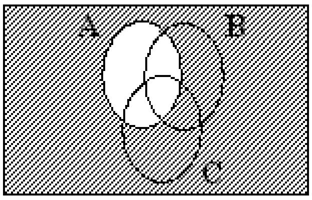
i) No máximo dois ocorrerem:

$$\{(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap B\cap\overline{C})\cup(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C)\cup(\overline{A}\cap B\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap C)$$
$$\cup(A\cap B\cap\overline{C})\}$$

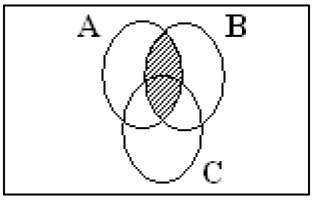
Exemplo 1.2: Três eventos são mostrados no diagrama de Venn na figura abaixo. Reproduza a figura e sombreie a região que corresponde a cada um dos seguintes eventos:



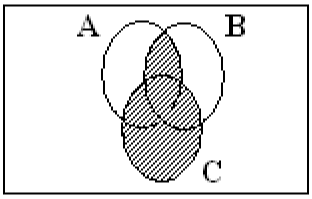
a) $\overline{A}$.



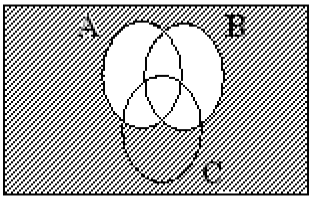
b) $A\cap B$.



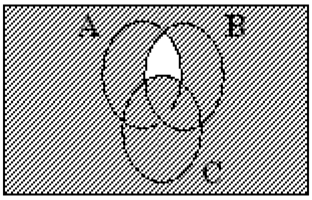
c) $(A\cap B)\cup C$.



d) $\overline{(A\cup B)}$.



e) $\overline{(A\cap B)}\cup C$.



Exemplo 1.3: Lance um dado e uma moeda.

a) Construa o espaço amostral
b) Enumere os seguintes eventos
   A = {coroa, marcado por número par}
   B = {cara, marcado por número ímpar}
   C = {múltiplos de 3}
c) Expresse os eventos
   I) $\overline{B}$
   II) A ou B ocorrem
   III) B e C ocorrem
   IV) $\overline{A\cup B}$
d) Verifique dois a dois os eventos A, B e C e diga quais são mutuamente exclusivos

Solução: C = coroa, K = cara:

a) S = {(1,C);(2,C);(3,C);(4,C);(5,C);(6,C);(1,K);(2,K);(3,K);(4,K);(5,K);(6,K)};
b) A = {(2,C);(4,C);(6,C)};
   B = {(1,K);(3,K);(5,K)};

$C = \{(3,C);(6,C);(3,K);(6,K)\}$.

c)

i) $\overline{B} = \{(1,C);(2,C);(3,C);(4,C);(5,C);(6,C);(2,K);(4,K);(6,K)\}$;

ii) $A \cup B = \{(2,C);(4,C);(6,C);(1,K);(3,K);(5,K)\}$;

iii) $B \cap C = \{(3,K)\}$;

iv) $\overline{A \cup B} = \{(1,C);(3,C);(5,C);(2,K);(4,K);(6,K)\}$.

d) $A \cap B = \varnothing$, são mutuamente exclusivos;

$A \cap C = \{(6,C)\}$, não são mutuamente exclusivos;

$B \cap C = \{(3,K)\}$, não são mutuamente exclusivos.

1.2 Conceitos de probabilidade

O problema fundamental da probabilidade consiste em: "atribuir um número a cada evento A, o qual avaliará as chances de ocorrência de A quando o experimento for realizado".

1.2.1 Definição clássica de probabilidade ou "a priori"

É válida para espaços amostrais finitos e equiprováveis, sendo que teve suas origens nos trabalhos de matemáticos do século XVII, como Blaise Pascoal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665) no contexto dos jogos de azar.

Se todos os resultados de um espaço amostral finito forem igualmente prováveis, ou seja, admitindo-se que S possa ser escrito sob a forma $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, então, a cada evento formado por um resultado simples (a_i) associa-se um número "p_i", denominado probabilidade de A, que satisfaça as seguintes condições:

- $p_i \geq 0$;
- $P(S) = p_1 + p_2 + \ldots + p_k = \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$;
- $p_i = \frac{1}{k}$, já que todos os resultados são igualmente prováveis.

Disto decorre que, para qualquer evento A constituído de r resultados simples têm-se:

$$P(A) = r \cdot 1/k = \frac{r}{k}, \text{ sendo que:}$$

$$P(A) = \frac{\text{nº de casos favoráveis a A pelos quais E pode ocorrer}}{\text{nº total de casos pelos quais E pode ocorrer}} = r / k$$

Pela definição clássica de probabilidade devida a Laplace: seja E um experimento aleatório que dá origem a k resultados mutuamente excludentes e igualmente possíveis. Seja A um evento constituído por r resultados de E. A probabilidade de ocorrer o evento A é definida como sendo a razão r/k.

Exemplo 1.4: Escolha aleatoriamente uma carta de um baralho comum de 52 cartas. Calcular P(A), P(B) sendo A igual a uma carta de espada e B igual a uma carta de figura, isto é, um valete, rainha ou rei.

Solução:

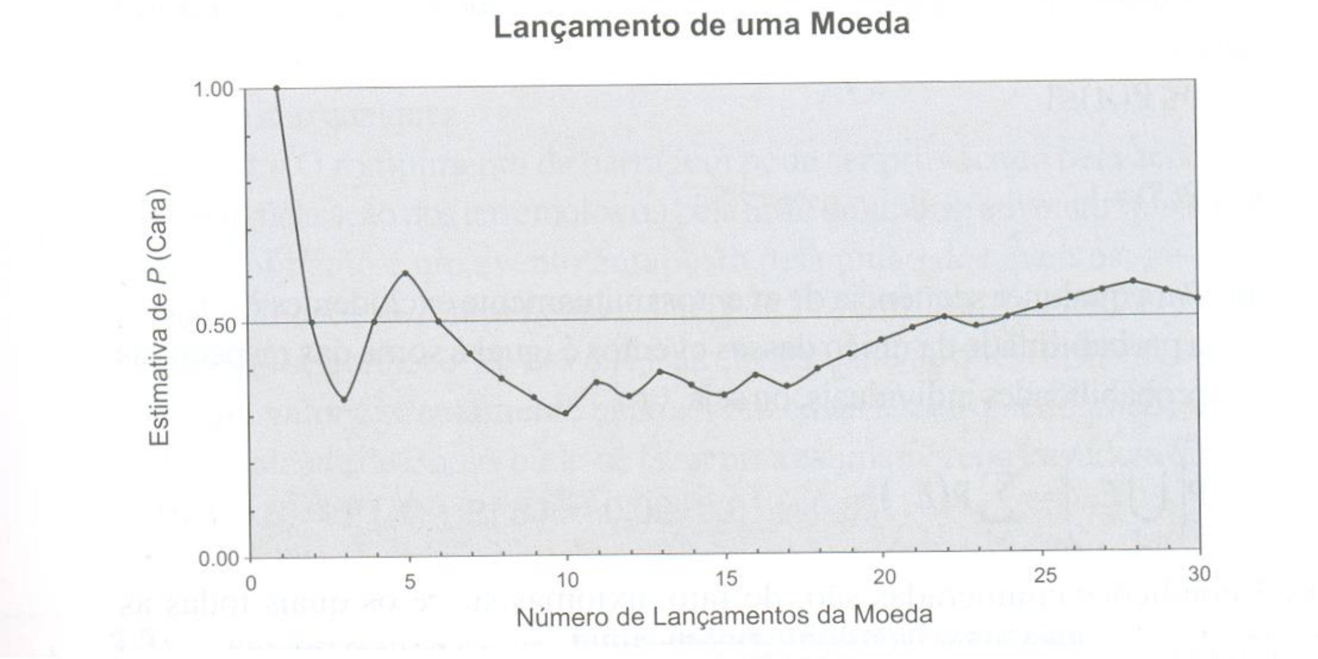
$$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}; \qquad P(B) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13};$$

1.2.2 Conceito empírico ou "a posteriori"

É uma interpretação da probabilidade como freqüência relativa. Existem muitas situações em que a definição clássica é completamente apropriada, enquanto, em outras, são verificadas duas limitações. A primeira refere-se à impossibilidade de acomodar o cenário em que os resultados do experimento não sejam equiprováveis, enquanto a segunda diz respeito à não contemplação de espaços amostrais infinitos. Essas limitações determinam a formulação da definição de probabilidade, denominada empírica, mais abrangente e, geralmente, atribuída ao matemático Richard Von Mises (1883 – 1953).

Repetindo-se um experimento E um grande número de vezes e calculando-se a freqüência relativa do evento A, obtém-se um número "p" que pode ser tomado como a probabilidade da ocorrência de A, que nesse caso, poderia ser tomada como:

$$P(A) = p = \lim_{n \to \infty} \frac{f(A)}{n}$$



1.2.3 Definição axiomática

Em 1933, o matemático russo Andrei Kolmogorov (1903 – 1987) formulou a chamada definição axiomática de probabilidade.

Seja E um experimento e S um espaço amostral associado a E. A cada evento A associa-se um número real representado por P(A) e denominado probabilidade de A, que satisfaça aos seguintes axiomas:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$;
2. $P(S) = 1$;
3. Se A e B forem eventos mutuamente excludentes, então: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;
4. Se $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ forem dois a dois eventos mutuamente excludentes, então:
   $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) + \ldots$

Exemplo 1.5: Um lote é formado por 10 peças boas, 4 com defeitos e duas com defeitos graves. Calcule a probabilidade de que:

a) Ela não tenha defeitos graves; $\frac{14}{16} = \frac{7}{8}$.

b) Ela não tenha defeitos; $\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$.

c) Ela ou seja boa ou tenha defeitos graves. $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

Teoremas fundamentais:

Teorema 1: se $\varnothing$ for um evento (conjunto) vazio, então: $P(\varnothing) = 0$;

DEM: Seja A um evento qualquer, A e Ø são disjuntos, pois $A \cap \varnothing = \varnothing$

$P(A \cup \varnothing) = P(A) + P(\varnothing)$ pelo axioma 3

$P(A) = P(A) + P(\varnothing)$ pois $A \cup \varnothing = A$

Portanto $P(\varnothing) = 0$.

