

## CONTROLE ESTATÍSTICO DO PROCESSO

Profª Drª Luciane Flores Jacobi



## 1 - Introdução

A preocupação com a qualidade de bens e serviços não é recente. Os consumidores sempre tiveram o cuidado de inspecionar os bens e serviços que recebiam em uma relação de troca. Essa preocupação caracterizou a chamada era da inspeção, que se voltava para o produto acabado, não produzindo assim qualidade, apenas encontrando produtos defeituosos na razão direta da intensidade da inspeção.

A era do controle estatístico surgiu com o aparecimento da produção em massa, traduzindo-se na introdução de técnicas de amostragem e de outros procedimentos de base estatística, bem como, em termos organizacionais, no aparecimento do setor de controle da qualidade. Sistemas da qualidade foram pensados, esquematizados, melhorados e implantados desde a década de 30 nos Estados Unidos e, um pouco mais tarde (anos 40), no Japão e em vários outros países do mundo.

A partir da década de 50, surgiu a preocupação com a gestão da qualidade, que trouxe uma nova filosofia gerencial com base no desenvolvimento e na aplicação de conceitos, métodos e técnicas adequados a uma nova realidade. A gestão da qualidade total, como ficou conhecida essa nova filosofia gerencial, marcou o deslocamento da análise do produto ou serviço para a concepção de um sistema da qualidade. A qualidade deixou de ser um aspecto do produto e responsabilidade apenas de departamento específico, e passou a ser um problema da empresa, abrangendo, como tal, todos os aspectos de sua operação.

A preocupação com a qualidade, no sentido mais amplo da palavra, começou com W.A. Shewhart, estatístico norte-americano que, já na década de 20, tinha um grande questionamento com a qualidade e com a variabilidade encontrada na produção de bens e serviços. Shewhart desenvolveu um sistema de mensuração dessas variabilidades que ficou conhecido como Controle Estatístico de Processo (CEP). Criou também o Ciclo PDCA (Plan, Do, Check e Action), método essencial da gestão da qualidade, que ficou conhecido como Ciclo Deming da Qualidade.

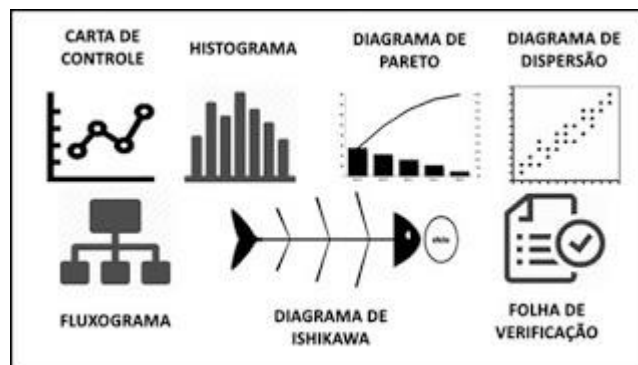
Logo após a Segunda Guerra Mundial, o Japão se apresenta ao mundo literalmente destruído e precisando iniciar seu processo de reconstrução. W.E. Deming foi convidado pela Japanese Union of Scientists and Engineers ( JUSE ) para proferir palestras e treinar empresários e industriais sobre controle estatístico de processo e sobre gestão da qualidade. O Japão inicia, então, sua revolução gerencial silenciosa, que se contrapõe, em estilo, mas ocorre paralelamente, à revolução tecnológica “barulhenta” do Ocidente e chega a se confundir com uma revolução cultural. Essa mudança silenciosa de postura gerencial proporcionou ao Japão o sucesso de que desfruta até hoje como potência mundial.

Texto de Longo, 1996

## 2 - As sete ferramentas da qualidade

As sete ferramentas da qualidade são metodologias e técnicas utilizadas para identificação e priorização de problemas, elaboração e implementação de soluções e verificação de resultados.

As sete ferramentas da qualidade são: Histograma, Diagrama de Pareto, Diagrama de Ishikawa, Carta de Controle, Fluxograma de processos, Diagrama de dispersão e Folha de verificação.



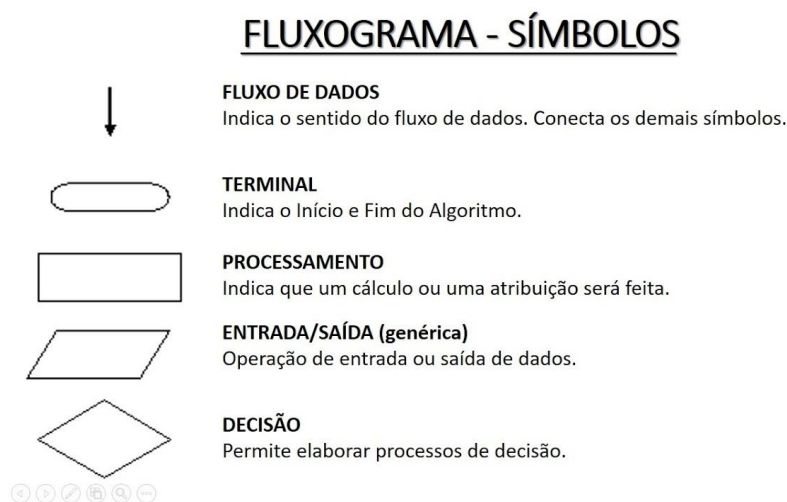
Fonte: <https://www.portal-administracao.com/2017/09/sete-ferramentas-da-qualidade-conceito.html>

## 2.1 Fluxograma

O fluxograma é um diagrama que expressa um determinado processo, ou fluxo de trabalho, de forma sequencial, gráfica, simples, objetiva e direta. Essa representação é feita a partir de figuras geométricas que simbolizam etapas do determinado processo e são ligadas por setas que indicam a direção e a sequência a ser seguida. O objetivo é estabelecer uma gestão à vista, de forma a facilitar o entendimento das etapas que compõem um processo.

É uma ferramenta gráfica que apresenta o esquema de um processo, cada etapa relevante e a sequência seguida. Símbolos podem ser utilizados para representar diferentes tipos de interações. Seu objetivo é ser claro, direto e objetivo.

Os símbolos de fluxo de processo comumente utilizados são mostrados na Figura abaixo.



## 2.2 Folha de verificação

Provavelmente, a mais simples e a mais ampla das 7 Ferramentas da Qualidade, mais conhecida como Checklist. Usada para coletar, organizar e analisar dados. Associada a outras ferramentas, ela está presente no dia a dia da gestão de processos e costuma ser o

passo inicial. Aumenta a padronização dos procedimentos e sua confiabilidade, além de facilitar a identificação de falhas.

A Folha de Verificação é basicamente um formulário (tabela ou planilha) planejado para coletar informações relevantes, pré-determinadas. Deve ser aperfeiçoada conforme a evolução e compreensão do funcionamento do processo. De forma que, não contenha informações desnecessárias e não falte as informações que precisamos.

Essa ferramenta pode coletar informações sobre a incidência de uma falha ou etapas de um processo:

- quantitativas: por exemplo, sobre variações de um produto (peso) ou sobre o tempo gasto para conclusão da etapa de um processo.
- qualitativas: por exemplo, sobre variações de um produto (cor) ou sobre as condições que uma peça é entregue para a próxima etapa do processo ou cliente final.

Folha de Verificação

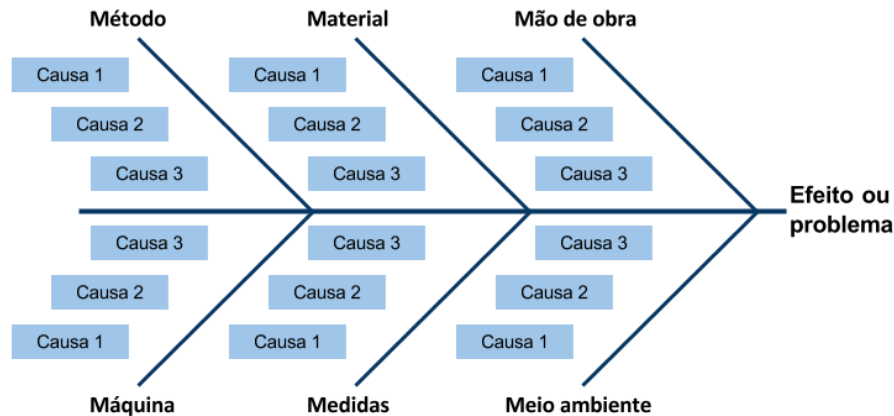
Problema	Ocorrências				
	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta
Falta de Papel					
Falta de Toner					
Cópias muito claras					
Separador não funciona					
Alimentador de documentos					
Alimentação de transparências					
Outros: A copiadora parou					
Painel confuso					
Copiadora sem energia					

### 2.3 Diagrama de Ishikawa

O diagrama de Ishikawa, também conhecido como diagrama de causa e efeito ou espinha de peixe é uma ferramenta utilizada para a análise de dispersões no processo. O nome Ishikawa tem origem no seu criador, Kaoru Ishikawa que desenvolveu a ferramenta através de uma ideia básica: Fazer as pessoas pensarem sobre causas e razões possíveis que fazem com que um problema ocorra.

Para montar o diagrama de Ishikawa, faz parte do procedimento reunir as pessoas em time para realizar um brainstorming (tempestade de idéias) de forma a levantar as causas raízes que originam um problema. Em virtude desta função, o diagrama de Ishikawa também pode ser denominado como diagrama de causa e efeito. O diagrama, quando elaborado, assemelha-se a uma espinha-de-peixe, motivo pelo qual ele também é conhecido por este nome.

O diagrama de Ishikawa é uma das 7 ferramentas da qualidade utilizada para o gerenciamento do controle de qualidade e sua composição leva em consideração de que as causas dos problemas podem ser classificadas em 6 tipos diferentes de causas principais que afetam os processos (Método, Máquina, Medida, Meio Ambiente, Mão-de-Obra, Material). Justamente pelo motivo da denominação das 6 causas principais iniciarem com a letra M, também pode ser chamado de 6M's.



Vejamos então o significado de cada M:

- Método – É método utilizado para executar o trabalho ou um procedimento.
- Matéria-prima – A matéria prima utilizada no trabalho que pode ser a causa de problemas.
- Mão de Obra – A pressa, imprudência ou mesmo a falta de qualificação da mão de obra podem ser a causa de muitos problemas.
- Máquinas – Muitos problemas são derivados de falhas de máquinas. Isto pode ser causado por falta de manutenção regular ou mesmo se for operacionalizada de forma inadequada.
- Medida – Qualquer decisão tomada anteriormente pode alterar o processo e ser a causa do problema.
- Meio Ambiente – O ambiente pode favorecer a ocorrências de problemas, está relacionada neste contexto a poluição, poeira, calor, falta de espaço, etc.

