

**ADRIANO MENDONÇA SOUZA
FRANCISCA MENDONÇA SOUZA
CRISTIANO ZIEGLER
RENAN MITSUO UEDA
TAILON MARTINS
BIANCA REICHERT**

MODELOS LINEARES

**ARIMA (P, D, Q)
SARIMA (P, D, Q)(P,D,Q)_s
ARFIMA (P, D*, Q)
ARMAX (P, D, Q, X)**



Editor Chefe

Ivanio Folmer

Bibliotecária

Eliane de Freitas Leite

Revisora Técnica

Gabriella Eldereti Machado

Diagramação e Projeto Gráfico

Gabriel Eldereti Machado

Imagem capa

www.canva.com

Revisão

Organizadores e Autores(as)

Conselho Editorial

Prof. Dr. Adilson Tadeu Basquerote Silva - UNIDAVI

Prof. Dr. Astor João Schönell Júnior - IFFAR

Prof. Dr. Alan Ricardo Costa - UFRR

Profa. Dra. Andréia Bulaty - UNESPAR

Profa. Dra. Carla da Conceição de Lima - UFVJM

Prof. Dr. Camilo Darsie de Souza - UNISC

Profa. Dra. Clarice Caldeira Leite - UFRGS

Profa. Dra. Cecilia Decarli - UFRGS

Prof. Dr. Carlos Adriano Martins - UNICID

Prof. Dr. Christian Dennys Monteiro de Oliveira - UFCE

Profa. Dra. Dayse Marinho Martins - UFMA

Prof. Dr. Deivid Alex dos Santos - UEL

Prof. Dr. Dioni Paulo Pastorio - UFRGS

Prof. Dr. Douglas Manoel Antonio de Abreu Pestana dos Santos - FASESP

Profa. Dra. Elane da Silva Barbosa - UERN

Profa. Dra. Elen Gomes Pereira - IFBA

Profa. Dra. Francielle Benini Agne Tybusch - UFN

Prof. Dr. Francisco Odécio Sales - IFCE

Prof. Dr. Francisco Ricardo Miranda Pinto - UFCAT

Prof. Dr. Gilvan Charles Cerqueira de Araújo - UCB

Prof. Dr. Ismar Inácio dos Santos Filho - UFAL

Prof. Dr. Leonardo Bigolin Jantsch - UFSM

Profa. Dra. Liziany Müller Medeiros - UFSM

Profa. Dra. Marcela Mary José - UFRB

Prof. Dr. Mateus Henrique Köhler - UFSM

Prof. Dr. Michel Canuto de Sena - UFMS

Profa. Dra. Mônica Aparecida Bortolotti - UNICENTRO

Prof. Nilton David Vilchez Galarza - UPLA

Prof. Dr. Olavo Barreto de Souza - UEPB

Prof. Dr. Rafael Nogueira Furtado - UFABC

Prof. Dr. Roberto Araújo da Silva Vasques Rabelo - UNILUS

Prof. Dr. Rodrigo Toledo - USCS

Prof. Dr. Rodolfo Rodrigues de Souza - UERJ

Prof. Dr. Sidnei Renato Silveira - UFSM

Prof. Dr. Thiago Ribeiro Rafagnin - UFOB

Prof. Dr. Tomás Raúl Gómez Hernández - UCLV

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Modelos lineares [livro eletrônico] : arima (p, d, q) sarima(p, d, q) (p, d, q)s arfima (p, d*, q) armax (p, d, q, x) / Adriano Mendonça Souza... [et al.]. -- Santa Maria, RS : Arco Editores, 2024.
PDF

Outros autores: Francisca Mendonça Souza, Cristiano Ziegler, Renan Mitsuo Ueda, Tailon Martins, Bianca Reichert.

Bibliografia.

ISBN 978-65-5417-283-7

1. Educação 2. Ensino superior 3. Estatística
4. Modelos lineares (Estatística) I. Souza, Adriano Mendonça. II. Souza, Francisca Mendonça.
III. Ziegler, Cristiano. IV. Ueda, Renan Mitsuo.
V. Martins, Tailon. VI. Reichert, Bianca.

24-211393

CDD-519.5

Índices para catálogo sistemático:

1. Estatística aplicada 519.5

Eliane de Freitas Leite - Bibliotecária - CRB 8/8415



10.48209/978-65-5417-283-7

Esta obra é de acesso aberto.

É permitida a reprodução parcial ou total desta obra, desde que citada a fonte e a autoria e respeitando a Licença Creative Commons indicada.



DEDICATÓRIA

Às nossas famílias, amigos e colegas,
o nosso reconhecimento
pelas contribuições significativas
para a realização desta obra.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) – PQ-305759/2022-1.

PREFÁCIO

Honrada com o convite dos autores para prefaciar o livro “Modelos Lineares”. Asseguro que esta obra certamente representará uma contribuição significativa para o entendimento de modelos de séries temporais, tão utilizados para a realização de previsões pelas organizações nesse cenário contemporâneo, cheio de incertezas.

Devido à complexidade dos fenômenos sociais, houve a necessidade de muitos estudantes e profissionais da área de ciências sociais aplicadas recorrerem com mais frequência às ciências matemáticas, e por meio delas, transformar expressões complexas em uma linguagem mais inteligível.

Nesse sentido, o livro chama a atenção pela sua simplicidade na forma da escrita, que aliada às fórmulas matemáticas e aos exemplos dados, confere ao texto poder de explicação até mesmo para àqueles que não possuem fortes habilidades matemáticas.

O conteúdo do livro alinha-se às necessidades curriculares dos cursos de graduação e pós-graduação de diversas áreas do conhecimento. Além disso, é um livro importante para a área de matemática, estatística e engenharias entre outros cursos da área de ciências sociais aplicada, pois oferece ao estudante a oportunidade de atingir níveis de conhecimento em séries temporais que serão exigidos profissionalmente e antes mesmo do término do seu curso.

As perspectivas trazidas por esta obra são bem mais amplas e completas do que muitas outras obras publicadas sobre o assunto, tendo em vista que a obra apresenta cada modelo com sua dedução matemática e, também, com a sua aplicabilidade passo a passo por meio computacional, o que permite ao leitor, seja um estudante ou mesmo um profissional da área aprender e se aperfeiçoar com o uso dos modelos de séries temporais.

A análise contextualizada dos exemplos apresentados para cada modelo é um diferencial que estimula o leitor a continuar com o aprendizado de cada um deles no livro.

Por estas razões, entre outras que se desvelam no conteúdo didático e prático deste livro, é com grata satisfação que apresento e recomendo a presente obra. Boa leitura a todos!

Luciana Santos Costa Vieira da Silva, Dra.
Universidade Federal de Alagoas - UFAL!

SUMÁRIO

1 – INTRODUÇÃO.....	10
2 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	13
2.1 – Funções de autocorrelação e autocorrelação parcial – FAC e FACP..	13
2.2 – Modelos Autoregressivos Integrados e de Médias Móveis – ARIMA (p,d,q).....	22
2.2.1 – Modelo autorregressivo (AR).....	24
2.2.2 – Modelo médias móveis (MA).....	25
2.2.3 – Modelo autorregressivo – médias móveis (ARMA).....	27
2.2.4 – Modelos não estacionários (ARIMA).....	29
2.3 – Estimação dos parâmetros.....	33
2.4 – Verificação da adequação do modelo.....	35
2.5 – Critérios penalizadores.....	38
2.6 – Modelos autorregressivos fracionários de médias móveis ARFIMA...	41
2.7 – Modelos Autoregressivos de Medias Móveis com variáveis exógenas ARMAX.....	45
2.8 – Previsão para modelos univariados.....	48
2.9 – Medidas de avaliação de modelos e de previsão.....	51
3 – BASE DE DADOS.....	54
3.1 –Etapas metodológicas.....	54
3.2 – Importação dos dados da Planilha eletrônica para o EViews SV.....	55
3.3 – Verificação da estacionariedade das séries temporais.....	60
3.4 – Verificação das Funções de autocorrelações (FAC) e das funções de autocorrelações parciais (FACP).....	73
3.5 – Estimações dos modelos concorrentes ARIMA.....	76
4 – CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	83
ANEXO A: Dados utilizados na aplicação dos modelos heterocedasticos...	84
5 – REFERÊNCIAS.....	93

1 INTRODUÇÃO

A análise de séries temporais é uma técnica de modelagem fundamental na compreensão e previsão de padrões que evoluem ao longo do tempo. Diversas áreas de estudo, desde economia, finanças, ciências sociais e ambientais, têm se beneficiado do poder dos modelos *Autoregressive Integrated Moving Average* (ARIMA) de Box e Jenkins, desde sua proposição seminal em 1976.

Neste livro, busca-se compreender a essência desses modelos, suas implicações, e como podem ser aplicados em fenômenos indexados ao tempo e fazer previsões que auxiliem nas tomadas de decisões.

Os modelos ARIMA, Autoregressivos Integrados e de Médias Móveis, são modelos lineares que captam os efeitos das autocorrelações entre os instantes de tempo e dessa maneira são capazes de compreender como uma determinada variáveis se comportará no futuro. Esses modelos são lineares, pois capturam apenas os fenômenos com características de linearidade.

A importância dos modelos ARIMA reside na sua capacidade de capturar relações lineares inerentes a dados sequenciais no tempo, reconhecendo a dependência temporal e permitindo a identificação de padrões recorrentes, sazonalidades, tendências e comportamentos irregulares. Aborda-se os componentes autorregressivos, de média móvel e de integração, habilitando o leitor para uma modelagem adequada, com o intuito de: i) Apresentar técnicas para identificação de ordens adequadas dos modelos ARIMA; ii) Mostrar como realizar a estimação e diagnóstico dos modelos; iii) Interpretar os resultados obtidos e avaliar a qualidade das previsões; e iv) Abordar técnicas avançadas de previsão, como modelos sazonais e avaliação do desempenho dos modelos.

Algumas das aplicações dos modelos da classe geral ARIMA:

Economia e Finanças: Análise de séries temporais de preços de ações, taxas de juros, inflação, e vendas para auxiliar na tomada de decisões de investimento e planejamento financeiro.

Meteorologia e Ciências Ambientais: Previsão do clima, análise de padrões de temperatura, precipitação e outros dados ambientais para compreender fenômenos climáticos e suas implicações.

Demografia e Sociologia: Estudo de tendências populacionais, migrações e padrões de comportamento social.

Engenharia e Indústria: Previsão de demanda de produtos, controle de qualidade, e análise de séries temporais de dados de produção.

Medicina e Saúde Pública: Análise de surtos epidemiológicos, monitoramento de doenças, e previsão de demanda por serviços de saúde.

As previsões realizadas pelos modelos ARIMA são úteis na tomada de decisões e no planejamento estratégico. Ao identificar padrões passados, esses modelos permitem fazer projeções futuras com base em dados históricos, auxiliando no desenvolvimento de estratégias para mitigar riscos e aproveitar oportunidades.

Explora-se em detalhes como implementar e interpretar as previsões obtidas por meio dos modelos ARIMA, permitindo que os leitores adquiram habilidades práticas e teóricas para aplicar esses poderosos métodos analíticos em suas próprias pesquisas e desafios do mundo real.

Aborda-se neste texto os modelos da classe geral ARIMA, os modelos Autorregressivos Fracionários de Médias Móveis - ARFIMA e os modelos Autorregressivos Integrados e de Médias Móveis com Variáveis Exógenas – ARMAX.

Existem outros métodos de previsões, como por exemplo o Métodos de Suavização Exponencial: Esses métodos são baseados em ponderações exponenciais para os valores passados de uma série temporal. Eles incluem o Método de Suavização Exponencial Simples (SES), Suavização Exponencial com Tendência (Holt), e Suavização Exponencial com Tendência e Sazonalidade (Holt-Winters) e são amplamente usados para previsão em séries temporais com tendências e/ou sazonalidades.

Outro método muito utilizado de previsão é o de Regressão, que envolve o uso de variáveis explicativas (ou regressores) para realizar a previsão de uma variável de interesse ou dependente. A regressão linear simples e a regressão linear múltipla são exemplos comuns. A vantagem da regressão é que ela possui a capacidade de incorporar informações de outras variáveis que podem influenciar a variável dependente.

Não podemos deixar de falar nos modelos de Redes Neurais Artificiais (RNAs). As RNAs são modelos de aprendizado de máquina que podem ser usados para previsão. As RNAs são capazes de aprender padrões complexos dos dados e se adaptar a relações não lineares. Redes neurais recorrentes (RNRs) são especialmente úteis para lidar com dependências temporais em séries temporais.

Outro método de previsão de series temporais é o Métodos de Decomposição de Séries Temporais: Esses métodos dividem a série temporal em componentes, como tendência, sazonalidade e componente aleatório, e realizam previsões separadas para cada componente.

Os Modelos de Espaço de Estado: Também conhecidos como modelos State-Space, esses métodos são úteis quando há incerteza nas relações entre as variáveis da série temporal. Eles fornecem uma estrutura mais flexível e permitem a inclusão de componentes não lineares.

A principal diferença entre os modelos ARIMA, ARFIMA, ARMAX e outros métodos de previsão reside em suas abordagens e suposições. Os modelos ARIMA, ARFIMA e ARMAX são modelos lineares e paramétricos que se baseiam em relações lineares entre os valores passados e/ou outras variáveis. Eles assumem que a série temporal possui propriedades estacionárias e exploram autocorrelações e médias móveis para se ajustar aos padrões revelados pelos dados.

A escolha do método de previsão depende das características específicas dos dados da série temporal, das necessidades de previsão e do contexto do problema em questão. Cada método tem suas vantagens e limitações, e a seleção do melhor método dependerá do caso em análise.

2 Fundamentação Teórica

A classe geral dos modelos autorregressivos integrados e de médias móveis (ARIMA) são modelos lineares e captam o comportamento da média do processo utilizando a força de ligação entre as observações da própria série, denominada de autocorrelação.

Os objetivos do estudo da análise de séries temporais é realizar previsões no curto prazo, compreender o processo gerador da série, descrever as propriedades da série tais como a tendência, variações sazonais, observações discrepantes – os outliers e mudanças estruturais na série.

Nesse capítulo apresenta-se os principais modelos da classe geral ARIMA e suas variantes sazonais, ajuste dos modelos e critérios de escolhas dos melhores modelos.

Todo o processo de identificação e aplicação de modelos será exemplificado com passo a passo no *Software* EViews SV, utilizando como base o preço das ações da empresa BrasilAgro, composta por 989 observações diárias, no período de primeiro de janeiro de 2014 até 31 de dezembro 2017.

2.1 Funções de autocorrelação e autocorrelação parcial – FAC e FACP

A Função de Autocorrelação (FAC) é uma ferramenta que nos auxilia a entender se existe alguma relação entre os valores passados e futuros de uma série temporal. Em outras palavras, ela mede o quanto cada observação da série está correlacionada com as suas observações anteriores em diferentes intervalos de tempo.

Imagine que temos uma série temporal que representa a venda diária de produtos, de uma determinada loja, se a FAC mostrar que há uma forte correlação positiva em $t = 1$ (hoje) e $t = 2$ (amanhã), isso significa que as vendas de hoje estão relacionadas com as vendas ocorridas de amanhã.

A Autocorrelação Parcial (FACP) é semelhante à FAC, mas com uma diferença importante, ela mede a correlação entre as observações, controlando os efeitos das correlações em intervalos intermediários.

Vamos continuar com o exemplo das vendas diárias. Suponha que observamos uma forte correlação entre as vendas de hoje e as vendas de ontem ($t = 1$), e também entre as vendas de hoje e as vendas de dois dias atrás ($t = 2$). Se calcularmos a FACP em $t = 2$ (correlação entre hoje e $t = 2$), ela nos ajudará a identificar se essa correlação é direta ou se está sendo influenciada pelas vendas de ontem. Isso é útil porque nem sempre é fácil determinar a dependência real entre as observações ao analisar apenas a FAC.

E, como se calcula estas medidas que caracterizam a força de ligação entre as observações dentro da série temporal e auxiliam na identificação do modelo a ser ajustado?

A autocorrelação no caso populacional é representada por ρ_k e no caso amostral é representada por r_k e mede as correlações entre observações sucessivas, os valores são adimensionais e variam o seguinte intervalo $-1 < r_k < 1$, calculadas pela expressão a seguir.

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (Z_t - \bar{Z})(Z_{t+k} - \bar{Z})}{\sum_{t=1}^n (Z_t - \bar{Z})^2} \quad (1)$$

Na prática, é mais usual calcular primeiro o coeficiente da variância e de autocovariância:

$$c_0 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (Z_t - \bar{Z})^2 \quad (2)$$

$$c_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (Z_t - \bar{Z})(Z_{t+k} - \bar{Z})}{n} \quad (3)$$

Os coeficientes de autocorrelação são obtidos pela expressão $r_k = c_k/c_0$

Por exemplo, calcule a covariância e a autocorrelação da série até o quinto instante de tempo e diga se as autocorrelações são significativas dos dados da Tabela 1.

Tabela 1 – Amostra com valores fictícios para os meses de janeiro a maio de 2001, para o cálculo das autocorrelações e autocorrelações parciais

Anos	Meses	Observações
2001	janeiro	99810
	fevereiro	99840
	março	101370
	abril	103050
	maio	103920

$$\bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Z_t = \frac{99810+99840+101370+103050+103920}{5} = 101589$$

Calculando C_0

$$c_0 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (Z_t - \bar{Z})^2$$

$$c_0 = \frac{(Z_1 - \bar{Z})^2 + (Z_2 - \bar{Z})^2 + (Z_3 - \bar{Z})^2 + (Z_4 - \bar{Z})^2 + (Z_5 - \bar{Z})^2}{5} = 2767896$$

Calculando C_1 e r_1

$$c_k = \sum_{t=1}^{n-k} (Z_t - \bar{Z})(Z_{t+k} - \bar{Z}) / n$$

$$c_1 = \sum_{t=1}^4 (Z_t - \bar{Z})(Z_{t+1} - \bar{Z}) / 5$$

$$c_1 = \frac{(Z_1 - \bar{Z})(Z_2 - \bar{Z}) + (Z_2 - \bar{Z})(Z_3 - \bar{Z}) + (Z_3 - \bar{Z})(Z_4 - \bar{Z}) + (Z_4 - \bar{Z})(Z_5 - \bar{Z})}{5} = 1316923,20$$

$$r_k = \frac{c_k}{c_0} \quad r_1 = \frac{c_1}{c_0} = 0,4757$$

Calculando C_2 e r_2

$$c_2 = \frac{(z_1 - \bar{z})(z_3 - \bar{z}) + (z_2 - \bar{z})(z_4 - \bar{z}) + (z_3 - \bar{z})(z_5 - \bar{z})}{5} = -534873,60$$

$$r_k = \frac{c_k}{c_0} \quad r_2 = \frac{c_2}{c_0} = -0,19324$$

Calculando C_3 e r_3

$$c_3 = \frac{(z_1 - \bar{z})(z_4 - \bar{z}) + (z_2 - \bar{z})(z_5 - \bar{z})}{5} = -1335650,40$$

$$r_3 = \frac{c_3}{c_0} \quad r_3 = \frac{c_3}{c_0} = -0,48255$$

Calculando C_4 e r_4

$$c_4 = \frac{(z_1 - \bar{z})(z_5 - \bar{z})}{5} = -1335650,40$$

$$r_4 = \frac{c_4}{c_0} \quad r_4 = \frac{c_4}{c_0} = -0,29992$$

E assim sucessivamente se calcula para todos os instantes da série temporal. As autocorrelações revelam informações sobre o tipo de dependência da série temporal que pode ser simples e sazonal e sobre a tendência que pode ser crescente e decrescente.

É importante realizar um teste de hipóteses para avaliar se a autocorrelação, é significativa, considerando as seguintes hipóteses:

$H_0: r_k = 0$ Não significativo (Não existe dependência entre os instantes de tempo);

$H_1: r_k \neq 0$ Significativo (Existe dependência entre os instantes de tempo).

Também é possível testar se os k primeiros coeficientes de autocorrelação são conjuntamente iguais a zero. Para isto, utiliza-se o teste de hipóteses de Ljung-Box.

Cálculo da variância de r_k :

$$\hat{\sigma}^2(r_k) \cong \frac{1}{n} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{q=k-1} r_k^2 \right] \quad \text{para } k > q \quad (4)$$

Para um tamanho de amostra “ n ” considerado como elevado, o intervalo de confiança fica:

$$P(r_k - t_{(n-1)\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{\sigma}^2(r_k) \leq r_k \leq (r_k + t_{(n-1)\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{\sigma}^2(r_k)) = 1-\alpha \quad (5)$$

Pode-se considerar r_k estatisticamente significativo se:

$$|r_k| \geq 2 \cdot \hat{\sigma}^2(r_k) \quad \text{com } k > q \quad (6)$$

Retornando ao exercício para verificar se as autocorrelações são significativas.

Tabela 2 – Valores da autocorrelação (r_k) calculada para 5 períodos de tempo defasados (*lags*)

k	r_k
1	0,4757
2	-0,1932
3	-0,4825
4	-0,2999

Obteve-se a seguir todos os cálculos efetuados passo a passo para uma melhor compreensão.

Cálculo de $\hat{\sigma}^2(r_1)$

$$\hat{\sigma}^2(r_k) \cong \frac{1}{n} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{k-1} r_k^2 \right] \quad \hat{\sigma}^2(r_1) \cong \frac{1}{50} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{1-1} r_k^2 \right]$$

$$\hat{\sigma}^2(r_1) \cong \frac{1}{50} [1 + 2 \cdot 0] \cong 0,02$$

Cálculo de $\hat{\sigma}^2(r_2)$

$$\hat{\sigma}^2(r_k) \cong \frac{1}{n} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{k-1} r_k^2 \right] \quad \hat{\sigma}^2(r_2) \cong \frac{1}{50} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{2-1} r_k^2 \right]$$

$$\hat{\sigma}^2(r_2) \cong \frac{1}{50} [1 + 2(r_1^2)] \cong \frac{1}{50} [1 + 2(-0,418)^2] \cong 0,027$$

Cálculo de $\hat{\sigma}^2(r_3)$

$$\hat{\sigma}^2(r_k) \cong \frac{1}{n} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{k-1} r_k^2 \right] \quad \hat{\sigma}^2(r_3) \cong \frac{1}{50} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{3-1} r_k^2 \right]$$

$$\hat{\sigma}^2(r_3) \cong \frac{1}{50} [1 + 2(r_1^2 + r_2^2)] \cong \frac{1}{50} \{1 + 2[(-0,418)^2 + (0,345)^2]\} \cong 0,032$$

Cálculo de $\hat{\sigma}^2(r_4)$:

$$\hat{\sigma}^2(r_k) \cong \frac{1}{n} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{k-1} r_k^2 \right] \quad \hat{\sigma}^2(r_4) \cong \frac{1}{50} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{4-1} r_k^2 \right]$$

$$\hat{\sigma}^2(r_4) \cong \frac{1}{50} [1 + 2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)]$$

$$\hat{\sigma}^2(r_4) \cong \frac{1}{50} \{1 + 2[(-0,418)^2 + (0,345)^2 + (-0,331)^2]\} \cong 0,036$$

Cálculo de $\hat{\sigma}^2(r_4)$:

$$\hat{\sigma}^2(r_k) \cong \frac{1}{n} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{k-1} r_k^2 \right] \quad \hat{\sigma}^2(r_4) \cong \frac{1}{50} \left[1 + 2 \sum_{k=1}^{4-1} r_k^2 \right]$$

$$\hat{\sigma}^2(r_4) \cong \frac{1}{50} [1 + 2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)]$$

$$\hat{\sigma}^2(r_4) \cong \frac{1}{50} \{1 + 2[(-0,418)^2 + (0,345)^2 + (-0,331)^2]\} \cong 0,036$$

Na Tabela 3 apresenta-se os cálculos parciais para se verificar se as correlações são significativas, pois sempre que a relação $|r_k| \geq 2.\hat{\sigma}^2(r_k)$ for verdadeira, o teste de hipótese será considerado como significativo.