Teorema 2: se $\overline{A}$ for um evento complementar de A, então: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

DEM: Pode-se escrever $S = A \cup \overline{A}$ e $A \subset \overline{A}$ são disjuntos pois $A \cap \overline{A} = \varnothing$ então:

$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$

$P(S) = P(A) + P(\overline{A})$ e pelo axioma 2

$1 = P(A) + P(\overline{A})$ logo $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

Teorema 3: se A e B forem eventos quaisquer, então: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

DEM: Os eventos A e $(\overline{A} \cap B)$ são mutuamente exclusivos. Logo pelo axioma 3 $P(A \cup (\overline{A} \cap B) = P(A \cup B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B)$. Mas B é a união dos eventos mutuamente exclusivos $(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$; logo $P(B \cap \overline{A}) = P(B) – P(B \cap A)$ que substituindo tem-se:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(B \cap A)$.

Teorema 4: se A e B forem eventos de um espaço amostral S e se $A \subset B$, então: $P(A) \leq P(B)$.

DEM: Pode-se escrever $B = A \cup (\overline{A} \cap B)$, A e $(\overline{A} \cap B)$ são mutuamente exclusivos logo; $P(B) = P(B) – P(A)$, mas pelo axioma 1, $P(B) – P(A) \geq 0$ logo $P(B) \geq P(A)$.

Exemplo 1.6: Se $P(A) = 1/2$; $P(B) = 1/4$; e A e B são mutuamente exclusivos, calcular:

a) $P(\overline{A}) = 1 – P(A) = 1 – 1/2 = 1/2$.
b) $P(\overline{B}) = 1 – P(B) = 1 – 1/4 = 3/4$.
c) $P(A \cap B) = 0$.
d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1/2 + 1/4 = 3/4$.
e) $P(\overline{A \cap B}) = 1 – (A \cap B) = 1 – 0 = 1$.

1.3 Probabilidade condicionada

Seja A e B dois eventos associados a um experimento E. Denota-se por P(B/A), a probabilidade do evento B, condicionada a ocorrência do evento A.

Sempre que se calcula a P(B/A), se está, essencialmente, calculando P(B) em relação ao espaço reduzido A e utiliza-se a seguinte fórmula, onde $P(A) \neq 0$:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ com } P(A) \neq 0 \text{, pois A já ocorreu.}$$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ com } P(B) \neq 0 \text{, pois B já ocorreu.}$$

Pode-se escrever também, através do teorema do produto:

$$P(A \cap B) = P(A/B) \,.\, P(B) \qquad \text{e} \qquad P(B \cap A) = P(B/A) \,.\, P(A)$$

Que representa uma alternativa para o cálculo da probabilidade da interseção de dois eventos.

Exemplo 1.7: Em certa escola, 25% dos estudantes foram reprovados em matemática, 15% em química e 10% em matemática e química. Um estudante é selecionado aleatoriamente.

a) Se ele reprovou em química qual é a probabilidade que tenha reprovado em matemática?

b) Se ele reprovou em matemática, qual a probabilidade de que tenha reprovado em química?

c) Qual é a probabilidade de que tenha reprovado em matemática ou química?

Solução:

a) $P\left(M/Q\right) = \dfrac{P(M \cap Q)}{P(Q)} = \dfrac{0{,}10}{0{,}15} = 0{,}6667 = 66{,}67\%$;

b) $P\left(Q/M\right) = \dfrac{P(M \cap Q)}{P(M)} = \dfrac{0{,}10}{0{,}25} = 0{,}4 = 40\%$;

c) $P(M \cup Q) = P(M) + P(Q) - P(M \cap Q) = 0{,}25 + 0{,}15 - 0{,}10 = 0{,}3 = 30\%$.

1.4 Independência estatística

Se a ocorrência ou não do evento A, não afetar a probabilidade de ocorrência do evento B e vice-versa, diz-se que A e B são independentes.

É compreensível que os eventos A e B sejam inteiramente não relacionados. Saber que B ocorreu não fornece qualquer informação sobre a ocorrência de A. De fato, o cálculo seguinte mostra isso:

Se A e B forem independentes, pode-se escrever:

$$P(A/B) = P(A) \qquad \text{e} \qquad P(B/A) = P(B)$$

Nesse caso, usando-se a expressão anterior para $P(A\cap B)$, tem-se:

$$P(A\cap B) = P(A/B)\,.\,P(B) = P(A)\,.\,P(B)$$
$$P(A\cap B) = P(B/A)\,.\,P(A) = P(A)\,.\,P(B)$$

Chegando-se à condição de independência, na qual A e B serão eventos independentes se e somente se:

$$P(A\cap B) = P(A)\,.\,P(B)$$

Exemplo 1.8: A probabilidade de que um homem viverá mais dez anos é 1/4 e a probabilidade que sua esposa viverá mais dez anos é 1/3. Encontre a probabilidade de que: a) ambos estarão vivos em dez anos; b) ao menos um estará vivo em dez anos; c) nenhum estará vivo em dez anos; d) somente a esposa estará viva em dez anos.

Solução: Faça A = eventos em que o homem estará vivo em dez anos, e B = eventos em que sua esposa estará viva em dez anos. Então P(A) = 1/4 e P(B) = 1/3.

a) $P(A \cap B) = P(A)xP(B) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{12}$.

b) $P(A \cup B) = P(A)+P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{2}$.

c) Sendo $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ e $P(\overline{B}) = 1 - P(B)$;

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \left(1-\frac{1}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

d) $(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A})xP(B) = \frac{3}{4}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$.

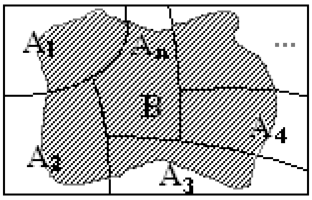
1.5 Teorema de Bayes

Suponha que os eventos $A_1, A_2, ..., A_n$ formam uma partição do espaço amostral S, ou seja, os eventos A_i são mutuamente exclusivos e sua união é S. Fazendo B ser qualquer outro evento então:

$$B = S \cap B = (A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) \cap B$$

$$B = S \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup ... \cup (A_n \cap B)$$

Onde os $A_i \cap B$ são também mutuamente exclusivos.



Conseqüentemente

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + ... + P(A_n \cap B)$$

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)},$$

onde: $P(B) = P(B/A_1)\,.\,P(A_1) + P(B/A_2)\,.\,P(A_2) + ... + P(B/A_n)\,.\,P(A_n)$ = probabilidade total

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i).P(Ai)}{P(B/A_1).P(A_1) + P(B/A_2).P(A_2) + ... + P(B/A_n).P(A_n)}$$

Generalizando-se essa aplicação para B_i:

$$P(A_i/B) = \frac{P\left(B/A_i\right)\cdot P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P\left(B/A_i\right)\cdot P(A_i)}$$

onde: $P(A_i)$ = probabilidades à priori (conhecidas);
$P(B/A_i)$ = probabilidades condicionais (conhecidas);
$P(A_i/B)$ = probabilidades à posteriori.

Esse resultado é conhecido como teorema de Bayes. É também denominada fórmula da probabilidade das causas ou dos antecedentes. Desde que os A_i\`s constituam uma partição do espaço amostral, um e somente um, dos eventos $A_i$ ocorrerá. Portanto, a expressão acima nos dá a probabilidade de um particular $A_i$ dado que o evento B tenha ocorrido. A fim de aplicar esse teorema, deve-se conhecer os valores dos $A_i$\`s, sendo que, se esses valores são desconhecidos, fica impossibilitada a sua aplicação.

Exemplo 1.9: Três máquinas, A, B e C produzem respectivamente 60%, 30% e 10% do total de peças de uma fábrica. As porcentagens de peças defeituosas nas respectivas máquinas são de 2%, 3% e 4%. Uma peça é sorteada ao acaso e verifica-se que é defeituosa. Qual a probabilidade de que a peça tenha vindo da máquina C?

Solução: Sendo x = peças defeituosas, procuramos P(C/x), a probabilidade de que uma peça tenha sido produzida pela máquina C dado que é defeituosa. Pelo teorema de Bayes,

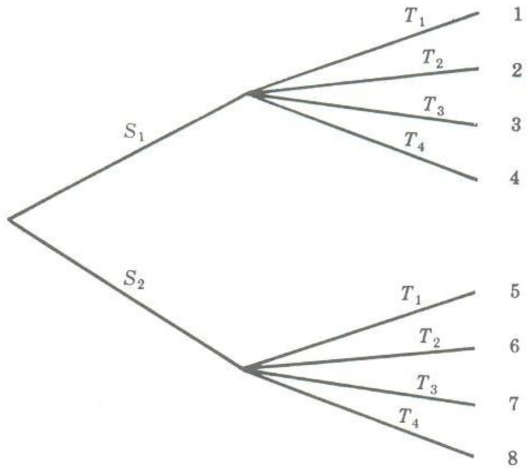
$$P(C/x) = \frac{P(C)\times P(x/C)}{P(A)\times P(x/A)+P(B)\times P(x/B)+P(C)\times P(x/C)};$$

$$P(C/x) = \frac{0{,}10\times 0{,}40}{0{,}60\times 0{,}02+0{,}30\times 0{,}03+0{,}10\times 0{,}04} = \frac{4}{25} = 16\%.$$

1.6 Diagrama de Árvore

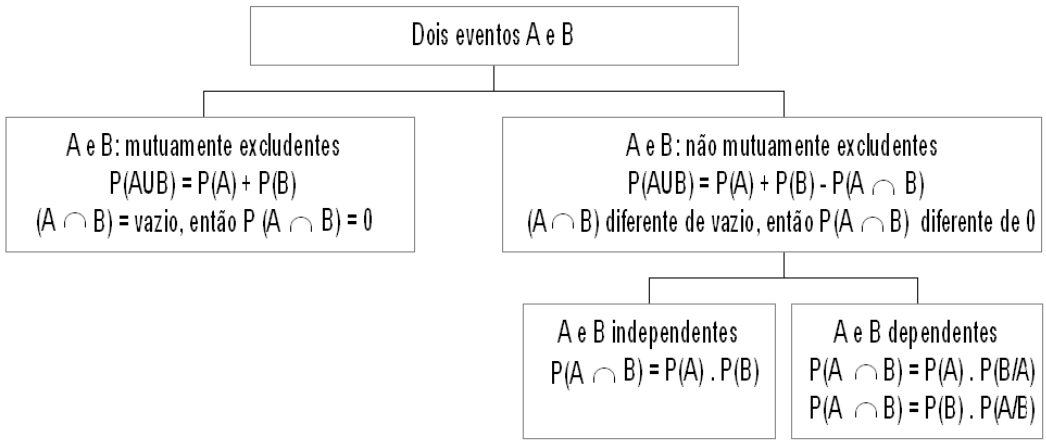
Um diagrama de árvore é uma idéia usada para enumerar todos os possíveis resultados de uma seqüência de experimentos, onde cada experimento pode ocorrer um número finito de vezes.