Como se faz um Diagrama de Ishikawa

- Definir o problema

O primeiro passo é definir um problema. Para tanto, evite ser genérico na definição do problema, prefira definir o problema de forma objetiva e em termos de qualidade que possa ser mensurável.

- Criar a espinha de peixe e marcar o problema que será analisado

Faça um traço na horizontal e marque a direita deste traço o problema que foi definido, em perpendicular a este traço, aplique os 6Ms.

- Reúna a equipe

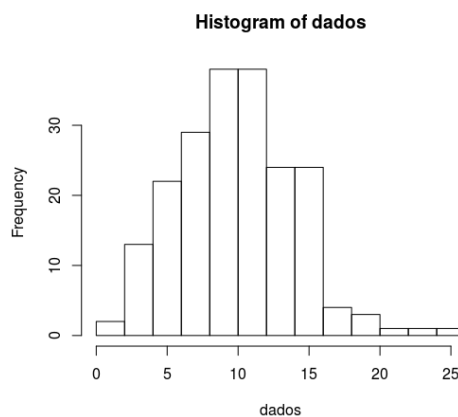
Este é o momento de gerar um brainstorm sobre o problema levando em consideração a estrutura dos 6Ms. É interessante participar deste brainstorming pessoas que estão relacionadas com o problema e de outras áreas, com diferentes perspectivas que agregam valor neste momento.

- Analise as causas e fatores atrelados a estas e planeje ações

Faça uma análise das causas de forma a detectar causas que impactam mais no problema e quais seriam as soluções propostas. Após isto, planeje um plano de ações definindo os responsáveis e o prazo para cada ação.

#### 2.4 Histograma

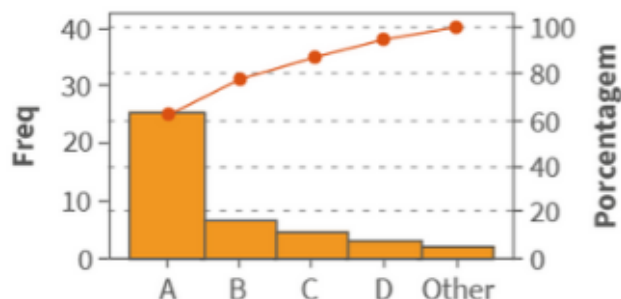
Um Histograma, também conhecido como Diagrama de Distribuição de Frequências, é a representação gráfica, em colunas (retângulos), de um conjunto de dados previamente tabulado e dividido em classes uniformes. A base de cada retângulo representa uma classe; A altura de cada retângulo representa a quantidade ou frequência com que o valor dessa classe ocorreu no conjunto de dados. Ao dispor as informações graficamente, o Histograma permite a visualização dos valores centrais, a dispersão em torno dos valores centrais e a forma da distribuição.



#### 2.5 Diagrama de Pareto

O Gráfico de Pareto é uma ferramenta estatística que auxilia na tomada de decisão, permitindo uma empresa priorizar problemas, quando esses se apresentam em grande número.

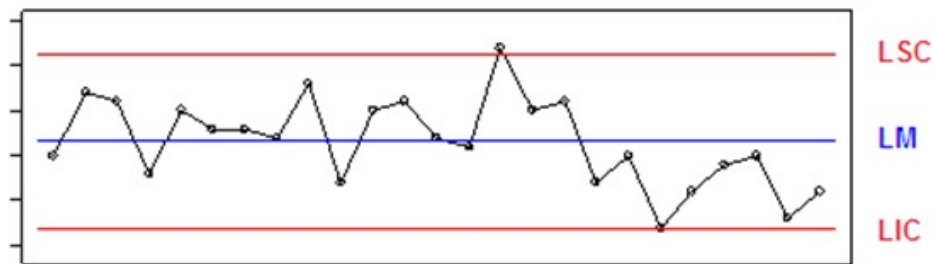
O gráfico de pareto permite uma fácil visualização e identificação das causas de um problema. A partir de uma análise de frequências das ocorrências, é possível distinguir quais devem ser as ações prioritárias da empresa e onde ela deve direcionar os seus recursos para resolver um determinado tipo de problema.



#### 2.6 Carta de controle

Uma carta de controle é um conjunto de pontos (amostras) ordenados, no tempo, que são interpretados em função de linhas horizontais, chamadas de LSC (limite superior de controle) e LIC (limite inferior de controle).

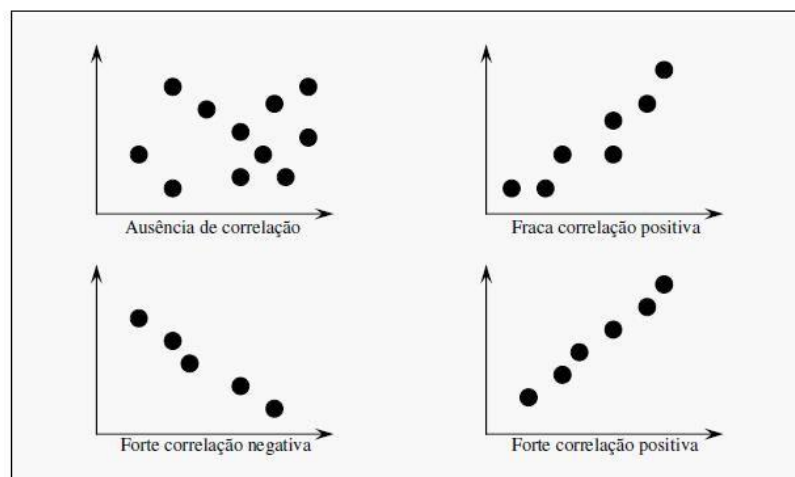
A utilização da Carta de Controle é muito importante para o processo gerencial, permitindo que a empresa monitore e controle os seus processos. A partir dessa verificação, pode-se agir para corrigir os eventuais problemas no processo, gerando maior produtividade e eficiência.



## 2.7 Diagrama de dispersão

É uma ferramenta gráfica com a representação de duas variáveis (eixo X e eixo Y), indicando se existe correlação entre as elas, de causa e efeito, e como é essa correlação.

Seu principal benefício está na facilidade em perceber se uma variável influencia a outra e como influencia, positiva ou negativamente. É verificado se essa relação de causa e efeito realmente fazem sentido, eliminando inferências equivocadas.



Diagramas de Dispersão.

Geralmente, a relação vem de uma variável que é independente e outra variável que é dependente da primeira, ou seja, a variável independente é a causa que provoca o efeito e a dependente é o efeito (a consequência gerada pela causa).

## Exercícios

1 - Durante um período de seis meses, a produção de filme de polietileno de baixa densidade (PEBD) foi acompanhada, anotando-se os defeitos encontrados:

DEFEITO	QUANTIDADE DE BOBINAS
Micro Furos	5
Opacidade	67
Espessura Maior	43
Espessura Menor	182
Largura Incorreta	30
Adesão entre Faces	130
Grumos	9
Outros	19

Com base nos dados faça o gráfico de Pareto.

2 – Construir um fluxograma e um diagrama de causa-e-efeito para o seguinte problema: Causas de fila em bomba de posto de gasolina.

3 - Elaborar uma lista de verificação para coleta de dados, com base nas informações abaixo:

- Na empresa existem três linhas de produção;
- Cada linha possui quatro máquinas similares que fabricam o mesmo tipo de produto;
- Trabalha-se em três turnos, sem revezamento, seis dias por semana (de segunda a sábado);
- Existem três categorias de defeitos: - Críticos; - Maiores; - Leves

A Lista de Verificação deve possibilitar identificação de que tipo de defeito ocorreu em que dia, em que turma, em que linha e em que máquina.

4 - Construir um histograma para as viscosidades (Cps) abaixo, obtidas de 50 lotes de um certo produto químico.

184 182 169 167 181 170 162 167 160 166 176 156 172 187 172 184 172 170 177  
172 163 187 184 166 168 176 159 180 189 170 179 169 169 181 180 164 177 180 175 182  
165 173 173 167 171 176 172 164 184 172

5 - Construir um diagrama de dispersão para os valores abaixo (temperatura e rendimento):

TEMPERATURA	RENDIMENTO
17	0,20
19	0,25
19	0,30
20	0,35
22	0,40
22	0,60
23	0,50
23	0,60
25	0,55
25	0,65



### 3 - Gráficos de controle

O Gráfico de Controle, que é uma das 7 Ferramentas da Qualidade, é considerado um gráfico de tendência, que mostra como um determinado indicador varia no tempo, com limites de controle. O objetivo desses limites de controle é dar noção à equipe sobre a variabilidade natural do processo, ou seja, o quanto ele deve variar normalmente.

Em outras palavras, o Gráfico de Controle é capaz de mostrar se o processo está estável ou se há algo anormal com ele. Essas “anormalidades” são muito úteis em melhoria de processos, pois elas avisam exatamente o período que se deve estudar o processo para aprender mais sobre ele.

As causas comuns, em geral, só podem ser resolvidas por uma ação global sobre o sistema, e muitas vezes a atuação sobre elas não se justifica economicamente. Os operadores estão em boa posição para identificá-las, mas a sua correção exige decisão gerencial. A correção pode não se justificar economicamente.

As causas especiais são causas que não são pequenas e não seguem um padrão aleatório (erros de set up, problemas nos equipamentos ou nas ferramentas, um lote de matéria prima com características muito diferentes etc.) e por isso também são chamadas de causas assinaláveis. São consideradas falhas de operação. Elas fazem com que o processo saia fora de seu padrão natural de operação, ou seja, provocam alterações na forma, tendência central ou variabilidade das características de qualidade. Elas reduzem significativamente o desempenho do processo e devem ser identificadas e neutralizadas, pois sua correção se justifica economicamente.

As causas especiais geralmente são corrigidas por ação local e, por isso, são de responsabilidade dos operadores, apesar de algumas vezes a gerência estar em melhor posição para resolver o problema.

Existem gráficos de controle para atributos e para variáveis. Os gráficos de controle para atributos estudam características classificadas como defeituosas/não-defeituosas, conforme/não - conforme, claro/escuro, trinca/sem trina, entre outras.

Um gráfico de controle para variáveis estuda o comportamento de variáveis como peso, comprimento, densidade, entre outros. Ele mostra se o processo está ou não estável.

A seguir encontra-se um fluxograma para a construção e utilização de gráficos de controle.

