

Universidade Federal de Santa Maria Departamento de Estatística

TESTES DE HIPÓTESES

Estatística Inferencial Professora: Laís Helen Loose

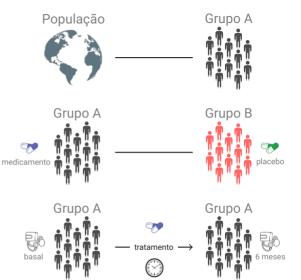


Testes de hipóteses para duas populações

O objetivo é testar se há diferença estatística entre a média do grupo e um valor de referência (parâmetro populacional).

O objetivo é testar se há diferença estatística entre as médias de dois grupos independentes.

O objetivo é testar se há diferença estatística entre as médias de dois grupos dependentes (observações pareadas).



Amostras dependentes e independentes

Amostras independentes

Em uma amostra **independente** os valores amostrados vêm de dois grupos diferentes. Ou seja, a amostra selecionada da primeira população não tem relação com a amostra selecionada da segunda população.

Exemplo: testar a pressão sanguínea de dois grupos: grupo controle versus grupo tratamento.

Amostras dependentes

Em uma amostra dependente (emparelhada) os valores amostrados são conectados. Ou seja, cada medição na primeira amostra é conecta (emparelhada) com uma medição específica na segunda amostra (geralmente o mesmo sujeito experimental é analisado antes e depois de um tratamento).

 Exemplo: teste para a diferença da pressão sanguínea de uma mesma pessoa antes e depois de uma tratamento.

Amostras dependentes e independentes

Amostras independentes Grupo tratamento Grupo controle tratamento placebo pré-tratamento pré-tratamento pré-tratamento pré-tratamento pré-tratamento pré-tratamento

- Ao testar uma hipótese para duas populações é importante identificar se as amostras são dependentes (emparelhadas) ou independentes.
- E por que é importante saber a diferença? Para escolhermos qual estatística de teste vamos utilizar precisamos saber se as amostras são dependentes ou independentes.

Comparando duas populações

As hipóteses nula (H_0) e alternativa (H_1) de um teste de hipótese para médias de duas populações podem ser expressas de duas maneiras diferentes, mas equivalentes. Por exemplo, para o caso de um teste bilateral temos:

Alternativa 1

 $\mathsf{H}_0:\mu_1=\mu_2$ (as duas médias populacionais são iguais)

 $\mathsf{H}_1:\mu_1
eq\mu_2$ (as duas médias populacionais não são iguais)

Alternativa 2

 $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ (a diferença entre as duas médias populacionais é igual a 0)

 $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$ (a diferença entre as duas médias populacionais não é igual a 0)

Hipóteses

Hipóteses nula (\overline{H}_0) e alternativa (H_1) para média de uma população

```
\mathsf{H}_0:\mu=\mu_0 \mathsf{H}_1:\mu\neq\mu_0 (bilateral)
```

$$\mathsf{H}_0: \mu \geq \mu_0$$
 vs $\mathsf{H}_1: \mu < \mu_0$ (unilateral à esquerda)

$$\mathsf{H}_0:\mu\leq\mu_0$$
 (unilateral à direita)

Hipóteses nula (H_0) e alternativa (H_1) para médias de duas populações

$$\mathsf{H}_0: \mu_1 = \mu_2 \quad \Rightarrow \quad \mathsf{H}_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \qquad \qquad \mathsf{H}_1: \mu_1 \neq \mu_2 \quad \Rightarrow \quad \mathsf{H}_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

$$\mathsf{H}_0: \mu_1 \geq \mu_2 \quad \Rightarrow \quad \mathsf{H}_0: \mu_1 - \mu_2 \geq 0 \qquad \quad \mathsf{vs} \qquad \quad \mathsf{H}_1: \mu_1 < \mu_2 \quad \Rightarrow \quad \mathsf{H}_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$$

$$\mathsf{H}_0: \mu_1 \leq \mu_2 \quad \Rightarrow \quad \mathsf{H}_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0 \qquad \qquad \mathsf{H}_1: \mu_1 > \mu_2 \quad \Rightarrow \quad \mathsf{H}_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$$



Teste de hipótese para a diferença de duas médias populacionais: σ conhecido (amostras independentes)

Variância σ^2 conhecida

Considere duas populações representadas pelas variáveis aleatórias independentes

$$X_1 \sim \mathsf{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$$
 e $X_2 \sim \mathsf{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$