Tabela 3 – Resumo do teste de hipótese para verificar se a autocorrelação é significativa

k	r_k	$\hat{\sigma}^2(r_k)$	$2.\hat{\sigma}^2(r_k)$	Teste	
1	0,4757	0,2000	0,4000	$ r_1 \leq 2.\hat{\sigma}^2(r_1)$	Significativo
2	-0,1932	0,2905	0,5810	$ r_2 \leq 2.\hat{\sigma}^2(r_2)$	Não Significativo
3	-0,4825	0,3054	0,6108	$ r_3 \leq 2.\hat{\sigma}^2(r_3)$	Não Significativo
4	-0,2999	0,3986	0,7972	$ r_3 \leq 2.\hat{\sigma}^2(r_3)$	Não Significativo

Observe que se $|r_k| \geq 2\hat{\sigma}^2(r_k)$, dizemos que r_k é significativamente diferente de zero. Sendo assim, como no exemplo em questão, $r_1 \neq 0$, o mesmo é significativo, existe dependência entre os instantes de tempo.

Como calcular a Função de autocorrelação parcial amostral, para se encontrar os coeficientes de autorregressão ϕ_{kk} , Equação 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_k & \rho_{k-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \vdots \\ \phi_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{bmatrix} \quad (7)$$

A autocorrelação parcial de um processo é definida como a sequência dos ϕ_{kk} 's obtidos pela resolução das equações acima, para $k = 1, 2, 3, \dots$

A autocorrelação parcial de um processo é definida como a sequência dos ϕ_{kk} 's obtidos pela resolução das equações acima, para $k = 1, 2, 3, \dots$ Vamos lembrar que estamos trabalhando com amostras então vamos usar $\rho_k = r_k$ e aplicando a regra de Cramer para $k = 1, 2, 3, \dots$ temos:

Tabela 4 – Valores das autocorrelações para 4 lags utilizados para se calcular as autocorrelações parciais

k	r_k
1	0,4757
2	-0,1932
3	-0,4825
4	-0,2999

Ao efetuar os cálculos das autocorrelações para os 4 *lags*, com base nas equações subsequentes, temos como resultados:

$$\phi_{11} = \rho_1 \quad (8)$$

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} \quad (9)$$

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} \quad (10)$$

$$\phi_{11} = 0,4757$$

$$\phi = \frac{[(1 \cdot (-0,1932)) - (0,4757)^2]}{[1 - (0,4757)^2]} = -0,5422$$

$$\phi = \frac{\det A}{\det B}$$

$$\phi_{33} = \frac{[r_1^3 + (r_1 \cdot r_2^3) + r_3] - [r_1^2 \cdot r_3 + 2r_1 \cdot r_2]}{[2r_1^2 \cdot r_2 + 1] - [2r_1^2 + r_2^2]} = \frac{-0,0635}{0,42209} = -0,15044$$

Para um valor de k *lags*, temos genericamente representada fórmula de cálculo pela equação 2.

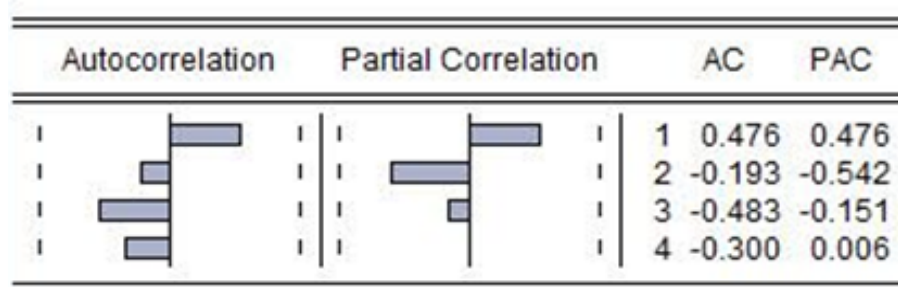
$$\phi_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \dots & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} & 1 \end{vmatrix}} \quad (11)$$

$$\phi_{kk} = \frac{|P_k^*|}{|P_k|} \quad (12)$$

Onde: P_k é a matriz de autocorrelações; P_k^* é a matriz P_k com a última coluna substituída pelo vetor de autocorrelações.

O correlograma e o correlograma parcial traçado com um intervalo de confiança $= \pm \frac{2}{\sqrt{n}} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} = \pm 0,89$ é mostrado na Figura 1. Genericamente o intervalo de confiança para um número de observações maior do que 50, pode ser generalizado para $\pm \frac{2}{\sqrt{n}}$.

Figura 1 – Representação da função de autocorrelação e autocorrelação parcial



Após a apresentação didática dos cálculos das funções FAC e FACP, surge a seguinte indagação: E as funções são úteis na identificação de um modelo ARIMA?

O objetivo é identificar quais os parâmetros do modelo ARIMA que melhor se ajustam à série temporal.

A ordem da diferenciação (d): é importante pois mostra quantas diferenciações são necessárias para tornar a série estacionária. A FAC se decair lentamente é um indicativo de não estacionariedade e precisa ser diferenciada ou sofrer algum tipo de transformação para se tornar estacionária. O valor do parâmetro “ d ” é a quantidade de diferenciações necessárias para alcançar a estacionariedade.

Ordem do componente AR (p): A ordem “ p ” do componente ao filtro autorregressivo (AR) é encontrada observando os picos significativos do correlograma - a FAC. Esses picos indicam os *lags* em que a série tem correlações significativas com os seus próprios valores anteriores.

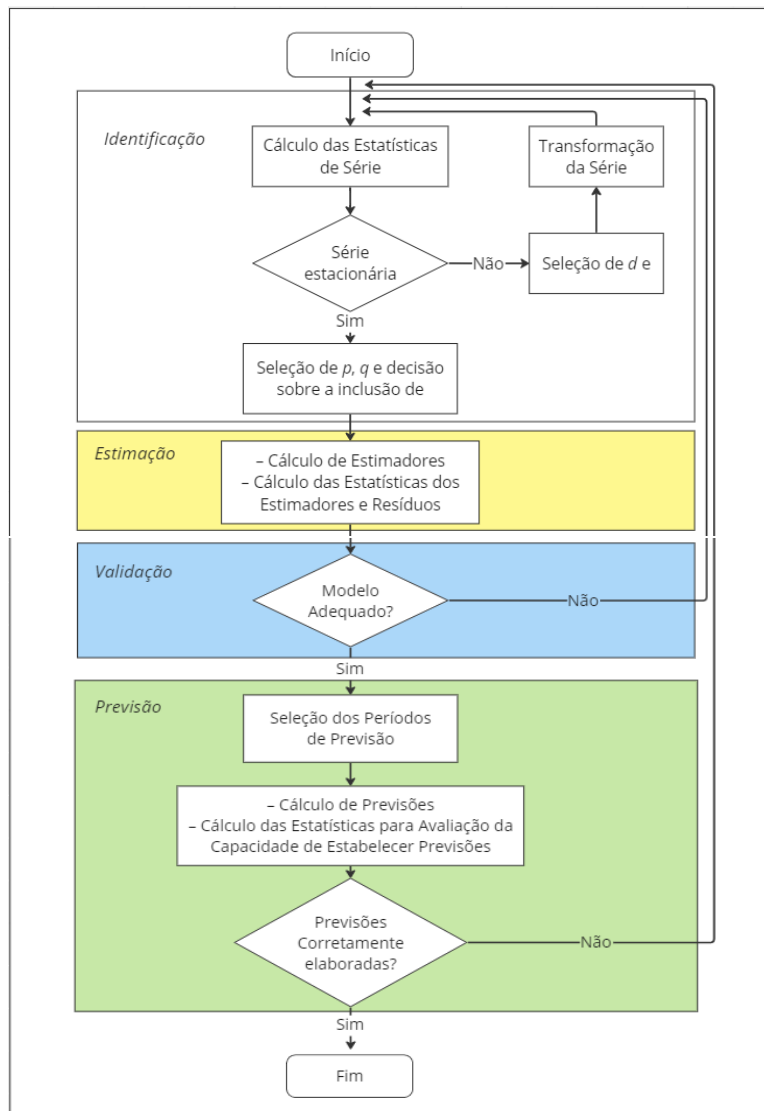
Ordem do componente MA (q): A ordem “ q ” do componente ao filtro de média móvel (MA) é determinada de forma semelhante, mas com base no com-

portamento da FACP. Novamente, os picos significativos na FACP indicam os *lags* em que a série tem correlações significativas com os seus próprios erros anteriores.

2.2 Modelos Autoregressivos Integrados e de Médias Móveis – ARIMA (p,d,q)

Os modelos ARIMA são aqueles que se baseiam somente na informação referente a série temporal em estudo. A estratégia utilizada para a construção de modelos pela metodologia criada por Box & Jenkins é baseada no ciclo iterativo conforme pode ser visto na Figura 2, onde a estrutura do modelo é formada pelos próprios elementos da série.

Figura 2 – Fluxograma do ciclo iterativo de Box & Jenkins adaptado de Requeijo e Zulema (2008)



As etapas do ciclo iterativo são:

1. Identificação:

Nesta etapa, o objetivo é identificar os parâmetros do modelo ARIMA que melhor se ajustam aos dados da série temporal. Para isso, usa-se as Funções de Autocorrelação (FAC) e Autocorrelação Parcial (FACP), que ajudam a identificar os termos autoregressivos (AR), integração (I) e média móvel (MA) adequados para o modelo. Com base na análise da FAC e FACP, propõem-se algumas ordens iniciais para o modelo ARIMA. Isso nos dá uma ideia inicial dos termos que podem ser relevantes para modelar a série temporal.

2. Estimação:

Após a identificação inicial, a próxima etapa é estimar os parâmetros do modelo ARIMA proposto. Na estimação dos parâmetros do modelo ARIMA aos dados da série temporal, procurando minimizar a diferença entre os valores previstos e os valores reais.

3. Diagnóstico:

Depois de estimar o modelo ARIMA, é fundamental avaliar a qualidade e a adequação do modelo aos dados observados acerca do comportamento da série de resíduos. Vale lembrar que o resíduo é a diferença entre o valor real e o valor previsto pelo modelo ajustado a série temporal. O diagnóstico dos resíduos destina-se a verificar se os resíduos têm média zero, variância constante, não autocorrelacionados e se seguem uma distribuição normal.

4. Verificação do modelo ajustado através dos resíduos e se o modelo apresentar resíduos com característica de ruído branco o modelo é adequado, e apto a ser realizar previsões. Caso contrário, repete-se o ciclo iterativo.

Para a construção dos modelos de Box & Jenkins usaremos um processo estocástico e/ou de uma série temporal (realização do mesmo), pois estaremos assumindo um estacionário, ou seja, ergódico Souza (1981).

Iniciamos a apresentação dos modelos ARIMA (p, d, q) , pelos casos particulares dos modelos Autoregressivos, $AR(p)$ e pelos modelos de médias móveis, $MA(q)$, depois apresentamos os modelos ARMA (p, q) e finalmente o modelo ARIMA (p, d, q) .

2.2.1 – Modelo autorregressivo (AR)

No modelo AR, cada valor da série temporal é uma função linear de seus próprios valores passados, chamados de “termos autoregressivos”. A ordem do modelo AR, representada por “p”, determina quantos termos autoregressivos são levados em consideração para prever o próximo valor.

O nome autorregressivo deve-se ao fato que Z_t no instante t é função dos Z 's nos instantes anteriores ao tempo “ t ” e de um erro no instante t . O modelo que contém $\theta(B)=1$ é chamado modelo autorregressivo de primeira ordem ou de ordem 1, AR(1).

O modelo genérico é representado por AR (p) onde “p” indica a ordem do modelo, significa que existem “p” defasagens que influenciam o valor atual da série temporal.

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + e_t \quad (13)$$

$$\phi(B)\tilde{Z}_t = e_t \quad (14)$$

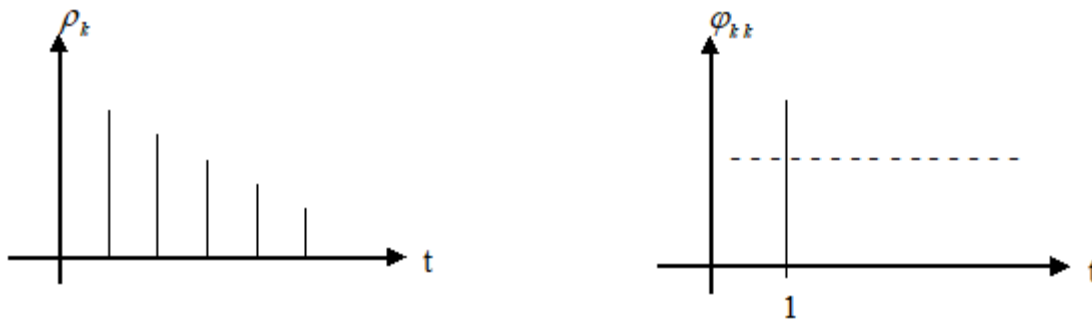
Vale lembrar que se realizou-se a transformação $\tilde{Z}_t = Z_t - \mu$, de forma que a média foi subtraída de toda as observações, desta forma evita-se estimar mais um parâmetro.

Por exemplo o modelo $\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + e_t$ é um modelo AR(1), onde apenas um parâmetro é significativo.

O modelo $\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + e_t$ é um AR(2), com dois parâmetros significativos.

Um modelo AR(p) será estacionário se $\phi(B)$ converge para $|B| \leq 1$ como $\phi(B) \neq 0$, as raízes da equação devem cair fora do círculo unitário, para garantir as condições de invertibilidade e estacionariedade. O processo é de ordem finita, logo será sempre invertível. A identificação do modelo será feita por meio das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial que indicam a ordem do modelo, tal como podem ser vistos nos correlogramas da Figura 3.

Figura 3 – Comportamento das funções de autocorrelação (ρ_k) e autocorrelação parcial (ϕ_{kk}) de um modelo AR (1)



A função de autocorrelação parcial decai exponencialmente, alternando ou não de sinal, podendo até apresentar um comportamento de misturas de exponenciais e ondas senoamortecidas, indicando que a série é estacionária. A autocorrelação parcial apresentará um corte rápido no *lag* significativo, isto é 1, sugerindo que o modelo inicial seja de ordem (1). Desta forma temos uma condição favorável de que o modelo a ser inicialmente ajustado seja um AR(1).

2.2.2 Modelo médias móveis (MA)

No modelo de médias móveis (MA), cada valor da série temporal é uma função linear dos termos de erro (ou inovações) passadas, em vez de seus próprios valores passados, como acontece no modelo AR. A ideia central é que os valores futuros são ajustados como uma combinação linear dos erros passados.

O modelo MA é amplamente utilizado em análise de séries temporais, especialmente em combinação com o modelo AR para formar o modelo ARIMA (*Autoregressive Integrated Moving Average*). O nome médias móveis vem do fato que Z_t é uma função soma algébrica ponderada dos erros, e_t que se movem no tempo. O nome em si não é exato, pois Z_t não é média, visto que os parâmetros não somam obrigatoriamente a unidade. O modelo tem $\theta(B) = 1$ é chamado médias móveis, MA (q) onde “q” é indica a ordem do modelo.

$$\tilde{Z}_t = e_t + \theta_1 e_{t-1} + \dots + \theta_q e_{t-q} \quad (15)$$

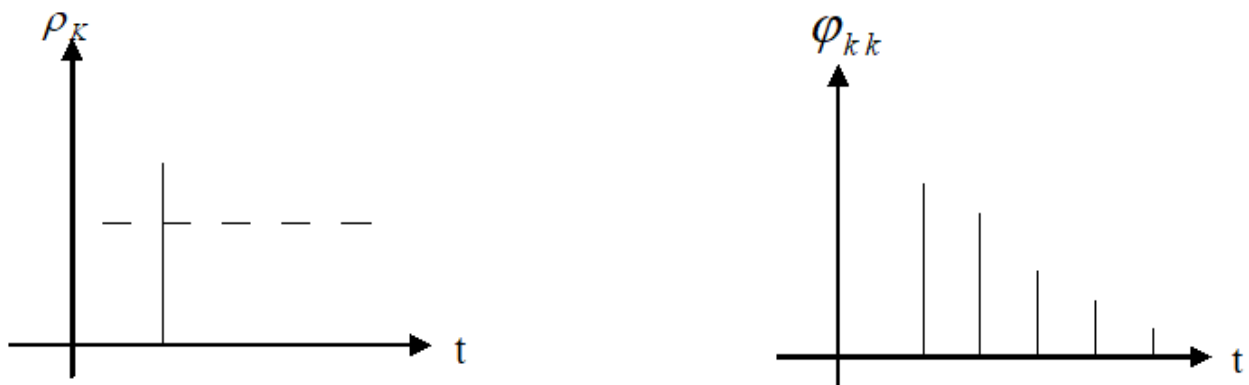
$$\tilde{Z}_t = \theta(B)e_t \quad (16)$$

Por exemplo, $\tilde{Z}_t = e_t + \theta_1 a_{t-1}$ é um modelo de médias móveis de ordem 1, pois apenas o termo a_{t-1} com um parâmetro θ_1 é significativo. E, $\tilde{Z}_t = e_t + \theta_1 e_{t-1} + \theta_2 e_{t-2}$ é um modelo de ordem 2, possui dois parâmetros significativos. Utiliza-se a notação $\tilde{Z}_t = Z_t - \mu$, que significa que da série original a média da série foi subtraída de cada valor da série.

O processo MA (q) é de ordem finita, logo será sempre estacionário e invertível, a série $\pi(B)$ deve convergir para $|B| < 1$ com $\theta(B) = \theta^{-1} B$ e as raízes da equação devem cair fora do círculo unitário.

A identificação do modelo é feita por meio das funções de autocorrelações e autocorrelações parciais, conforme Figura 4.

Figura 4 – Comportamento das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial de um modelo MA (1)



Na Figura 4, a autocorrelação (ρ_k) apresentará um corte rápido no lag 1, significativo, indicando a ordem do modelo, enquanto que a autocorrelação parcial (ϕ_{kk}) decai exponencialmente se todos os parâmetros forem positivos e, neste caso temos que o modelo sugerido deve ser um MA(1).

A modelagem de médias móveis puro (MA(q)), os resíduos são considerados como uma sequência de variáveis aleatórias independentes com média

zero e variância constante. A estrutura do modelo MA é definida pelos termos de erros, e eles são assumidos como não correlacionados ao longo do tempo, exceto para o termo atual e os “q” termos de médias móveis anteriores. Os resíduos a serem ajustados pelo no modelo de médias móveis (MA) são termos de erro independentes, não derivados de nenhum modelo anterior, e são a base da estrutura do modelo MA.

O modelo MA é útil quando há evidência de autocorrelação nos resíduos (erros) de uma série temporal, a inclusão de termos de médias móveis pode ajudar a modelar a estrutura de dependência remanescente nos dados.

2.2.3 – Modelo autorregressivo e de médias móveis (ARMA)

Sendo o processo estocástico estacionário, usaremos um modelo ARMA quando o processo apresentar características que não permitam sua descrição por meio de uma parametrização parcimoniosa de um processo puramente autorregressivo ou puramente médias móveis, pelo fato de seu comportamento incluir características de ambos os tipos de processos. Então, consideramos um modelo misto, ou seja, é o modelo que tem uma parte com características autorregressivas, $AR(p)$ com $\phi(B) \leq 1$ com uma parte com características de médias móveis, $MA(q)$ com $\theta(B) \leq 1$. Desta forma temos o modelo genérico ARMA (p, q) que capta informações autorregressivas representadas por “p” parâmetros de ordem AR e características de médias móveis representadas por “q” parâmetros d ordem MA do modelo.

O Modelo AR (Autoregressivo) é bastante utilizado quando a dependência temporal de valores passados da série temporal tem uma forte correlação com os valores futuros. O AR captura essas dependências ao usar os próprios valores passados como previsores.

Quando existe tendências ou padrões de longo prazo, o modelo AR é eficaz na captura destas tendências e pode se ajustar bem para prever essas variações.

Nas sazonalidades com efeito de longo prazo o modelo AR também é apropriado, no entanto, para capturar sazonalidades com efeito de curto prazo, o modelo ARIMA (que combina AR e MA) pode ser mais vantajoso.

No entanto o Modelo MA (Médias Móveis) é mais adequado quando existe uma dependência temporal de erros passados, e se os erros residuais de um modelo ARIMA ou outro modelo tiverem correlação significativa ao longo do tempo, isso pode indicar a necessidade de incluir termos de médias móveis. O MA é útil para modelar a dependência temporal remanescente nos dados após a aplicação de outros modelos.

Quando existe padrões de curto prazo ou aleatoriedade, o modelo MA é adequado para capturar estes padrões de curto prazo ou comportamentos aleatórios na série temporal. Ele pode ser útil em situações onde os valores futuros são influenciados pelos erros passados ou choques aleatórios no sistema.

Muitas vezes, em aplicações práticas, os dados podem apresentar múltiplos padrões, como tendências, sazonalidades e correlações residuais. Nesses casos, o modelo ARIMA, que combina termos AR, I e MA, pode ser a escolha mais apropriada, pois permite capturar a complexidade dos dados e ajustar-se a diversos padrões temporais.

Em resumo, a escolha entre AR e MA (ou a combinação ARIMA) depende das características dos dados da série temporal e dos padrões presentes. Ambos os modelos são úteis e têm suas aplicações específicas para melhor modelar e fazer previsões precisas em diferentes cenários. É importante realizar análises exploratórias e diagnósticos dos dados antes de escolher o modelo mais adequado para a aplicação prática. Nas equações 17a, 17b e 17c até as equações 19b apresenta-se a forma que pode ser escrito um modelo ARMA.

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 Z_{t-1} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + e_t + \theta_1 e_{t-1} + \dots + \theta_q e_{t-q} \quad (17a)$$

$$\tilde{Z}_t + \phi_1 B \tilde{Z}_t + \dots + \phi_p B^p \tilde{Z}_t = e_t + \theta_1 B e_t + \dots + \theta_q B^q e_t \quad (17b)$$

$$\tilde{Z}_t (1 + \phi_1 B + \dots + \phi_p B^p) = e_t (1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q) \quad (17c)$$

onde:

$$\phi_1(B) = 1 + \phi_1 B + \dots + \phi_p B^p \quad (18a)$$

$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q \quad (18b)$$

$$\tilde{Z}_t = Z_t - \mu \quad (18c)$$

$$B^m = Z_{t-m} \quad (18d)$$

Logo:

$$\tilde{Z}_t \phi(B) = e_t \theta(B) \quad (19a)$$

$$\tilde{Z}_t = \phi(B^{-1}) \theta(B) e_t \quad (19b)$$

Por exemplo, o modelo ARMA (2,2); pode ser representado por $(1 + \phi_1 B + \phi_2 B^2) Z_t = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2) e_t$, com várias variantes para o modelo como MA(q), ARMA(0, q) ou AR(p), ARMA (p,0). Um modelo ARMA equivale a um modelo AR com infinitos parâmetros, ou um modelo MA com outro conjunto infinito de parâmetros. Um modelo ARMA (p, q) inclui os modelos AR (p) e MA (q) com uma grande economia de parâmetros.