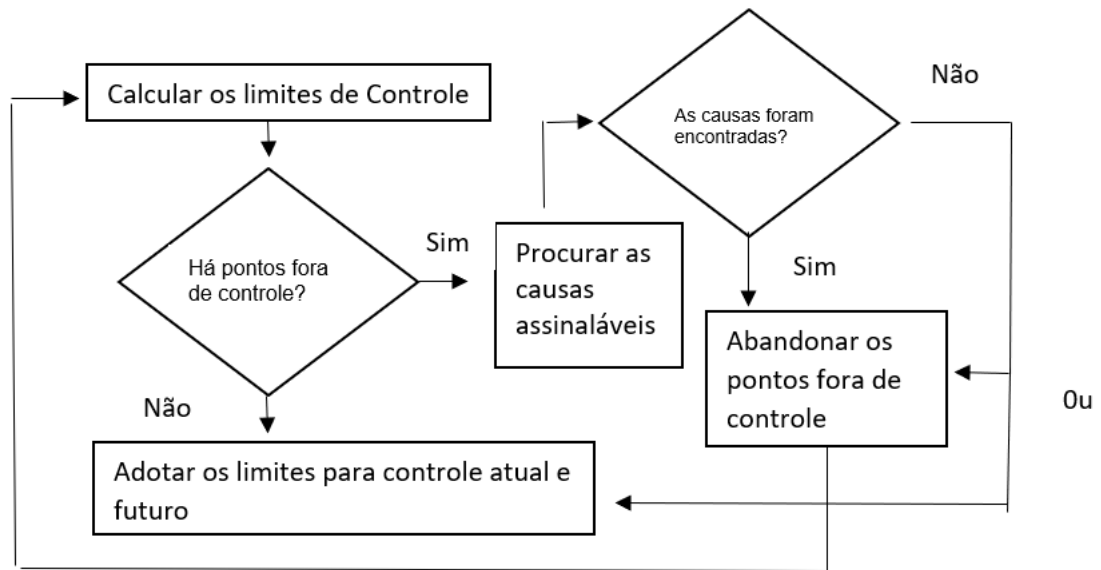


Figura 1 - Fluxograma para a construção e utilização de gráficos de controle.

### 3.1 Gráficos de controle para variáveis

Quando as características da qualidade podem ser medidas e expressas como números em alguma escala contínua de medida, é conveniente descrever a característica com uma medida de tendência central e uma medida de variabilidade.

Portanto, os gráficos de controle para variáveis são geralmente utilizados em pares. Um gráfico que monitora a variação em processo, enquanto o outro monitora a média do processo. O gráfico que monitora a variabilidade deve ser examinado em primeiro lugar, porque se ele indicar a presença de condições fora de controle, a interpretação de gráfico para a média será enganosa.

O gráfico  $\bar{X}$  é o gráfico mais largamente usado para monitorar a tendência central, enquanto gráficos baseados na amplitude da amostra ou no desvio-padrão amostral são usados para controlar a variabilidade do processo.

#### 3.1.1 Gráficos de controle para a média aritmética ( $\bar{X}$ ) e para a amplitude (R).

O gráfico de controle para  $\bar{X}$  utiliza subgrupos de tamanho  $n$  que são obtidos sobre sequências consecutivas  $k$  ou espaços no tempo. Para calcularmos os limites de controle para a média, é recomendado o uso de no mínimo 20 a 25 amostras ( $m$ ), cada uma contendo subgrupos de tamanho ( $n$ ) 4, 5 ou 6. Dessa forma é possível calcular a média amostral para a  $i$ -ésima amostra  $\bar{X}_i$  e estimarmos a média populacional,  $\mu$ , pela média global

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^m \bar{X}_i}{m}$$

Se  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é uma amostra de tamanho  $n$ , então a amplitude da amostra é a diferença entre a maior e a menor observação, ou seja,  $R = x_{\max} - x_{\min}$

Seja  $R_1, R_2, \dots, R_m$  são as amplitudes das  $m$  amostras. A amplitude média é

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^m R_i}{m}$$

A linha central e os limites superior e inferior de controle para o gráfico de controle  $\bar{X}$  são:

$$LSC = \bar{\bar{X}} + A_2 \bar{R}$$

$$LM = \bar{\bar{X}}$$

$$LIC = \bar{\bar{X}} - A_2 \bar{R}$$

A linha central e os limites superior e inferior de controle para o gráfico de controle  $R$  são:

$$LSC = D_4 \bar{R}$$

$$LM = \bar{R}$$

$$LIC = D_3 \bar{R}$$

em que as constantes  $A_2$ ,  $D_4$  e  $D_3$  são tabeladas, para vários tamanhos de amostra, na tabela em Anexo.

### 3.1.2. Gráficos de controle para a média aritmética ( $\bar{X}$ ) e para o desvio-padrão ( $S$ ).

Na prática, geralmente não conhecemos  $\mu$  e  $\sigma$ , contudo, eles são estimados a partir de amostras preliminares tomadas em subgrupos de pelo menos 20 a 25 amostras. Suponhamos que temos disponível  $m$  amostras, com cada uma contendo  $n$  observações sobre a característica da qualidade. Nas aplicações, o número de observações  $n$  é pequeno e geralmente resultam à partir da construção de subgrupos racionais, em que os custos de amostragem e de inspeção associadas com as medições das variáveis são altas.

A linha central e os limites superior e inferior de controle para o gráfico de controle  $\bar{X}$  são:

$$LSC = \bar{\bar{X}} + A_3 \bar{S}$$

$$LM = \bar{\bar{X}}$$

$$LIC = \bar{\bar{X}} - A_3 \bar{S}$$

em que a constante  $A_3$  é tabelada, para vários tamanhos de amostra, na tabela em anexo.

A linha central e os limites superior e inferior de controle para o gráfico de controle  $S$  são:

$$LSC = B_4 \bar{S}$$

$$LM = \bar{S}$$

$$LIC = B_3 \bar{S}$$

em que as constantes  $A_3$ ,  $B_4$  e  $B_3$  são tabeladas, para vários tamanhos de amostra, na tabela em Anexo.

A seguir, vamos apresentar os principais tópicos para a construção do gráfico  $\bar{X}$  e  $S$ .

- A única diferença na aplicação do gráfico  $\bar{X}$  e  $S$  (média e desvio padrão), ao invés do  $\bar{X}$  e  $R$  é no cálculo da estimativa de  $\sigma$ .
- Estimamos  $\sigma$  de forma direta, ou seja, através do cálculo do desvio padrão amostral.
- O gráfico  $\bar{X}$  e  $S$  é utilizado quando o tamanho da amostra é grande ( $> 10$  ou  $12$ ). Além disso, o tamanho da amostra ou subgrupo pode ser variável.
- Do ponto de vista prático, a aplicação deste gráfico pode ser inviável para dados que não são coletados de forma eletrônica, pois o operador deve calcular os desvios padrão para cada ponto.

Exemplo:

1 - Uma peça componente de um motor de avião a jato é fabricada por um processo de fundição do invólucro. A abertura do rotor nessa fundição é um importante parâmetro funcional da peça. Determine os gráficos de controle ( $\bar{X}$  e  $R$ ) e ( $\bar{X}$  e  $S$ ) para verificar a estabilidade estatística desse processo. A tabela abaixo apresenta 20 amostras de cinco peças cada uma.

Número d	x1	x2	x3	x4	x5
1	33	29	31	32	33
2	33	31	35	37	31
3	35	37	33	34	36
4	30	31	33	34	33
5	33	34	35	33	34
6	38	37	39	40	38
7	30	31	32	34	31
8	29	39	38	39	39
9	28	33	35	36	43
10	38	33	32	35	32
11	28	30	28	32	31
12	31	35	35	35	34
13	27	32	34	35	37
14	33	33	35	37	36
15	35	37	32	35	39
16	33	33	27	31	30
17	35	34	34	30	32
18	32	33	30	30	33
19	25	27	34	27	28
20	35	35	36	33	30

2 - Considere um processo de usinagem de um pino onde o diâmetro é medido em subgrupos de 10 peças ao longo do tempo, conforme os dados no arquivo em planilha excel.

#### ■ APPENDIX VI

##### Factors for Constructing Variables Control Charts

Observations in Sample, <i>n</i>	Chart for Averages					Chart for Standard Deviations					Chart for Ranges						
	Factors for Control Limits			Factors for Center Line		Factors for Control Limits				Factors for Center Line		Factors for Control Limits					
	<i>A</i>	<i>A</i> <sub>2</sub>	<i>A</i> <sub>3</sub>	<i>c</i> <sub>4</sub>	1/ <i>c</i> <sub>4</sub>	<i>B</i> <sub>3</sub>	<i>B</i> <sub>4</sub>	<i>B</i> <sub>5</sub>	<i>B</i> <sub>6</sub>	<i>d</i> <sub>2</sub>	1/ <i>d</i> <sub>2</sub>	<i>d</i> <sub>3</sub>	<i>D</i> <sub>1</sub>	<i>D</i> <sub>2</sub>	<i>D</i> <sub>3</sub>	<i>D</i> <sub>4</sub>	
2	2.121	1.880	2.659	0.7979	1.2533	0	3.267	0	2.606	1.128	0.8865	0.853	0	3.686	0	3.267	
3	1.732	1.023	1.954	0.8862	1.1284	0	2.568	0	2.276	1.693	0.5907	0.888	0	4.358	0	2.574	
4	1.500	0.729	1.628	0.9213	1.0854	0	2.266	0	2.088	2.059	0.4857	0.880	0	4.698	0	2.282	
5	1.342	0.577	1.427	0.9400	1.0638	0	2.089	0	1.964	2.326	0.4299	0.864	0	4.918	0	2.114	
6	1.225	0.483	1.287	0.9515	1.0510	0.030	1.970	0.029	1.874	2.534	0.3946	0.848	0	5.078	0	2.004	
7	1.134	0.419	1.182	0.9594	1.0423	0.118	1.882	0.113	1.806	2.704	0.3698	0.833	0.204	5.204	0.076	1.924	
8	1.061	0.373	1.099	0.9650	1.0363	0.185	1.815	0.179	1.751	2.847	0.3512	0.820	0.388	5.306	0.136	1.864	
9	1.000	0.337	1.032	0.9693	1.0317	0.239	1.761	0.232	1.707	2.970	0.3367	0.808	0.547	5.393	0.184	1.816	
10	0.949	0.308	0.975	0.9727	1.0281	0.284	1.716	0.276	1.669	3.078	0.3249	0.797	0.687	5.469	0.223	1.777	
11	0.905	0.285	0.927	0.9754	1.0252	0.321	1.679	0.313	1.637	3.173	0.3152	0.787	0.811	5.535	0.256	1.744	
12	0.866	0.266	0.886	0.9776	1.0229	0.354	1.646	0.346	1.610	3.258	0.3069	0.778	0.922	5.594	0.283	1.717	
13	0.832	0.249	0.850	0.9794	1.0210	0.382	1.618	0.374	1.585	3.336	0.2998	0.770	1.025	5.647	0.307	1.693	
14	0.802	0.235	0.817	0.9810	1.0194	0.406	1.594	0.399	1.563	3.407	0.2935	0.763	1.118	5.696	0.328	1.672	
15	0.775	0.223	0.789	0.9823	1.0180	0.428	1.572	0.421	1.544	3.472	0.2880	0.756	1.203	5.741	0.347	1.653	
16	0.750	0.212	0.763	0.9835	1.0168	0.448	1.552	0.440	1.526	3.532	0.2831	0.750	1.282	5.782	0.363	1.637	
17	0.728	0.203	0.739	0.9845	1.0157	0.466	1.534	0.458	1.511	3.588	0.2787	0.744	1.356	5.820	0.378	1.622	
18	0.707	0.194	0.718	0.9854	1.0148	0.482	1.518	0.475	1.496	3.640	0.2747	0.739	1.424	5.856	0.391	1.608	
19	0.688	0.187	0.698	0.9862	1.0140	0.497	1.503	0.490	1.483	3.689	0.2711	0.734	1.487	5.891	0.403	1.597	
20	0.671	0.180	0.680	0.9869	1.0133	0.510	1.490	0.504	1.470	3.735	0.2677	0.729	1.549	5.921	0.415	1.585	
21	0.655	0.173	0.663	0.9876	1.0126	0.523	1.477	0.516	1.459	3.778	0.2647	0.724	1.605	5.951	0.425	1.575	
22	0.640	0.167	0.647	0.9882	1.0119	0.534	1.466	0.528	1.448	3.819	0.2618	0.720	1.659	5.979	0.434	1.566	
23	0.626	0.162	0.633	0.9887	1.0114	0.545	1.455	0.539	1.438	3.858	0.2592	0.716	1.710	6.006	0.443	1.557	
24	0.612	0.157	0.619	0.9892	1.0109	0.555	1.445	0.549	1.429	3.895	0.2567	0.712	1.759	6.031	0.451	1.548	
25	0.600	0.153	0.606	0.9896	1.0105	0.565	1.435	0.559	1.420	3.931	0.2544	0.708	1.806	6.056	0.459	1.541	