- Considere que são selecionadas de forma independente duas amostras: uma amostra de tamanho n_1 da população 1 e outra de tamanho n_2 da população 2.
- Considere uma nova variável aleatória definida como $\overline{X} = \overline{X}_1 \overline{X}_2$
- É possível mostrar que a variável \overline{X} tem **distribuição normal** com média e variância dadas por

$$\mathbb{E}(\overline{X}) = \mu_1 - \mu_2$$
 e $\operatorname{Var}(\overline{X}) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$

Distribuição amostral da diferença das médias

$$\overline{X} = \overline{X}_1 - \overline{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

Variância σ^2 conhecida

Pressupostos para utilização do teste

- 1. As amostras são aleatoriamente selecionadas.
- 2. As duas amostras são independentes.
- 3. Ambas as amostras provêm de populações com distribuição normal.

Estatística de teste

$$Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Observação: sob H_0 $\mu_1 = \mu_2$ e $Z \sim N(0,1)$

Variância σ^2 conhecida

Exemplo 1

Um aplicativo de entrega de mercadorias tem duas possibilidades de trajeto para realizar entregas. O gerente de logística desconfia não haver diferença significativa entre o tempo médio de cada trajeto.

Foram selecionadas aleatoriamente 45 entregas realizadas no **primeiro trajeto**, resultando em uma **média amostral de** 57 **minutos**. No **segundo trajeto** foram selecionadas, aleatoriamente, 30 entregas, em que foi obtido um **tempo médio de** 54 **minutos**.

O desvio-padrão populacional do **primeiro trajeto é de** $\sigma=8$ **minutos e do segundo trajeto** $\sigma_2=6$ **minutos** . Teste a hipótese de que não existe diferença significativa entre o tempo médio dos dois trajetos, ao nível de 5% de significância.

Solução

1. Formulação da hipótese:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
 vs $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

2. Estatística de teste observada

$$z_{obs} = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{57 - 54}{\sqrt{\frac{8^2}{45} + \frac{6^2}{30}}} = 1,853$$

3. Região crítica (rejeição) e valor-p

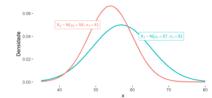
$$\alpha = 0,05 \to \ \text{RC} \ = \{z < -1,96 \ \text{ou} \ z > 1,96\}$$

valor-p =
$$2 \cdot P(Z > 1,853) = 0,064$$

- 4. **Decisão:** não rejeitamos H₀
 - $\circ \ z_{\scriptscriptstyle obs} \notin \mathsf{RC}$
 - \circ valor-p $> \alpha$

5. Interpretação

Ao nível de significância de 5% não rejeitamos a hipótese nula, portanto não há evidências estatísticas de que há diferença nos tempos médios de entrega entre os dois trajetos.





Variância σ^2 desconhecidas

- A estatística de teste apresentada anteriormente considera que as variâncias são conhecidas.
 E quando não conhecemos a variância, o que devemos fazer?
- Assim como no caso do teste de hipóteses para uma população, usamos as variâncias amostrais $(s_1^2 e s_2^2)$ como estimativas para as variâncias populacionais $(\sigma_1^2 e \sigma_1^2)$.
- Como temos duas amostras, podemos ter dois casos distintos:
 - Caso 1 Variâncias iguais $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$: as variâncias populacionais são desconhecidos, mas é razoável supor que são iguais.
 - Caso 2 Variâncias diferentes $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$: quando não se pode fazer nenhuma suposição sobre a igualdade das variâncias populacionais.
- A estatística de teste vai depender se as variâncias são consideradas iguais ou diferentes.
 Mas como podemos verificar se é razoável supor que as variâncias são iguais? Podemos fazer um teste de hipóteses para comparar as duas variâncias.



Testando a hipótese de igualdade entre as variâncias (amostras independentes)

Testando a igualdade entre as variâncias

Considere duas populações representadas pelas variáveis aleatórias independentes

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$$
 e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

• Suponha que duas amostras de tamanho n_1 e n_2 são selecionadas aleatoriamente de X_1 e X_2 , respectivamente. Se $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, é possível provar que a variável aleatória definida por

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{n_1 - 1, n_2 - 1}$$

tem distribuição F de Snedecor com n_1-1 graus de liberdade no numerador e n_2-1 graus de liberdade no denominador.

A estatística F é usada para testar as hipóteses relativas à igualdade das duas variâncias.

Ideia do teste

Se a razão entre as variâncias das duas populações for próxima de 1, então é razoável supor que as variâncias populacionais são aproximadamente iguais.