Partindo de um ponto do lado esquerdo do diagrama, para cada primeiro elemento possível de um par origina-se um segmento de reta direcionado para a direita. Cada uma dessas retas é denominada ramo de primeira geração. Para cada ramo de primeira geração cria-se na extremidade do ramo, para cada escolha possível do segundo elemento do par. Cada segmento de reta é um ramo de segunda geração, e assim sucessivamente até se encontrar todos os ramos necessários. Abaixo encontra-se um diagrama de árvore com ramos de primeira e segunda geração.



Exemplo 1.10: São dadas três caixas como segue: A caixa I tem 10 lâmpadas, das quais 4 são defeituosas. A caixa II tem 6 lâmpadas, das quais 1 é defeituosa. A caixa III tem 8 lâmpadas, das quais 3 são defeituosas. Seleciona-se uma caixa aleatoriamente e então se retira uma lâmpada também aleatoriamente. Qual a probabilidade de que a lâmpada seja defeituosa?

1.7 Resumo das propriedades do cálculo de probabilidades



2 – Variáveis Aleatórias

Na prática é, muitas vezes, mais interessante associarmos um número a um evento aleatório e calcularmos a probabilidade da ocorrência desse número do que a probabilidade do evento.

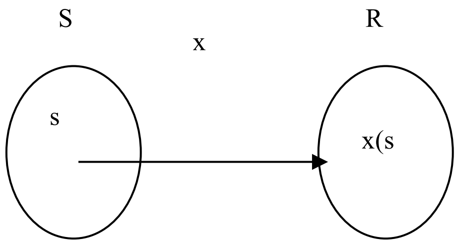
Ao descrever um espaço amostral, não especificamos que um resultado individual necessariamente seja um número.

Dada uma experiência aleatória, podemos sempre associar a seus resultados (eventos) mutuamente exclusivos uma probabilidade. É claro que esses resultados podem ser expressos sempre numericamente, mesmo quando possuem natureza qualitativa. Neste caso mediante uma convenção adequada, associa-se a cada resultado um número.

Considerando uma variável X, que assume um e só um valor numérico cada vez que ocorre um evento. A esta grandeza numérica, que assume diferentes valores, estando cada um destes valores associados a uma certa probabilidade, dá-se o nome de variável aleatória (v.a.).

Definição:

Sejam E um experimento e S o espaço amostral associado ao experimento. Uma função X, que associa a cada elemento $s \in S$ um número real X(s) é denominado variável aleatória.



Variável Aleatória

OBS : Quando nos referimos as variáveis aleatórias empregamos letras maiúsculas X, Y, Z, ... Contudo, quando falamos do valor que essas variáveis aleatórias assumem usa-se, em geral letras minúsculas, como x, y, z, ...

2.1 Variáveis Aleatórias Discretas

Seja X uma variável aleatória. Se o número de valores possíveis de X for finito ou infinito numerável, diz-se que X é uma variável aleatória discreta (v. a. d.).

Exemplo 2.1: Lançam-se três moedas. Seja X = número de ocorrências da face cara. Associe um número a cada evento do espaço amostral.

Solução: O espaço amostral do experimento é: c = cara; k = coroa.

$S = [(c,c,c);(c,c,k);(c,k,c);(k,c,c);(c,k,k)(k,c,k)(k,k,c);(k,k,k)]$. Se X é o número de caras, X pode assumir os valores 0, 1, 2 e 3. Pode-se associar a esses números eventos que correspondam à ocorrência de nenhuma, uma, duas ou três caras respectivamente, como segue:

x	Eventos correspondetes
0	$A_1 = [(k,k,k)]$
1	$A_2 = [(c,k,k)(k,c,k)(k,k,c)]$
2	$A_3 = [(c,c,k);(c,k,c);(k,c,c)]$
3	$A_4 = [(c,c,c)]$

2.1.1 Função de probabilidade (fp) de uma v. a. d.

Seja X uma variável aleatória discreta. Portanto, o contradomínio de X, R_x será formado, no máximo, por um número infinito numerável de valores $x_1, x_2, \ldots$ A cada possível resultado x_i, associa-se um número $p(x_i) = P(X = x_i)$ denominado probabilidade de x_i.

Os números $p(x_i)$, i = 1, 2, ... devem satisfazer as condições:

a) $0 \leq p(x_i) \leq 1$

b) $\sum_{i=1}^{\infty} p(X_i) = 1$

c) A notação utilizada será: $P(X = x_i) = p(x_i)$ ou

X	x_1	x_2	...	X_n
$p(x_i)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	....	$p(x_n)$

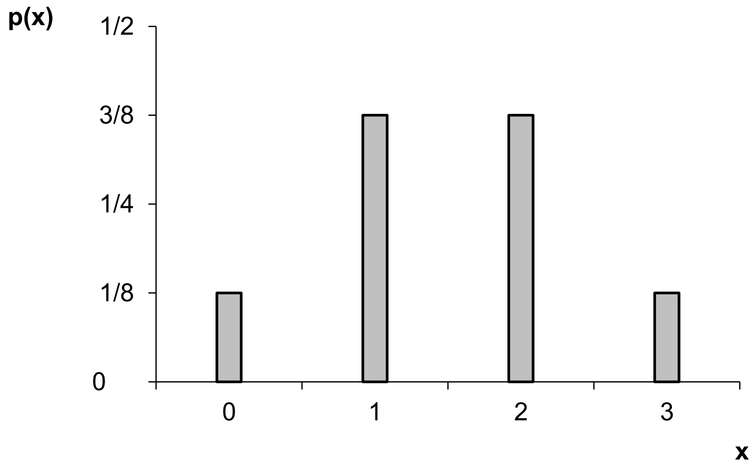
Exemplo 2.2: Determine a função de probabilidade correspondente à variável aleatória X, vista no exemplo 2.1 e construa seu gráfico.

Solução: Pode-se ainda associar às probabilidades de X assumir um dos valores, as probabilidades dos eventos correspondentes:

Graficamente:

$P(x=0) = P(A_1) = 1/8$
$P(x=1) = P(A_2) = 3/8$
$P(x=2) = P(A_3) = 3/8$
$P(x=3) = P(A_4) = 1/8$

X	0	1	2	3
P(x)	1/8	3/8	3/8	1/8



2.1.2 Função de repartição de uma v. a. d.

Define-se a função F como a função de distribuição acumulada da variável aleatória X como: $F(x) = P(X \leq x)$.

Propriedades da F(x).

1) $F(x) = \sum_{xi \leq x} P(xi)$
2) $F(-\infty) = 0$
3) $F(\infty) = 1$
4) $P(a < x \leq b) = F(b) - F(a)$
5) $P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a) + P(x = a)$
6) $P(a < x < b) = F(b) - F(a) - P(x = b)$
7) A função é não decrescente, isto é, $F(b) \geq F(a)$, para $b \geq a$.

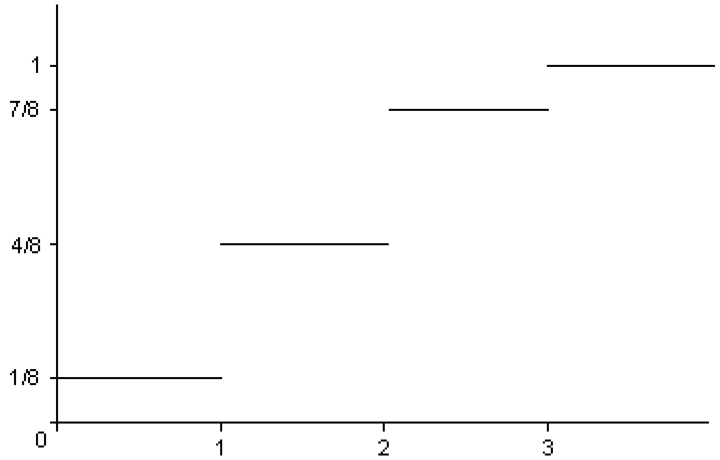
Como X assume apenas um número finito de valores $x_1, x_2, ..., x_n$ então a função de distribuição é dada por:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < x_1 \\ f(x_1) & x_1 \le x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2) & x_2 \le x < x_3 \\ \vdots & \vdots \\ f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) = 1 & x_n \le x < \infty \end{cases}$$

Exemplo 2.3: Determine a função de distribuição da v.a.d. X, do exemplo 2.1 e trace seu gráfico.

Solução:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/8, & 0 \le x < 1 \\ 4/8, & 1 \le x < 2 \\ 7/8, & 2 \le x < 3 \\ 1, & x \ge 3 \end{cases}$$



2.1.3 Valor médio de uma v. a. d.

Dada uma v. a. X discreta, assumindo os valores $x_1, \ldots, x_n$, chama-se valor médio ou esperança matemática o valor

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Propriedades da E(X)

a) $E(k) = k$
b) $E(k \cdot X) = k \cdot E(X)$
c) $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$
d) $E(k \pm X) = k \pm E(X)$

Exemplo 2.4: Um jogador lança um dado. Se ocorrer um número primo, ele ganha este número em reais, mas se ocorrer um número que não seja primo ele perde este número em reais. Qual a esperança de ganho do jogador em uma partida?

Solução:

X	-1	2	3	-4	5	-6
P(x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

$E(X) = -1 \times 1/6 + 2 \times 1/6 + 3 \times 1/6 + -4 \times 1/6 + 5 \times 1/6 + -6 \times 1/6 = -1/6$

2.1.4 Variância de uma v. a. d.

Define-se variância de uma variável aleatória como sendo:

$\text{Var}(x) = \sigma_x^2 = E[(x-\mu x)^2] = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i - \mu_x)^2 P(x_i)$

Pode-se encontrar uma fórmula mais prática para o cálculo da variância.
Assim:

$\text{Var}(x) = \sum (x)^2 - [E(x)]^2$ onde $E(x^2) = \sum_{i=1}^{\infty} x^2 p(x)$.

Propriedades da variância:

i) A variância de uma constante é zero. $V(k) = 0$

ii) Multiplicando-se uma variável aleatória por uma constante sua variância fica multiplicada pelo quadrado da constante. $V(kx) = k^2 V(x)$

iii) Somando-se ou subtraindo-se uma constante à uma variável aleatória, sua variância não se altera. $V(k \pm x) = V(x)$

iv) A variância da soma ou diferença de duas variáveis aleatórias independentes é a soma das respectivas variáveis. $V(x \pm y) = V(x) + V(y)$ se x e y forem independentes.