O modelo será estacionário se as raízes da parte autorregressiva caírem fora do círculo unitário $\phi(B)=0$. E será invertível se as raízes da parte de média móvel caírem fora do círculo unitário; $\theta(B)=0$.

A função de autocorrelação de um processo ARMA (p, q) consiste em uma mistura de exponenciais e/ou senóides amortecidas, se $q < p$; se $q \geq p$, os primeiros $q - p - 1$ valores não seguirão este padrão.

2.2.4 – Modelos não estacionários (ARIMA)

Até agora, obtivemos a partir de um processo de ruído branco e_t , um processo Z_t estacionário, porém com relação de dependência. Em processos reais a estacionariedade nem sempre é encontrada, mas deve-se encontrar algum tipo de operador ou transformação para tornar o processo Z_t estacionário.

Considera-se nesta modelagem somente os processos chamados não estacionários homogêneos, que são processos não estacionários para os quais as diferenças sucessivas produzem um processo estacionário, Nelson (1978).

Tabela 5 – Identificação dos modelos ARIMA

Tipo de processo	FAC	FAC Parcial
AR(p)	declinante	truncada em p
MA(q)	truncada em q	declinante
ARMA(p;q)	declinante	declinante

Dada uma série Z_t , a primeira diferença de Z_t é definida por:

$$\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1} \quad (20)$$

Genericamente, a d-ésima diferença de Z_t é definida por:

$$\Delta^d Z_t = \Delta(\Delta^{d-1} Z_t) \quad (20a)$$

$$\Delta^2 Z_t = \Delta(Z_t - Z_{t-1}) \quad (20b)$$

$$\Delta^2 Z_t = Z_t - 2Z_{t-1} + Z_{t-2} \quad (20c)$$

Estas séries são não estacionárias homogêneas, pois com um número finito de diferenças, conseguimos estacioná-las. Dada Z_t , não estacionária, se $W_t = \Delta^d Z_t$, for estacionária podemos representar W_t por um modelo ARMA (p, q), isto é:

Diz-se que Z_t segue um modelo autorregressivo integrado de médias móveis, ARIMA (p, d, q).

$$\phi(B)\Delta^d Z_t = \theta(B)e_t \quad (22)$$

Como $\Delta Z_t = (1-B)Z_t$, vemos que $\Delta = 1-B$ e (1.1) pode ser escrito como:

$$\phi(B)(1-B)^d Z_t = \theta(B)e_t \quad (23)$$

Na maioria dos casos é suficiente tomar $d = 1$ ou $d = 2$ diferenças para que $\Delta^d Z_t$ seja estacionária.

Muitas vezes não são necessários todos os filtros do modelo geral ARIMA (p,d,q) para descrever uma série temporal e para identificar o processo gerador da mesma. Sendo assim uma série pode ser descrita por um processo puramente autoregressivo (AR) ou de médias móveis (MA). Considerando-se ainda a variante de que se a série é estacionária a ordem de integração será $d = 0$, se a série for não estacionária a ordem de integração pode ser $d=1$ ou $d=2$.

Em relação à ordem de integração o importante é buscar uma ordem de integração capaz de tornar a série estacionária, de modo a se obter estimativas de parâmetros estáveis e aptos para se realizar previsões.

Comportamentos repetitivos dentro do período de um ano em uma série temporal, é uma evidência da presença do efeito sazonal. Na maioria das vezes este efeito é identificado pelas funções de autocorrelação (FAC) e autocorrelação parcial (FACP). Neste caso o modelo SARIMA (p,d,q) (P,D, Q)_s, é o modelo indicado para representar a série. O valor S representa o tamanho da sazonalidade, o modelo geral é dado pela expressão 24.

$$\phi(B) \Phi(B) \Delta^d \Delta^{ds} Z_t = \theta(B) \Theta(B) e_t \quad (24)$$

Os parâmetros Φ , Θ representam a parte sazonal autoregressiva e a sazonal de médias móveis e Δ^{ds} representa a diferença sazonal, os demais parâmetros já são conhecidos. A diferenciação da série em termos sazonal também tem por objetivo torná-la estacionária, o que possibilita a aplicação da metodologia de BOX e JENKINS (1970); FARIAS, ROCHA; LIMA (2000).

Séries que apresentam periodicidade podem ser modeladas através de um modelo ARIMA sazonal, da forma:

$$\phi(B)\theta(B^S)\Delta^d\Delta_S^D Z_t=\theta(B)\theta(B^S)e_t \quad (25)$$

onde S é o período da sazonalidade que pode ser trimestral, semestral ou anual conforme o caso. O operador diferença sazonal é $\Delta_S=1-B^S$. D é o número de diferenças sazonais, $\Phi(B^S)=1+\Phi_1 B^S+\dots+\Phi_P^{SP}$ é o operador autorregressivo sazonal de ordem P e $\Phi(B^S)=1+\Phi_1 B^S+\dots+\Phi_Q B^{SQ}$ é o operador de médias móveis sazonal de ordem Q.

A equação (26) implica que devemos tomar d diferenças sazonais da série Z_t , de modo que a série seja estacionária.

$$Y_t=\Delta^d\Delta_S^D Z_t=(1-B)^d(1-B^S)^D X_t \quad (26)$$

O modelo (27) é denominado ARIMA sazonal de ordem (p, d, q) (p, D, Q)_s, por exemplo SARIMA (0, 1, 1)(0, 1, 1)₁₂ tem a seguinte forma:

$$(1-B)(1-B)^{12} Z_t=(1-\theta B)(1-\theta B^{12})e_t \quad (27)$$

Uma questão recorrente para o ajuste de um modelo ARIMA é saber se a série original deve seguir a distribuição Normal. A normalidade dos dados não é um requisito para a aplicação do modelo ARIMA, pois o método de estimação do modelo ARIMA é baseado em métodos de estimação que não exigem que os dados sejam normalmente distribuídos.

Quando ajustamos um modelo ARIMA à série original, o objetivo é encontrar os parâmetros (ordens AR, I e MA) que melhor se ajustam aos dados observados. Esses parâmetros são estimados usando métodos estatísticos, como o método dos mínimos quadrados ou a máxima verossimilhança, que são robustos o suficiente para lidar com diferentes distribuições de dados, não necessariamente a normal.

No entanto, é importante ressaltar que a normalidade dos resíduos do modelo ARIMA é mais relevante do que a normalidade da série original. A

normalidade dos resíduos é importante para garantir a validade das inferências estatísticas e premissas do modelo, como intervalos de confiança, testes de hipóteses e avaliação das previsões.

Caso os resíduos do modelo ARIMA se desviem significativamente da normalidade, pode ser necessário considerar transformações nos dados ou explorar modelos alternativos que melhor se adequem à natureza dos dados. Em alguns casos, modelos mais avançados, como modelos GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*), podem ser usados para lidar com heterocedasticidade nos resíduos.

2.3 – Estimação dos parâmetros

A estimação dos parâmetros é crucial porque os modelos ARIMA ajustados são na sua maioria utilizados para fazer previsões, inferências e tomar decisões com base nos dados disponíveis. Os parâmetros do modelo representam as relações subjacentes entre as variáveis e desempenham um papel fundamental na captura das propriedades dos dados e na capacidade do modelo de fazer previsões precisas.

Existem vários métodos de estimação de parâmetros, e a escolha do estimador depende do tipo de modelo e das características dos dados. Alguns dos principais estimadores utilizados atualmente são:

Método dos Mínimos Quadrados (*Ordinary Least Squares* - OLS): É um dos métodos mais utilizados e simples para estimar os parâmetros. O objetivo é minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre os valores observados e os valores previstos pelo modelo. É frequentemente aplicado em modelos lineares, como o modelo AR e MA.

Máxima Verossimilhança (*Maximum Likelihood* - ML): É um método geral e amplamente utilizado para estimar os parâmetros de diferentes modelos estatísticos. O objetivo é encontrar os valores dos parâmetros que tornam os dados observados mais prováveis de acordo com a distribuição de probabilidade

assumida pelo modelo. É aplicado em muitos modelos, incluindo o ARIMA.

Método de Mínimos Quadrados Generalizados (GLS - *Generalized Least Squares*): É uma extensão do OLS para casos em que os resíduos não têm variâncias constantes ou são correlacionados. É útil em modelos onde os erros apresentam heterocedasticidade ou autocorrelação.

Mínimos Quadrados Ordinários Ponderados (WLS - *Weighted Least Squares*): É uma variação do OLS que atribui pesos diferentes às observações, dependendo da sua precisão. É utilizado quando as observações têm diferentes níveis de variabilidade ou confiabilidade.

Método de Momentos (MM): É um método que iguala os momentos teóricos (média, variância, etc.) do modelo aos momentos empíricos calculados a partir dos dados. É usado em diversas situações e pode ser aplicado em combinação com outros métodos.

Estimadores Bayesianos: Utilizam conceitos da teoria de probabilidade Bayesiana para obter as distribuições posteriores dos parâmetros, levando em conta informações prévias (*priori*) e os dados observados. Eles são especialmente úteis quando há poucos dados disponíveis ou quando é importante incorporar informações prévias no processo de estimação.

A escolha do estimador depende da situação específica e das suposições sobre os dados e o modelo. É importante selecionar um estimador que seja adequado para o tipo de modelo e características dos dados da série temporal, garantindo que as previsões e inferências sejam confiáveis e precisas.

Feita a identificação do modelo genérico ARIMA (p, d, q) que melhor representa a série em estudo passa-se a obtenção de estimativas para os parâmetros do modelo identificado.

A estimação dos parâmetros, significa a obtenção de “p” estimativas para os parâmetros $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ e “q” estimativas para os parâmetros $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$, além de variância do ruído, σ_e^2 , ou seja $p + q + 1$ parâmetros no vetor $\epsilon = (\phi_1, \theta_1, \sigma_e^2)$.

Quando $d > 0$, estamos supondo $\mu = 0$. Caso contrário, μ é incluído como mais um parâmetro a ser estimados e teremos $p+q+2$ parâmetros. Seja $\eta = (\phi, \theta)$. Na estimação dos parâmetros pode-se utilizar dois métodos que são: o de Mínimos Quadrados Ordinários (MQO) e o da Máxima Verossimilhança (MV).

Para se determinar as estimativas de máxima verossimilhança (EMV) será necessário supor que o processo e_t siga a distribuição normal, ou seja, para cada $t, e_t \sim (0, \sigma_e^2)$, nestas condições, os estimadores de máxima verossimilhança serão aproximadamente os estimadores de mínimos quadrados (EMQ).

O método MV que em inglês denomina-se *Maximum Likelihood* (ML) consiste em achar grandezas populacionais que gerem os valores que mais se assemelhem aos da amostra observada, o método consiste em selecionar aqueles estimadores que maximizam a probabilidade de se obter a amostra realmente observada.

O método de mínimos quadrados, tem o objetivo de estimação de um modelo ARIMA (p,d,q). Para isso, passa-se a achar o vetor autorregressivo ϕ_{\sim} e o vetor dos parâmetros médias móveis θ_{\sim} tais que minimizem a soma das diferenças quadradas entre os pontos observados na amostra e o esperado pela estimativa obtida com estes parâmetros estimados. Simbolicamente deve-se achar $\phi_{\sim}, \theta_{\sim}$ tais que $S(\phi_{\sim}, \theta_{\sim}) = \sum e_t^2$ seja um mínimo.

Tornando-se d diferenças para alcançar estacionariedade, ficamos com $n = N - d$ observações Z_1, \dots, Z_n , onde $W_t = \Delta^d Z_t$. Como o modelo ARMA (p, q) resultante é estacionário e invertível, podemos escrever

$$e_t = \tilde{Z}_t - \phi_1 Z_{t-1} - \dots - \phi_p Z_{t-p} + \theta_1 a_{t-1} + \dots + \theta_q a_{t-q} \quad (28)$$

$$\text{onde } \tilde{Z}_t = Z_t - \mu$$

2.4 – Verificação da adequação do modelo

Um das etapas mais importantes na modelagem de séries temporais é a análise de resíduos, pois é esta análise que será útil para a validação do modelo. Os resíduos são as diferenças entre os valores observados e os valores previstos

pelo modelo ARIMA. Alguns pontos importantes a serem observados na análise dos resíduos incluem:

Além da inspeção visual dos resíduos, existem testes estatísticos que podem ajudar a verificar a adequação do modelo ARIMA:

Teste de Ljung-Box: É utilizado para testar a autocorrelação residual em diferentes *lags*. Se os resíduos forem independentes, o teste deve mostrar que não há autocorrelação significativa nos resíduos.

Teste de Shapiro-Wilk: É utilizado para testar se os resíduos têm uma distribuição normal. Se os resíduos não forem normalmente distribuídos, isso pode indicar a necessidade de uma transformação nos dados ou considerar outros modelos.

Os resíduos de um modelo ARIMA serve para mostrar a adequação do modelo ou para modificar o modelo encontrado. Espera-se que os resíduos sigam um processo dito **ruído branco** e_t , isto é, deseja que a série de resíduos apresente média zero, variância constante e não for auto correlacionado com qualquer realização da própria série.

$$\begin{aligned}E(e_t) &= 0; \forall t \\ E(e_t \cdot e_{t-j}) &= 0; \text{ para todo } j \neq 0 \\ E(e_{tt}^2) &= \sigma^2; \forall t\end{aligned}$$

Diz-se que o processo é um ruído branco - $RB(0, \sigma^2)$, se os resíduos seguirem um processo independente e identicamente distribuído (*iid*), o que mostra que os resíduos estão distribuídos aleatoriamente. Uma forma de verificar a aleatoriedade pode ser realizada ao se traçar a função de autocorrelação (FAC) e autocorrelação parcial (FACP) nos resíduos, se não mostrar autocorrelação, significa que os resíduos não apresentam informações adicionais que possam ser explicadas pelo modelo. O modelo captou todas as informações contidas na série de dados.

Existem outras maneiras de testar a independência dos resíduos: o Teste de Durbin-Watson para um processo AR(1); a Estatística Box-Pierce: amostras grandes; a Estatística Ljung-Box para amostras pequenas e o Teste LM.

Uma importante observação é analisar os resíduos quadráticos oriundos da modelagem ARIMA, pois os resíduos quadráticos revelam sobre a heterocedasticidade condicional. Se existir dependência quadrática dos resíduos pode nos conduzir a um estudo mais elaborado que são os modelos não lineares autorregressivos condicionados a heteroscedasticidade (ARCH).

Heterocedasticidade ocorre quando a variância dos resíduos não é constante ao longo do tempo. Em muitos casos de séries temporais, especialmente aquelas com tendências ou sazonalidades, a variância dos resíduos pode mudar ao longo do tempo. Isso pode resultar em resíduos com distribuição não normal.

Os testes que auxiliam nesta investigação são os Teste de Ljung-Box, Teste ARCH – LM e o Teste de White. Inclusive traçar o FAC e a FACP nos resíduos quadráticos auxilia nesta tarefa.

No entanto, é importante ressaltar que, em muitos casos, é desejável que os resíduos sejam próximos a uma distribuição Normal. Quando os resíduos se aproximam de uma distribuição Normal, sugere-se que o modelo ARIMA está capturando adequadamente as informações contidas nos dados e que não há padrões significativos nos erros residuais. Isso também é importante para garantir que as inferências estatísticas baseadas nos resíduos, como intervalos de confiança e testes de hipóteses, sejam válidas.

Outliers e choques extremos podem ser eventos raros, mas significativos, que podem ocorrer em séries temporais. Esses eventos podem levar a resíduos com caudas pesadas, fazendo com que os resíduos não sigam uma distribuição normal.

Caso os resíduos apresentem desvios significativos da normalidade, algumas estratégias podem ser adotadas, como a transformação dos dados, a aplicação de métodos de estimação robustos ou a consideração de modelos alternativos mais adequados para a natureza dos dados.

2.5 – Critérios penalizadores

Esses critérios são úteis na seleção do modelo ARIMA porque consideram tanto a qualidade de ajuste do modelo aos dados quanto a complexidade do modelo (número de parâmetros). Modelos mais complexos podem se ajustar bem aos dados, mas também têm maior probabilidade de sofrer com ajuste excessivo (*overfitting*) e gerar previsões menos precisas para novos dados. Por outro lado, modelos muito simples podem não ser capazes de capturar toda a estrutura dos dados.

Ao comparar diferentes modelos ARIMA, os critérios penalizadores ajudam a encontrar um equilíbrio entre o ajuste aos dados e a parcimônia, selecionando o modelo que oferece um bom ajuste com o menor número de parâmetros possível. Isso evita que escolhamos modelos excessivamente complexos que possam não generalizar bem para novos dados. Portanto, a utilização desses critérios é fundamental para garantir que o modelo selecionado seja adequado para fazer previsões precisas e confiáveis.

Muitas vezes o pesquisador consegue ajustar mais de um modelo ARIMA e nestes casos os modelos são denominados de modelos concorrentes. Estes modelos concorrentes são todos aqueles modelos que apresentam coeficientes significativos, coeficientes não explosivos, isto é, coeficientes que estão entre -1 e 1 e que apresentam características de ruído branco MORETTIN (2008).

Para auxiliar na decisão de qual o melhor modelo a ser utilizado, recorre-se aos critérios penalizadores, que permitem encontrar um ponto de equilíbrio entre a redução na soma do quadrado dos resíduos e a parcimônia do modelo. Os critérios mais usados são o AIC (*Akaike Information Criterion*) e o BIC (*Bayesian Information Criterion*), cujas fórmulas são dadas por:

$$AIC = T \cdot \ln(\sigma_e^2, ML) + 2n \quad (29)$$

$$BIC = T \cdot \ln(\sigma_e^2, ML) + n \cdot \ln(T) \quad (30)$$

Onde, n é o número de parâmetros estimados, T é o número de observações da série temporal e σ_e^2 , ML é a estimativa de máxima verossimilhança de at (Morettin & Toloi, 2006).

O AIC é um critério de informação desenvolvido por Hirotugu Akaike, o objetivo deste critério penalizador é encontrar o modelo que minimize a perda de informação e, ao mesmo tempo, penalize modelos com muitos parâmetros. Modelos com menor valor de AIC são considerados mais adequados.

O BIC, também conhecido como critério de Schwarz, proposto por Gideon E. Schwarz em 1978, é uma versão modificada do AIC que adiciona uma penalidade maior para modelos com muitos parâmetros. O BIC favorece modelos mais parcimoniosos (com menos parâmetros) em comparação com o AIC.

Considerando o tamanho da amostra, o critério BIC em geral é utilizado para avaliar pequenas amostras e o critério AIC para avaliar amostras grandes. Existem outros critérios que devem ser utilizados, assim como a versão corrigida dos critérios AIC e BIC.

Comparando-se os valores de AIC e BIC de modelos com diferentes ordens, o melhor modelo é o que apresenta os menores valores nas estatísticas AIC e BIC. No entanto, a seleção do melhor modelo não deve se basear apenas nos critérios AIC e BIC, a análise dos resíduos de modelos alternativos (concorrentes) ajustados é de extrema importância na escolha final do modelo que melhor explica a dinâmica da série temporal em estudo, devendo-se observar o critério da parcimônia, que significa um modelo com uma menor quantidade de parâmetros sempre deve ser levado em consideração no critério de escolha.

O HQ, *Hannan-Quinn Information Criterion*, é outro critério de informação semelhante ao AIC e ao BIC, mas com uma penalidade intermediária entre esses dois.

$$HQ = T \cdot \log \left(\frac{RRS}{n} \right) + 2 \cdot k \cdot \log \log(T) \quad (31)$$

Onde: K é o número de parâmetros, T é o número de observações, e RSS é a soma residual de quadrados que resulta de uma regressão linear ou de outro modelo estatístico.

Se o tamanho da amostra é considerado grande, o critério BIC tende a ser mais eficiente para selecionar modelos mais parcimoniosos, pois sua penalidade é mais rigorosa em relação ao número de parâmetros do modelo. Por outro lado, em amostras menores, o BIC pode tender a selecionar modelos excessivamente simples. Nesse caso, o AIC ou o HQ podem ser preferíveis, pois têm penalidades menos rigorosas e podem se ajustar melhor a conjuntos menores de dados.

A escolha do critério penalizador também pode depender da interpretação do modelo. O AIC e o BIC são derivados de diferentes pressupostos estatísticos, e a escolha entre eles pode depender da abordagem que melhor se alinha com o contexto e as suposições subjacentes ao problema.

O AIC é derivado sob o pressuposto de que o modelo verdadeiro que gerou os dados observados é desconhecido. Assim, o AIC tem como objetivo encontrar o modelo que melhor representa os dados observados, minimizando a perda de informação no processo de modelagem. Ele busca um equilíbrio entre a precisão do ajuste e a parcimônia, penalizando modelos mais complexos. Quanto menor o valor do AIC, melhor o modelo é considerado em termos de ajuste aos dados.

O BIC, também conhecido como critério de Schwarz, foi proposto por Gideon E. Schwarz em 1978. O BIC é uma extensão do AIC, mas com uma penalidade maior para modelos com muitos parâmetros. Ele é derivado sob uma perspectiva bayesiana, considerando a probabilidade a priori dos modelos.

O BIC assume que o modelo verdadeiro é um dentre os modelos candidatos que estão sendo comparados, e a probabilidade a priori de cada modelo é considerada. O BIC incorpora um termo adicional em sua fórmula que é proporcional ao logaritmo do número de observações no conjunto de

dados, resultando em uma penalidade mais rigorosa para modelos com mais parâmetros.

AIC e o BIC são critérios de informação que buscam encontrar um equilíbrio entre a qualidade de ajuste do modelo aos dados e a complexidade do modelo. Ambos os critérios penalizam modelos mais complexos, mas o BIC é mais rigoroso nessa penalização, favorecendo modelos mais parcimoniosos em relação ao AIC.

Recomenda-se comparar os resultados obtidos com diferentes critérios. Se os critérios apontarem para modelos semelhantes ou idênticos, isso fortalece a confiança na escolha. No entanto, se houver divergências entre os critérios, é importante investigar os modelos selecionados por cada um e considerar a complexidade do modelo em relação à relevância dos parâmetros adicionais.

2.6 – Modelos autorregressivos fracionários de médias móveis ARFIMA

Os Modelos Autorregressivos Fracionários de Médias Móveis (ARFIMA - *Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average*) são uma extensão dos modelos ARIMA (Modelos Autorregressivos de Médias Móveis Integrados) que permitem modelar séries temporais com dependência de longo alcance ou memória de longo prazo.

Enquanto os modelos ARIMA assumem que a série temporal é estacionária após a aplicação de diferenciação, os modelos ARFIMA permitem que a série seja fracamente estacionária, o que significa que ela pode apresentar tendências de longo prazo ou dependência de longo alcance nos valores passados. Essa capacidade de capturar a dependência de longo prazo é útil em séries temporais financeiras, econômicas, climáticas e outras séries que possam apresentar padrões complexos.

A principal diferença entre os modelos ARIMA e ARFIMA é que os modelos ARFIMA incluem uma ordem de diferenciação fracionária (d^*) ao invés de uma ordem de diferenciação inteira (d) nos modelos ARIMA tradicionais. A

ordem de diferenciação fracionária, denotada por “ d^* ”, pode ser um valor não inteiro, permitindo que o modelo capture a dependência de longo prazo. Por exemplo, um valor de $d^* = 0,5$ significa que a série tem uma dependência de longo alcance que decai lentamente ao longo do tempo.