Testando a igualdade entre as variâncias

Teste de hipóteses para a razão de variâncias de duas populações

$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1$$
 (as variâncias populacionais são iguais)

$$H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1$$
 (as variâncias populacionais são diferentes)

Pressupostos para utilização do teste

- 1. As amostras são aleatoriamente selecionadas.
- 2. As duas amostras são independentes.
- 3. Ambas as amostras provêm de populações com distribuição normal.

Testando a igualdade entre as variâncias

Estatística de teste

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{n_1 - 1, n_2 - 1}$$

Observação: s_1^2 deve ser sempre a maior das duas variâncias amostrais.

Exemplo 2

Um pesquisador está interessado em estudar as variâncias do tempo que os clientes esperam antes de terem seus pedidos atendidos em duas empresas distintas, A e B. Uma **amostra aleatória de 10 clientes da empresa A**, resultou em uma **variância de 400 min.** Na **empresa B**, uma **amostra aleatória de 21** clientes resultou em uma **variância de 256 min.** Use o nível de significância de 5% para testar a afirmativa de que as duas variâncias populacionais são iguais. Suponha que ambas as populações sejam normalmente distribuídas.

Solução

1. Formulação da hipótese:

$$\mathsf{H}_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$$
 vs $\mathsf{H}_1:\sigma_1^2
eq\sigma_2^2$

2. Estatística de teste observada

$$F_{obs} = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{400}{256} = 1,563$$

3. Região crítica (rejeição) e valor-p

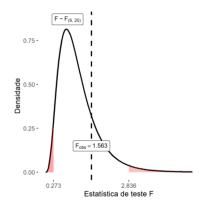
$$\alpha = 0,05 \rightarrow \ {
m RC} \ = \{F < 0,273 \ {
m ou} \ F > 2,836\}$$

4. Decisão: não rejeitamos H₀

$$\circ \ F_{\scriptscriptstyle obs} \not \in \mathsf{RC}$$

5. Interpretação

Ao nível de significância de 5% não rejeitamos a hipótese nula, portanto podemos concluir que não há evidências estatísticas de que as variâncias das duas populações sejam diferentes.





Teste de hipótese para a diferença de duas médias populacionais: σ desconhecido (amostras independentes)

Variâncias iguais: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Pressupostos para utilização do teste

- 1. As amostras são aleatoriamente selecionadas.
- 2. As duas amostras são independentes.
- 3. Ambas as amostras provêm de populações com distribuição normal.
- 4. Homogeneidade das variâncias (as variâncias das duas populações são aproximadamente iguais).

Variâncias iguais: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Estatística de teste

$$t = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}}} = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}}} \sim t_{\nu}$$

em que $\nu=n_1+n_2-2$ são os graus de liberdade da distribuição t.

- A variância amostral agrupado s_p^2 é calculada como sendo a média ponderada das duas variâncias amostrais.
 - $s_p^2 = \frac{(n_1 1) \cdot s_1^2 + (n_2 1) \cdot s_2^2}{n_1 + n_2 2}$

$$\circ$$
 n_1 = tamanho da amostra da primeira amostra.

$$\circ \ \ n_2$$
 = tamanho da amostra da segunda amostra

$$\circ \ \ s_1$$
 = desvio padrão da primeira amostra

$$\circ \hspace{0.2cm} s_2$$
 = desvio padrão da segunda amostra

Variâncias iguais: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

Exemplo 3

Um experimento foi realizado como o objetivo de testar a hipótese de que existe diferença entre as resistências mecânicas de dois preparos de concreto, A e B, medida em Mega Pascal (MPa). Para isso foram obtidas e testadas amostras de ambos os preparos. Foram retiradas 15 amostras do preparo A, resultando em uma média de 28 Mpa com desvio-padrão 4, 1 MPa. Do preparo B foram retiradas 10 amostras, resultando em uma média de 26 Mpa com desvio-padrão 3, 8 MPa. Assumindo que as resistências possuem distribuição normal e que $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$, teste a hipótese de que existe diferença entre as resistências dos dois preparos, com um nível de significância de 5%.