For *n* > 25.

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{3}{\sqrt{n}} & A_3 &= \frac{3}{c_4 \sqrt{n}} & c_4 &\cong \frac{4(n-1)}{4n-3} \\
 B_3 &= 1 - \frac{3}{c_4 \sqrt{2(n-1)}} & B_4 &= 1 + \frac{3}{c_4 \sqrt{2(n-1)}} \\
 B_5 &= c_4 - \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}} & B_6 &= c_4 + \frac{3}{\sqrt{2(n-1)}}
 \end{aligned}$$

### 3.1.3. Gráfico de controle para medidas individuais.

Em algumas situações, o CEP deve ser aplicado para valores individuais. Essa situação é necessária quando:

- a) taxa de produção muito baixa;
- b) testes muito caros, destrutivos ou que exijam a parada da produção;
- c) características muito homogêneas, que variam muito lentamente.

O gráfico de controle para medidas individuais usa a amplitude móvel de duas observações sucessivas para estimar a variabilidade do processo. A amplitude móvel é definida como  $AM_i = |X_i - X_{i-1}|$ .

Uma estimativa de  $\sigma$  é  $\hat{\sigma} = \frac{\overline{AM}}{d_2} = \frac{\overline{AM}}{1,128}$ , porque  $d_2 = 1,128$  quando duas observações consecutivas são usadas para calcular uma amplitude móvel. É também possível estabelecer um gráfico de controle para amplitude móvel usando  $D_3$  e  $D_4$  para  $n = 2$ . Os parâmetros para esses gráficos são definidos como segue.

A linha central e os limites superior e inferior de controle para o gráfico de controle para as medidas individuais são:

$$LSC = \bar{x} + 3 \frac{\overline{am}}{d_2} = \bar{x} + 3 \frac{\overline{am}}{1,128}$$

$$LM = \bar{x}$$

$$LIC = \bar{x} - 3 \frac{\overline{am}}{d_2} = \bar{x} - 3 \frac{\overline{am}}{1,128}$$

E para o gráfico de controle para amplitudes móveis:

$$LSC = D_4 \overline{am} = 3,267 \overline{am}$$

$$LM = \overline{am}$$

$$LIC = D_3 \overline{am} = 0$$

O gráfico para medidas individuais pode ser interpretado como um gráfico de controle comum  $\bar{X}$ . Uma mudança na média do processo resultará em um ponto (ou pontos) fora dos limites de controle, ou em um padrão de comportamento consistindo em uma corrida em um lado da linha central.

Algum cuidado se deve ter na interpretação dos padrões de comportamento do gráfico de amplitude móvel. As amplitudes móveis estão correlacionadas e essa correlação pode frequentemente induzir a um padrão de comportamento de corridas ou ciclos no gráfico. As medidas individuais são consideradas não correlacionadas, no entanto, qualquer padrão aparente no gráfico de controle das medidas individuais deve ser investigado cuidadosamente.

O gráfico de controle para medidas individuais é muito sensível a pequenas mudanças na média do processo. Enquanto que o desempenho desse

gráfico é muito melhor para grandes mudanças, em muitas situações, a mudança de interesse não é grande sendo desejável sua detecção mais rapidamente.

Alguns pesquisadores sugerem que limites mais estreitos do que 3 sigmas sejam usados no gráfico para medidas individuais para aumentar sua habilidade de detectar pequenas mudanças no processo. Essa é uma sugestão perigosa, pois limites mais estreitos aumentarão dramaticamente os alarmes falsos tal que os gráficos possam ser ignorados e se tornarem inúteis.

Exemplo:

O diâmetro de orifícios é medido em ordem consecutiva por um sensor automático. Os resultados da medição de 25 orifícios encontram-se abaixo. Usando todos os dados, calcule os limites de controle para o gráfico de medidas individuais e da amplitude móvel. Construa os dados e plote os dados.

Amostra	diâmetro
1	9.94
2	9.93
3	10.09
4	9.98
5	10.11
6	9.99
7	10.11
8	9.84
9	9.82
10	10.38
11	9.99
12	10.41
13	10.36
14	9.99
15	10.12
16	9.81
17	9.73
18	10.14
19	9.96
20	10.06
21	10.11
22	9.95
23	9.92
24	10.09
25	9.85

### 3.2 Interpretação dos gráficos de controle

Como dito anteriormente, se algum ponto fora dos limites de controle ou qualquer outro padrão de não aleatoriedade for encontrado, causas especiais de variação podem estar presentes. Sabe-se que pontos além dos limites de controle são raros, então, presume-se que uma causa especial ocorreu devido à existência destes valores extremos.

Estas causas deverão ser identificadas e corrigidas. Depois de corrigidas, novos limites devem ser calculados. Este processo deverá ser repetido até que nenhum padrão de não aleatoriedade seja encontrado. Neste momento, considera-se que o processo atingiu o estado de controle.

A habilidade para interpretar um padrão particular em termos de causas especiais requer experiência e conhecimento do processo por parte do analista responsável, além de conhecer os princípios estatísticos para o uso das cartas de controle.

Vários critérios para a interpretação das cartas de controle podem ser aplicados simultaneamente para determinar se o processo está sob controle. O critério básico [item a)] é o de que haja um ou mais pontos fora dos limites de controle. Critérios suplementares [itens b) até h)] são utilizados para aumentar a sensibilidade das cartas de controle a uma pequena alteração no processo, de modo a responder mais rapidamente a uma causa especial de variação.

A norma ISO 8258 – Shewhart Control Charts estabelece os seguintes critérios de decisão em cartas de controle (Figura 1):

- a) 1 ou mais pontos acima do LSC ou abaixo do LIC;
- b) 9 pontos consecutivos na zona C ou no mesmo lado do LC;
- c) 6 pontos consecutivos, todos aumentando ou todos diminuindo;
- d) 14 pontos consecutivos alternando para cima e para baixo;
- e) 2 de 3 pontos consecutivos na zona A ou além dela;
- f) 4 de 5 pontos consecutivos na zona B ou além dela;
- g) 15 pontos consecutivos na zona C (tanto acima quanto abaixo do LC);
- h) 8 pontos consecutivos na zona B.





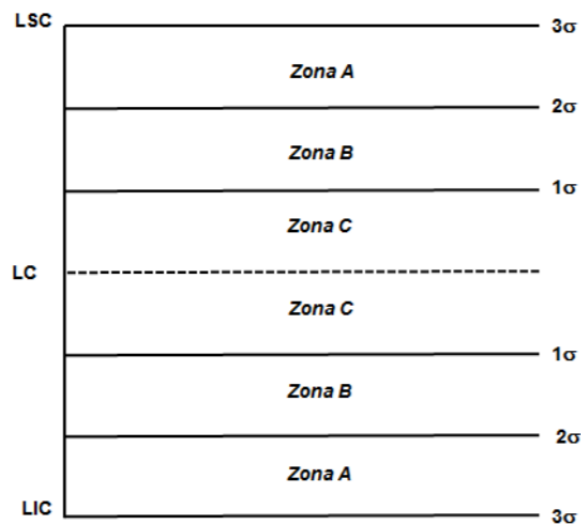


Figura 1 - Carta de controle com os limites superior (LSC), inferior (LIC) e central (LC) e linhas correspondentes aos desvios ( $\sigma$ ).  
Fonte: Oliveira et al. (2013)

A Figura 2 mostra a avaliação dos oito critérios estabelecidos na norma ISO 8258 para a interpretação das cartas de controle de Shewhart.