Os modelos ARFIMA são estimados usando técnicas de máxima verossimilhança e são mais complexos do que os modelos ARIMA tradicionais. A estimação dos parâmetros pode ser computacionalmente mais exigente, e a interpretação dos resultados pode ser mais desafiadora devido à dependência de longo prazo que os modelos ARFIMA podem capturar.

Os modelos ARIMA são denominados de modelos de memória curta, pois no momento em que se faz transformações como diferenças, a série perde as propriedades de longo prazo. Mas muitas vezes a ordem de integração inteira ($d = 1$ ou $d = 2$) não é suficiente para refletirem as melhores condições para estacionarizar a série e se obter parâmetros representativo do modelo.

Para suprir esta lacuna os modelos ARFIMA (p, d^*, q) são uma generalização dos modelos ARIMA (p, d, q), onde é sugerido que se realize uma integração fracionária ($d \in \mathbb{R}$), estes modelos foram propostos inicialmente por GRANGER e JOYEUX (1980); HOSKING (1981).

Formalmente, diz-se que Z_t x_t é um processo auto-regressivo fracionário integrado de médias móveis, ou ARFIMA (p, d^*, q) com $d^* \in (-1/2, 1/2)$, se $\{Z_t\}$ for estacionário e satisfizer a equação (32).

$$\phi(B)(1-B)^d Z_t = \theta(B)a_t, \quad (32)$$

onde $a_t \sim \text{RB}(0, \sigma_a^2)$, $\phi(B)$ e $\theta(B)$ são polinômios de graus p e q , respectivamente, em que B é o operador retroativo. Hosking (1981) mostra que as condições de estacionariedade para o modelo ARFIMA (p, d^*, q) são $d < 0,5$ raízes de $\phi(B)=0$ estiverem fora do círculo unitário. Já as condições de invertibilidade são de que $d > -0,5$ e todas as raízes de $\theta(B)=0$ estejam fora do círculo unitário.

Os modelos ARFIMA, são capazes de descrever, simultaneamente, as dinâmicas de memória curta e longa de processos fracionários, onde o parâmetro d^* deve explicar a estrutura de correlação de ordens altas.

Uma forma gráfica de se perceber que um processo apresenta característica de séries com memória longa é por meio da FAC da série original, a qual parece ser não estacionária, decaindo lentamente, e a série diferenciada de ordem 1 pode parecer “super-diferenciada”, ou seja, os processos de memória longa situam-se entre processos $I(0)$ e $I(1)$, ocasionando um $I(d)$ com d fracionário FIGUEIREDO e MARQUES (2009). A diferenciação fracionária é obtida pela expansão binomial, onde $(1-B)^d$ com $d \in \mathbb{R}$.

$$(1-B)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{d}{j} (-B)^j \quad (33)$$

$$= 1 - dB - \frac{d(1-d)}{2!} B^2 - \frac{d(1-d)(2-d)}{3!} B^3 - \dots; \quad (34)$$

Para maiores detalhes ver Beran (1994). Os parâmetros da diferenciação fracionária d variam de -1 a 1 e podem ser interpretados de acordo com Hosking (1981), Jin e Frechete (2004), Lima et al. (2007) que mostram as características do processo em função do valor de d^* .

Quadro 1 – Tabela representativa das características do processo em relação dos valores assumido pelo valor d^* fracionário, figura adaptada de LIMA et al. (2007).

	Amplitude dos valores assumidos por d^*					
Características do processo	$[-1; -0,5]$	$(-0,5; 0)$	0	$(0; 0,5)$	$[0,5; 1)$	1
Estacionário		x	x	x		
Não-estacionário	x					x
Memória curta		x	x			
Memória longa				x	x	

Antipersistente		x				
Variância indefinida					x	
Raiz unitária (variância infinita)						x
Ruído Branco			x			
Atípico em séries econômicas	x					

Lemonte et. al. (2008) diz que a série pode ser considerada antipersistente, isto é, caso a série se afaste de seu nível médio em curto espaço de tempo ela retorna ao seu patamar normal. Se $0 < d < 0,5$, o processo também é dito de memória longa, a unção de autocorrelação decai, mas em valores mais elevados que um processo de memória curta.

Os parâmetros do modelo ARFIMA são estimados utilizando-se o Método da Máxima Verossimilhança. A função de Verossimilhança de $X = (x_1, x_2, \dots, x_T)$ proveniente de um processo ARFIMA (p, d, q) pode ser expressa na forma evidenciada em (26) ZIVOT e WANG (2003).

$$L(\eta, \sigma_a^2) = (2\pi\sigma_a^2)^{-T/2} (r_0 \dots r_{T-1})^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_a^2} \sum_{j=1}^T (x_j - \hat{X}_j)^2 / r_{j-1} \right], \quad (35)$$

Onde $\eta = (d, \phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q)$, \hat{X}_j , $j = 1, \dots, T$, são as previsões um passo à frente e $r_{j-1} = (\sigma_a^2)^{-1} E(X_j - \hat{X}_j)^2$.

Os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros são dados por (36).

$$\hat{\sigma}_{MV}^2 = T^{-1} S(\hat{\eta}_{MV}), \quad (36)$$

Onde:

$$S(\eta_{MV}) = \sum_{j=1}^T (X_j - \hat{X}_j)^{2/r_{j-1}}$$

e $\hat{\eta}_{MV}$ é o valor de η que minimiza

$$l(\eta) = \ln(S(\eta)) + T^{-1} \sum_{j=1}^T \ln r_{j-1}$$

No processo de estimação utilizado é considerado um valor inicial do parâmetro de diferenciação fracionário d estimado pelo procedimento GPH, proposto por GEWEKE e PORTER-HUDAK (1983).

Para auxiliar o pesquisador na tomada de decisão em relação ao melhor modelo a ser utilizado investigam-se as características dos resíduos, os critérios de penalidades e os critérios de avaliação da previsão.

Os modelos ARIMA são mais adequados para séries temporais que apresentam dependência temporal de curto prazo e podem ser tornadas estacionárias por meio de diferenciação.

Os modelos ARFIMA, por outro lado, são mais adequados para séries temporais com dependência de longo prazo, também conhecida como dependência de longo alcance ou memória de longo prazo. Eles podem ser úteis quando a série apresenta padrões complexos que não são facilmente capturados pelos modelos ARIMA tradicionais. Os modelos ARFIMA são capazes de incorporar a dependência de longo prazo, permitindo que a série temporal tenha uma memória mais persistente ao longo do tempo.

A escolha entre os modelos também pode depender do propósito da análise e das necessidades da previsão. Ambos os modelos têm suas vantagens e limitações, e é importante realizar uma análise exploratória dos dados e verificar a adequação dos modelos propostos antes de tomar uma decisão.

2.7 – Modelos Autoregressivos de Medias Móveis com variáveis exógenas ARMAX

Os modelos ARMAX (*Autoregressive Moving Average eXogenous*) são uma extensão dos modelos ARMA (*AutoRegressive Moving Average*) que permitem incorporar variáveis exógenas (ou regressores) na modelagem de séries temporais. Os modelos ARMAX são amplamente utilizados quando a série temporal de interesse pode ser influenciada por outras variáveis independentes que não fazem parte da própria série.

Em um modelo ARMAX, a estrutura ARMA representa a dependência temporal dos valores da série temporal em relação aos seus próprios valores passados e aos resíduos passados (médias móveis). O termo “exógeno” refere-se às variáveis independentes que podem influenciar a série temporal e são incluídas no modelo como repressores e, particularmente são úteis quando há variáveis exógenas que podem influenciar a série temporal e podem melhorar a precisão das previsões.

A estimação dos parâmetros em um modelo ARMAX é geralmente realizada por meio de técnicas de máxima verossimilhança ou mínimos quadrados. O objetivo é encontrar os melhores valores dos parâmetros que minimizem a diferença entre as previsões do modelo e os valores reais da série temporal.

Uma das alternativas do modelo ARIMA consiste em integrar variáveis exógenas para explicar as oscilações da variável em estudo: o modelo autor-regressivo de médias móveis com variável exógena (ARMAX) (GUSTIN; MCLEOD; LOMAS, 2018). No modelo ARMAX (p, q, y), adiciona-se um parâmetro na equação geral para representar o efeito da variável exógena (), conforme a equação 37.

$$\phi(B) \Delta^d Z_t = \theta(B) e_t + \phi(B) \Delta^d X_t \quad (37)$$

Onde Z_t representa a série de dados em análise, B é o operador de retardo, d é o número de diferenças das séries, ϕ representa o parâmetro da parte autor-regressiva, θ é o parâmetro da parte de médias móveis, e_t caracteriza o resíduo do modelo e X_t representa a série de dados da variável exógena.

As variáveis exógenas podem ser definidas de acordo com as suas relações de precedência com a variável principal interesse. A variável exógena que preceder a variável principal poderá ser utilizada para realizar a previsão (BUENO, 2015).

Para tanto, realiza-se o teste de Causalidade de Granger que consiste em analisar se as defasagens de uma variável possuem efeito sobre outra variável,

por meio de uma equação de regressão (ROCHA; BRILHANTE, 2015). Se ocorre essa precedência, e ela é significativa, então a variável principal terá uma previsão mais efetiva se a variável exógena for adicionada ao seu modelo de regressão (MORETTIN, 2016).

Os modelos ARMAX pertencem à família Autorregressivos de Médias Móveis – ARMA que possui dependência de uma série exógena – X. De acordo com Frances (1991) um modelo ARMAX indica a possibilidade de garantir que todas as variáveis podem ser consideradas de forma simultânea. O modelo possibilita a análise de mais de uma variável correlacionada à previsão de Y_t . Este possui uma variável endógena dependente e mais as variáveis explicativas exógenas. O modelo defende a dependência das variáveis, mesmo sendo endógenas. A equação 38 representa o ARMAX:

$$Z_t = C + \sum_{i=1}^p \phi_i Z_{t-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t + \sum_{k=1}^{N_x} \beta_k X_{t-k} \quad (38)$$

Em que: Y_t representa o modelador; c é a constante; ϕ_1, \dots, ϕ_p são os coeficientes dos termos autorregressivos; $Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots, Z_{t-i}$ são os termos autorregressivos; ε_t é a componente aleatória, com $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$; $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ são os coeficientes da componente aleatória, $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots, \varepsilon_{t-q}$ as componentes aleatórias defasadas; X é uma matriz de variáveis exógenas em que cada coluna é uma série temporal; $X_{(t,k)}$ é o elemento colocado na t -ésima linha e na k -ésima coluna; β_1, \dots, β_p são os coeficientes dos termos das variáveis exógenas.

Ao utilizar séries externas, os modelos ARX e ARMAX, estudam a Função de Correlação Cruzada – FCC, para medir quantos instantes de tempo a variável externa influenciam o valor presente da variável predita. O número de defasagens incluídas no modelo ARMAX começa-se com um número elevado de defasagens, as quais serão paulatinamente subtraídas do modelo com o auxílio do teste de significância dos parâmetros.

As defasagens foram representadas pela simbologia “t1:t2”, que esboça continuidade, por exemplo, Série1_{1:5} inclui Série1.1, Série1.2, Série1.3, Sé-

rie1.4 e Série1.5 indexado a respectiva defasagem. Então, o modelo ARMAX fica representado por $AR(p), I(d), MA(q), X(\text{Série1}, \text{Série1}_{1:5}, \text{Série2}, \text{Série2}_{1:5}, \dots, \text{SérieN}, \text{SérieN}_{1:5})$. 1:5 representa até 5 defasagens de cada variável.

O estudo dos modelos ARMAX justifica-se pela capacidade de determinação das variáveis macroeconômicas que mais influenciam de modo mutuamente e principalmente nas séries que representam os programas de benefícios assistenciais. Ainda é possível verificar pelos modelos ARMAX até quando os valores passados interferem no futuro das séries.

Existem vários indicadores para avaliar e comparar o desempenho dos modelos de previsão, que possibilitam a comparação dos modelos de previsão de uma forma imparcial. Em geral, estes indicadores avaliam a capacidade de precisão, a adequação dos modelos para detalhes consultar Diebold e Lopez (1996).

2.8 – Previsão para modelos univariados

A previsão utilizando modelos univariados de séries temporais, é uma área importante na atualidade devido à sua ampla gama de aplicações em diversas áreas e setores da sociedade. A previsão univariada se concentra em prever o comportamento futuro de uma única variável ao longo do tempo, com base em seus próprios padrões históricos. Importância na Atualidade:

- Tomada de Decisão Estratégica: A previsão de séries temporais é fundamental para auxiliar na tomada de decisões estratégicas em empresas, organizações governamentais e instituições. Por exemplo, empresas podem usar a previsão para antecipar a demanda de produtos, otimizar estoques e planejar a produção.
- Planejamento Financeiro: A previsão de variáveis financeiras, como receitas e despesas, é crucial para o planejamento orçamentário e a gestão financeira de empresas. Investidores também utilizam previsões econômicas para tomar decisões de investimento.

- **Gestão de Operações:** Em setores como logística, transporte e saúde, a previsão de séries temporais é essencial para otimizar o planejamento e a alocação de recursos, melhorando a eficiência das operações.
- **Monitoramento e Alerta:** A previsão de séries temporais é usada para monitorar eventos, como desastres naturais, surtos de doenças, flutuações do mercado financeiro e outros cenários que requerem alertas rápidos para a tomada de medidas apropriadas.
- **Previsão Climática:** A previsão de séries temporais é essencial para a previsão do clima, permitindo alertas antecipados de eventos climáticos extremos, como furacões, tempestades e secas, ajudando na preparação e mitigação de danos.
- **Marketing e Vendas:** As previsões de séries temporais são aplicadas em marketing para prever a demanda de produtos e serviços, identificar tendências de consumo e orientar estratégias de vendas.
- **Previsão de Demanda Energética:** Em sistemas de energia, a previsão é usada para estimar a demanda futura de eletricidade e otimizar o fornecimento de energia.
- **Saúde Pública:** Na área de saúde, a previsão de séries temporais é aplicada para antecipar surtos de doenças, prever a disseminação de epidemias e apoiar o planejamento de recursos médicos.

Essas são apenas algumas das muitas aplicações em que a previsão de séries temporais desempenha um papel fundamental na atualidade. Dentro do fluxograma operacional dos métodos de Box & Jenkins apresentado anteriormente, está é a última parte de aplicação do método. Para seu acesso precisamos que o modelo para a série já tenha sido identificado, seus parâmetros estimados e que tenha passado pelo teste estatístico de adequação do modelo.

Deve-se considerar que a previsão pode ser realizada de duas maneiras, a primeira denominada *in sample* que é realizada dentro do mesmo período amostral e é muito útil, para validar o modelo, as estimativas dos parâmetros e

para verificar que o modelo ajustado convergiu para os valores reais da série. O outro tipo de previsão é denominado *out of sample*, neste caso a previsão é realizada para períodos à frente da base de dados coletada, podendo ser utilizada uma previsão de curto prazo.

A previsão realizada l passos à frente é denotada por Z_{t+l} ; $l \geq 1$: valor teórico a ser previsto l passos-à-frente a partir da origem t . $Z_t(l)$; previsão obtida pelo modelo do valor Z_{t+l} (previsão feita na origem t , l - passos - à - frente).

A equação geral de previsão é obtida diretamente da equação substituindo o tempo t por $t+l$, sendo assim para $t \rightarrow t+l$. Representado na equação 39.

$$Z_{t+l} = \phi_l^* Z_{t+l-l} + \dots + \phi_p^* Z_{t+l-p} + \theta_l a_{t+l-l} + \dots + \theta_q a_{t+l-q} \quad (39)$$

onde: $p^* = p + d$; $\phi_i^* = \phi_i'$.

Os modelos lineares são responsáveis por modelar e prever a média condicional da série, assumindo que os resíduos e_t possuam características de ruído branco, com média zero e variância constante. Mas, ao se investigar um pouco mais os resíduos, pode-se observar uma dependência entre as observações quando estes resíduos oriundos de um modelo linear são elevados ao quadrado. Os resíduos quadráticos de um modelo linear representam a volatilidade dos resíduos, os quais Engle (1982) descreveu por meio dos modelos autorregressivos de heteroscedasticidade condicional (ARCH) e posteriormente foram generalizados por Bollerslev (1986, 1992), nos quais fica caracterizada uma dependência não linear dos resíduos, função da dependência da variância condicional (Costa e Baidya, 2001).

Segundo Amorim Júnior et al. (2004), a previsão ingênua afirma que a melhor estimativa de um valor para amanhã é o valor de hoje.

Uma abordagem importante para verificar a adequação do modelo ARIMA é realizar previsões fora da amostra.

2.9 – Medidas de avaliação de modelos e de previsão

Após se determinar o modelo mais adequado para se entender o mecanismo gerador da série ou pra se fazer previsões, é necessário utilizar medidas de avaliações para se verificar se as previsões estão boas ou não. Ou até mesmo para verificar se um modelo apresentou uma melhor qualidade nas previsões apresentadas. Os critérios penalizadores mais utilizados como o AIC e BIC, são mais úteis na fase de estabelecer os modelos, auxiliando o pesquisador na escolha do modelo a ser escolhido.

Seguem alguns critérios utilizados para validar as previsões realizadas pelos modelos escolhidos.

Dentre os modelos de avaliação dos modelos, os critérios penalizadores são mais utilizados para se encontrar um modelo parcimonioso (poucos parâmetros) que represente a série em estudo ajustada.

Existem medidas de avaliação dos erros de previsão que também são auxiliares na escolha entre os modelos concorrentes, mas sendo estas mais úteis quando se quer avaliar as previsões realizadas. As medidas mais utilizadas são o erro percentual médio absoluto (MAPE) expressão (40), a raiz do erro médio quadrático (RMSE) expressão (41) e a estatística U-Theil expressão (42).

– MAPE (*Mean Absolute Percentage Error*):

O MAPE é outra métrica comum para medir a precisão das previsões. Ele calcula o erro percentual médio entre as previsões e os valores reais da série temporal e é expresso em porcentagem e mede a proporção média de erro em relação aos valores reais. Ele fornece uma ideia da precisão relativa das previsões.

Cada uma dessas medidas tem suas vantagens e limitações, e a escolha entre elas pode depender do contexto específico e dos objetivos da análise. É importante usar várias métricas de avaliação em conjunto para obter uma visão

abrangente do desempenho do modelo e garantir que as previsões sejam confiáveis e precisas. A seleção da métrica de avaliação também pode depender das preferências e requisitos específicos do analista ou da aplicação em questão.

$$MAPE = \sqrt{\frac{1}{n} \left| \frac{Z_i - \hat{Z}_i}{Z_i} \right|} * 100 \quad (40)$$

– RMSE (*Root Mean Squared Error*):

O RMSE é uma métrica amplamente utilizada para avaliar a precisão de previsões de modelos. Ele mede a diferença entre as previsões do modelo e os valores reais da série temporal. O RMSE é calculado pela raiz quadrada da média dos quadrados dos erros entre as previsões e os valores reais e quantifica o erro médio das previsões e penaliza mais os erros maiores.

$$RMSE = \sqrt{\frac{(Z_i - \hat{Z}_i)^2}{n}} \quad (41)$$

– U-Theil (*Theil's U Statistic*):

O U-Theil é uma medida que compara a variabilidade das previsões do modelo com a variabilidade dos dados reais. Ele é definido como a razão entre o RMSE do modelo e o RMSE de uma previsão ingênua (baseline) que utiliza apenas o valor mais recente da série temporal como previsão para todos os períodos. O U-Theil é dado pela equação 42.

O U-Theil compara o desempenho do modelo com uma previsão simples, e valores menores indicam um melhor desempenho do modelo em relação à previsão ingênua.

$$U = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N ((Z_i - \hat{Z}_i)^2)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^N ((Z_i - \hat{Z}_{i-1})^2)}} \quad (42)$$

Nas expressões acima n corresponde ao número de previsões realizadas, padrões, x_i representa o valor real no instante i , \hat{z}_i representa o valor previsto no instante i e \hat{z}_{i-1} é o valor da variável em estudo no instante $i-1$.

A estatística U-Theil é um índice que mede o quanto os resultados estão melhores que uma previsão ingênua ou trivial. Segundo Amorim Júnior et al. (2004), a previsão ingênua afirma que a melhor estimativa de um valor para amanhã é o valor de hoje. Se $U = 1$, o erro do modelo é maior que o erro ingênuo, ou seja, as previsões do modelo não são melhores que uma previsão ingênua; se $U < 1$, o erro do modelo é menor que o erro ingênuo, ou seja, o modelo é aceitável, pois as previsões do modelo são melhores que uma previsão ingênua.

3 BASE DE DADOS

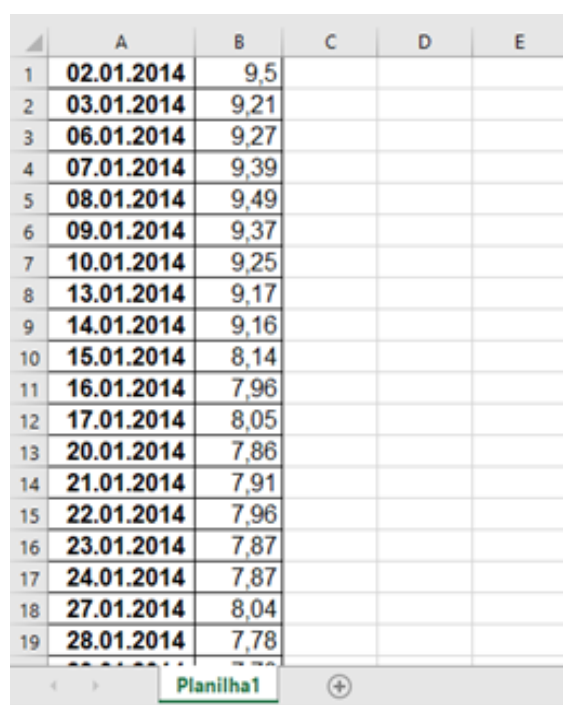
Com o objetivo é exemplificar e facilitar a compreensão da aplicação dos modelos em séries temporais, é apresentado um passo a passo para a elaboração dos modelos e suas estatísticas pertinentes.

A variável utilizada é o preço de fechamento da ação da empresa Brasi-Agro, coletada do site da corretora (br.investing.com), no período de primeiro de janeiro de 2014 até 31 de dezembro 2017, compreendendo um total de 989 observações diárias.

3.1 – Etapas metodológicas

Para facilitar a compreensão do leitor são elencadas as etapas realizadas nessa análise, que será a organização dos dados, importação dos dados da planilha eletrônica para o EViews, verificação da estacionariedade das séries temporais, verificação das funções de autocorrelações (FAC) e das funções de autocorrelações parciais (FACP), estimações dos modelos concorrentes ARIMA.

Figura 5 – Dados organizados em planilha eletrônica



	A	B	C	D	E
1	02.01.2014	9,5			
2	03.01.2014	9,21			
3	06.01.2014	9,27			
4	07.01.2014	9,39			
5	08.01.2014	9,49			
6	09.01.2014	9,37			
7	10.01.2014	9,25			
8	13.01.2014	9,17			
9	14.01.2014	9,16			
10	15.01.2014	8,14			
11	16.01.2014	7,96			
12	17.01.2014	8,05			
13	20.01.2014	7,86			
14	21.01.2014	7,91			
15	22.01.2014	7,96			
16	23.01.2014	7,87			
17	24.01.2014	7,87			
18	27.01.2014	8,04			
19	28.01.2014	7,78			

A planilha deve ser importada posteriormente no *Software* EViews, neste caso a planilha foi salva com o nome “AGRO 2014”.