Solução

1. Formulação da hipótese:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$
 vs $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

2. Variância agrupada

$$s_p = \frac{(n_1 - 1) \cdot s_1^2 + (n_2 - 1) \cdot s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{(15 - 1) \cdot 4, 1^2 + (10 - 1) \cdot 3, 8^2}{15 + 10 - 2} = 15,883$$

3. Estatística de teste observada

$$t_{obs} = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{s_p^2}{n_1} + \frac{s_p^2}{n_2}}} = \frac{28 - 26}{\sqrt{15,883 \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{10}\right)}} = 1,23$$

4. Região crítica (rejeição) e valor-p

$$\nu = 23 \ {\rm e} \ \alpha = 0,05 \to \ {\rm RC} \ = \{t < -2,07 \ {\rm ou} \ t > 2,07\}$$

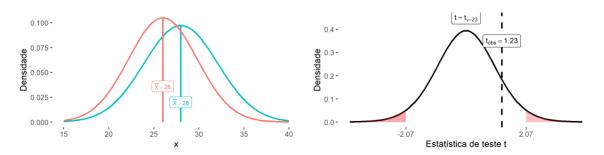
Solução

5. Decisão: não rejeitamos H₀

$$\circ t_{obs} \notin RC$$

6. Interpretação

Ao nível de significância de 5% não rejeitamos a hipótese nula, portanto podemos concluir que não há evidências estatísticas de que as resistências mecânicas dos dois preparos sejam diferentes.



Variâncias diferentes: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Pressupostos para utilização do teste

- 1. As amostras são aleatoriamente selecionadas.
- 2. As duas amostras são independentes.
- 3. Ambas as amostras provêm de populações com distribuição normal.

Variâncias diferentes: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Estatística de teste

$$t = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \sim t_{\nu}$$

Quando as variâncias são diferentes, os graus de liberdade devem ser ajustados.

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1} \left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1} \left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}$$

Variâncias diferentes: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Exemplo 4

Uma pesquisadora está interessado em avaliar o comportamento de condução dos estudantes universitários do sexo masculino e feminino. Há uma série de maneiras que pode quantificar comportamentos de condução. Optou-se por avaliar a velocidade mais rápida já dirigida por um indivíduo. Foi realizado um levantamento de uma amostra aleatória com $n_M=34$ estudantes universitários do sexo masculino e $n_F=29$ estudantes universitários do sexo feminino. Os dados da pesquisa estão no quadro abaixo. Considere que as duas populações têm distribuição normal e que podemos assumir que $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Teste a hipótese de que a maior velocidade média conduzida por estudantes universitários do sexo masculino é maior que maior velocidade média conduzida por estudantes universitários do sexo feminino, com um nível de significância de 1%.

Grupo	Média (\overline{x})	Desvio Padrão (s)	Amostra (n)
Masculino	105, 5	20, 1	34
Feminino	90, 9	12, 2	29

Solução

1. Formulação da hipótese:

$$\mathsf{H}_0:\mu_M\leq\mu_F$$
 vs $\mathsf{H}_1:\mu_M>\mu_F$

2. Estatística de teste observada

$$t_{obs} = \frac{\overline{x}_M - \overline{x}_F}{\sqrt{\frac{s_M^2}{n_M} + \frac{s_F^2}{n_F}}} = \frac{105, 5 - 90.9}{\sqrt{\frac{20, 1^2}{34} + \frac{12, 2^2}{29}}} = 3,54$$

3. Graus de liberdade:

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_M^2}{n_M} + \frac{s_F^2}{n_F}\right)^2}{\frac{1}{n_M - 1} \left(\frac{s_M^2}{n_M}\right)^2 + \frac{1}{n_F - 1} \left(\frac{s_F^2}{n_F}\right)^2} = \frac{\left(\frac{20, 1^2}{34} + \frac{12, 2^2}{29}\right)^2}{\frac{1}{34 - 1} \left(\frac{20, 1^2}{34}\right)^2 + \frac{1}{29 - 1} \left(\frac{12, 2^2}{29}\right)^2} = 55, 5 \approx 55$$

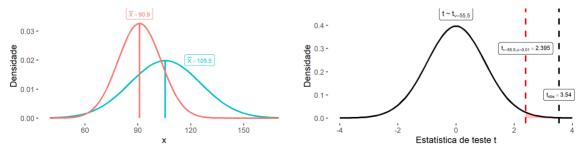
4. Região crítica (rejeição) e valor-p

$$\nu = 55 \text{ e } \alpha = 0,01 \rightarrow \text{ RC } = \{t > 2,395\}$$

Solução

- 5. **Decisão:** rejeitamos H₀
 - $\cdot t_{obs} \in \mathsf{RC}$
- 6. Interpretação

Ao nível de significância de 1% rejeitamos a hipótese nula, portanto podemos concluir que a maior velocidade média conduzida por estudantes universitários do sexo masculino **é maior** que a maior velocidade média conduzida por estudantes universitários do sexo feminino.





Teste de hipótese para a diferença de duas médias populacionais: σ desconhecido e amostras dependentes (emparelhadas)

Amostras dependentes

O que são amostras dependentes ou emparelhadas?