2.1.5 Desvio Padrão

O desvio padrão é a raiz quadrada da variância $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$

Exemplo 2.5: Determine a variância e o desvio padrão para os dados do exemplo 2.4.

$E(X^2) = (-1)^2 \times 1/6 + (2)^2 \times 1/6 + (3)^2 \times 1/6 + (-4)^2 \times 1/6 + (5)^2 \times 1/6 + (-6)^2 \times 1/6 = 15{,}17$

$V(X) = 15{,}17 - (0{,}17)^2 = 15{,}1411$ $\qquad \sigma_x = \sqrt{15{,}1411} = 3{,}89$

2.2 Variáveis Aleatórias Contínuas

Seja X uma variável aleatória. Se X pode assumir um número infinito de valores, correspondendo aos pontos de um intervalo de uma reta de números, diz-se que X é uma variável aleatória contínua (v. a. c.).

2.2.1 Função densidade de probabilidade (f.d.p.) de uma v. a. c.

Se X é uma variável aleatória contínua. A função densidade de probabilidade de X é uma função que satisfaz as seguintes condições:

a) $f(x) \geq 0 \ \forall x \in R_x$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

c) para quaisquer a, b com $-\infty < a < b < \infty$, teremos: $P(a < x < b) = \int_a^b f(x)\,dx$

Exemplo 2.6: Verificar se $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & , se\ 0 < x \leq 2 \\ 0 & , e.c.c. \end{cases}$ é fdp.

Solução:

i) $f(x) \geq 0 \ \forall x$

ii) $\int_0^2 2x + 3dx = 1 \rightarrow 2.\frac{x^2}{2} + 3.x \Big|_0^2 = 4 + 6 = 10$, não é fdp.

Exemplo 2.7: Seja a função f, definida em R, por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , se\, x \le 0 \\ x/2 & , 0 < x \le k \\ 0 & , se\, x > k \end{cases}$$

onde k é uma constante real. Determine para que valores de k, f é função densidade de probabilidade de uma v.a. x.

Solução: $\int_0^k x/2\, dx = 1 \to \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^k = 1 \to \frac{1}{4}k^2 = 1 \to k^2 = 4 \to k = \pm 2$, mas como $f(x) \ge 0$, k = 2.

2.2.2 Função de repartição de uma v. a. c.

Dada uma v. a. X com função densidade de probabilidade f(x), define-se a sua função de distribuição acumulada, F(x), como: F(x) = P(X $\le$ x), $-\infty < x < \infty$.

Assim $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

Propriedades da F(x).

1) $0 \le F(x) \le 1$
2) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
3) $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
4) F(x) é contínua à direita $\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$
5) F(x) é descontínua à esquerda, nos pontos em que a probabilidade é diferente de zero. $\lim_{x \to x_0} F(x)$ é diferente $F(x_0)$ para $P(x = x_0)$ diferente de 0.

Exemplo 2.8: Suponha que X seja uma variável contínua com fdp $f(x) = \begin{cases} 2x & , se\, 0 < x \le 1 \\ 0 & , p.o.v. \end{cases}$. Encontre, a fdp acumulada, F. de x.

Solução: $F(x) = \int_0^x 0dt = 0$ para x < 0;

$$F(x) = \int_0^x 2tdt = 2\frac{t^2}{2}\Big|_0^x = x^2 \text{ para } 0 < x < 1;$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^1 2x.dx + \int_1^x 0.dx = 1 \text{ para } x \ge 1.$$

Exemplo 2.9: Suponha que uma v.a.c. tenha a fd F dada por: $F(x) = \begin{cases} 0 & , x \le 0 \\ 1 - e^{-x} & , x > 0 \end{cases}$. Encontre a f.d.p. de x.

Solução: $f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & , p.o.v. \\ e^{-x} & , x > 0 \end{cases}$.

2.2.3 Valor médio de uma v. a. c.

Dada uma v. a. X contínua, chama-se valor médio ou esperança matemática o valor

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

Propriedades da E(X)

a) E(k) = k
b) E(k·X) = k·E(X)
c) E(X ± Y) = E(X) ± E(Y)
d) E(k ± X) = k ± E(X)

Exemplo 2.10: A distribuição da quantidade de cascalho (em toneladas) vendida por uma empresa de materiais de construção em uma semana é uma v.a.c. X com fdp $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-x^2) & , se\, 0 \le x \le 1 \\ 0 & , p.o.v. \end{cases}$.

Determine o valor médio de cascalho vendida por semana.

Solução:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_0^1 x \frac{3}{2}(1-x^2) dx = \frac{3}{2}\int_0^1 (x - x^3) dx = \frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{3}{8}$$

2.2.4 Variância de uma v. a. c.

Define-se variância de uma variável aleatória contínua como sendo:

Var(x) = $E(x^2) - (E(x))^2$ Onde: $E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 . f(x)\, dx$

Propriedades da variância:

v) A variância de uma constante é zero. V(k) = 0
vi) Multiplicando-se uma variável aleatória por uma constante sua variância fica multiplicada pelo quadrado da constante. V(kx) = k^2V(x)
vii) Somando-se ou subtraindo-se uma constante à uma variável aleatória, sua variância não se altera. V(k $\pm$x) = V(x)
viii) A variância da soma ou diferença de duas variáveis aleatórias independentes é a soma das respectivas variáveis. V(x $\pm$y) = V(x) + V(y)

2.2.5 Desvio Padrão

O desvio padrão é a raiz quadrada da variância $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$

Exemplo 2.11: A venda semanal de leite, em milhares de litros, de uma cooperativa pode ser representada por uma v.a. X com função de distribuição de probabilidade

$$F(x) = \begin{cases} 0 & se\, x \le 0 \\ x^3 & se\, 0 < x < 1 \\ 1 & se\, x \ge 0 \end{cases}.$$

a) Determine a f.d.p.
b) Calcule E(x) e V(x)

Solução: a) $f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & se\, x \leq 0 \\ 3x^2 & se\, 0 < x < 1 \\ 0 & se\, x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & e.c.c. \\ 3x^2, 0 < x < 1 \end{cases}$;

b) $E(x) = \int_0^1 x\, f(x)\, dx = \int_0^1 x.3x^2\, dx = \int_0^1 3x^3\, dx = 3.\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{3}{4}$;

$E(x^2) = \int_0^1 x^2\, f(x)\, dx = \int_0^1 x^2.3x^2\, dx = \int_0^1 3x^4\, dx = 3.\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1 = \frac{3}{5}$;

$V(x) = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{48-45}{80} = \frac{3}{80}$.

2.3 Função Geradora de Momentos (fgm)

Seja X uma variável aleatória. A função geradora de momentos de X é a função M: R $\mapsto$ R, definida por:

$M_x(t) = E(e^{tx})$, t $\in$ R se $E(e^{tx})$ existir.

Se X for uma variável aleatória discreta, tem-se: $M_x(t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{tx_j} p(x_j)$;

Se X for uma variável aleatória contínua, tem-se: $M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$;

Propriedades:

$P_1 - M_x(t) > 0 \;\; \forall \; t \in R$

$P_2 - M_x(0) = 1$

$P_3 - M_x(t)$ é única.

Teorema: Seja X uma v.a. Se a fgm de X exista então: $M_x^{n'}(o) = E(X^n)$, isto é, a derivada n-ésima de $M_x(t)$, calculada para t = 0, fornece $E(x^n)$.

A função geradora de momentos determina, univocamente, a distribuição de probabilidade de uma v.a., como observa-se no teorema seguinte:

Sejam X e Y duas v_s. a_s. cujas fgm , são respectivamente M_x e M_y. Se $M_x(t) = M_y(t)$ para algum intervalo contendo a origem, então as v_s. a_s. X e Y têm a mesma distribuição de probabilidade.

Exemplo 2.12: A v.a x pode tomar os valores 1 e -1 com probabilidade 1/2 cada um. Determine a função geratriz de momentos.

Solução:

x	-1	1
p(x)	1/2	1/2

$M_x(t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{txj} p(xj) = e^{tx}.p(x) = \frac{1}{2}.e^{t} + \frac{1}{2}.e^{t} = \frac{1}{2}\left(e^{-t} + e^{t}\right)$

Exemplo 2.13: Uma v.a. x tem f.d.p. dada por $f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 2e^{-2x} & , x \geq 0 \end{cases}$. Determine a função geratriz de momentos.

Solução: $M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} e^{tx}.0dx + \int_{0}^{\infty} e^{tx}.2e^{-2x}dx = \int_{0}^{\infty} 2.e^{x(t-2)}dx = \frac{2}{t-2} e^{x(t-2)}\Big|_0^{\infty} = \frac{2}{t-2}[0-1] =$

$M_x(t) = \frac{-2}{t-2}$.

2.4 Função característica

Define-se função característica da variável aleatória X como:

$\Phi_x(t) = E(e^{itx})$ onde i = $\sqrt{-1}$

$\Phi_x(t)$ é estritamente relacionada com $M_x(t)$ e tem a vantagem de existir sempre. (Ampliação do universo dos reais para os complexos).

Dado que $e^{itx} = \cos(tx) + i\,\mathrm{sen}(tx)$ então:

$\Phi_x(t) = E[\cos(tx)] + iE[\mathrm{sen}(tx)]$.

Exemplo 2.14: Determine a função característica da v.a. x cuja função de densidade é:

$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{2} e^{-a|x|} & ,-\infty < x < \infty \quad a > 0 \end{cases}$.

Solução: $\Phi_x(t) = E(e^{itx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{a}{2} e^{-a|x|}dx = \int_{-\infty}^{0} e^{itx} \frac{a}{2} e^{-a(-x)}dx + \int_{0}^{\infty} e^{itx} \frac{a}{2} e^{-ax}dx =$

$= \frac{a}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{x(it+a)}dx + \frac{a}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{-x(a-it)}dx = \frac{a}{2}.\frac{e^{x(it+a)}}{it+a}\Bigg|_{-\infty}^{0} + \frac{a}{2}.\frac{e^{-x(a-it)}}{a-it}\Bigg|_{0}^{\infty} = \frac{a}{2(it+a)} - \frac{a}{2(-it+a)} =$

$\frac{a(a-it)+a(it+a)}{2(a^2-i^2t^2)} = \frac{a^2-ait+ait+a^2}{2(a^2+t^2)} = \frac{2a^2}{2(a^2+t^2)} = \frac{a^2}{(a^2+t^2)}$.