3.2 – Importação dos dados da Planilha eletrônica para o EViews SV

O EViews é um *software* estatístico e econométrico amplamente utilizado para análise de séries temporais, modelagem econométrica e previsão. Ele é conhecido por sua interface intuitiva e amigável, tornando-o acessível tanto para usuários iniciantes quanto avançados. O EViews SV é especialmente popular entre economistas, pesquisadores e profissionais da área financeira devido à sua ampla gama de recursos específicos para séries temporais.

Principais recursos do EViews para análise de séries temporais:

- **Manipulação de Dados:** O EViews oferece várias ferramentas para importar, manipular e visualizar dados de séries temporais. Ele suporta diferentes formatos de dados e facilita a preparação dos dados para análise.
- **Análise Descritiva:** O *software* permite realizar análise descritiva das séries temporais, incluindo cálculos de estatísticas resumo, gráficos de linha, gráficos de dispersão e muito mais.
- **Modelagem Econométrica:** O EViews fornece uma ampla variedade de técnicas de modelagem econométrica, incluindo modelos ARIMA, modelos de séries temporais sazonais, modelos de vetores autorregressivos (VAR), modelos de correção de erros (VEC), entre outros.
- **Previsão:** O EViews permite criar modelos de previsão para projetar valores futuros de séries temporais com base em modelos econométricos ajustados.
- **Análise de Cointegração:** O EViews inclui recursos para testar e modelar cointegração entre séries temporais, o que é útil em análises de longo prazo.
- **Testes de Hipóteses e Diagnósticos:** O *software* oferece uma variedade de testes de hipóteses e diagnósticos para verificar a adequação dos modelos e a qualidade dos resultados.

- Integração com outras Ferramentas: O EViews pode se integrar com outras ferramentas estatísticas e *software* de planilhas, facilitando a transferência de dados e resultados.

Outros *softwares* amplamente utilizados para análise de séries temporais incluem:

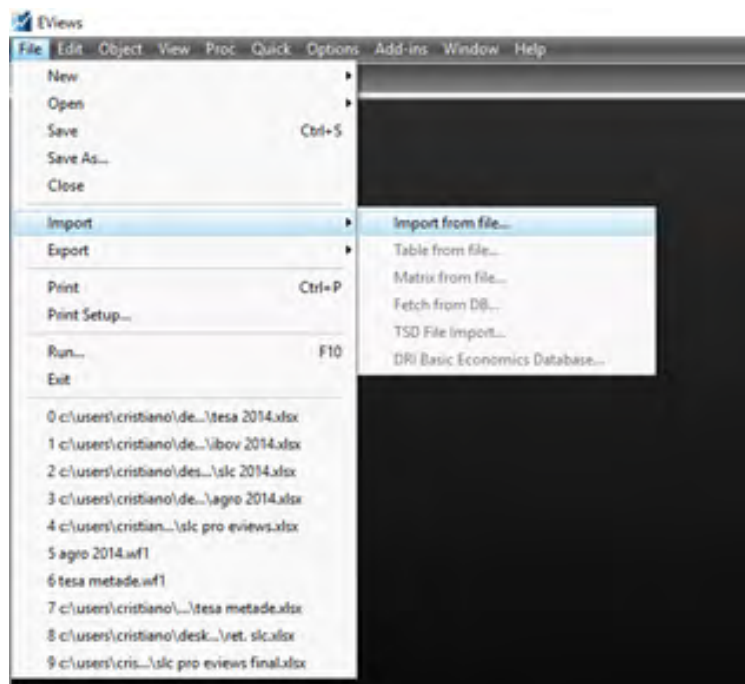
- R: Uma linguagem de programação e ambiente estatístico gratuito e de código aberto. Possui uma ampla comunidade de usuários e bibliotecas de pacotes especializados para análise de séries temporais.
- Python: Uma linguagem de programação popular, com bibliotecas poderosas, como Pandas, NumPy e Statsmodels, que podem ser usadas para análise de séries temporais.
- SAS: Um *software* estatístico amplamente utilizado em muitas áreas, incluindo análise de séries temporais.
- Stata: Outro *software* estatístico e econômico com recursos para análise de séries temporais e modelagem econométrica.

A escolha do *software* depende da preferência pessoal, do contexto de análise e das necessidades específicas do projeto. O EViews é uma excelente opção para análise de séries temporais, especialmente para aqueles que estão começando a se aventurar nesse campo ou que estão trabalhando em análises econômicas. Entretanto, outros *softwares* como R e Python também são bastante populares e amplamente utilizados na comunidade científica e acadêmica. Independentemente do *software* escolhido, o importante é que você se sinta confortável com as ferramentas disponíveis e que elas atendam às suas necessidades de análise.

Inicie o *Software* EViews e importe o arquivo em planilha eletrônica.

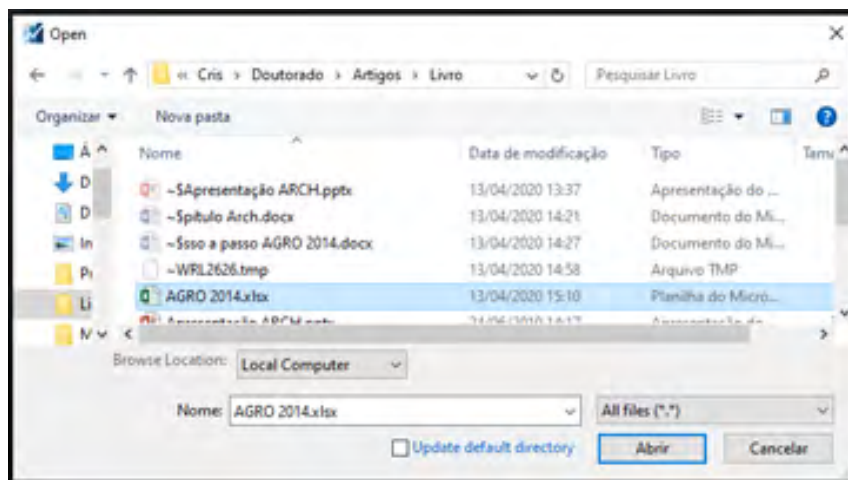
Deve-se clicar em “*File*”, “*Import*” e “*Import from file*” (Figura 6).

Figura 6 – Importando os dados para o *software*



Procure o arquivo em Excel e clique em abrir, como mostrado na Figura 7.

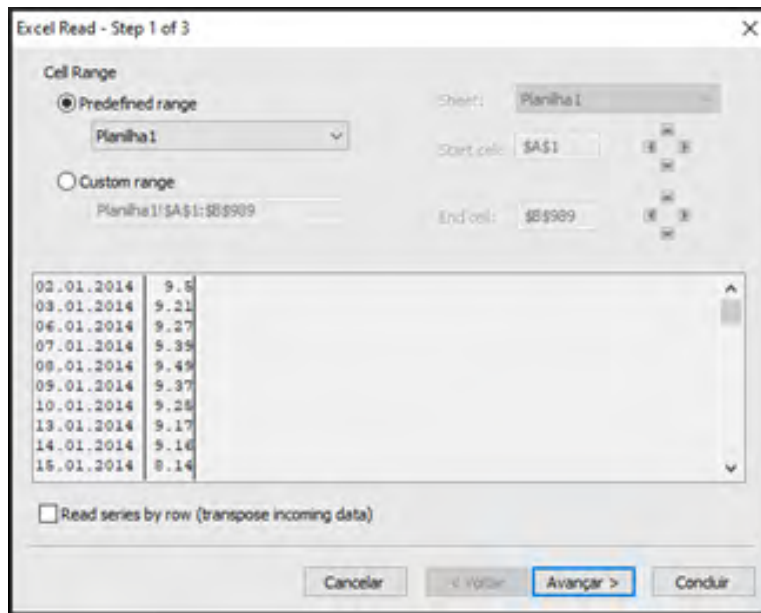
Figura 7 – Selecionando o arquivo de dados para importar para o *software*



Após selecionar o arquivo, clique em “Abrir”.

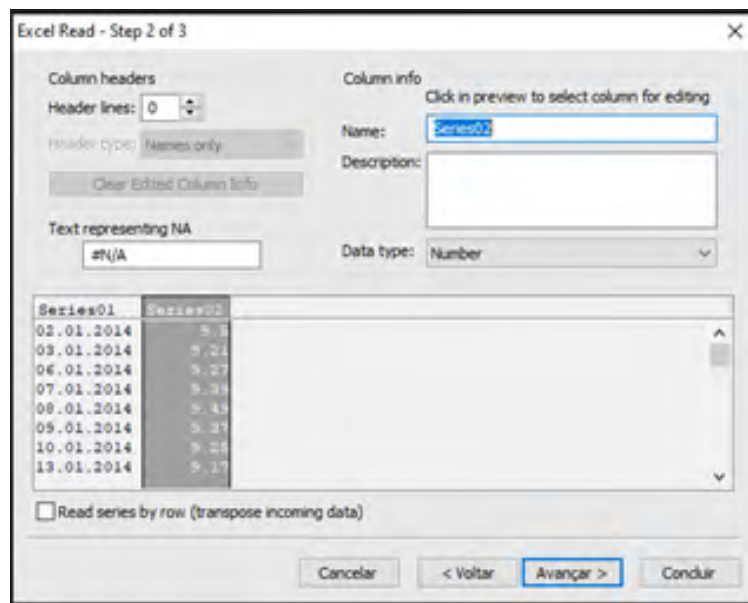
No *Software* EViews, irá aparecer uma janela igual a Figura 8, clique em avançar.

Figura 8 – Etapa 1 de 3 para a importação dos dados.



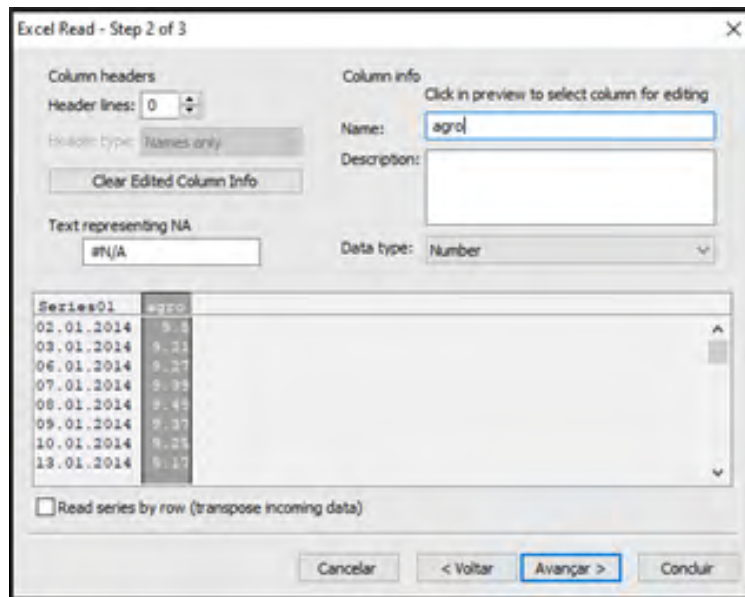
Seguidamente selecione a coluna com os dados que serão estudados, neste caso o preço das ações está representado na “Series02”, Figura 9.

Figura 9 – Etapa 2 de 3 para a importação dos dados.



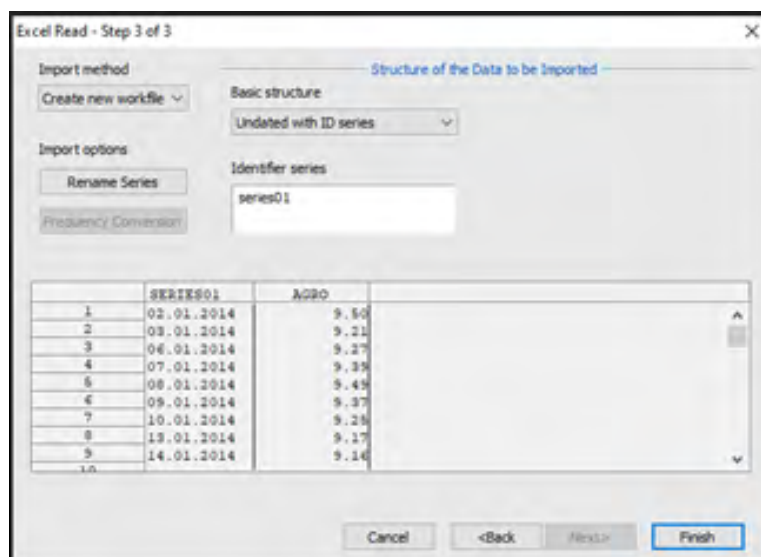
Para facilitar a análise, renomeia-se a série no campo “Name”, para um nome que o represente, neste caso, “agro”, e clique em avançar, Figura 10.

Figura 10 – Alteração do nome da série na etapa 2 de 3 para a importação dos dados

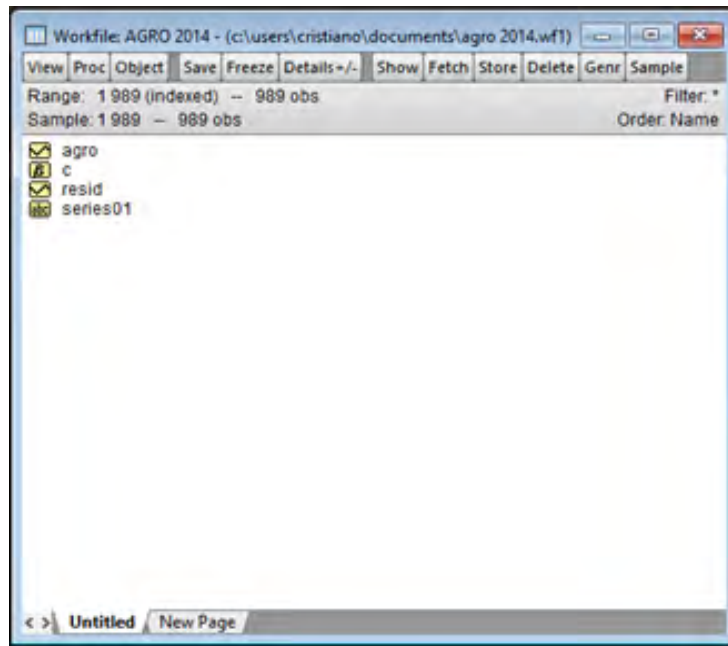


Em seguida, clique em “*Finish*” para finalizar a importação dos dados das planilhas de Excel para o *software*, Figura 11.

Figura 11 – Etapa 3 de 3 para a importação dos dados



Os dados importados no *software* estarão representados conforme a Figura 8.

Figura 12 – Representação dos dados na página inicial do *software*

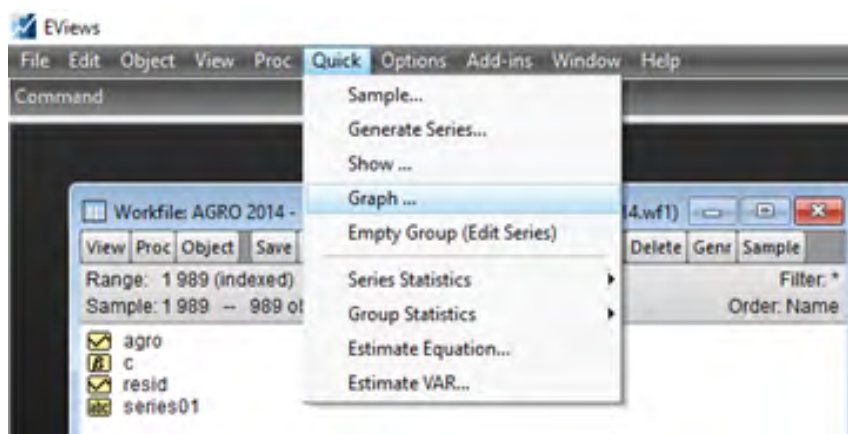
Com os dados necessários importados no *software*, pode-se iniciar as análises.

3.3 – Verificação da estacionariedade das séries temporais

A estacionariedade é uma condição necessária para a modelagem de séries temporais, garantindo que os parâmetros estimados sejam representativos ao longo de todo o período selecionado para análise. Inicialmente verifica-se os gráficos da série.

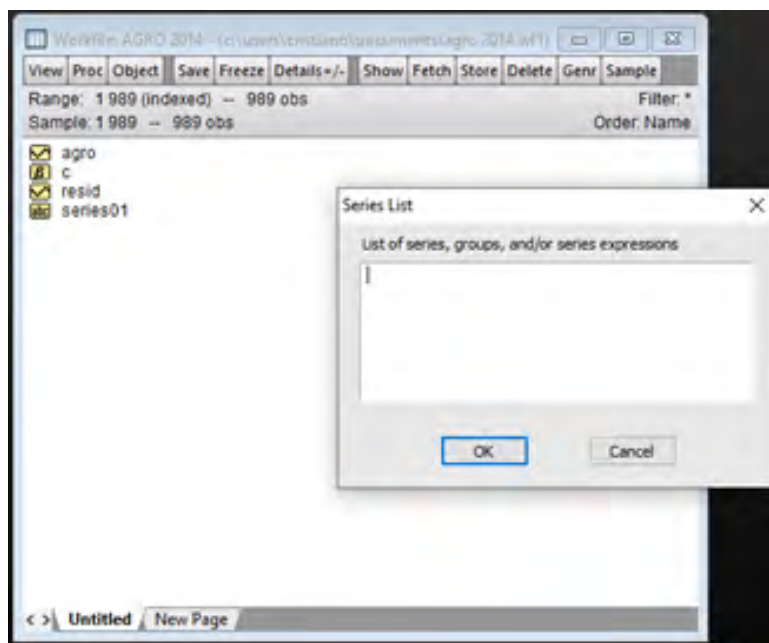
Clique em “Quick” seguindo por “Graph”, Figura 13.

Figura 13 – Selecionando a construção de gráficos



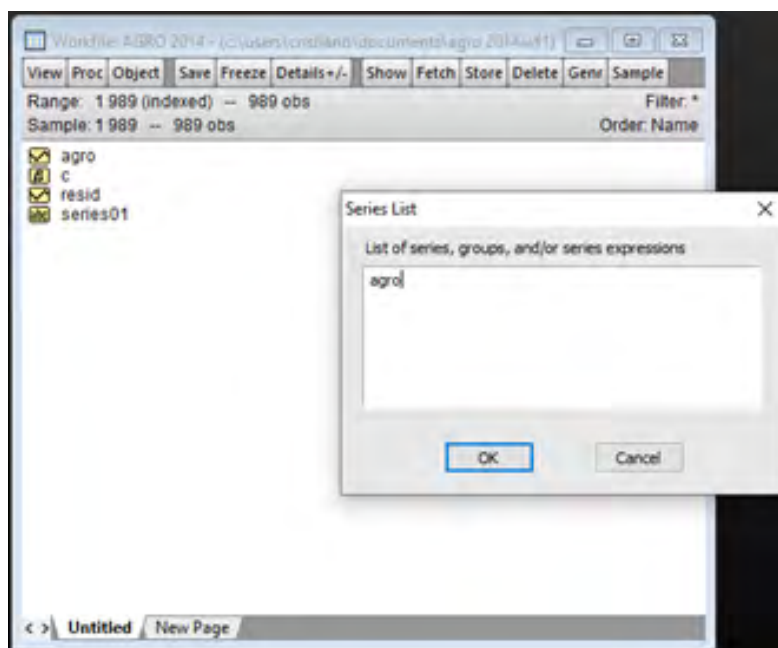
Abrirá uma janela para adicionar o nome da série que se pretende criar o gráfico, Figura 14.

Figura 14 – Local para inserir o nome da série geradora do gráfico



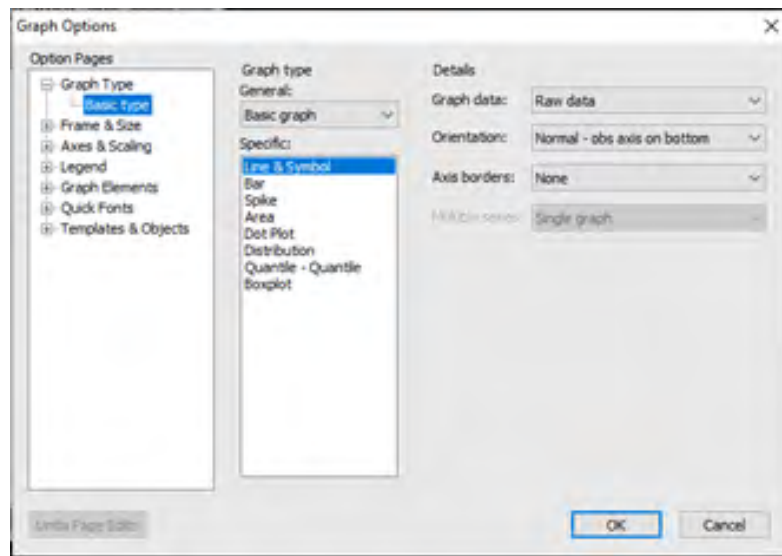
Preenche o campo indicado com a nome da variável em estudo “agro”.

Figura 15 – Campo preenchido com o nome da variável



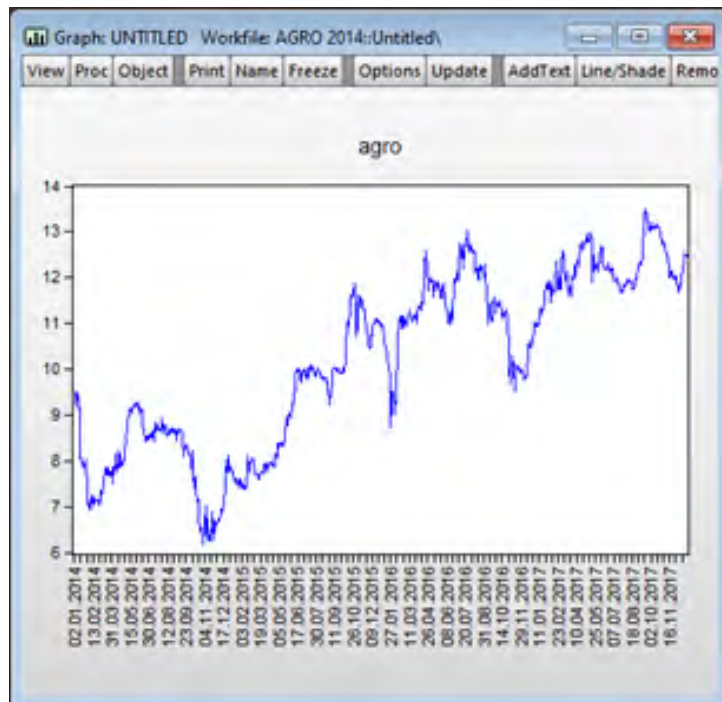
Clica em “OK”. Irá abrir outra janela, Figura 16.

Figura 16 – Selecionando o tipo de gráfico



Na Figura 12 é exposto que o *software* possibilita escolher o tipo de gráfico, neste caso, será utilizado o gráfico básico em linhas, então clica em “OK” e será gerado o gráfico, Figura 17.