- Em uma amostra dependente (emparelhada) os valores medidos são conectados.
- Por exemplo, ao testar a influência de uma nova dieta, podemos analisar os pesos dos mesmos indivíduos antes e depois da dieta. Nesse caso, o valor da primeira amostra está relacionado ao valor da segunda amostra.
- O par de observações não precisa ser da mesmo pessoa. Por exemplo, se o interesse é analisar quem gasta mais tempo realizando atividades domésticas em relacionamento entre mulheres e homens, teremos uma amostra dependente. Cada casal seria um par.

Distribuição amostral da diferença

• Considere cada par (X_{1i},X_{2i}) . No teste para amostras dependentes, em vez de analisarmos cada grupo separadamente, observamos somente a diferença D_i entre as duas medidas em cada par

$$D_i = X_{1i} - X_{2i}$$

• A estatística de teste é baseada na média dessas diferenças

$$\overline{D} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} D_i$$

que terá distribuição normal

$$\overline{D} \sim \mathsf{N}(\mu_{\scriptscriptstyle D}, \sigma_{\scriptscriptstyle D}^2)$$

Distribuição amostral da diferença

• O parâmetro μ_D é estimado pela média amostral das diferenças

$$\overline{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d_i$$

• Como a variância é desconhecida, o seu valor é estimado por

$$s_d^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (d - d_i)^2$$

Teste de hipótese para a diferença de médias para amostras emparelhadas

$H_0: \mu_d = 0$		$H_1:\mu_d\neq 0$
$H_0:\mu_d\geq 0$	VS	$H_1:\mu_d<0$
$H_0:\mu_d\geq 0$		$H_1:\mu_d>0$

Distribuição amostral da diferença

Pressupostos para utilização do teste

- 1. As amostras são aleatoriamente selecionadas.
- 2. As amostras devem ser dependentes (emparelhadas).
- 3. A diferença entre os valores emparelhados deve ser normalmente distribuído.

Estatística de teste

$$t = \frac{\overline{d} - \mu_{\scriptscriptstyle d}}{s_d/\sqrt{n}} = \frac{\overline{d}}{s_d/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

em que n é o número de pares observados.

Amostras dependentes

Qual é a vantagem de um teste t dependente sobre um teste t independente?

- A principal vantagem de realizar um experimento com medidas repetidas (e, portanto, executar um teste t dependente) é que conseguimos eliminar as diferenças individuais que ocorrem entre os sujeitos experimentais.
- Isso significa que a probabilidade de detectar uma diferença estatisticamente significativa, se houver, é maior com o teste t dependente do que com o teste t independente.

Observação importante

É importante salientar que não podemos escolher um teste em vez do outro, a menos que o desenho experimental de estudo permita isso.

Amostras dependentes

Exemplo 5

Sete trabalhadores foram selecionados a fim de determinar o efeito de certo treinamento para a realização de uma tarefa. O quadro a seguir apresenta os resultados observados quanto ao tempo de execução da tarefa, em minutos, antes de os trabalhadores serem submetidos ao treinamento e depois do treinamento. Para que o treinamento seja considerado eficaz, é necessário que o tempo de realização da tarefa depois do treinamento seja significativamente menor do que o tempo de realização da tarefa antes do treinamento. Ao nível de 5% de significância, podemos concluir que o tempo da realização da tarefa é menor depois do treinamento?

i	Antes	Depois	d_i
1	13	10	3
2	08	08	0
3	10	07	3
4	11	06	5
5	07	09	-2
6	14	09	5
7	12	11	1

Observação para H₀

- $\mu_d < 0$ significa que houve aumento "depois".
- $\mu_d > 0$ significa que houve diminuição "depois".

Solução

1. Formulação da hipótese:

$$\mathsf{H}_0:\mu_d\leq 0\quad \text{vs}\quad \mathsf{H}_1:\mu_d>0$$

2. Estatística de teste observada

$$t_{obs} = \frac{\overline{d} - \mu_d}{s_d / \sqrt{n}} = \frac{2,1428 - 0}{2,6096 / \sqrt{7}} = 2,173$$

3. Região crítica (rejeição) e valor-p

$$\nu = 6 \ {\rm e} \ \alpha = 0,05 \to \ {\rm RC} \ = \{t > 1,943\}$$

Solução

4. **Decisão:** rejeitamos H₀

$$\cdot t_{obs} \in \mathsf{RC}$$

5. Interpretação

Ao nível de significância de 5% rejeitamos a hipótese nula, então podemos concluir que existem evidências de que o tempo de execução da tarefa é menor depois do treinamento, portanto o treinamento foi eficaz.