3 – Modelos Probabilísticos para Variáveis Aleatórias

Algumas variáveis aleatórias adaptam-se muito bem a uma série de problemas práticos. Em geral nesses casos, a distribuição de probabilidade pode ser escrita de uma maneira mais compacta, isto é, existe uma lei para atribuir as probabilidades. Portanto, um estudo pormenorizado dessas variáveis é de grande importância para a construção de modelos probabilísticos para situações reais e a conseqüente estimação de seus parâmetros.

A principal vantagem de se definir uma variável aleatória e sua distribuição de probabilidade é que uma vez que a distribuição de probabilidade seja conhecida, é relativamente fácil determinar a probabilidade de uma variedade de eventos que podem ser de interesse.

3.1 Modelos para variáveis aleatórias discretas

A distribuição de probabilidade para uma variável aleatória descreve como as probabilidades estão distribuídas sobre os valores da variável aleatória. Para uma variável discreta *x*, a distribuição de probabilidade é definida por uma função de probabilidade, denotada por *p(x)*. A função de probabilidade fornece a probabilidade para cada um dos valores da variável aleatória.

3.1.1 Bernoulli:

Definição: Seja X uma v.a.d. e p, $0 \leq p \leq 1$ onde 0 representa o fracasso e 1 representa o sucesso. X tem distribuição de Bernoulli, X ~ B(P), se sua f.p. é:

$$p(x) = \begin{cases} p^x (1-p)^{1-x} & ,x = 0,1 \\ 0 & ,\text{p.o.v.} \end{cases}$$

Características:

i) Se X ~ B(p), então a fgm de X é:

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^{1} e^{tx} p^x (1-p)^{1-x} = (1-p) + e^t p = 1 + p(e^t - 1).$$

$M_x(t) > 0 \rightarrow 1 + p(e^t - 1) > 0 \therefore p(e^t - 1) > -1 \therefore e^t - 1 > -1/p \therefore e^t > 1 - (1/p) \therefore t > \ln\left(\frac{p-1}{p}\right)$.

ii) Se x ~ B(p), então:

$E(x) = M'_x(0) \therefore M'_x(t) = p.e^t \therefore M'_x(0) = p$

$E(x^2) = M_x''(0) \therefore M_x''(t) = p.e^t \therefore M_x''(0) = p$

$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 \therefore V(x) = p - p^2 = p(1-p) = pq$

Exemplo 3.1: Uma urna tem 30 bolas brancas e 20 verdes. Retira-se uma bola dessa urna. Seja x = número de bolas verdes, determinar p(x) e calcular E(x) e V(x).

Solução:

$0 \rightarrow q = 30/50 = 3/5.$

$1 \rightarrow p = 20/50 = 2/5.$

$$p(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x \times \left(\frac{3}{5}\right)^{1-x}.$$

$E(x) = p = 2/5.$

$$V(x) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}.$$

3.1.2 Binomial

Considere que se repita um ensaio de Bernoulli n vezes, e que as repetições sejam independentes, isto é, o resultado de um ensaio não tem influência nenhuma no resultado de qualquer outro ensaio. Cada tentativa admite apenas dois resultados: fracasso com probabilidades q e sucesso com probabilidade p, p + q = 1. As probabilidades de sucesso e fracasso são as mesmas para cada tentativa.

Seja X: número de sucessos em n tentativas.

Para um resultado particular (RP):

$$\underbrace{SSSS...S}_{k}\underbrace{FFFF...F}_{n-k}$$

Logo,

$$P(RP) = P(SSSS...SFFFF..F) = \underbrace{pppp...p}_{k}\underbrace{qqqq...q}_{n-k} = p^k q^{n-k}$$

Def: Seja X uma v.a.d. e p, $0 \le p \le 1$, n ε N tem distribuição binomial , ou, é binomialmente distribuída, com n ε N e P, x ~ b (n,p), se sua f.p. é:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}, & x = 0,1,...,n \\ 0, & \text{p.o.v.} \end{cases} \quad \text{ou} \quad P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Características:

i) Se X ~ b (n,p), então a f.g.m. de x é:

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \frac{n!}{x!.(n-x)!} p^x.(1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} \frac{n!.(pe^t)^x.(1-p)^{n-x}}{x!.(n-x)!} = [(1 - p) + pe^t]^n =$$

$$= [1 + p(e^t - 1)]^n = \quad t > \ln\left(\frac{p-1}{p}\right).$$

ii) Se x ~ b(n,p), então:

$E(x) = M'_x(0) \therefore M'_x(t) = n[1 + p(e^t - 1)]^{n-1}.pe^t \therefore M'_x(0) = n.p.$

$E(x^2) = M_x''(0) \therefore M_x''(t) = n(n-1)[1 + p(e^t - 1)]^{n-1}.pe^t.pe^t + n[1 + p(e^t - 1)]^{n-1}.pe^t.$

$M_x''(0) = n(n-1)p^2 + np = n^2p^2 - np^2 + np.$

$V(x) = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 \therefore V(x) = np(1-p).$

Exemplo 3.2: Uma moeda é lançada 20 vezes. Qual a probabilidade de saírem 8 caras?

Solução: $P(x = 8) = C_{20}^{8}\left(\frac{1}{2}\right)^8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{12} = 0{,}12013$.

Exemplo 3.3: Uma firma de vendas por correio envia cartas anunciando um determinado produto aos possíveis clientes. A porcentagem de respostas a essas cartas é, em geral, de 10%. Supondo que um prédio tem 20 moradores e que todos receberam uma carta, determine a probabilidade de:

a) Ninguém responder a essas cartas;
b) Só duas dessas cartas terem respostas;
c) Responderem menos de 20% das pessoas contatadas.

Solução:

a) $P(x = 0) = C_{20}^{0}\left(\frac{1}{10}\right)^0 \times \left(\frac{9}{10}\right)^{20} = 0{,}1216$;

b) $P(x=2)=C_{20}^{2}\left(\frac{1}{10}\right)^{2}\times\left(\frac{9}{10}\right)^{18}=0{,}2852$;

c) $P(x<4)=C_{20}^{0}\left(\frac{1}{10}\right)^{0}\times\left(\frac{9}{10}\right)^{20}+C_{20}^{1}\left(\frac{1}{10}\right)^{1}\times\left(\frac{9}{10}\right)^{19}+C_{20}^{2}\left(\frac{1}{10}\right)^{2}\times\left(\frac{9}{10}\right)^{18}+C_{20}^{3}\left(\frac{1}{10}\right)^{3}\times\left(\frac{9}{10}\right)^{17}=$

$0{,}1216+0{,}2702+0{,}2852+0{,}1901=0{,}8671$.

3.1.3 Poisson

A distribuição de Poisson é uma outra distribuição de probabilidade que encontra muitas aplicações práticas. Existem inúmeros fenômenos discretos representados por um processo Poisson, do mesmo modo que o modelo Poisson também é empregado para fornecer aproximações para a distribuição Binomial.

Muitas vezes, no uso da Binomial, acontece quando n é muito grande ($n \to \infty$) e p é muito pequeno ($p \to 0$). Na prática, quando $n > 30$ e $p < 0{,}05$. Nesse caso, pode-se aproximar a distribuição Binomial para a Poisson, com $\lambda = np$.

Def: Seja X uma v.a.d. e $\lambda > 0$ um número real. X tem distribuição de Poisson com parâmetro λ, $X \sim P(\lambda)$, se sua f.p. é

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} & x=0,1,2...\\ 0 & x<0\end{cases}$$

Características:

i) Se $X \sim P(\lambda)$, então a fgm de X é:

$$M_x(t)=E(.e^{tx})=\sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}.\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}.\frac{(e^{t}\lambda)^{x}}{x!}=e^{-\lambda}.e^{\lambda e^{t}}=e^{\lambda(e^{t}-1)}.$$

ii) Se $X \sim P(\lambda)$, então:

$E(X)= M_X'(0)$ $\quad M_X'(t)= e^{\lambda(e^{t}-1)}\lambda e^{t} \therefore M_X'(0)=\lambda \quad \Rightarrow E(X)=\lambda$

$E(X^2)= M_X''(t)_{t=0}$ $\quad M_X''(t)= e^{\lambda(e^{t}-1)}\lambda e^{t}\lambda e^{e}+e^{\lambda(e^{t}-1)}\lambda e^{t} \Rightarrow M_X''(0)=\lambda^2+\lambda$

$V(X)=\lambda^2+\lambda-\lambda^2 \Rightarrow V(X)=\lambda$

Exemplo 3.4: Numa estrada há 2 acidentes para cada 100 km. Qual a probabilidade de que em:

a) 250 km ocorram pelo menos 5 acidentes?
b) 300 km ocorram 5 acidentes?

Solução: $\lambda = 2/100km$

a) $\begin{matrix}2-100\\ \lambda-250\end{matrix} \quad \to \quad \lambda = 5/250km$

$P(X\geq 5)=1-P(X<5)=1-\left(\frac{e^{-5}.5^{0}}{0!}+\frac{e^{-5}.5^{1}}{1!}+\frac{e^{-5}.5^{2}}{2!}+\frac{e^{-5}.5^{3}}{3!}+\frac{e^{-5}.5^{4}}{4!}\right)=$

$1-(0{,}0111+0{,}0500+0{,}1125+0{,}1687+0{,}1898)=0{,}56.$

b) $\begin{matrix} 2-100 \\ \lambda-300 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \lambda = 6/300km$

$$P(X=5) = \frac{e^{-6}.6^5}{5!} = 0{,}1606.$$

Exemplo 3.5: Suponha que uma fábrica produz por dia 40 peças metálicas para candeeiros. A máquina de acabamento não está devidamente ajustada produzindo uma peça defeituosa em cada dez peças. Determine a probabilidade de se obter, no máximo, 2 peças defeituosas.

Solução: $\lambda = 1/10 peças$

$$P(X \leq 2) = \frac{e^{-1}.1^0}{0!} + \frac{e^{-1}.1^1}{1!}\frac{e^{-1}.1^2}{2!} = 0{,}3679 + 0{,}3679 + 0{,}1839 = 0{,}9197.$$

3.2 Modelos para variáveis aleatórias Contínuas

3.2.1 Distribuição Normal

A distribuição normal também é conhecida como distribuição de Gauss. É um dos mais importantes modelos de probabilidade para variáveis aleatórias contínuas, sendo aplicado em inúmeros fenômenos e muito utilizado no desenvolvimento teórico em na área de inferência estatística.

Def: Seja X uma v.a.c., μ E R, σ E R, σ > 0. X tem distribuição normal ou é normalmente distribuída, com parâmetro μ e σ, se sua fdp é:

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$, $-\infty < x < \infty$ e diz-se que x ~ $N(\mu, \sigma^2)$.