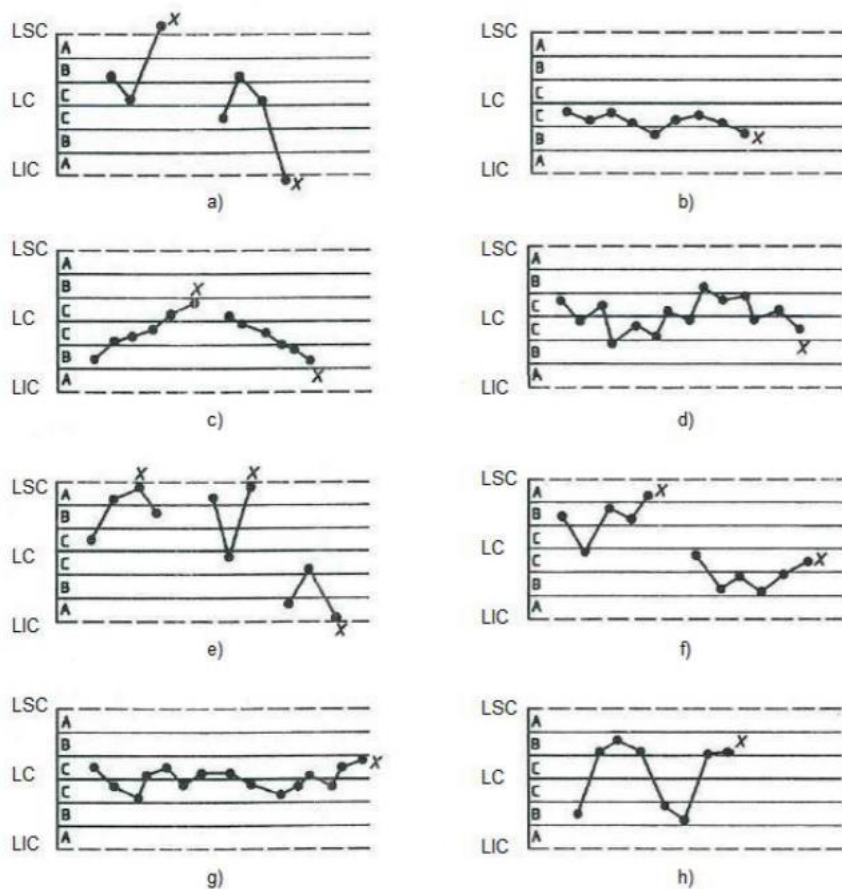


Figura 2 - Exemplos de processos fora de controle estatístico. Adaptado da norma ISO 8258. Fonte: Oliveira et al. (2013)

Os critérios suplementares geralmente são utilizados até que o processo esteja sob controle. Depois disso, pode-se adotar apenas o critério básico (1 ou mais pontos fora dos limites de controle), mas fica a cargo do analista responsável decidir quais regras serão empregadas.

Exemplo: Verificar no gráfico do exemplo anterior se o sistema está ou não fora de controle utilizando os critérios de seleção citados anteriormente.

#### Referências:

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros**. 2. Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003. cap. 15, p. 360–392.

Oliveira, C. C. et al. **Manual para elaboração de cartas para monitoramento de processos de medição quantitativos**. São Paulo: Instituto Adolfo Lutz, 2013.

### 3.3 Capacidade de processo

Estudos de capacidade (ou capabilidade) têm por objetivo verificar se um processo gera produtos que atendem às especificações de engenharia, em condições normais de operação.

Para realizar um estudo de capacidade é necessário que:

- O processo seja (estatisticamente) estável;
- As medidas individuais tenham distribuição normal.

Se estas duas restrições não forem obedecidas os resultados do estudo fornecerão indicações erradas. A verificação da estabilidade do processo é feita através da análise dos gráficos de controle, enquanto que a aderência dos valores individuais com a distribuição normal pode ser feita com o uso do papel de probabilidade normal.

#### 3.3.1 Limites de Especificação

Os limites de especificação são determinados externamente, podendo ser estabelecidos pela gerência, pelos engenheiros responsáveis ou pelos responsáveis pelo planejamento do produto. Observe que os limites de especificação devem refletir as necessidades dos clientes ao contrário dos limites de controle que são resultados da variabilidade natural do processo.

Um processo pode se enquadrar em qualquer uma das quatro categorias apresentadas abaixo:

- 1) O processo não está sob controle e produz itens defeituosos;
- 2) O processo não está sob controle mas não produz itens defeituosos;
- 3) O processo está sob controle mas produz itens defeituosos;
- 4) O processo está sob controle e não produz itens defeituosos.

Essas categorias são apresentadas na Figura 1.

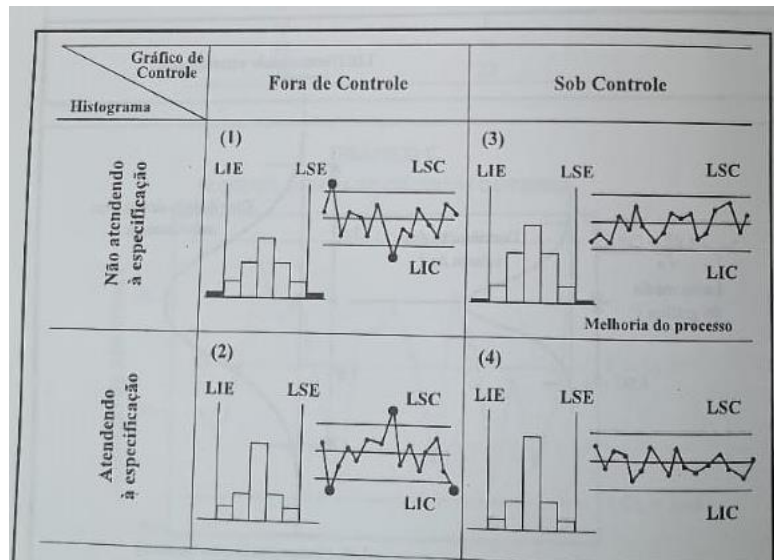


Figura 1 – Possíveis categorias para a classificação de um processo, segundo o estado de controle estatístico e o atendimento às especificações.

Fonte: Werkema (1995)

### 3.3.2 Índices de capacidade de processo ( $C_p$ e $C_{pk}$ )

Para verificar se um processo é capaz, são utilizados índices de capacidade que comparam as especificações de engenharia com a variação natural do processo. Para um processo sob controle estatístico (estável), o índice de capacidade determina o que pode ser esperado para o processo em relação às especificações. Os índices de capacidade do processo podem ser estabelecidos somente para um processo estável ao longo do tempo (sob controle).

O  $C_p$  e  $C_{pk}$  são índices que apontam se o processo está fabricando produtos dentro de uma faixa de especificação e assim indicam se a produtividade está o suficientemente aceitável. Estes índices são muito importantes na fase do desenvolvimento de produto, pois nesta fase inicial, a análise do histórico dos índices de capacidade de peças similares podem permitir que sejam escolhidos processos e especificações coerentes que sejam eficazes estatisticamente. Adicionalmente, eles também se fazem importantes durante a homologação do processo, pois podem revelar processos problemáticos antes da entrada de produtos na linha de produção.

O  $C_p$  foi o primeiro índice proposto na literatura e é utilizado para avaliar a largura da amplitude do processo em comparação com a largura da especificação. Ele pode ser calculado utilizando a seguinte fórmula:

$$C_p = \frac{LSE - LIE}{6\sigma}$$

Em que: LSE: Limite Superior de Especificação; LIE: Limite Inferior de Especificação;  $\sigma$ : Desvio-padrão calculado a partir da amostragem de medições.

Simplificando, quanto maior for o índice  $C_p$ , menor a probabilidade da característica de qualidade medida estar fora das especificações, o que indica que haveriam menos produtos defeituosos durante o processo produtivo.

Na Figura 2, é possível visualizarmos a relação entre o valor de  $C_p$ , a quantidade de produto defeituoso, a classificação do processo e a comparação com limites de especificação.

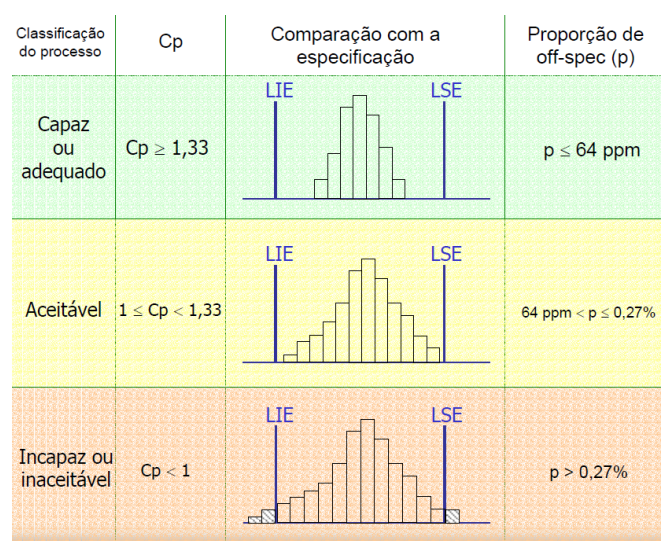


Figura 2 - Relação entre o índice  $C_p$  e a porcentagem de produtos defeituosos.  
Fonte: Andrade, 2004.

Como explicado, o  $C_p$  é muito importante para que seja avaliada a largura da amostragem com relação à faixa dos limites de especificação, mas uma limitação deste índice é que ele só incide sobre a dispersão do processo estudado, não considerando a centragem do referido processo. O índice  $C_p$  apenas considera a variabilidade do processo ( $\sigma$ ). Com o intuito de analisar o processo considerando-se a centragem das amostragens, criou-se o índice  $C_{pk}$ .

O  $C_{pk}$  foi criado em 1986 com o objetivo de medir a distância entre o limite de especificação mais próxima do valor esperado a partir da característica de qualidade estudada, de modo a relacionar a metade desta distância da amplitude do processo natural,  $3\sigma$ . De um ponto de vista prático, o índice  $C_{pk}$  é mais avançado do que o  $C_p$ , porque pode ser utilizado para medir as características de qualidade, onde apenas um limite de especificação é importante. Este índice é obtido a partir da fórmula seguinte:

$$C_{pk} = \min\left(\frac{LSE - \bar{x}}{3\sigma}, \frac{\bar{x} - LIE}{3\sigma}\right)$$

sendo: LSE – Limite Superior de Especificação; LIE -Limite Inferior de Especificação;  $\bar{x}$  – Média da característica medida;  $\sigma$  – Desvio-padrão calculado a partir da amostragem de medições.

O índice  $C_{pk}$ , considera a centralização do processo e  $C_{pk}$  permite um ajuste do índice  $C_p$  identificando se uma distribuição está ou não centrada entre os limites especificados no projeto, mas assim como o índice  $C_p$ , o índice  $C_{pk}$  é sensível aos deslocamentos provocados pelas causas especiais.

O quadro a seguir apresenta a interpretação do índice  $C_{pk}$ .

QUADRO 1 –  $C_{pk}$  e sua interpretação

$C_{pk} < 1$	Processo incapaz
$1 \leq C_{pk} \leq 1,33$	Processo aceitável
$C_{pk} \geq 1,33$	Processo capaz

Fonte: Netto, 2017.

Exemplo:

Para um processo eletrônico de fabricação, uma corrente tem especificações de  $100 \pm 10$  miliampéres. A média  $\mu$  e o desvio-padrão  $\sigma$  do processo são 107,0 e 1,5 respectivamente. Encontre os valores de  $C_p$  e  $C_{pk}$ .