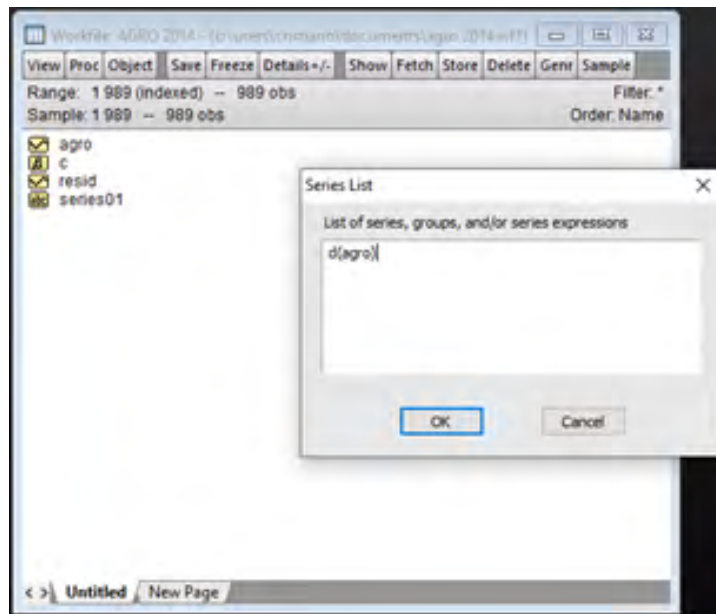
Figura 17 – Série temporal em nível



Visualmente na Figura 17, nota-se que a série em nível é não estacionária, pois há um crescimento ascendente da série ao longo do tempo e também se observa picos de variabilidade. Opta-se por aplicar uma diferença simples

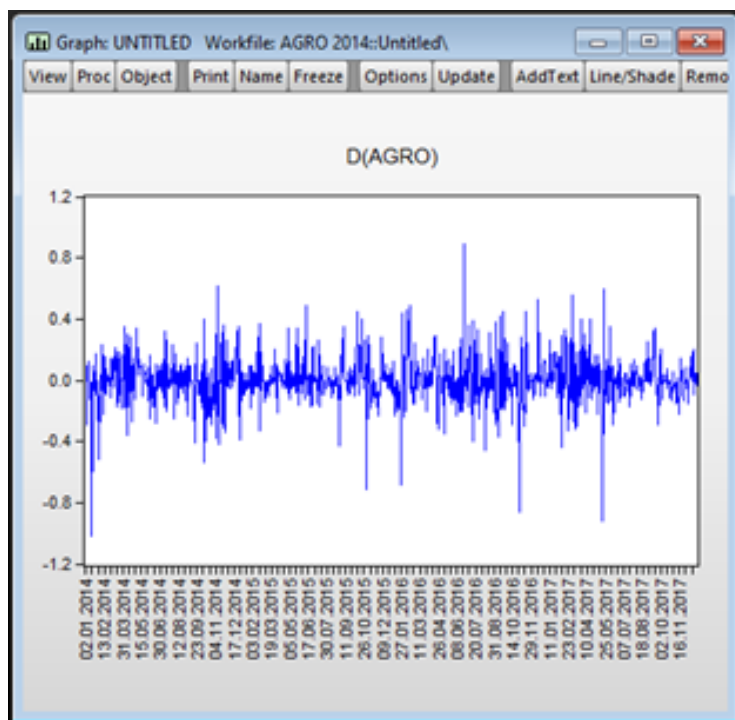
a série para torna-la estacionária, seguindo os mesmos passos, da Figura 9, Figura 10 e Figura 11, apenas inserindo um “d” antes do nome da série como ilustrado na Figura 18.

Figura 18 – Campo preenchido com o nome da variável com uma diferença



Clica em “OK” e será gerado o gráfico, Figura 19.

Figura 19 – Série temporal com uma diferença



Na Figura 19, visualiza-se a série com uma diferença que aparenta ser estacionária, para corroborar com essa afirmação devem ser realizados testes de Raiz Unitária: ADF, KPSS e PP. Mas, observa-se que a série apresenta alta variabilidade e esta alta variabilidade é um indicio de volatilidade.

- Testes de Raiz Unitária

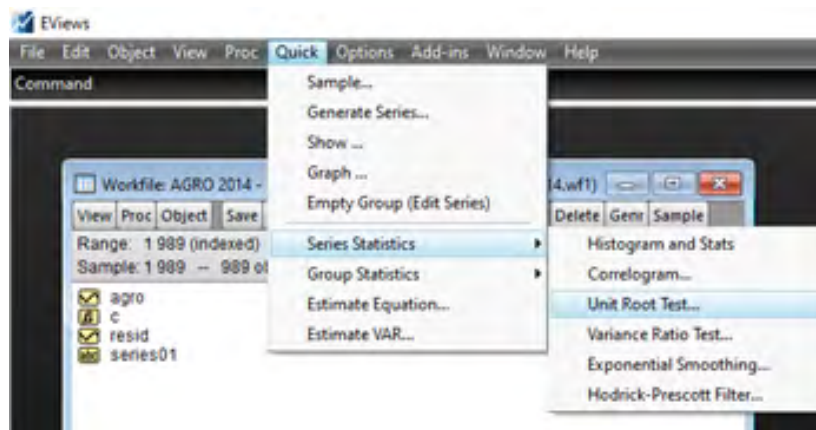
Initially, the time series are tested in relation to stationarity aiming to verify the presence of unit roots through the Augmented Dickey-Fuller (ADF) – (1979), Elliott-Lothenberg-Stock (ERS) – (1996) and Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS) – (1992) tests according to [9] and [10].

O primeiro teste a ser utilizado é *Augmented Dickey-Fuller*

Teste em Nível

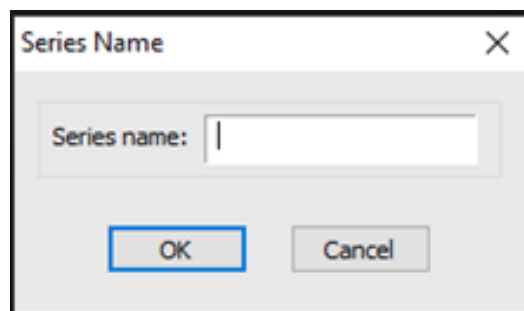
Para os desenvolver os testes clique em “*Quick*”, “*Series Statistics*” e “*Unit Root Test*”, Figura 20.

Figura 20 – Iniciando o teste de raiz unitária



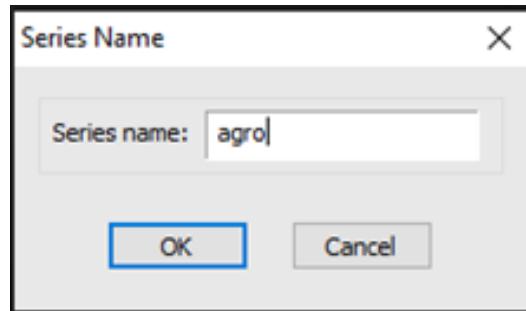
Irá abrir uma janela (Figura 21) para inserir o nome da variável.

Figura 21 – Janela para inserir variável



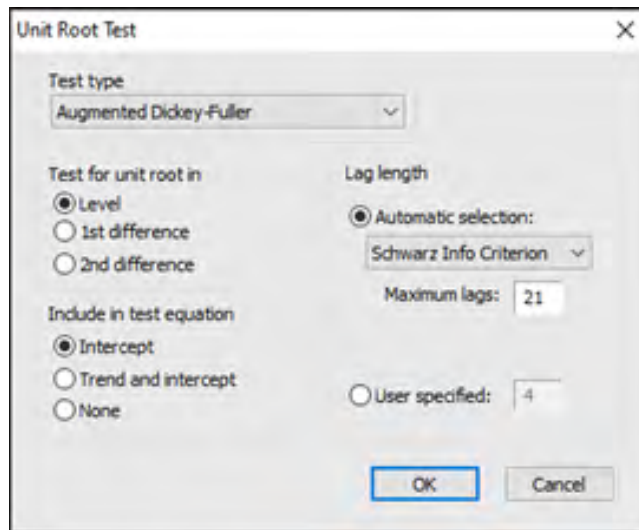
Neste caso, é inserida a variável agro, Figura 22.

Figura 22 – Janela com o nome da variável



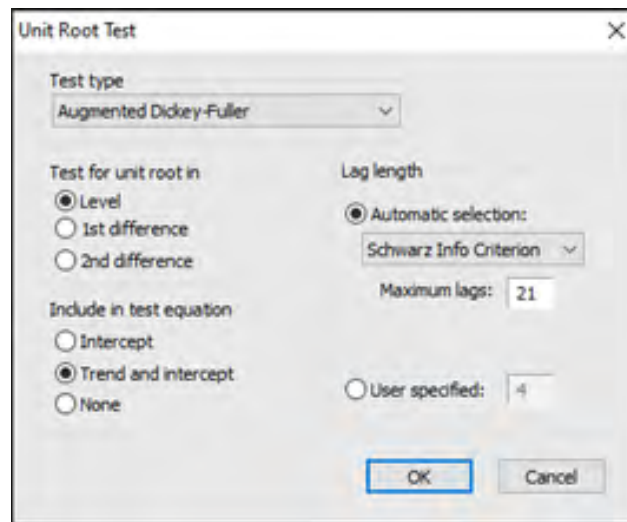
Clica-se em “OK”, irá abrir outra janela para selecionar os tipos de testes “*Test type*” e especificidades da série “*Include in test equation*”, se ela apresenta tendência e/ou intercepto, Figura 23.

Figura 23 – Teste de raiz unitária



Inicialmente vamos realizar o teste “*Augmented Dickey-Fuller*” em nível “*Level*” e como a série apresenta tendência, visualizada na Figura 13, “*Trend and intercept*”, Figura 24.

Figura 24 – Teste de raiz unitária ADF em nível



Clicar em “OK”.

Figura 25 – Resultados do Teste ADF em nível

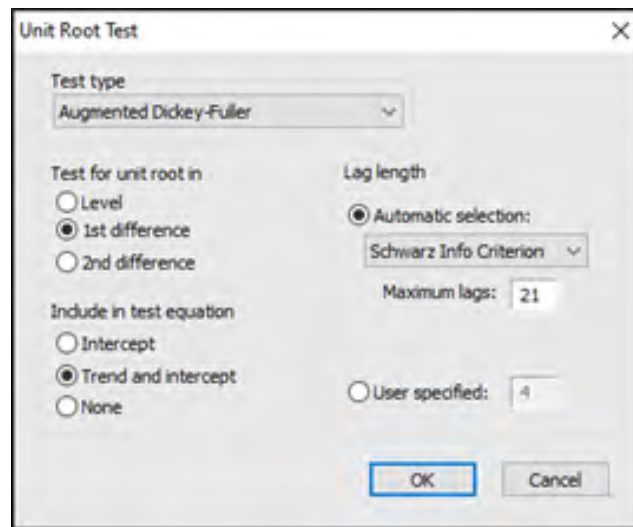
Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on AGRO		
Null Hypothesis: AGRO has a unit root		
Exogenous: Constant, Linear Trend		
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=21)		
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-3.227690	0.0796
Test critical values: 1% level	-3.967364	
5% level	-3.414368	
10% level	-3.129310	

Os resultados do teste, Figura 21, apresentam que o $t_{calc} = 3,227690$ é menor que o $t_{tab} = 3,414368$, comprovando a existência de não estacionariedade para a série. A probabilidade exata do teste é 0,0796, maior do que 5%, comprovando também que não é estacionária. Para corroborar esta decisão em relação a estacionariedade se realiza o teste com uma diferença.

Teste com uma diferença

Realiza-se os mesmos passos anteriores, Figura 16 e Figura 18, porém na janela de opções do teste, deve ser selecionada a opção de 1 diferença “1st difference”, Figura 22.

Figura 26 – Teste ADF com uma diferença



Clicar em “OK”.

Figura 27 – Resultados do Teste ADF com uma diferença

Augmented Dickey-Fuller Unit Root Test on D(AGRO)		
Null Hypothesis: D(AGRO) has a unit root		
Exogenous: Constant, Linear Trend		
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=21)		
	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-31.98285	0.0000
Test critical values: 1% level	-3.967374	
5% level	-3.414373	
10% level	-3.129313	

Os resultados do teste, Figura 27, apresentam que o $t_{calc} = 31.98285$ é maior que o $t_{tab} = 3,414373$, comprovando a existência de estacionariedade para a série com uma diferença. Além disso, a probabilidade é próxima de zero, menor do que 5%, mostrando ser estacionária.

Para facilitar o andamento do estudo, é interessante ir construindo uma tabela para a verificação de estacionariedade das séries, para cada teste realizado.

Tabela 7 – Testes de estacionariedade: ADF

	ADF		KPSS		PP	
	$t_{calculado}$		$t_{calculado}$		$t_{calculado}$	
Variável	Em nível	d = 1	Em nível	d = 1	Em nível	d = 1
AGRO	3,2276	31,9828				

$\alpha = 0,05$; ADF $t_{tabelado} = 3,4143$

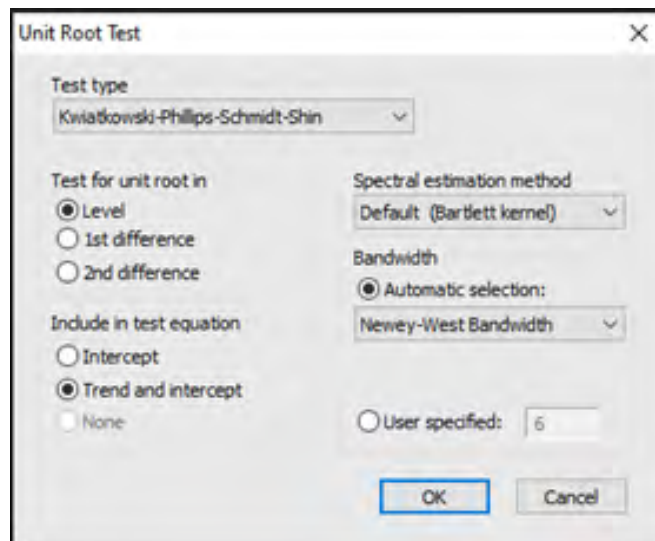
Fonte: Autor.

O segundo teste aplicado é o Teste Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin.

Em nível

Realiza-se os mesmos passos anteriores, Figura 16 e Figura 18, porém na janela de opções do teste, deve ser selecionada a opção “Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin” e no tipo de teste “*Test type*”, mantendo a opção em “*Level*” e “*Trend and intercept*”, como na Figura 28.

Figura 28 – Teste de raiz unitária KPSS em nível



Clicar em “OK”.

Figura 29 – Resultados do Teste KPSS em nível

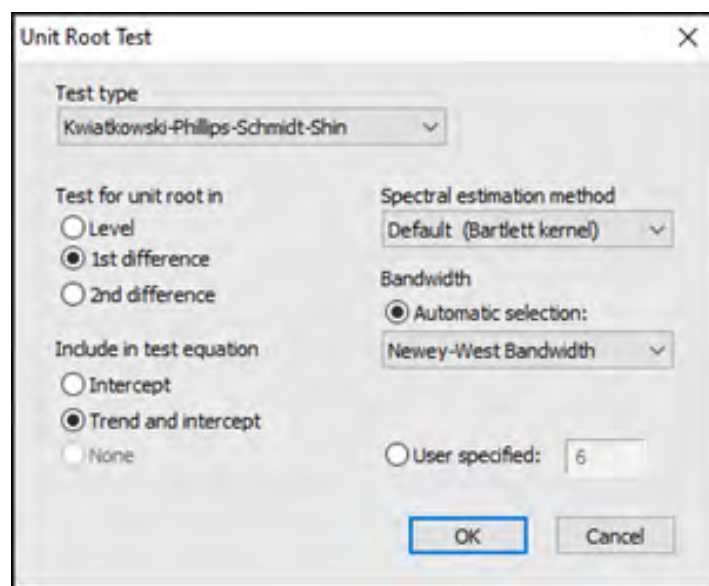
KPSS Unit Root Test on AGRO		
Null Hypothesis: AGRO is stationary		
Exogenous: Constant, Linear Trend		
Bandwidth: 24 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel		
		LM-Stat.
Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test statistic		0.222969
Asymptotic critical values*:	1% level	0.216000
	5% level	0.146000
	10% level	0.119000

Os resultados do teste, Figura 30, apresentam que o $t_{calc} = 0.222969$ é maior que o $t_{tab} = 0.146000$, comprovando a existência de não estacionariedade.

Teste com uma diferença

Realiza-se os mesmos passos anteriores, Figura 16 e Figura 18, porém na janela de opções do teste, deve ser selecionada a opção “Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin” para o tipo de teste “*Test type*”, a opção de 1 diferença “*1st difference*” e “*Trend and intercept*”, como na Figura 31.

Figura 30 – Teste de raiz unitária KPSS para uma diferença



Clicar em “OK”.

Figura 31 – Resultados do Teste KPSS com uma diferença

KPSS Unit Root Test on D(AGRO)		
Null Hypothesis: D(AGRO) is stationary		
Exogenous: Constant, Linear Trend		
Bandwidth: 4 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel		
		LM-Stat.
Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin test statistic		0.063490
Asymptotic critical values*:	1% level	0.216000
	5% level	0.146000
	10% level	0.119000

Os resultados do teste, Figura 27, apresentam que o $t_{calc} = 0.063490$ é menor que o $t_{tab} = 0.146000$, comprovando a existência de estacionariedade.

Após os resultados dos testes do KPSS adiciona-se os valores encontrados na Tabela 6.

TABELA 8 – Testes de estacionariedade: ADF e KPSS

	ADF		KPSS		PP	
	$t_{calculado}$		$t_{calculado}$		$t_{calculado}$	
Variável	Em nível	d = 1	Em nível	d = 1	Em nível	d = 1
AGRO	3,2276	31,9828	0,2229	0,0634		

$\alpha = 0,05$; ADF $t_{tabelado} = 3,4143$; KPSS $t_{tabelado} = 0,1460$

Fonte: Autor

O terceiro teste aplicado é o Teste Phillips Perron.

Em nível

Realiza-se os mesmos passos anteriores, Figura 16 e Figura 18, porém na janela de opções do teste, deve ser selecionada a opção “Phillips-Perron” e no tipo de teste “Test type”, mantendo a opção em “Level” e “Trend and intercept”, como na Figura 32.

Figura 32 – Teste de raiz unitária PP em nível

Clicar em “OK”.

Figura 33 – Resultados do Teste PP em nível

Phillips-Perron Unit Root Test on AGRO		
Null Hypothesis: AGRO has a unit root		
Exogenous: Constant, Linear Trend		
Bandwidth: 6 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel		
	Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic	-3.298404	0.0671
Test critical values: 1% level	-3.967364	
5% level	-3.414368	
10% level	-3.129310	

Os resultados do teste, Figura 29, apresentam que o $t_{calc} = 3,298404$ é menor que o $t_{tab} = 3,414368$ comprovando a existência de não estacionariedade para a série. A probabilidade é 0,0671, maior do que 5%, comprovando também que não é estacionária.

Teste com uma diferença

Realiza-se os mesmos passos das Figura 16 e Figura 18, porém na janela de opções do teste, deve ser selecionada a opção “Phillips-Perron” para o tipo de teste “*Test type*”, a opção de 1 diferença “*1st difference*” e “*Trend and intercept*”, como na Figura 30.

Figura 34 – Teste de raiz unitária PP com uma diferença

Clicar em “OK”.

Figura 35 – Resultados do Teste PP com uma diferença

Phillips-Perron Unit Root Test on D(AGRO)		
Null Hypothesis: D(AGRO) has a unit root		
Exogenous: Constant, Linear Trend		
Bandwidth: 4 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel		
	Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic	-31.97694	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.967374	
5% level	-3.414373	
10% level	-3.129313	

Os resultados do teste, Figura 31, apresentam que o $t_{calc} = 31.97694$ é maior que o $t_{tab} = 3,414373$ comprovando a existência de estacionariedade para a série com uma diferença. A probabilidade é próxima de zero, menor do que 5%, demonstrando ser estacionária.

Após os resultados dos testes do PP adiciona-se os valores encontrados na Tabela 9.

Tabela 9 – Testes de estacionariedade: ADF, KPSS e PP

	ADF		KPSS		PP	
	$t_{calculado}$		$t_{calculado}$		$t_{calculado}$	
Variável	Em nível	d = 1	Em nível	d = 1	Em nível	d = 1
AGRO	3,2276	31,9828	0,2229	0,0634	3,2984	31,9769

$\alpha = 0,05$; ADF $t_{tabelado} = 3,4143$; KPSS $t_{tabelado} = 0,1460$; PP $t_{tabelado} = 3,4143$

Fonte: Autor.

Por meio dos testes ADF, KPSS e PP verifica-se que a variável “agro” não apresenta estacionariedade em nível, apenas com uma diferença.

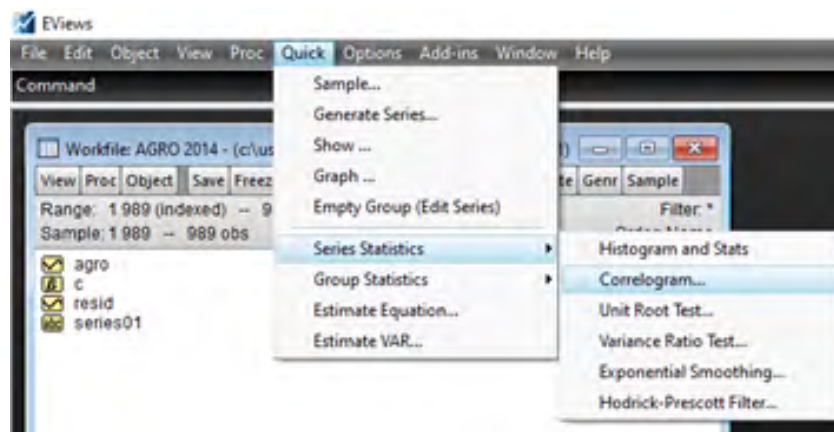
3.4 – Verificação das Funções de autocorrelações (FAC) e das funções de autocorrelações parciais (FACP)

A testagem da autocorrelação é importante, pois é a partir dela que vamos decidir se precisamos fazer um pré-tratamento nos dados para eliminar a autocorrelação.

Primeiro verificaremos as Funções em Nível.

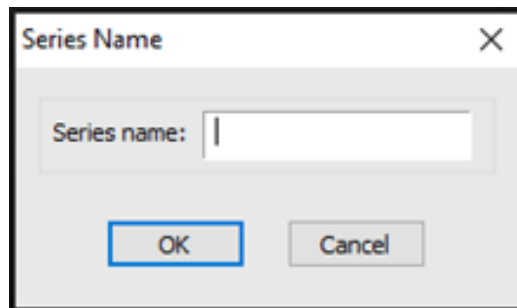
Clicar em “Quick” selecionar “Series Statistics” e depois “Correlogram”, como ilustrado na Figura 36.

Figura 36 – Iniciando a FAC e FACP



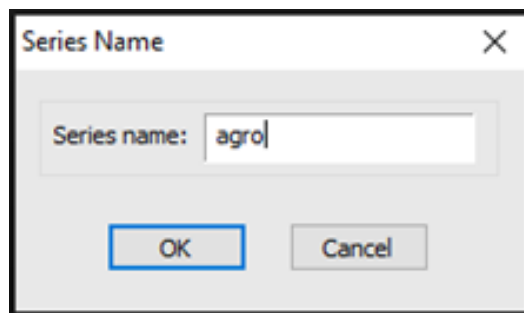
Ir  abrir uma janela (Figura 37) para inserir o nome da variável.