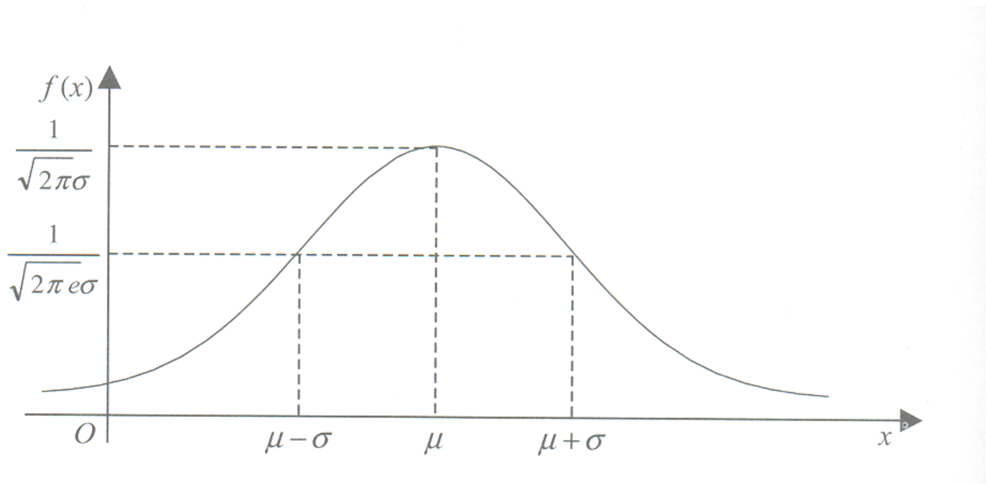
Características:

a) Da fdp f:
   i) $f(x) > 0$, $\forall$ x E R, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.
   ii) A f tem um número máximo em x = μ.

f'(x) = 0 $\rightarrow$ x = μ

f''(x) < 0 $\rightarrow$ $(\mu, \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}})$ é o ponto de máximo

   iii) f é simétrica em relação à x = μ. $f(x + \mu) = f(\mu - x)$, $\forall$ x
   iv) a f tem dois pontos de inflexão em $x = \mu \pm \sigma$. $f''(x) = 0 \rightarrow x = \mu \pm \sigma$.



b) da variável:

i) Se X ~ N(μ ,σ²), a fgm de x é:

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 + tx} dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2 - 2tx\right]} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[x^2 - 2x\mu + \mu^2 - 2\sigma^2 xt\right]} dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[x^2 - 2x(\mu+\sigma^2 t)\right]} dx = \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[x^2 - 2x(\mu+\sigma^2 t) + (\mu+\sigma^2 t)^2 - (\mu+\sigma^2 t)^2\right]} dx =$$

$$\frac{e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{1}{2\sigma^2}(\mu+\sigma^2 t)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-(\mu+\sigma^2 t)}{\sigma}\right]^2} dx = \frac{e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} . e^{\frac{1}{2\sigma^2}\left[\mu^2 + 2\mu\sigma^2 t + \sigma^4 t^2\right]}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-(\mu+\sigma^2 t)}{\sigma}\right]^2} dx =$$

$$\frac{e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-(\mu+\sigma^2 t)}{\sigma}\right]^2} dx = \frac{e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-(\mu+\sigma^2 t)}{\sigma}\right]^2} dx$$

Usando o fato: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \sqrt{2\pi}$ e fazendo $y = \dfrac{x-(\mu+\sigma^2 t)}{\sigma}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-(\mu+\sigma^2 t)}{\sigma^2}\right]^2} dx = \sigma\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \sigma\sqrt{2\pi}$$, então:

$$e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2} . \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} . \sigma\sqrt{2\pi} = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$, logo:

$$M_x(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

ii) Se x ~ N(μ ,σ²), então:

$E(x) = M'_x(0) \therefore M'_x(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}(\mu + \sigma^2 t) \therefore M'_x(0) = e^{\mu 0 + \frac{1}{2}\sigma^2 0^2}(\mu + \sigma^2 0) = \mu.$

$E(x^2) = M_x''(0) \therefore M_x''(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}\sigma^2 + (\mu + \sigma^2 t)^2 e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$

$E(x^2) = M_x''(0) = \sigma^2 + \mu^2$
$V(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 \therefore V(x) = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$

3.2.2 Distribuição normal padrão

Def: Seja X uma v.a.c. x tem distribuição normal padrão x ~ N(0,1), se sua fdp é:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Característica:

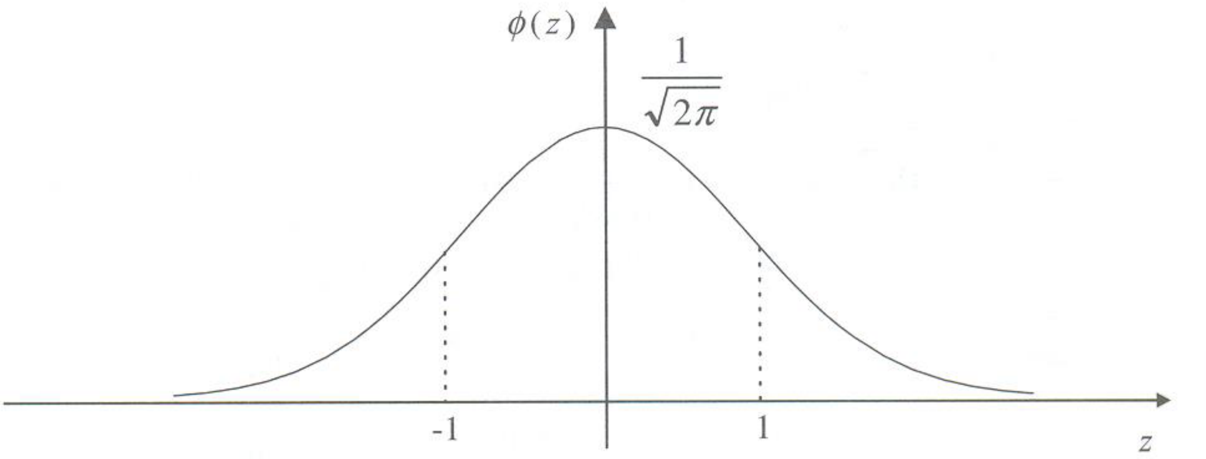
a) Da fdp φ:

i) $\varphi(x) > 0, \forall x, \lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$

ii) φ tem um máximo em x = 0.

$\varphi'(x) = 0 \to x = 0$

$\varphi''(x) < 0$ $\quad (0, \frac{1}{\sqrt{2\pi}})$ é ponto de máximo.



iii) φ é simétrica em relação a x = 0 (φ é par).

$\varphi(-x) = \varphi(x)$

iv) φ tem ponto de inflexão em x = ± 1.

$\varphi''(x) = 0 \to x = \pm 1$

b) da variável:

i) Se X ~ N(0,1), a fgm de x é:

$$E(e^{tx}) = M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} . e^{tx} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(x^2 - 2tx\right)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(x^2 - 2tx + t^2 - t^2\right)} dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2 + \frac{1}{2}t^2} dx = \frac{e^{\frac{1}{2}t^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} dx$$

. Fazendo y = (x – t) tem-se:

$$\frac{e^{\frac{1}{2}t^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \frac{e^{\frac{1}{2}t^2}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = e^{\frac{1}{2}t^2}.$$

ii) Se x ~ N(0,1).

$M'_x(t) = t.e^{\frac{1}{2}t^2}\ 2$

$E(x) = M'_x(0) = 0$

$M_x''(t) = e^{\frac{1}{2}t^2} + t^2.e^{\frac{t^2}{2}}$

$E(x^2) = M_x''(0) = 1$

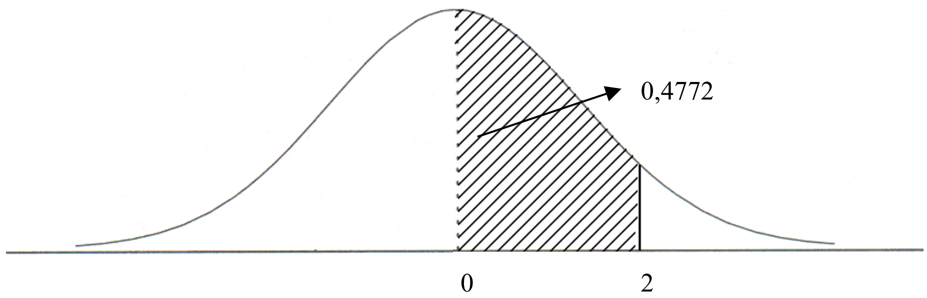
$V(x) = 1$

> Exemplo 3.6: O tempo de reação de um motorista para o estímulo visual é normalmente distribuído com uma média 0,4s e um σ = 0,05s. Qual é a probabilidade de que uma reação requeira:
>
> a) mais de 0,5s — c) entre 0,5s e 0,6s
>
> b) menos de 0,45s — d) menos de 0,3s

Solução:

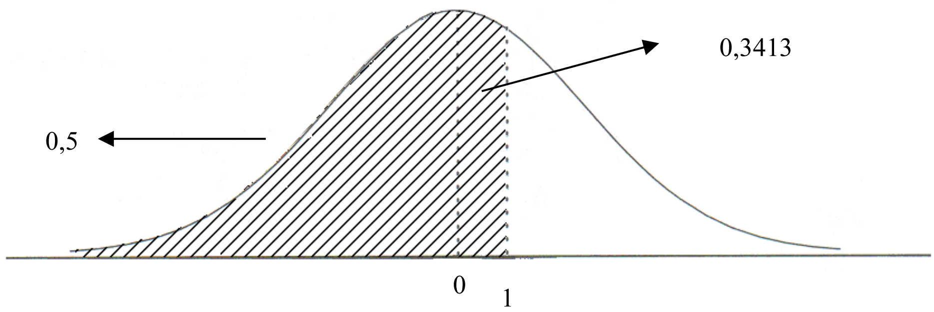
a) $z = \dfrac{0{,}5 - 0{,}4}{0{,}05} = 2$;

$P(x > 0{,}5) = P(z > 2) = 0{,}5 - 0{,}4772 = 0{,}0288 = 2{,}28\%$.