Referências:

ANDRADE, M. **Controle estatístico de processo**. 2004. Diapositivo. Color.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros**. 2. Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003. cap. 15, p. 360–392.

NETTO, A. P. **Controle estatístico do processo**. Indaial: UNIASSELVI, 2017.

RAMOS, A. W. **Controle Estatístico de Processo**. Apostila. 2018. Disponível em: <[https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5103836/mod\\_resource/content/1/4.CEP2018.pdf](https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/5103836/mod_resource/content/1/4.CEP2018.pdf)> Acessado em: 13 jan. 2021.

WERKEMA, M. C. C. **Ferramentas estatísticas básicas para o gerenciamento de processos**. Belo Horizonte: Fundação Chistiano Ottoni, Escola de Engenharia da UFMG, 1995.

### 3.4 Gráficos de controle para atributos

Os atributos são características que são comparadas com um certo padrão (especificações) e por isso podem assumir apenas valores discretos (classificação como conforme ou não-conforme, ou uma certa contagem de defeitos), por exemplo: a) existência de manchas ou risco, b) presença de uma etiqueta, c) continuidade de uma costura, d) número de acidentes/hora, e) número de clientes reclamantes, f) número de reclamações/cliente.

Os atributos podem ser divididos em: (i) percentual de não-conformes: se referem a contagem do n° de produtos/peças defeituosas (número de não conformes) e segue a distribuição Binomial ( $0 < p < 1$ ) e (ii) taxa de não conformidades: se referem a contagem do número de defeitos por produto/peça (número de não conformidades) e segue a distribuição de Poisson ( $0 < \lambda < \infty$ ).

Existem quatro tipos de carta de atributos:

- a) carta p para fração de não-conformes (as amostras podem ser de tamanhos diferentes);
- b) carta np para número de unidades não-conformes (as amostras devem ter o mesmo tamanho);
- c) carta c para número de não-conformidades (as amostras devem ser do mesmo tamanho);
- d) carta u para número de não-conformidades por unidade (as amostras podem ser de tamanhos diferentes).

#### 3.4.1. Gráfico de controle para a proporção ou fração de defeituosos – Gráfico p

A fração de defeituosos p se define como o número de itens defeituosos (não conformes) na amostra dividido pelo número de itens da amostra. O valor amostral de p registra-se como uma fração do tamanho do subgrupo.

A fração de defeituosos p poderá estar referida a amostras de tamanhos fixos n coletadas regularmente, ou também poderá se referir ao 100% da produção num determinado intervalo de tempo (por exemplo, uma hora, um dia, etc.). Isso significa que os subgrupos podem, em princípio, ter tamanho variável. Como consequência da variabilidade do tamanho amostral os limites de controle também terão amplitude variável.

A caracterização de um item como defeituoso ou não defeituoso poderá depender da observação de uma ou de várias características de qualidade. Neste caso o item poderá ter vários tipos de defeitos, e, em muitas circunstâncias será relevante a classificação dos defeitos por importância diferenciada, sugerindo a utilização de gráficos por demérito.

Os limites de controle para a proporção de itens fora dos padrões de aceitação a partir dos da amostra ou do subgrupo são estabelecidos pelas seguintes equações:

a) Tamanho amostral constante

$$LSC = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

$$LM = \bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^k p_i}{k}$$

$$LIC = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}$$

Onde:  $X_i$  = número de itens fora dos padrões de aceitação, no subgrupo  $i$ ;

$n$  = tamanho da amostra ou do subgrupo;

$$p_i = X_i/n$$

b) Tamanho amostral variável

$$LSC = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_i}}$$

$$LM = \bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^k p_i}{k}$$

$$LIC = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n_i}}$$

Onde:  $X_i$  = número de itens fora dos padrões de aceitação, no subgrupo  $i$ ;

$n_i$  = tamanho da amostra ou do subgrupo  $i$ ;

$$p_i = X_i/n_i$$

### 3.4.2 Gráficos de controle para o número de defeitos – Gráfico np

A carta np segue a mesma lógica da carta p, mas agora, ao invés da fração de não-conformes, monitora-se o número de não-conformes.

A carta np é mais apropriada quando: a) o número de não-conformes tem um maior significado e b) o tamanho dos subgrupos é sempre o mesmo (constante).



Como o monitoramento é realizado utilizando-se número de defeituosos, deve-se especificar o tamanho da amostra constante, ou seja, número de unidades a serem inspecionadas a cada amostra. Então, anota-se o número de não-conformes verificado em cada amostra.

O número de defeituosos  $np$  se define como o número de itens defeituosos (não conformes) na amostra. A construção dos gráficos  $np$  tem por base a distribuição binomial, e este gráfico de controle só pode ser construído quando lidamos com amostras de tamanhos iguais ( $n$ ). Os Limites de Controle são obtidos diretamente da carta  $p$  e estão descritos a seguir:

$$LSC = \bar{X} + 3\sqrt{\bar{X}(1 - \bar{p})}$$

$$LM = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^k X_i}{k}$$

$$LIC = \bar{X} - 3\sqrt{\bar{X}(1 - \bar{p})}$$

Onde :  $\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^k X_i}{nk}$  ;  $n$  = tamanho do subgrupo;  $k$  = número de subgrupos.

### 3.4.3. Gráfico de controle para o número médio de defeitos por unidade – Gráfico U

Algumas vezes, é necessário monitorar o número de defeitos em uma unidade de produto em vez da fração defeituosa. Nesse caso, pode-se usar o gráfico de controle para os defeitos por unidade ou o gráfico U.

#### a) Tamanho de amostra constante

Se cada amostra consistir em  $n$  unidades e se houver um total de  $C$  defeitos na amostra, então:

$$U = \frac{C}{n}$$

será o número médio de defeitos por unidade. Um gráfico U pode ser construído para tais dados. Se houver  $m$  amostras preliminares, o número de defeitos por unidade nessas amostras será  $U_1, U_2, \dots, U_m$ , então o estimador do número médio de defeitos por unidade é

$$\bar{U} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m U_i$$

A linha central e os limites superior e inferior de controle para o gráfico U são:

$$LSC = \bar{U} + 3\sqrt{\frac{\bar{U}}{n}}$$

$$LM = \bar{U}$$

$$LIC = \bar{U} - 3\sqrt{\frac{\bar{U}}{n}}$$

Sendo  $\bar{U}$  o número médio de defeitos por unidade.

#### b) Tamanho de amostra variável

Os gráficos de controle para não-conformidade são ocasionalmente formados usando inspeção 100% do produto. Nesse caso, o número de unidades de inspeção é diferente. Por exemplo, chapas de aço de vários tamanhos são produzidos, um número variável de unidades é produzido a cada dia. Não podemos nesta situação, por falta de comparabilidade dos totais, trabalhar com o gráfico c. Neste caso o gráfico correto é um gráfico de controle para o número médio de não-conformidade por unidade (ou seja o gráfico u)

Os parâmetros do gráfico de controle são:

$$LSC = \bar{U} + 3\sqrt{\frac{\bar{U}}{n_i}}$$

$$LM = \bar{U}$$

$$LIC = \bar{U} - 3\sqrt{\frac{\bar{U}}{n_i}}$$

#### Exemplos

1 – Uma fábrica de suco de laranja apresentou os seguintes dados quanto ao número de latas amassadas (defeituosas). Nesse exemplo temos tamanho da amostra  $n = 50$ .

Amostras	Número de Defeituosos (Di)	Fração de Defeituosos (pi)
1	12	0.24
2	15	0.30
3	8	0.16
4	10	0.20
5	4	0.08
6	7	0.14
7	16	0.32
8	9	0.18
9	14	0.28
10	10	0.20

11	5	0.10
12	6	0.12
13	17	0.34
14	12	0.24
15	22	0.44
16	8	0.16
17	10	0.20
18	5	0.10
19	13	0.26
20	11	0.22
21	20	0.40
22	18	0.36
23	24	0.48
24	15	0.30
25	9	0.18
26	12	0.24
27	7	0.14
28	13	0.26
29	9	0.18
30	6	0.12

2 – Uma indústria investiga a produção de esponjas da gaze. O número de esponjas fora dos padrões de aceitação e o número de esponjas produzidas diariamente, em um período de 32 dias.

Dia	esponjas produzidas	Esponjas fora dos padrões
1	690	21
2	580	22
3	685	20
4	595	21
5	665	23
6	596	19
7	600	18
8	620	24
9	610	20
10	595	22
11	645	19
12	675	23
13	670	22
14	590	26
15	585	17
16	560	16
17	575	20
18	610	16

19	596	15
20	630	24
21	625	25
22	615	21
23	575	23
24	572	20
25	645	24
26	651	25
27	660	21
28	685	19
29	671	17
30	660	22
31	595	24
32	600	16

3 – Um grande hotel, em uma cidade turística, realizou um plano para melhorar a qualidade de seus serviços. Um aspecto importante dos serviços do hotel, para os hóspedes, é representado pela arrumação dada aos quartos, quando o hóspede entra pela primeira vez no quarto que lhe foi reservado. Do ponto de vista de primeiras impressões, é particularmente importante que todos os acessórios que devam estar disponíveis (sabonete, toalhas, roupa de cama etc ...) de fato estejam disponíveis no quarto, bem como que todos os aparelhos, como rádio, televisão e telefone estejam funcionando adequadamente. A gerência do hotel decidiu estudar esse processo por um período de 4 semanas, tomando uma amostra diária de 200 quartos para os quais foi solicitada reserva. Assim sendo, antes da chegada de cada hóspede foi determinado se o quarto da amostra continha qualquer não conformidade, em termos de disponibilidade de acessórios e de funcionamento de todos os equipamentos. O número de quartos fora dos padrões de aceitação, para cada dia, no período de 4 semanas.

dia	quartos não conf.
1	16
2	7
3	21
4	17
5	25
6	19
7	16
8	15
9	11
10	12
11	22
12	20
13	17
14	26

15	18
16	13
17	15
18	10
19	14
20	25
21	19
22	12
23	6
24	12
25	18
26	15
27	20
28	22

4 – Placas de circuito impresso são montadas por uma combinação de montagem manual e automática. Uma máquina de soldagem contínua é usada para fazer as conexões mecânicas e elétricas dos componentes de chumbo na placa. Essas placas são passadas, quase continuamente, através do processo de soldagem e, a cada hora, cinco placas são selecionadas e inspecionadas para finalidades de controle de processo. O número de defeitos em cada amostra de cinco placas é anotado e os resultados para 20 amostras são mostrados abaixo.

amostra	número de defeitos	U
1	6	1.2
2	4	0.8
3	8	1.6
4	10	2
5	9	1.8
6	12	2.4
7	16	3.2
8	2	0.4
9	3	0.6
10	10	2
11	9	1.8
12	15	3
13	8	1.6
14	10	2
15	8	1.6
16	2	0.4
17	7	1.4
18	1	0.2
19	7	1.4
20	13	2.6

5 - Em uma fábrica de acabamento de tecido, o pano tingido é inspecionado procurando-se a ocorrência de defeitos por 50 metros quadrados. Os dados encontram-se abaixo.