Figura 37 – Janela para inserir o nome variável



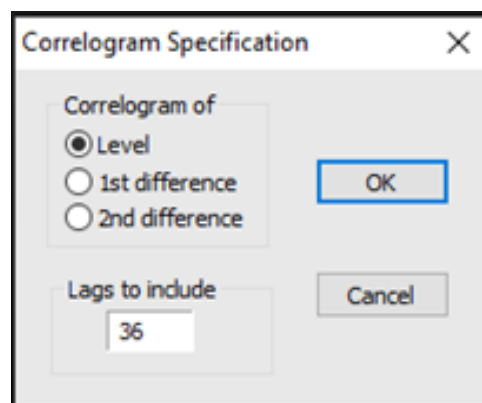
Neste caso, é inserida a variável agro, Figura 38.

Figura 38 – Janela com o nome da variável inserida



Clicar em “OK”. Ir  abrir uma nova janela para especificações do correlograma, neste caso como será verificado em nível, mant m a opção “Level” selecionada, Figura 39.

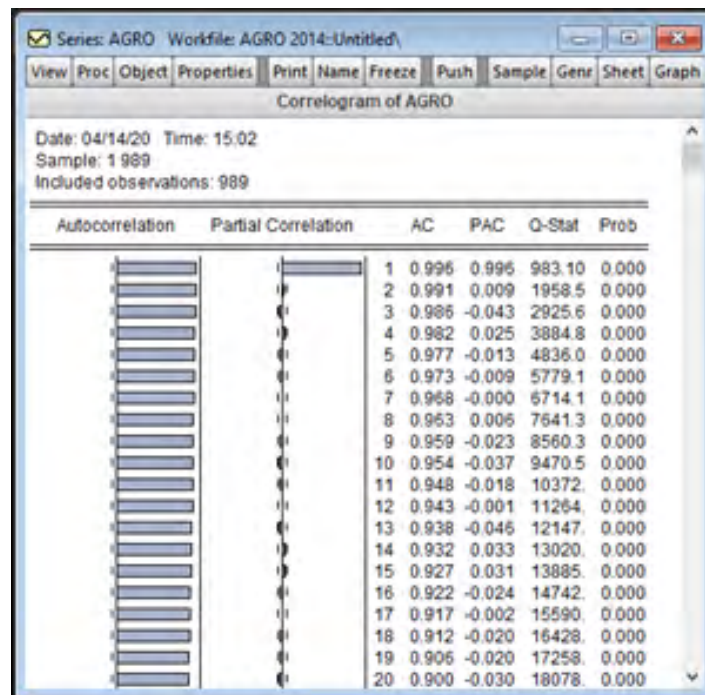
Figura 39 – Especificações do correlograma em nível



Clicar em “OK”.

Será gerado os resultados, Figura 40.

Figura 40 – Resultado da FAC e FACP em nível

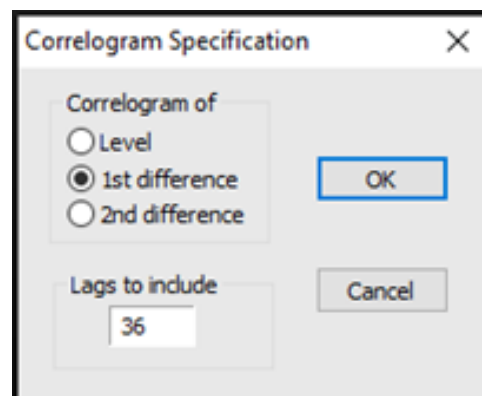


Na Figura 40, pode ser observado que o correlograma possui um demorado decaimento da FAC na série em nível, antes do instante de tempo $t = 12$, comprovando a não existência de estacionariedade. Na FACP é possível identificar que o primeiro *lag* é significativo.

Verificação da FAC e FACP com uma diferença

Repete-se o processo da Figura 32 e Figura 34, quando abrir a janela com as especificações do correlograma, deve ser selecionada a opção com uma diferença “*1st difference*”, como na Figura 41.

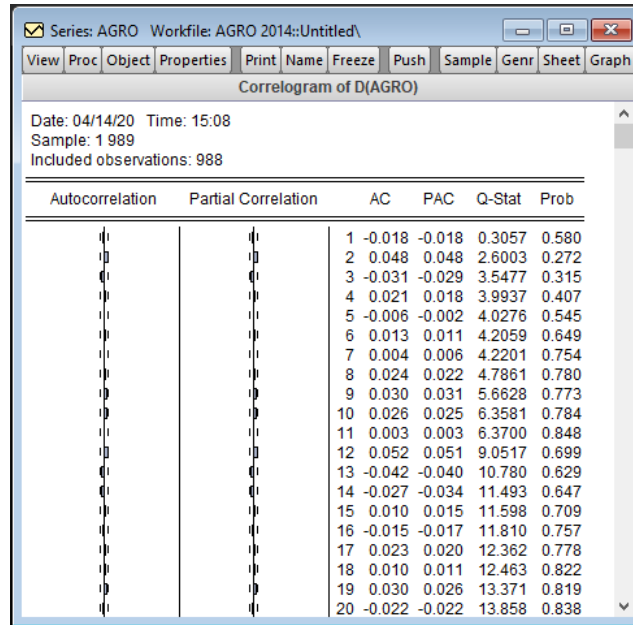
Figura 41 – Especificações do correlograma para uma diferença



Clicar em “OK”.

Será gerado os resultados, Figura 42.

Figura 42 – Resultado da FAC e FACP com uma diferença

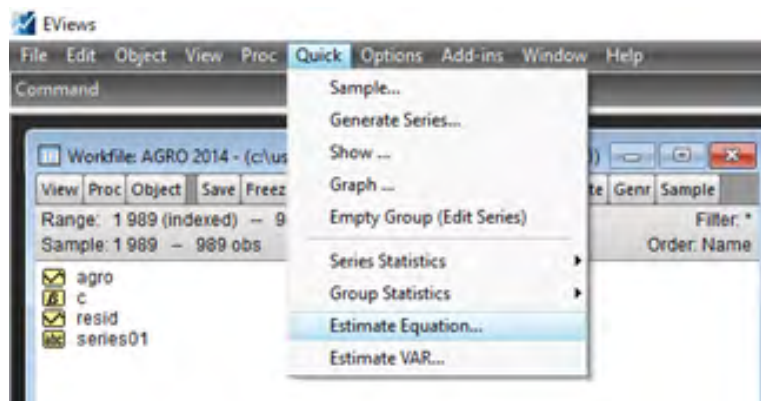


Nos correlogramas com uma diferença, da Figura 38, não é possível perceber um provável modelo ARIMA, pois não há um considerável rompimento nos *lags*.

3.5 – Estimações dos modelos concorrentes ARIMA

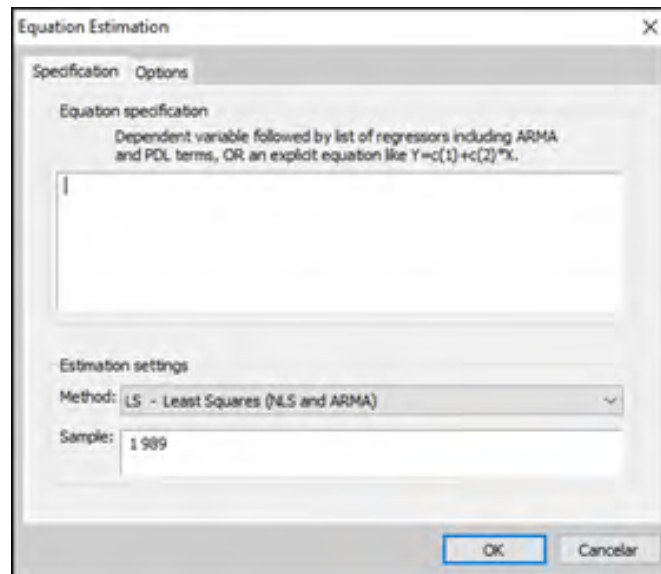
Para estimar um modelo ARIMA clica-se em “Quick” e selecionar a opção “Estimate Equation”, Figura 43.

Figura 43 – Iniciando o modelo ARIMA



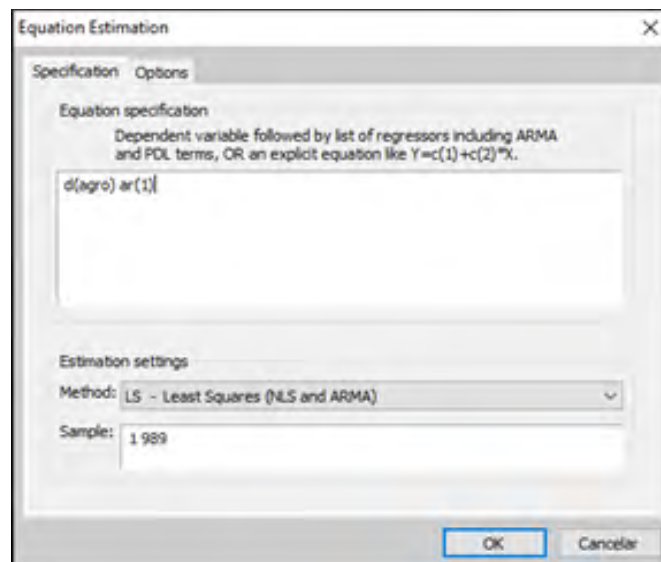
Ir  abrir uma janela para descrever o modelo desejado, Figura 44.

Figura 44 – Janela para descrever o modelo



Descrever a equação no campo específico, neste caso o “d” para indicar que possui uma diferença o “(agro)” para o nome da variável. O número de diferenças foi identificado por meio dos testes ADF, KPSS e PP. Por meio das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial, a primeira com decaimento e a segunda com apenas 1 *lag* significativo, é indicativo de um componente autorregressivo “ar”, logo a representação para as especificações do modelo são: “d(agro) ar(1)”, como a série foi diferenciada, não há a necessidade de se utilizar a constante, Figura 45.

Figura 45 – Equação estimada para ARIMA



Clicar em “OK”

O resultado é apresentado na Figura 46.

Figura 46 – Resultado do modelo proposto

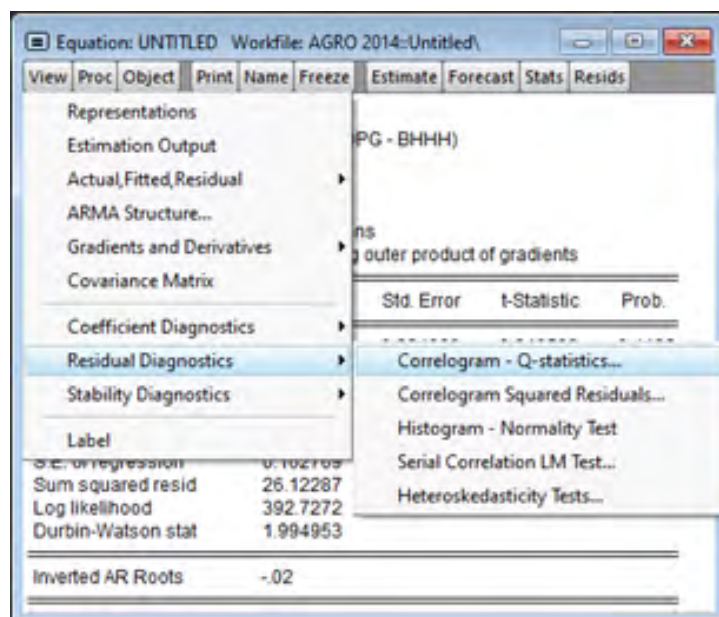
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(1)	-0.017215	0.021030	-0.818589	0.4132
SIGMASQ	0.026440	0.000618	42.80741	0.0000

R-squared	-0.000057	Mean dependent var	0.003057
Adjusted R-squared	-0.001072	S.D. dependent var	0.162682
S.E. of regression	0.162769	Akaike info criterion	-0.790946
Sum squared resid	26.12287	Schwarz criterion	-0.781035
Log likelihood	392.7272	Hannan-Quinn criter.	-0.787177
Durbin-Watson stat	1.994953		

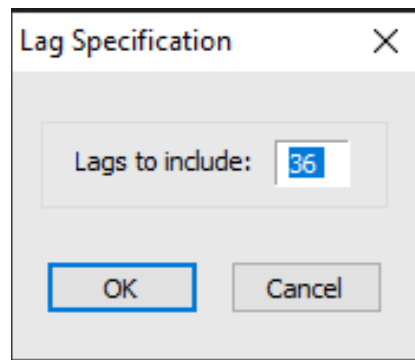
Inverted AR Roots	-.02
-------------------	------

É necessário verificar se o modelo apresenta características de ruído branco, na mesma janela dos resultados, clicar em “View” selecionar a opção “Residual Diagnostics” e clicar em “Correlogram - Q-statistics...”, como na Figura 47.

Figura 47 – Verificação da condição de ruído branco



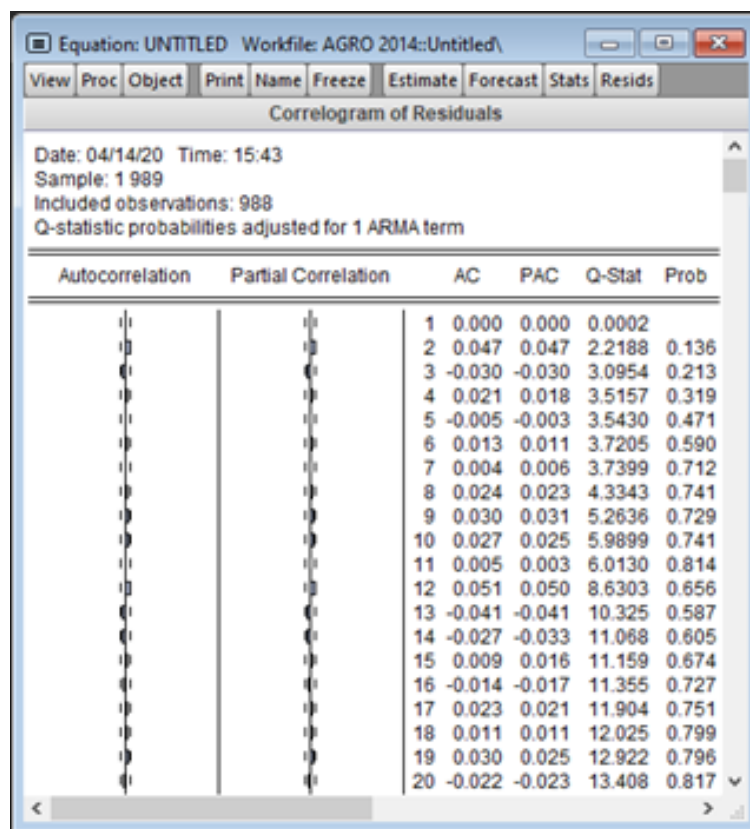
Irá abrir uma janela, Figura 48.

Figura 48 – Quantidade específicas de *lags*

Clicar em “OK”

O resultado para a verificação da condição de ruído branco é dado na Figura 49.

Figura 49 – Resultado da verificação de ruído branco



Na Figura 49, é analisado a quantidade de *lags* dentro do intervalo de confiança, para ser considerado ruído branco, 95% dos *lags* devem estar dentro desse intervalo, neste caso para o modelo “d(agro) ar(1)” pode se dizer que 95% dos *lags* estão dentro do intervalo, tornando-o Ruído Branco.

Deve-se criar vários modelos para a série de dados, e colocar seus resultados em uma tabela (Tabela 4) para posteriormente compará-los e escolher o que apresentar o menor AIC e BIC, neste caso utiliza-se o BIC, pelo fato de ser uma série histórica com muitos períodos, total de 989.

Tabela 10 – Modelos concorrentes ARIMA, inicial

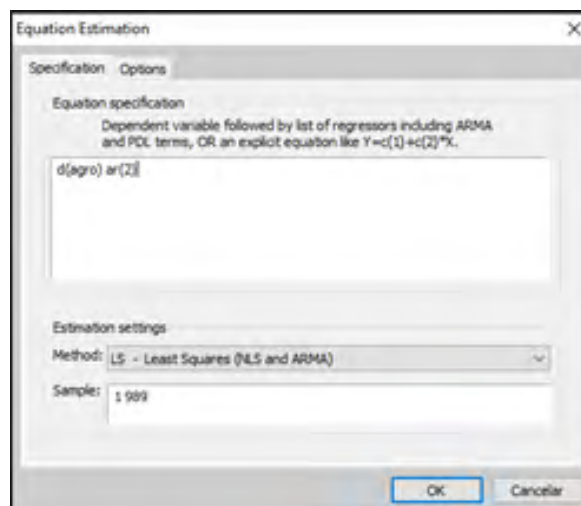
Modelo	Equação no EViews	Parâmetro	<i>p</i> -valor	AIC	BIC	Ruído Branco
ARIMA (1,1,0)	d(agro) ar(1)	$\phi_1 = 0.017215$	0.4132	-0,790946	-0,781035	Sim

Fonte: Autor

Os resultados do modelo devem estar dentro dos parâmetros, *p*-valor < 0,05 e características de ruído branco. No primeiro modelo testado, o *p*-valor é = 0,4132, maior do que o indicado nos parâmetros, portanto o mesmo deve ser descartado da comparação com os demais.

Para testar outro modelo, segue-se os mesmos passos das Figura 39, porém quando for descrever a equação, deve-se utilizar outros valores para os *lags*, podendo colocar mais de um, além poder inserir as diversas formas de autorregressão e médias móveis. Na Figura 50 é estimada a equação “d(agro) ar(2)”.

Figura 50 – Segunda equação estimada para o modelo ARIMA



Clicar em “OK”.

O resultado é apresentado na Figura 51.

Figura 51 – Resultado do segundo modelo proposto

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
AR(2)	0.048528	0.027371	1.772933	0.0765
SIGMASQ	0.026386	0.000617	42.76086	0.0000

R-squared	0.002004	Mean dependent var	0.003057
Adjusted R-squared	0.000992	S.D. dependent var	0.162682
S.E. of regression	0.162601	Akaike info criterion	-0.793004
Sum squared resid	26.06903	Schwarz criterion	-0.783094
Log likelihood	393.7441	Hannan-Quinn criter.	-0.789235
Durbin-Watson stat	2.026564		

Inverted AR Roots	.22	-.22
-------------------	-----	------

Deve-se novamente verificar a condição de ruído branco para esse modelo, como mostrado na Figura 47, Figura 48 e Figura 49. E adicionar os resultados (Figura 49) na tabela de modelos concorrentes, como a Tabela 11.

Esse processo de testar modelos deve ser repetido várias vezes, Figura 39 até Figura 45, e todos os resultados dispostos em uma tabela, esses modelos dispostos em uma tabela para efeito de comparação, são denominados de modelos concorrentes e são escolhidos aqueles que apresentarem melhores estatísticas de ajustes, como na Tabela 5. Isso é necessário para encontrar o melhor modelo que represente a série, ou seja, o modelo que represente a série histórica com as melhores estatísticas de ajustes e parcimonioso, isto é, com menor quantidade de parâmetros possíveis.

Na tabela 5, estão ilustrados vários modelos com seus respectivos resultados, alguns não estão dentro dos parâmetros indicados, e não podem ser selecionados como o melhor modelo. Foram incluídas as equações inseridas no *software* EViews no momento de gerar o modelo, para facilitar a visualização de como ela deve ser descrita para cada modelo específico.

Tabela 11 – Modelos concorrentes da classe geral ARFIMA

Modelo	Equação no EViews	Parâmetros	<i>p</i> -valor	AIC	BIC	Ruído Branco
ARIMA (1,1,0)	d(agro) ar(1)	$\phi_1 = 0,017215$	0,4132	-0,790946	-0,781035	Sim
ARIMA (1,1,0)	d(agro) ar(2)	$\phi_2 = 0,048528$	0,0765	-0,793004	-0,783094	Sim
ARIMA (2,1,0)	d(agro) ar(1) ar(2)	$\phi_1 = -0,016417$ $\phi_2 = 0,048257$	0,4343 0,0794	-0,791250	-0,776384	Sim
ARIMA (0,1,1)	d(agro) ma(1)	$\theta_1 = -0,015714$	0,4552	-0,790920	-0,781010	Sim
ARIMA (0,1,1)	d(agro) ma(2)	$\theta_2 = 0,046709$	0,0899	-0,792915	-0,783004	Sim
ARIMA (0,1,2)	d(agro) ma(1) ma(2)	$\theta_1 = -0,013831$ $\theta_2 = 0,045942$	0,5079 0,0947	-0,791081	-0,776215	Sim
ARIMA (1,1,1)	d(agro) ar(1) ma(1)	$\phi_1 = -0,829668$ $\theta_1 = 0,798578$	0,0000 0,0000	-0,791709	-0,776844	Sim
ARIMA (1,1,1)	d(agro) ar(2) ma(2)	$\phi_2 = 0,724287$ $\theta_2 = -0,682645$	0,0024 0,0067	-0,792245	-0,777379	Sim
ARFIMA (1,d,0)	agro ar(1) d	d= 0,003043 $\phi_1 = 0,999885$	0,8697 0,0000	-0,780165	-0,765311	Sim
ARFIMA (0,d,1)	agro ma(1) d	d= 0,499897 $\theta_1 = 0,505295$	0,0000 0,0000	-0,312643	-0,297789	Não
ARFIMA (2,d,0)	agro ar(1) ar(2) d	d= 0,039378 $\phi_1 = 0,942895$ $\phi_2 = 0,056902$	0,0386 0,0000 0,0000	-0,779320	-0,759515	Sim
ARFIMA (1,d,1)	agro ar(1) ma(1) d	d= 0,036532 $\phi_1 = 0,999816$ $\theta_1 = -0,051243$	0,3071 0,0000 0,2077	-0,779153	-0,759348	Sim

Fonte: Autor

De todos os modelos comparados, o que apresentou o menor BIC foi o ARIMA (1,1,1) “d(agro) ar(2) ma(2)”. O qual será utilizado para remover a autocorrelação da série de preço de ações, e seus resíduos utilizados para estimar um modelo com volatilidade.

4 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente livro apresentou os conceitos e o passo a passo para a modelagem dos modelos, discutiu-se os pressupostos para a utilização dos modelos da classe geral ARIMA.

A exemplificação do passo a passo dos modelos lineares no *software* EViews objetivou ilustrar para o leitor a compreensão do uso da modelagem. Na exemplificação foi utilizada uma série financeira e em geral series financeiras são não estacionárias e carecem inicialmente tornar-se a série estacionária e verificar a condição de autocorrelação que a série apresenta e posteriormente aplicar os filtros dos modelos ARIMA.

Os modelos propostos por Box-Jenkins em 1976, continuam desempenhando um papel muito importante na pesquisa, em diversas áreas do conhecimento. Com o passar do tempo novos modelos foram derivados dos modelos ARIMA que estão voltados para a análise do comportamento do nível da série, mas quando o interesse é avaliar a volatilidade, isto é, a variabilidade da série, uma nova família de modelos é utilizada, os modelos de heteroscedasticidade – Autoregressive Conditional Heteroskedasticity - ARCH.