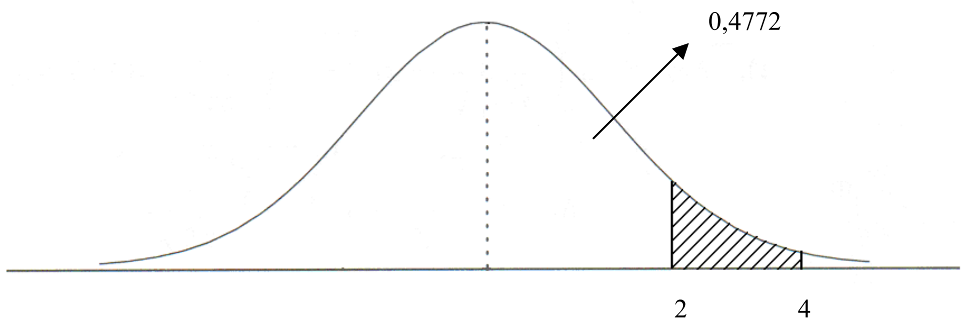
b) $z = \dfrac{0{,}45 - 0{,}4}{0{,}05} = 1$;

$P(x < 0{,}45) = P(z < 1) = 0{,}5 + 0{,}3413 = 0{,}8413 = 84{,}13\%$.



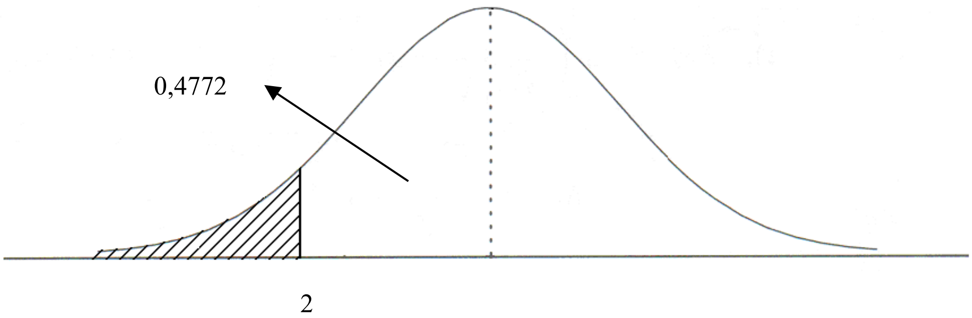
c) $z = \dfrac{0{,}5 - 0{,}4}{0{,}05} = 1$; $z = \dfrac{0{,}6 - 0{,}4}{0{,}05} = 4$;

$P(0{,}5 < x < 0{,}6) = P(2 < z < 4) = 0{,}4999 - 0{,}4772 = 0{,}0228 = 2{,}28\%$.



d) $z = \dfrac{0{,}3 - 0{,}4}{0{,}05} = -2$;

$P(x < 0{,}3) = P(z < -2) = 0{,}5 - 0{,}4772 = 0{,}0228 = 2{,}28\%$.



3.2.3 Distribuição "t" de Student

Def: Seja X uma v.a.c., n $\in \mathbb{N}$, n > 0. X tem distribuição t de student com parâmetro n, se sua f.d.p é:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}, \text{ n } \in \Re \text{ e } -\infty < x < \infty.$$

Características:

a) Da f.d.p. f:

i) n =1, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}\left(1 + x^2\right)^{-1} = \dfrac{1}{\pi\left(1 + x^2\right)}$, $-\infty < x < \infty$.

ii) f(x) > 0 $\forall$ x $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

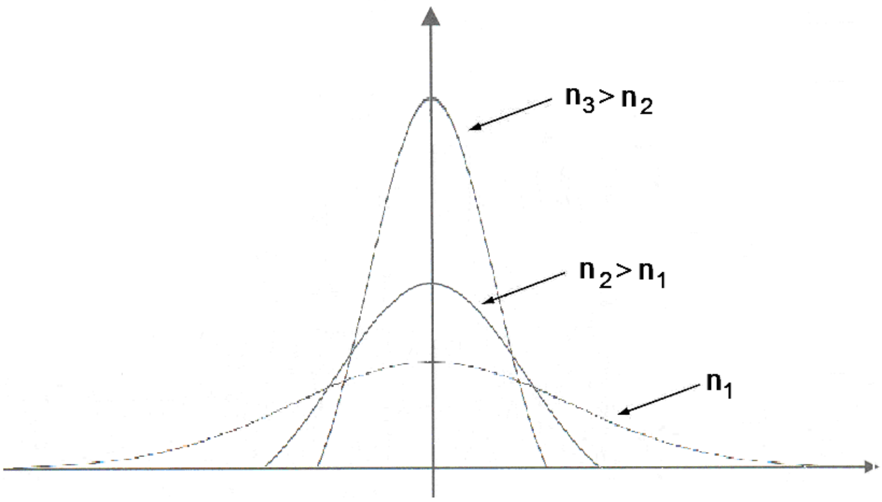
iii) f(x) tem um máximo em x = 0.

f'(x) = 0 → x = 0

f''(x) < 0 → Pmáx $\left(0; \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\right)$

iv) f(x) é simétrica em relação a x = 0, isto é, f(x) é par → f(-x) = f(x)

Gráfico:



b) Da variável:

i) Se x ~ t_n, então: E(x) = 0

$$V(x) = \frac{gl}{gl-2}, \text{ para } gl > 2.$$

Tabela da distribuição "t_n"

Sendo x ~ tn, dados n e α, a tabela fornece $x_{\frac{\alpha}{2},n}$, tal que: $P(-\frac{\alpha}{2}, n < x < \frac{\alpha}{2}, n) = 1-\alpha$ e $P(-x_{\frac{\alpha}{2},n} < x < x_{\frac{\alpha}{2},n}) = \frac{\alpha}{2}$.

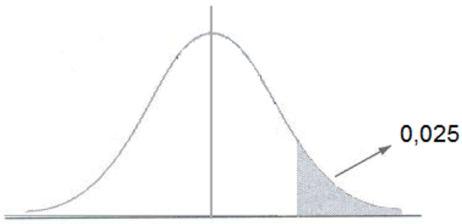
Exemplo 3.7: x ~ t_1; α = 0,05 entao $x_{0,025;\,1}$ tal que:

$P(-x_{0,025} \le x \le x_{0,025;}\,1) = 0{,}95$ e $P(x < -x_{0,025;}\,1) = P(x > x_{0,025;}1) = 0{,}025$

$$\frac{1}{\pi}\int_x^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = 0{,}025 \Rightarrow \frac{1}{\pi}.arctgx\Big|_x^{\infty} = 0{,}025$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - arctgx\right] = 0{,}025 \Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}arctgx = 0{,}025 \Rightarrow -\frac{1}{\pi}arctgx = 0{,}475$$

$arc\ tgx = 0{,}047\pi \Rightarrow x = tg(0{,}475\pi) \Rightarrow x = 12{,}706$.



3.2.4 Distribuição Qui-quadrado (χ^2)

Definição: Seja X uma v.a.c. com contradomínio $\Re_+^*$ e seja n $\in \mathrm{N}$, n > 0. Diz-se que X tem distribuição qui-quadrado com parâmetro n se sua fdp for:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} & ,x > 0 \\ 0 & ,x \le 0 \end{cases}$$

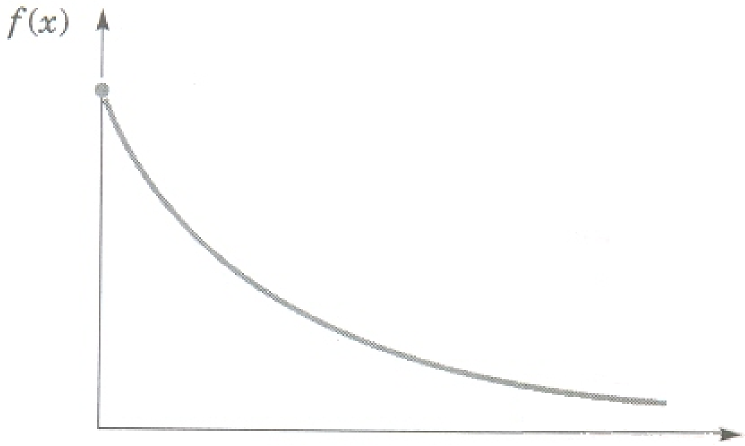
e se indica por x ~ χ_n^2.

Características:

a) da f.d.p. f

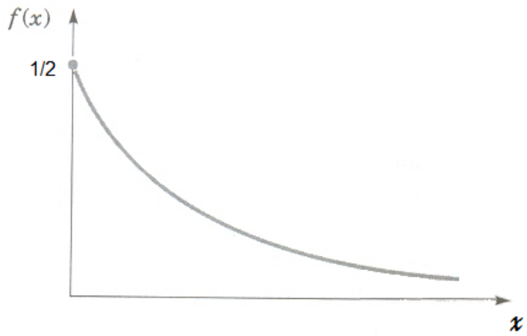
i) n = 1; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ e f(x) é estritamente decrescente, isto é, f '(x) < 0, para x > 0.

$$f(x) = \frac{1}{2^{1/2}\Gamma(1/2)} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x} \quad ,x > 0$$

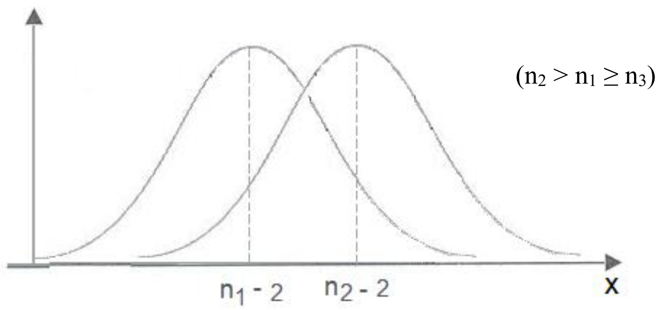


ii) n = 2; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1/2$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ e f(x) é estritamente decrescente, isto é, f '(x) < 0, para x > 0.

$f(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}$, $x > 0$



iii) $n \geq 3$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ e f(x) tem um máximo em x = n – 2, isto é, f '(x) = 0 e f ''(n – 2) < 0.