Nº do rolo	nº de m <sup>2</sup>	nº de unidades	nº de defeitos
1	500	10	14
2	400	8	12
3	650	13	20
4	500	10	11
5	475	9.5	7
6	500	10	10
7	600	12	21
8	525	10.5	16
9	600	12	19
10	625	12.5	23

### Referências

DÁVILA, V. H. L. **Gráfico de Controle por Atributos**. 2007. 1 diapositivo, color. Disponível em: < <http://www.ime.unicamp.br/~hlaachos/Grfico%20por%20atributos>>. Acesso em: 10 nov. 2020.

FM2S EDUCAÇÃO E CONSULTORIA. **Gráfico de Controle: Como e quando aplicar?** Disponível em: < <https://www.fm2s.com.br/portfolio/planilha-de-grafico-de-controle/>> . Acesso em: 10 nov. 2020.

LEVINE, D. M. ; BERENSON, M. L.; STEPHAN, D. **Estatística Teoria e Aplicações: Usando O Microsoft Excel Em Português (Português)**. Rio de Janeiro: LTC, 2000. cap. 10, p. 467–512.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros**. 2. Ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003. cap. 15, p. 360–392.

PORTAL ACTION. **Controle Estatístico do Processo**. Estatcamp - Consultoria em estatística e qualidade: São Carlos, 2014. Disponível em: < <http://www.portalaction.com.br/controle-estatistico-do-processo>>. Acesso em: 10 nov. 2020.

RIBEIRO, J. L. D.; TEN CATEN C.S. **Controle Estatístico do Processo**. Porto Alegre: FEENG/UFRGS, 2012. 172p. (Série Monográfica Qualidade). ISBN 85-88085-10-0

### 3.5 GRÁFICOS DE CONTROLE ESPECIAIS

#### 3.5.1. Gráfico de Controle da Soma Cumulativa (CUSUM)

Anteriormente apresentamos os tipos básicos dos gráficos de controle de Shewhart. Uma importante desvantagem de qualquer gráfico de controle de Shewhart é que o gráfico é relativamente insensível a pequenas mudanças no processo, como algo da ordem de  $1,5\sigma$  ou menos. Uma razão para esse desempenho relativamente pobre em detectar pequenas mudanças no processo é que o gráfico de Shewhart usa somente a informação no último ponto plotado e ignora a informação na sequência de pontos. Esse problema pode ser tratado, em alguma extensão, pela adição de critérios como as regras de Western Electric, ao gráfico de Shewhart; porém, o uso dessas regras reduz a simplicidade e a facilidade de interpretação do gráfico. Essas regras causariam também queda do comprimento médio de corrida sob controle de um gráfico de Shewhart para um valor abaixo de 370. Esse aumento na taxa de alarme falso pode ter sérias consequências práticas.

Uma alternativa muito efetiva ao gráfico de controle de Shewhart é o gráfico de controle de soma cumulativa (ou CUSUM). Esse gráfico tem um desempenho muito melhor (em termos de CMC) para detectar pequenas mudanças do que o gráfico de Shewhart, porém não causa queda significantes no CMC sob controle. Esta seção ilustrará o uso do CUSUM para média amostrais e medidas individuais.

O gráfico CUSUM plota as somas cumulativas do desvios dos valores amostrais em relação ao valor alvo. Por exemplo, suponha que amostras de tamanho  $n \geq 1$  sejam coletadas e  $\bar{X}_j$  seja a média da  $j$ -ésima amostra. Então, se  $\mu_0$  for alvo da média do processo, o gráfico de controle da soma cumulativa será formado plotando a quantidade.

$$S_i = \sum_{j=1}^i (\bar{X}_j - \mu_0) \quad (1)$$

Contra o número da amostra  $i$ . Agora,  $S_i$  é chamada de soma cumulativa até a  $i$ -ésima amostra inclusive. Pelo fato delas combinarem informações proveniente de várias amostras, os gráficos da soma cumulativa são mais efetivos que os gráficos de Shewhart para detectar pequenas mudanças no processo. Além disso, eles são particularmente efetivos com amostras de  $n = 1$ . Isso torna o gráfico de controle da soma cumulativa um bom candidato para uso nas indústrias químicas e de processos, onde subgrupos racionais são frequentemente de tamanho 1, assim

como na fabricação de peças com medida automática de cada peça e controle on-line (instantâneo) usando um microcomputador diretamente na central de trabalho.

Se o processo permanecer sob controle no valor alvo  $\mu_0$ , a soma cumulativa definida na Eq 1 deve flutuar em torno do zero. Entretanto, se a média se deslocar para cima para algum valor  $\mu_i > \mu_0$ , por exemplo, então um deslocamento para cima ou positivo se desenvolverá na soma cumulativa  $S_i$ . Contrariamente, se a média se deslocar para baixo para algum valor  $\mu_i < \mu_0$ , então um deslocamento para baixo ou negativo em  $S_i$  se desenvolverá. Consequentemente, se uma tendência se desenvolver nos pontos plotados para cima ou para baixo, devemos considerar isso como uma evidência de que a média do processo tenha se deslocado, devendo ser feita uma busca da causa atribuída.

Enquanto alguns programas computacionais plotam as CUSUMs com o esquema de controle pela máscara V, sentimos que a outra abordagem para o controle por CUSUM, a CUSUM tabular, é superior. O procedimento tabular é particularmente atrativo quando a CUSUM for implementada em um computador.

Faça  $S_H(i)$  ser uma CUSUM unilateral superior para o período  $i$  de  $S_L(i)$  ser uma CUSUM unilateral inferior para o período  $i$ . Essas grandezas são calculadas a partir de

$$S_H(i) = \max[0, \bar{x}_i - (\mu_0 + K) + S_H(i-1)] \quad (2)$$

$$S_L(i) = \max[0, (\mu_0 - K) - \bar{x}_i + S_L(i-1)] \quad (3)$$

Respectivamente, onde os valores iniciais  $S_H(0) = S_L(0) = 0$ . Nas eq2 e 3,  $K$  é chamado de valor de referência, que é geralmente escolhido em torno do meio do caminho entre o valor alvo  $\mu_0$  e o valor da média correspondente ao estado de fora de controle  $\mu_i = \mu_0 + \Delta$ . Ou seja,  $K$  é cerca de metade do valor do deslocamento que estamos interessados ou

$$K = \frac{\Delta}{2}$$

Note que  $S_H(i) = S_L(i)$  acumulam desvios do valor alvo que são maiores que  $K$ , com ambas as quantidades reajustadas para zero se tornarem negativas. Se  $S_H(i)$  ou  $S_L(i)$  excederem uma constante  $H$ , o processo será fora de controle. Essa constante  $H$  é geralmente chamada de intervalo de decisão.



Quando a CUSUM tabular indicar que o processo está fora de controle, devemos procurar a causa atribuída, adotar qualquer ação corretiva indicada e reiniciar as CUSUMs em zero. Pode ser útil ter uma estimativa da nova média do processo depois da mudança. Ela pode ser calculada a partir de

$$\begin{cases} \mu_0 + K + \frac{s_H(i)}{n_H}, & \text{se } S_H(i) > H \\ \mu_0 - K - \frac{s_L(i)}{n_L}, & \text{se } S_L(i) > H \end{cases} \quad (4)$$

É também útil apresentar gráficos das CUSUMs tabulares, que são algumas vezes chamados de gráficos status das CUSUMs. Eles são construídos plotando  $S_H(i)$  e  $S_L(i)$  contra o número da amostra. Nesse gráfico, cada barra vertical representa o valor de  $S_H(i)$  e  $S_L(i)$  no período  $i$ . Com o intervalo de decisão plotado no gráfico, o gráfico de status CUSUM parece com o gráfico de controle de Shewhart. Plotamos, também, como pontos sólidos no gráfico de status CUSUM, a estatística da amostra  $\bar{x}_i$  para cada período. Isso frequentemente ajuda o usuário do gráfico de controle a visualizar o desempenho real do processo, que conduz a um valor particular da CUSUM.

A CUSUM tabular é projetada escolhendo-se valores para o valor de referência  $K$  e o intervalo de decisão  $H$ . Recomendamos que esses parâmetros sejam selecionados de modo a fornecer bons valores para o comprimento médio de corrida. Há muitos estudos analíticos do desempenho de CMC para CUSUM. Baseados nesses estudos, podemos dar algumas recomendações gerais para selecionar  $H$  e  $K$ . Defina  $H = h\sigma_{\bar{x}}$  e  $K = k\sigma_{\bar{x}}$ , sendo  $\sigma_{\bar{x}}$  o desvio-padrão da variável da amostra usada na formação da CUSUM (se  $n = 1$ ,  $\sigma_{\bar{x}} = \sigma_x$ ). O uso de  $h = 4$  ou  $h = 5$  e  $k = 1/2$  geralmente fornecerá uma CUSUM que tem boas propriedades CMC contra uma mudança de cerca de  $1\sigma_{\bar{x}}$  (ou  $1\sigma_x$ ) na média do processo. Se mudanças muito maiores ou muito menores forem de interesse, estabeleça  $k = \delta/2$ , sendo  $\delta$  o tamanho da mudança em unidades de desvio-padrão. Alguns técnicos preferem usar uma variável padronizada  $y_i = (\bar{x} - \mu_0)/\sigma_{\bar{x}}$  como a base da CUSUM. Nesse caso, as eq2 e 3 se tornam

$$S_H(i) = \max[0, y_i - K + S_H(i-1)]$$

$$S_L(i) = \max[0, K - y_i + S_L(i-1)]$$

Para esse esquema, geralmente selecionamos  $K = 1/2$  e  $H = 4$  ou  $H = 5$ .

Para ilustrar quão bem as recomendações de  $h = 4$  ou  $h = 5$ , com  $k = 1/2$  funcionam, considere esses comprimentos médios de corrida na tabela 1 note que uma mudança de  $1\sigma_{\bar{x}}$  seria detectada em 8,38 amostras (com  $k = \frac{1}{2}$  e  $h = 4$ ) ou em 10,4 amostras (com  $k = \frac{1}{2}$  e  $h = 5$ ).

No procedimento CUSUM tabular.

Tabela 1 Comprimentos Médios de Corridas para um Gráfico de Controle CUSUM com  $K = \frac{1}{2}$

Deslocamento na média (múltiplo de $\sigma_{\bar{x}}$ )	$h = 4$	$h = 5$
0	168	465
0,25	74,2	139
0,50	26,6	38,0
0,75	13,3	17,0
1,00	8,38	10,4
1,50	4,75	5,75
2,00	3,34	4,01
2,50	2,62	3,11
3,00	2,19	2,57
4,00	1,71	2,01

Finalmente, devemos notar que os procedimentos suplementares, tais como as regras de Western Electric, não podem ser seguramente aplicadas ao gráfico CUSUM, porque valores sucessivos de  $S_H(i)$  e  $S_L(i)$  não são independentes. De fato, a CUSUM pode ser pensada

como uma média ponderada, em que os pesos são estocásticos ou aleatórios. Na verdade, todos os valores da CUSUM são altamente correlacionados, fazendo assim com que as regras Western Electric forneçam sucessivos alarmes falsos.

Exemplo: Construa o gráfico CUSUM com base nos dados abaixo, sendo dado o valor alvo  $\mu_0 = 10$ ,  $n = 1$  e  $\sigma = 1$ .

$$S_H(i) = \max[0, \bar{x}_i - (\mu_0 + K) + S_H(i-1)]$$

$$S_{H1} = \max[0, 9,45 - (10 + 1/2) + 0] = \max[0, -1,05] = 0$$

$$S_{H2} = \max[0, 7,99 - (10 + 0,5) + 0] = \max[0, -2,51] = 0$$

$$S_L(i) = \max[0, K - y_i + S_L(i-1)]$$

$$S_{L(1)} = \max[0, (10 - 0,5) - 9,45 + 0] = \max[0, 0,05] = 0,05$$

$$S_{L(2)} = \max[0, (10 - 0,5) - 7,99 + 0,05] = \max[0, 1,56] = 1,56$$

amostra	$x_i$	$x_i - (m_i + k)$	SH(i)	N <sub>+</sub>	$(m_i - k) - x_i$	Sli	amostra	$x_i$	$x_i - (m_i + k)$	SH(i)	N <sub>+</sub>	$(m_i - k) - x_i$	Sli
1	9.45						16	9.37					
2	7.99						17	10.62					
3	9.29						18	10.31					
4	11.66						19	8.52					
5	12.16						20	10.84					
6	10.18						21	10.9					
7	8.04						22	9.33					
8	11.46						23	12.29					
9	9.2						24	11.5					
10	10.34						25	10.6					
11	9.03						26	11.08					
12	11.47						27	10.38					
13	10.51						28	11.62					
14	9.4						29	11.31					
15	10.08						30	10.52					

### 3.5.2 Gráfico de Controle da Média Móvel Exponencialmente Ponderada

É também uma boa alternativa aos gráficos de Shewhart quando estamos interessados em detectar pequenas mudanças. Tem desempenho equivalente ao gráfico de controle CUSUM tabular. É, de certa forma, mais fácil de estabelecer e operar. É tipicamente usado para observações individuais ( $n=1$ ). No entanto, também veremos o caso de subgrupos racionais de tamanho  $n>1$ . Foi introduzido por Roberts em 1959.

Os gráficos de Shewhart são uma boa alternativa quando estamos interessados em detectar pequenas mudanças, seu desempenho é equivalente ao gráfico de controle CUSUM tabular, e, é, de certa forma, mais fácil de estabelecer e operar. É tipicamente usado para observações individuais ( $n=1$ ), no entanto, também veremos o caso de subgrupos racionais de tamanho  $n>1$ , introduzido por Roberts em 1959.

O gráfico da Média Móvel Exponencialmente Ponderada (MMEP) é definido como  $z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)z_{i-1}$ , onde  $0 < \lambda \leq 1$  é uma constante, e o valor inicial exigido para  $i=1$  é o valor do processo, ou seja,  $z_0 = \mu_0$  quando o valor alvo não é conhecido, a média aritmética dos dados pode ser usado  $z_0 = \bar{x}$ . Note que  $z_i$  é uma média ponderada de todas as observações anteriores:

$$\begin{aligned}
 z_i &= \lambda x_i + (1 - \lambda)z_{i-1} = \\
 z_i &= \lambda x_i + (1 - \lambda)[\lambda x_{i-1} + (1 - \lambda)z_{i-2}] = \\
 z_i &= \lambda x_i + \lambda(1 - \lambda)x_{i-1} + (1 - \lambda)^2 z_{i-2} =
 \end{aligned}$$

Continuando a substituir recursivamente  $Z_{i-j}$ ,  $j=2, 3, \dots, t$ , obtemos

$$z_i = \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1-\lambda)^j x_{i-j} + (1-\lambda)^i z_0 = \lambda x_i + (1-\lambda) Z_{i-1} \quad 0 < \lambda \leq 1, Z_0 = \mu_0$$

Os pesos  $\lambda(1-\lambda)^j$  decrescem geograficamente com a idade da média amostral. Como a MMEP pode ser considerada uma média de todas as observações passadas e corrente, o gráfico da MMEP é insensível a hipótese de normalidade. Assim, tal gráfico é ideal para ser usado com observações individuais.

O gráfico de controle MMEP pode ser construído através da plotagem de  $Z_i$  versus o número da amostra  $i$ . A linha central e os limites de controle são:

$$LSC = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right) [1 - (1-\lambda)^{2i}]}$$

$$LM = \mu_0$$

$$LIC = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right) [1 - (1-\lambda)^{2i}]}$$

Exemplo: Construa o gráfico EWMA com base nos dados abaixo, com os valores alvo  $\lambda = 0,1$   $L = 2,7$   $\mu_0 = 10$ ,  $n = 1$  e  $\sigma = 1$ .

amostra	$x_i$	$Z_i$	LSC	LIC	LM	amostra	$x_i$	$Z_i$	LSC	LIC	LM
1	9.45					16	9.37				
2	7.99					17	10.62				
3	9.29					18	10.31				
4	11.66					19	8.52				
5	12.16					20	10.84				
6	10.18					21	10.9				
7	8.04					22	9.33				
8	11.46					23	12.29				
9	9.2					24	11.5				
10	10.34					25	10.6				
11	9.03					26	11.08				
12	11.47					27	10.38				
13	10.51					28	11.62				
14	9.4					29	11.31				
15	10.08					30	10.52				

$$\lambda x_i + (1 - \lambda)Z_{i-1}$$

$$Z1 = 0,1*9,45+(1-0,1)*10 = 9,945$$

$$Z2 = 0,1*7,99+(1-0,1)*9,945 = 9,7495$$

$$LSC = \mu_0 + L\sigma\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right) [1 - (1 - \lambda)^{2i}]}$$

$$LSC1 = 10 + 2,7*1*RAIZ((0,1/(2-0,1))*[1-(1-0,1)^{2*1}] = 10,27$$

$$LSC1 = 10 + 2,7*1*RAIZ((0,1/(2-0,1))*[1-(1-0,1)^{2*2}]$$

$$=10+2,7*1*(RAIZ((0,1/(2-0,1))*(1-(1-0,1)^{(2*A2)})))$$

### 3.5.3 Gráfico De Controle De Regressão

Para controlar a qualidade de um produto, Montgomery (1997) diz que é necessária a identificação e a medição das variações ocorridas no processo de produção por meio dos gráficos de controle, que são ferramentas úteis para a avaliação do estado de controle estatístico do processo, pois servem para determinar se as variações que ocorrem são devidas a causas assinaláveis ou a causas aleatórias.

A necessidade de controle simultâneo, de variáveis correlacionadas, está no fato de que, muitas vezes, as variáveis parecem estar sob controle estatístico quando analisadas separadamente, mas, na verdade, o sistema poderá estar fora de controle (JACKSON, 1956).

#### Construindo o gráfico de controle de regressão

Quando a equação de regressão for empregada, com o objetivo de controle, é preciso que a relação existente entre a variável de interesse e as variáveis utilizadas para seu controle sejam do tipo causa-e-efeito. No entanto, a existência de uma relação de causa-e-efeito não é necessária se a equação for utilizada somente para predição. Nesse caso, somente será necessário que as relações existentes no conjunto de dados original, usado para construir a equação de regressão, ainda sejam válidas (Werkema & Aguiar, 1996).

Supondo-se que se está interessado em fazer uma previsão para um valor futuro  $y_i$  – não observado – correspondente a  $X = x_i$ . Se se usar o modelo de regressão linear simples ajustado, diz-se que  $\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i$  é uma previsão de  $y_i$ . Nota-se que a previsão de  $y_i$  é igual ao estimador do valor esperado de  $y$ , para  $X = x$ , e o erro de previsão é definido por  $(y_i - \hat{y}_i)$ .

Para cada estimativa particular da posição da reta de regressão, e para cada valor particular de  $X$ , os limites do intervalo de previsão a  $(1 - \alpha)100\%$  são dados por:

$$\hat{Y} \pm t_{\gamma} S \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{S_{xx}}} \quad (1)$$

$$\text{Onde: } \gamma = \left( n - 2, \frac{\alpha}{2} \right)$$

Para o uso em gráficos de controle, sabe-se que a média do processo pode variar em múltiplos do desvio padrão, isto é,  $\bar{x} \pm 3S$ ,  $\bar{x} \pm 2S$ , ..., formando os limites inferior e superior de

controle. Logo, utilizando-se o valor de S dado por  $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y})^2}{n-2}$ , e substituindo-se em (1) o valor de t tabelado, por um valor múltiplo do erro padrão, obtêm-se os limites superior e inferior de controle para o gráfico de controle de regressão:

$$LSC_{\hat{y}} = \hat{y} + 3S \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{S_{xx}}}$$

$$LMC_{\hat{y}} = a + bx = \hat{y}$$

$$LIC_{\hat{y}} = \hat{y} - 3S \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{S_{xx}}}$$

$$\text{Onde: } S_{xx} = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}$$

Exemplo:

Construir o gráfico de regressão para os dados a seguir:

observação	Nível de hidrocarbonetos X(%)	Pureza Y(%)
1	0.99	90.01
2	1.02	89.05
3	1.15	91.43
4	1.29	93.74
5	1.46	96.73
6	1.36	94.45
7	0.87	87.57
8	1.23	91.77
9	1.55	99.42
10	1.4	93.65
11	1.19	93.54
12	1.15	92.52
13	0.98	90.56
14	1.01	89.54
15	1.11	89.85
16	1.2	90.39
17	1.26	93.25
18	1.32	93.41
19	1.43	94.98
20	0.95	87.33