OBS: $\Gamma(r) = \int_0^\infty s^{r-1} e^{-s} ds$

$\Gamma(r) = (r-1)! \Rightarrow \Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1)$

$\Gamma(r+1) = r! \Rightarrow \Gamma(r+1) = r\Gamma(r)$

$\Gamma(1) = 1 \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

$\Gamma(3/2) = \Gamma(1+1/2) = 1/2\Gamma(1/2) = 1/2\sqrt{\pi}$

b) da variável:

i) Se X ~ χ_n^2, a fgm de x é:

$$M_x(t)=\int_0^\infty \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}x}e^{tx}dx=\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\int_0^\infty x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}x(1-2t)}dx$$

Fazendo ;
Substituindo na integral, tem-se:

$$M_x(t)=\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\int_0^\infty \left(\frac{2v}{(1-2t)}\right)^{\frac{n}{2}-1}e^{-v}\frac{2dv}{1-2t}=\frac{2^{n/2-1}.2}{2^{n/2}\Gamma(n/2)(1-2t)^{n/2-1}(1-2t)}\int_0^\infty v^{\frac{n}{2}-1}e^{-v}dv$$

$$M_x(t)=\frac{2^{n/2}.\Gamma(n/2)}{2^{n/2}\Gamma(n/2)(1-2t)^{n/2}}=\frac{1}{(1-2t)^{n/2}}=(1-2t)^{-n/2}$$

ii) Se x ~ χ_n^2 então:

$$E(x)=M_x^{'}(0)$$

$$M_x^{'}(t)=-\frac{n}{2}(1-2t)^{-n/2-1}(-2)=n(1-2t)^{-n/2-1}$$

$M_x^{'}(0)=n(1-2.0)^{-n/2-1}=n$ ➔ E(X) = n

$$E(x^2)=M_x^{''}(0)$$

$$M_x^{''}(t)=(-\frac{n}{2}-1).n.(1-2t)^{-n/2-2}(-2)=(n^2+2n)(1-2t)^{-n/2-2}$$

$$M_x^{''}(0)=(n^2+2n)(1-2.0)^{-n/2-2}=n^2+2n$$

$V(x)=n^2+2n-n^2=2n$ ➔ V(X) = 2n

Tabela da distribuição $\chi_{n,\vartheta}^2$

A distribuição qui-quadrado é largamente utilizada na inferência estatística. Para essa finalidade ela esta tabelada. Essa tabela fornece abscissa ou valores da variável com distribuição qui-quadrado pré-fixada e em função do parâmetro n (na pratica é chamado de número de graus de liberdade).
A tabela da distribuição $\chi_{n,\vartheta}^2$ é construída para fornecer valores da variável, em função de $\vartheta \geq 1$, υ ∈ N e α, 0 < α < 1, satisfazendo a sentença: X ~ $\chi_{n,\vartheta}^2$ e P(x > $x_{\alpha,\upsilon}$) = α → $x_{\alpha,\upsilon}$

Exemplo 3.8: X ~ χ_2^2 e P(X > $x_{0,05;\,2}$) = 0,05

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x},x>0$$

P(x > $x_{0,05;\,2}$) = 0,05 = $\frac{1}{2}\int_x^\infty e^{-\frac{1}{2}x}dx=\frac{1}{2}(-2)\left[e^{-\frac{1}{2}x}\right]_x^\infty=0,05$

$$-\frac{1}{2}x=\ln 0,05\Rightarrow x=-2.\ln 0,05=5,99$$

Exemplo 3.9: X ~ χ_2^2 e P(X> x) = 0,10

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x},x>0$$

P(x > x) = 0,10 = $\frac{1}{2}\int_x^\infty e^{-\frac{1}{2}x}dx=\frac{1}{2}(-2)\left[e^{-\frac{1}{2}x}\right]_x^\infty=0,10$

$$-\frac{1}{2}x = \ln 0{,}10 \Rightarrow x = -2.\ln 0{,}10 = 4{,}61$$

3.2.5 Distribuição "F "de Snedecor

Def: Seja x uma v.a.c. m,n $\in \Re$, m $\geq$ 1 e n$\geq$ 1.

x tem distribuição F com parâmetros m e n, x ~ $F_{m,n}$, se sua fdp é:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} x^{m/2-1}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{m+n/2}} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

Características:

a) da fdp f x ~ F(m,n):

i) Se m = 1, f(x) $\geq$ 0, $\forall x$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

ii) Se m = 2, f(x) $\geq$ 0, $\forall x$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)\frac{2}{n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = 1$

iii) Se m $\geq$ 3, f(x) $\geq$ 0, $\forall x$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ e f(x) tem um máximo em $x = \frac{n}{m}.\frac{m-2}{m+2}$, $m > 2\,(m \geq 3)$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{n}{m}.\frac{m-2}{n+2}$$

$$f''\left(\frac{n}{m}.\frac{m-2}{n+2}\right) < 0$$

Gráfico:

b) Da variável:

i) Se X ~ $F_{m,n}$, então:

$$E(x) = \frac{n}{n-2},\ n \geq 3$$

$$V(x) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)},\ n \geq 5.$$

Tabela da Distribuição . $F_{m,n}$

Se X ~ $F_{m,n}$, dados m, n e α, a tabela fornece $x_{\alpha,m,n}$ tal que: $P(x_{\alpha,m,n}) = \alpha$.

Pelo teorema 1, se $y = \frac{1}{x}$, então y ~ $F_{n,m}$. Dados m, n, α, então $P(y > y_{1-\alpha,m,n}) = 1 - \alpha$

$$P\left(\frac{1}{x} > y_{1-\alpha,n,m}\right) = 1 - \alpha.$$

$$P\left(x < \frac{1}{y_{1-\alpha,n,m}}\right) = 1 - \alpha \to P\left(x > \frac{1}{y_{1-\alpha,n,m}}\right) = 1 - (1-\alpha) = \alpha$$

Logo: $P\left(x < \dfrac{1}{y_{1-\alpha,n,m}}\right) == P\left(x > x_{1-\alpha,n,m}\right) = \alpha$

$$\frac{1}{y_{1-\alpha,n,m}} = x_{\alpha,n,m} \Leftrightarrow y_{1-\alpha,n,m} = \frac{1}{x_{\alpha,m,n}}$$

Exemplo 3.10: X ~ $F_{4,2}$, α = 0,05 e $P(x > x_{0,05,\,4,\,2}) = 0,05$

Solução: Então: $\dfrac{\Gamma(3).2^2}{\Gamma(2).\Gamma(1)} \int_{x_0}^{\infty} \dfrac{x}{(1+2x)^3}\, dx = 0,05 \rightarrow 8.\int_{x_0}^{\infty} x.(1+2x)^{-3}\, dx = 0,05$

Fazendo:

$$u = x \quad \rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = (1+2x) \quad \rightarrow \quad v = \frac{-1}{4}(2x+1)^{-2}$$

$$8\left[\frac{-x}{4(1+2x)^2} + \frac{1}{4}\int (1+2x)^{-2}\, dx\right]_{x_0}^{\infty} = 0,05$$

$$\left[\frac{-2x}{(1+2x)^2} - \frac{1}{1+2x}\right]_{x_0}^{\infty} = 0,05 \rightarrow \frac{2x_0}{(1+2x_0)^2} - \frac{1}{1+2x_0} = 0,05$$

$$0,2x_0^2 - 3,8x_0 - 0,95 = 0 \rightarrow x_0 \cong 19,25 \rightarrow x_{0,95,4,2} = 19,25$$

$$P(x > x_{0,95,2,4}) = 0,95 \rightarrow x_{0,95,2,4} = \frac{1}{x_{0,05,4,2}} = \frac{1}{19,25} = 0,052.$$

Analogamente: x ~ $F_{2,\,4}$, $x_{0,05,\,2,\,4}$ tal que $P(x > x_{0,05,\,2,\,4}) = 0,05$ é $x_{0,05,\,2,\,4} = 6,94$.

Logo: $x_{0,05,\,2,\,4}$ tal que $P(x > x_{0,95,\,4,\,2}) = 0,95$ é $x_{0,95,4,2} = \dfrac{1}{x_{0,05,2,4}} = \dfrac{1}{6,94} = 0,144.$

4 – O Teorema Central do Limite

O teorema do limite central é um resultado importantíssimo porque noz diz que:

— Somas de variáveis independentes são aproximadamente normais;

— Médias de variáveis independentes são aproximadamente normais.

E o mais surpreendente é que não interessa qual a densidade das variáveis que estão sendo somadas.

Definição: Sejam X_1, X_2, ..., X_n variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) tais que $E(X_i) = \mu$ e $V(X_i) = \sigma^2$, ambas finitas. Seja $S_n = X_1 + X_2 + ... X_n$, então, sob condições bastante gerais $Z = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ tem aproximadamente uma distribuição N(0,1).

Esta aproximação torna-se cada vez melhor à medida que n cresce.

Exemplo 4.1: Uma caixa de madeira contém 250 peças pequenas. O peso de cada peça é uma variável aleatória com média 0,20Kg e desvio padrão 0,08 Kg. 20 caixas são colocados num guindaste, que tem a capacidade de aguentar 1010 Kg sem problemas. Acima deste peso recomenda-se o uso de outro equipamento. Qual a probabilidade da substituição por outro equipamento ser necessária?

Solução: Como são 250 peças em cada caixa e são 20 caixas, portanto são 5000 peças, e como

$E(X_i) = 0,20$ e $\sigma(X_i) = 0,08$ e, portanto, tem-se:

$E(Sn) = 0,2 \times 5000 = 1000$ e $V(Sn) = 0,082 \times 5000 = 32 \rightarrow \sigma(Sn) = 5,66$

$P(Sn > 1010) = P(Z > 1,77) = 0,5 – 0,4616 = 0,0384$

$$Z = \frac{1010 - 1000}{5,66} = 1,77$$

O teorema central do limite pode ser escrito de maneira equivalente usando-se a média de variáveis aleatórias (ao invés da soma). Esta nova versão do teorema é especialmente importante quando os X'_{is} são iid.

Definição: Sejam X_1, X_2, ..., X_n variáveis aleatórias iid tais que $E(X_i) = \mu$ e $V(X_i) = \sigma^2$, ambas finitas. Seja a média amostral. Então: $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)$.

5 - Referências Bibliográficas

CARREIRA, A.; PINTO, G.; SOUSA, B. **Cálculo da Probabilidade.** Lisboa: Piaget, 2002.

COSTA NETO, P. L.; CYMBALISTA, M. **Probabilidades: Resumos Teóricos – Exercícios Resolvidos – Exercícios Propostos.** São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

DANTAS, C. A. B. **Probabilidade: Um Curso Introdutório.** 3. ed. São Paulo: Edusp, 2008.

DEVORE, J. L. **Probabilidade e Estatística para Engenharia e Ciências.** 6. ed. San Luis Obispo: Thomson, 2006.

LIPSCHUTZ, S. **Teoria e problemas de probabilidade.** São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1972.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros.** 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

MORETTIN, L. G. **Estatística Básica**. 7. ed. São Paulo: Makron Books, 1999.

NAGHETTINI, M. PINTO, É. J. DE A. **Hidrologia Estatística.** Belo Horizonte: CPRM, 2007.

SPIEGEL, M. R. **Probabilidade e Estatística**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 1978.