ANEXO A: Dados utilizados na aplicação dos modelos heterocedasticos

Data	Preço		Data	Preço		Data	Preço
02.01.2014	9,5		05.05.2015	8,39		31.08.2016	12,07
03.01.2014	9,21		06.05.2015	8,34		01.09.2016	11,91
06.01.2014	9,27		07.05.2015	8,39		02.09.2016	12,29
07.01.2014	9,39		08.05.2015	8,4		05.09.2016	12
08.01.2014	9,49		11.05.2015	8,36		06.09.2016	11,75
09.01.2014	9,37		12.05.2015	8,36		08.09.2016	11,55
10.01.2014	9,25		13.05.2015	8,35		09.09.2016	11,38
13.01.2014	9,17		14.05.2015	8,32		12.09.2016	11,01
14.01.2014	9,16		15.05.2015	8,44		13.09.2016	11,01
15.01.2014	8,14		18.05.2015	8,67		14.09.2016	11,43
16.01.2014	7,96		19.05.2015	8,59		15.09.2016	11,25
17.01.2014	8,05		20.05.2015	8,93		16.09.2016	11,06
20.01.2014	7,86		21.05.2015	8,94		19.09.2016	11,13
21.01.2014	7,91		22.05.2015	8,78		20.09.2016	11,05
22.01.2014	7,96		25.05.2015	8,99		21.09.2016	11,5
23.01.2014	7,87		26.05.2015	8,99		22.09.2016	11,33
24.01.2014	7,87		27.05.2015	8,99		23.09.2016	11,6
27.01.2014	8,04		28.05.2015	9,02		26.09.2016	11,41
28.01.2014	7,78		29.05.2015	8,94		27.09.2016	11,38
29.01.2014	7,78		01.06.2015	9		28.09.2016	11,25
30.01.2014	7,59		02.06.2015	9,15		29.09.2016	11,24
31.01.2014	7,07		03.06.2015	9,14		30.09.2016	11,48
03.02.2014	7,03		05.06.2015	9,12		03.10.2016	11,46
04.02.2014	7,06		08.06.2015	9,38		04.10.2016	11,4
05.02.2014	6,93		09.06.2015	9,26		05.10.2016	11,41
06.02.2014	6,93		10.06.2015	9,75		06.10.2016	11,35
07.02.2014	7,16		11.06.2015	9,91		07.10.2016	11,41
10.02.2014	7,08		12.06.2015	10,01		10.10.2016	11,48
11.02.2014	7,24		15.06.2015	9,92		11.10.2016	11,19
12.02.2014	7,02		16.06.2015	9,93		13.10.2016	11,17
13.02.2014	7,05		17.06.2015	9,97		14.10.2016	11,12
14.02.2014	7,2		18.06.2015	10,01		17.10.2016	11,1
17.02.2014	7,11		19.06.2015	10		18.10.2016	11,2
18.02.2014	7,07		22.06.2015	9,83		19.10.2016	11,16
19.02.2014	7,14		23.06.2015	9,7		20.10.2016	11,25

20.02.2014	7,15		24.06.2015	9,91		21.10.2016	11,28
21.02.2014	7,15		25.06.2015	9,75		24.10.2016	11,25
24.02.2014	7,16		26.06.2015	9,97		25.10.2016	11,15
25.02.2014	7,13		29.06.2015	9,96		26.10.2016	11,15
26.02.2014	7,13		30.06.2015	9,97		27.10.2016	11,2
27.02.2014	7,02		01.07.2015	9,97		28.10.2016	10,34
28.02.2014	7,16		02.07.2015	9,99		31.10.2016	9,96
05.03.2014	7,29		03.07.2015	9,99		01.11.2016	9,75
06.03.2014	7,33		06.07.2015	9,84		03.11.2016	9,67
07.03.2014	7,29		07.07.2015	9,82		04.11.2016	9,95
10.03.2014	7,33		08.07.2015	9,76		07.11.2016	10,1
11.03.2014	7,42		10.07.2015	10,02		08.11.2016	10,29
12.03.2014	7,63		13.07.2015	9,85		09.11.2016	10,1
13.03.2014	7,69		14.07.2015	10,01		10.11.2016	9,94
14.03.2014	7,87		15.07.2015	10,06		11.11.2016	9,64
17.03.2014	7,86		16.07.2015	9,97		14.11.2016	9,5
18.03.2014	7,69		17.07.2015	10		16.11.2016	9,95
19.03.2014	7,83		20.07.2015	10,02		17.11.2016	10
20.03.2014	7,69		21.07.2015	10,11		18.11.2016	10,11
21.03.2014	7,87		22.07.2015	10,02		21.11.2016	10,07
24.03.2014	7,87		23.07.2015	9,97		22.11.2016	10
25.03.2014	7,69		24.07.2015	9,93		23.11.2016	10,03
26.03.2014	7,68		27.07.2015	9,88		24.11.2016	10
27.03.2014	7,67		28.07.2015	9,84		25.11.2016	9,95
28.03.2014	7,69		29.07.2015	9,87		28.11.2016	9,95
31.03.2014	7,85		30.07.2015	9,95		29.11.2016	9,95
01.04.2014	7,69		31.07.2015	10,02		30.11.2016	9,99
02.04.2014	7,51		03.08.2015	10		01.12.2016	9,98
03.04.2014	7,86		04.08.2015	9,97		02.12.2016	9,97
04.04.2014	7,69		05.08.2015	9,96		05.12.2016	9,85
07.04.2014	7,92		06.08.2015	9,93		06.12.2016	9,78
08.04.2014	7,84		07.08.2015	9,95		07.12.2016	9,8
09.04.2014	8,14		10.08.2015	9,84		08.12.2016	9,84
10.04.2014	7,78		11.08.2015	9,84		09.12.2016	9,86
11.04.2014	7,78		12.08.2015	9,84		12.12.2016	9,85
14.04.2014	7,93		13.08.2015	9,76		13.12.2016	9,87

15.04.2014	8,21		14.08.2015	9,76		14.12.2016	10,4
16.04.2014	8,14		17.08.2015	9,84		15.12.2016	10,51
17.04.2014	8,14		18.08.2015	9,82		16.12.2016	10,6
22.04.2014	7,87		19.08.2015	9,79		19.12.2016	10,5
23.04.2014	7,96		20.08.2015	9,79		20.12.2016	10,48
24.04.2014	7,9		21.08.2015	9,82		21.12.2016	10,5
25.04.2014	8,04		24.08.2015	9,7		22.12.2016	10,49
28.04.2014	7,92		25.08.2015	9,7		23.12.2016	10,56
29.04.2014	7,96		26.08.2015	9,65		26.12.2016	10,69
30.04.2014	8,01		27.08.2015	9,22		27.12.2016	10,82
02.05.2014	8,16		28.08.2015	9,38		28.12.2016	10,93
05.05.2014	8,5		31.08.2015	9,37		29.12.2016	11,05
06.05.2014	8,6		01.09.2015	9,38		02.01.2017	10,95
07.05.2014	8,63		02.09.2015	9,45		03.01.2017	10,95
08.05.2014	8,8		03.09.2015	9,65		04.01.2017	10,95
09.05.2014	8,91		04.09.2015	10		05.01.2017	10,96
12.05.2014	9,01		08.09.2015	10,02		06.01.2017	11
13.05.2014	9,07		09.09.2015	10,02		09.01.2017	10,96
14.05.2014	9,16		10.09.2015	10,02		10.01.2017	10,97
15.05.2014	9,13		11.09.2015	10,02		11.01.2017	11,23
16.05.2014	9,03		14.09.2015	10,02		12.01.2017	11,33
19.05.2014	9,03		15.09.2015	9,96		13.01.2017	11,29
20.05.2014	9,08		16.09.2015	10,01		16.01.2017	11,24
21.05.2014	9,18		17.09.2015	10,02		17.01.2017	11,25
22.05.2014	9,2		18.09.2015	9,93		18.01.2017	11,3
23.05.2014	9,19		21.09.2015	10,01		19.01.2017	11,3
26.05.2014	9,24		22.09.2015	9,93		20.01.2017	11,48
27.05.2014	9,21		23.09.2015	9,95		23.01.2017	11,5
28.05.2014	9,21		24.09.2015	9,93		24.01.2017	11,63
29.05.2014	9,21		25.09.2015	9,95		26.01.2017	11,81
30.05.2014	9,29		28.09.2015	9,91		27.01.2017	11,86
02.06.2014	9,28		29.09.2015	9,93		30.01.2017	11,75
03.06.2014	9,03		30.09.2015	10,03		31.01.2017	11,9
04.06.2014	9,19		01.10.2015	9,93		01.02.2017	11,82
05.06.2014	9,08		02.10.2015	10		02.02.2017	11,75
06.06.2014	9,11		05.10.2015	10,13		03.02.2017	11,9
09.06.2014	9,08		06.10.2015	10,11		06.02.2017	11,9
10.06.2014	9,11		07.10.2015	10,56		07.02.2017	11,46
11.06.2014	8,94		08.10.2015	10,89		08.02.2017	11,75
13.06.2014	8,77		09.10.2015	11,03		09.02.2017	11,8

16.06.2014	8,72		13.10.2015	10,94		10.02.2017	11,69
17.06.2014	8,69		14.10.2015	11,05		13.02.2017	11,73
18.06.2014	8,41		15.10.2015	11,13		14.02.2017	11,72
20.06.2014	8,51		16.10.2015	11,18		15.02.2017	11,67
23.06.2014	8,53		19.10.2015	11,58		16.02.2017	12
24.06.2014	8,47		20.10.2015	11,59		17.02.2017	12,25
25.06.2014	8,49		21.10.2015	11,62		20.02.2017	12,36
26.06.2014	8,45		22.10.2015	11,63		21.02.2017	12,2
27.06.2014	8,54		23.10.2015	11,58		22.02.2017	12,09
30.06.2014	8,59		26.10.2015	11,62		23.02.2017	11,76
01.07.2014	8,57		27.10.2015	11,88		24.02.2017	12
02.07.2014	8,5		28.10.2015	11,84		01.03.2017	11,75
03.07.2014	8,6		29.10.2015	11,41		02.03.2017	11,75
04.07.2014	8,5		30.10.2015	10,7		03.03.2017	11,74
07.07.2014	8,63		03.11.2015	10,9		06.03.2017	12,3
08.07.2014	8,57		04.11.2015	11,19		07.03.2017	12,59
10.07.2014	8,4		05.11.2015	11,37		08.03.2017	12,57
11.07.2014	8,72		06.11.2015	11,59		09.03.2017	12,3
14.07.2014	8,59		09.11.2015	11,63		10.03.2017	12,54
15.07.2014	8,85		10.11.2015	11,55		13.03.2017	12,26
16.07.2014	8,65		11.11.2015	11,37		14.03.2017	11,94
17.07.2014	8,75		12.11.2015	11,44		15.03.2017	11,97
18.07.2014	8,79		13.11.2015	11,51		16.03.2017	12,15
21.07.2014	8,77		16.11.2015	11,37		17.03.2017	11,85
22.07.2014	8,72		17.11.2015	11,3		20.03.2017	11,8
23.07.2014	8,67		18.11.2015	11,3		21.03.2017	11,75
24.07.2014	8,65		19.11.2015	11,29		22.03.2017	11,61
25.07.2014	8,72		23.11.2015	11,23		23.03.2017	11,8
28.07.2014	8,71		24.11.2015	11,06		24.03.2017	11,75
29.07.2014	8,94		25.11.2015	10,98		27.03.2017	11,59
30.07.2014	8,94		26.11.2015	10,84		28.03.2017	11,99
31.07.2014	8,69		27.11.2015	10,77		29.03.2017	12,04
01.08.2014	8,6		30.11.2015	10,54		30.03.2017	11,99
04.08.2014	8,77		01.12.2015	10,55		31.03.2017	11,98
05.08.2014	8,77		02.12.2015	10,45		03.04.2017	11,96
06.08.2014	8,72		03.12.2015	10,45		04.04.2017	12,26
07.08.2014	8,77		04.12.2015	10,47		05.04.2017	12,05
08.08.2014	8,62		07.12.2015	10,75		06.04.2017	12,05
11.08.2014	8,54		08.12.2015	10,75		07.04.2017	12,24
12.08.2014	8,59		09.12.2015	10,92		10.04.2017	12,35

13.08.2014	8,59		10.12.2015	10,95		11.04.2017	12,36
14.08.2014	8,68		11.12.2015	11		12.04.2017	12,35
15.08.2014	8,65		14.12.2015	11		13.04.2017	12,24
18.08.2014	8,6		15.12.2015	11		17.04.2017	12,31
19.08.2014	8,7		16.12.2015	11,1		18.04.2017	12,71
20.08.2014	8,71		17.12.2015	11,09		19.04.2017	12,69
21.08.2014	8,63		18.12.2015	11,1		20.04.2017	12,79
22.08.2014	8,66		21.12.2015	11,05		24.04.2017	12,67
25.08.2014	8,66		22.12.2015	11,08		25.04.2017	12,69
26.08.2014	8,72		23.12.2015	11,06		26.04.2017	12,62
27.08.2014	8,59		28.12.2015	11		27.04.2017	12,63
28.08.2014	8,68		29.12.2015	10,96		28.04.2017	12,79
29.08.2014	8,67		30.12.2015	11,03		02.05.2017	12,75
01.09.2014	8,44		04.01.2016	10,95		03.05.2017	12,83
02.09.2014	8,58		05.01.2016	10,99		04.05.2017	12,8
03.09.2014	8,63		06.01.2016	10,9		05.05.2017	12,83
04.09.2014	8,59		07.01.2016	10,8		08.05.2017	12,99
05.09.2014	8,68		08.01.2016	10,92		09.05.2017	12,77
08.09.2014	8,68		11.01.2016	10,69		10.05.2017	12,8
09.09.2014	8,69		12.01.2016	10,65		11.05.2017	12,8
10.09.2014	8,68		13.01.2016	10,45		12.05.2017	12,9
11.09.2014	8,68		14.01.2016	10,45		15.05.2017	12,93
12.09.2014	8,63		15.01.2016	10,4		16.05.2017	12,99
15.09.2014	8,51		18.01.2016	10,4		17.05.2017	12,82
16.09.2014	8,1		19.01.2016	10,25		18.05.2017	11,9
17.09.2014	8,15		20.01.2016	10,06		19.05.2017	12,5
18.09.2014	8,12		21.01.2016	9,99		22.05.2017	12,15
19.09.2014	8,36		22.01.2016	9,93		23.05.2017	12,29
22.09.2014	8,36		26.01.2016	9,25		24.05.2017	12,2
23.09.2014	8,36		27.01.2016	8,75		25.05.2017	12,2
24.09.2014	8,36		28.01.2016	9,19		26.05.2017	12,33
25.09.2014	8,27		29.01.2016	9,5		29.05.2017	12,19
26.09.2014	8,18		01.02.2016	9,53		30.05.2017	12,28
29.09.2014	8,18		02.02.2016	9,43		31.05.2017	12,3
30.09.2014	8,1		03.02.2016	9,19		01.06.2017	12,15
01.10.2014	8,15		04.02.2016	9,02		02.06.2017	12,5

02.10.2014	8,01		05.02.2016	9,16		05.06.2017	12,5
03.10.2014	8,01		10.02.2016	9,3		06.06.2017	12,65
06.10.2014	7,83		11.02.2016	9,76		07.06.2017	12,68
07.10.2014	8,23		12.02.2016	10,15		08.06.2017	12,55
08.10.2014	7,69		15.02.2016	10,31		09.06.2017	12,64
09.10.2014	7,42		16.02.2016	10,61		12.06.2017	12,35
10.10.2014	7,55		17.02.2016	11,1		13.06.2017	12,2
13.10.2014	7,67		18.02.2016	11,05		14.06.2017	12,19
14.10.2014	7,6		19.02.2016	11,05		16.06.2017	12,18
15.10.2014	7,35		22.02.2016	11,17		19.06.2017	12,2
16.10.2014	7,12		23.02.2016	11,15		20.06.2017	12,18
17.10.2014	7,16		24.02.2016	11		21.06.2017	12,23
20.10.2014	7,15		25.02.2016	10,9		22.06.2017	12,24
21.10.2014	6,95		26.02.2016	10,91		23.06.2017	12,19
22.10.2014	6,75		29.02.2016	11,15		26.06.2017	12,33
23.10.2014	6,46		01.03.2016	11		27.06.2017	12,19
24.10.2014	6,53		02.03.2016	11,05		28.06.2017	12,1
27.10.2014	6,52		03.03.2016	11		29.06.2017	12,2
28.10.2014	6,5		04.03.2016	10,94		30.06.2017	12,2
29.10.2014	6,31		07.03.2016	11,03		03.07.2017	12,18
30.10.2014	6,18		08.03.2016	11,15		04.07.2017	12,19
31.10.2014	6,2		09.03.2016	11,2		05.07.2017	12,1
03.11.2014	6,48		10.03.2016	11,24		06.07.2017	12
04.11.2014	6,78		11.03.2016	11,26		07.07.2017	11,9
05.11.2014	6,4		14.03.2016	11,3		10.07.2017	11,93
06.11.2014	7,01		15.03.2016	11,18		11.07.2017	11,97
07.11.2014	6,78		16.03.2016	11,14		12.07.2017	11,96
10.11.2014	6,69		17.03.2016	11,04		13.07.2017	12
11.11.2014	6,27		18.03.2016	11,04		14.07.2017	11,96
12.11.2014	6,27		21.03.2016	11,18		17.07.2017	11,89
13.11.2014	6,27		22.03.2016	11,13		18.07.2017	11,88
14.11.2014	6,51		23.03.2016	11,18		19.07.2017	11,89
17.11.2014	6,23		24.03.2016	11,18		20.07.2017	11,72
18.11.2014	6,27		28.03.2016	11,2		21.07.2017	11,68
19.11.2014	6,53		29.03.2016	11		24.07.2017	11,78
21.11.2014	6,89		30.03.2016	11,1		25.07.2017	11,71
24.11.2014	6,61		31.03.2016	11,3		26.07.2017	11,7
25.11.2014	6,27		01.04.2016	11,34		27.07.2017	11,75
26.11.2014	6,26		04.04.2016	11,39		28.07.2017	11,72
27.11.2014	6,52		05.04.2016	11,36		31.07.2017	11,85

28.11.2014	6,66		06.04.2016	11,34		01.08.2017	11,85
01.12.2014	6,64		07.04.2016	11,3		02.08.2017	11,8
02.12.2014	6,6		08.04.2016	11,45		03.08.2017	11,85
03.12.2014	6,71		11.04.2016	11,43		04.08.2017	11,89
04.12.2014	6,66		12.04.2016	11,43		07.08.2017	11,98
05.12.2014	6,73		13.04.2016	11,59		08.08.2017	11,98
08.12.2014	6,71		14.04.2016	11,86		09.08.2017	11,92
09.12.2014	6,72		15.04.2016	12,15		10.08.2017	11,92
10.12.2014	6,84		18.04.2016	12,3		11.08.2017	11,93
11.12.2014	6,96		19.04.2016	12,58		14.08.2017	11,9
12.12.2014	6,92		20.04.2016	12,51		15.08.2017	11,92
15.12.2014	6,9		22.04.2016	12,23		16.08.2017	11,9
16.12.2014	6,9		25.04.2016	12,15		17.08.2017	11,78
17.12.2014	7,01		26.04.2016	11,83		18.08.2017	11,75
18.12.2014	7,18		27.04.2016	11,71		21.08.2017	11,75
19.12.2014	7,33		28.04.2016	11,88		22.08.2017	11,75
22.12.2014	7,61		29.04.2016	12		23.08.2017	11,84
23.12.2014	7,69		02.05.2016	11,92		24.08.2017	11,97
26.12.2014	8,01		03.05.2016	11,92		25.08.2017	11,98
29.12.2014	7,78		04.05.2016	11,92		28.08.2017	11,98
30.12.2014	8,13		05.05.2016	11,94		29.08.2017	11,98
02.01.2015	7,74		06.05.2016	11,95		30.08.2017	12,23
05.01.2015	7,78		09.05.2016	11,6		31.08.2017	12,27
06.01.2015	7,91		10.05.2016	11,8		01.09.2017	12,29
07.01.2015	7,91		11.05.2016	11,85		04.09.2017	12,28
08.01.2015	7,78		12.05.2016	11,85		05.09.2017	12,33
09.01.2015	7,82		13.05.2016	11,87		06.09.2017	12,3
12.01.2015	7,78		16.05.2016	11,9		08.09.2017	12,31
13.01.2015	7,69		17.05.2016	11,9		11.09.2017	12,45
14.01.2015	7,69		18.05.2016	11,8		12.09.2017	12,57
15.01.2015	7,6		19.05.2016	11,72		13.09.2017	12,72
16.01.2015	7,56		20.05.2016	11,85		14.09.2017	13,03
19.01.2015	7,6		23.05.2016	11,78		15.09.2017	13,37
20.01.2015	7,56		24.05.2016	11,7		18.09.2017	13,5
21.01.2015	7,51		25.05.2016	11,55		19.09.2017	13,41
22.01.2015	7,51		27.05.2016	11,55		20.09.2017	13,4
23.01.2015	7,51		30.05.2016	11,74		21.09.2017	13,41
26.01.2015	7,6		31.05.2016	11,87		22.09.2017	13,35

27.01.2015	7,42		01.06.2016	11,75		25.09.2017	13,06
28.01.2015	7,51		02.06.2016	11,74		26.09.2017	13,22
29.01.2015	7,5		03.06.2016	11,66		27.09.2017	13,06
30.01.2015	7,59		06.06.2016	11,5		28.09.2017	13,02
02.02.2015	7,51		07.06.2016	11,27		29.09.2017	13,01
03.02.2015	7,42		08.06.2016	11,27		02.10.2017	13,21
04.02.2015	7,47		09.06.2016	11,28		03.10.2017	13,09
05.02.2015	7,42		10.06.2016	11,2		04.10.2017	13,09
06.02.2015	7,38		13.06.2016	11		05.10.2017	13,1
09.02.2015	7,42		14.06.2016	11		06.10.2017	13,1
10.02.2015	7,45		15.06.2016	11,21		09.10.2017	13,09
11.02.2015	7,42		16.06.2016	11,01		10.10.2017	13,1
12.02.2015	7,5		17.06.2016	11,28		11.10.2017	13,1
13.02.2015	7,78		20.06.2016	11,08		13.10.2017	13,17
18.02.2015	7,74		21.06.2016	11,1		16.10.2017	13,15
19.02.2015	8,11		22.06.2016	11,1		17.10.2017	13,1
20.02.2015	7,78		23.06.2016	11,99		18.10.2017	13,1
23.02.2015	7,96		24.06.2016	11,85		19.10.2017	13,1
24.02.2015	7,96		27.06.2016	11,9		20.10.2017	13,1
25.02.2015	7,96		28.06.2016	11,96		23.10.2017	12,99
26.02.2015	8,05		29.06.2016	11,9		24.10.2017	12,96
27.02.2015	8,05		30.06.2016	11,97		25.10.2017	12,83
02.03.2015	8,05		01.07.2016	12,11		26.10.2017	12,74
03.03.2015	8,01		04.07.2016	11,94		27.10.2017	12,75
04.03.2015	7,87		05.07.2016	12,3		30.10.2017	12,8
05.03.2015	7,77		06.07.2016	12,4		31.10.2017	12,73
06.03.2015	7,76		07.07.2016	12,55		01.11.2017	12,71
09.03.2015	7,69		08.07.2016	12,75		03.11.2017	12,67
10.03.2015	7,69		11.07.2016	12,65		06.11.2017	12,66
11.03.2015	7,69		12.07.2016	12,61		07.11.2017	12,51
12.03.2015	7,69		13.07.2016	12,21		08.11.2017	12,49
13.03.2015	7,59		14.07.2016	12,6		09.11.2017	12,5
16.03.2015	7,6		15.07.2016	12,45		10.11.2017	12,4
17.03.2015	7,6		18.07.2016	12,44		13.11.2017	12,22
18.03.2015	7,67		19.07.2016	12,7		14.11.2017	12
19.03.2015	7,76		20.07.2016	12,79		16.11.2017	12

20.03.2015	7,75		21.07.2016	12,7		17.11.2017	12
23.03.2015	7,73		22.07.2016	12,7		21.11.2017	12,14
24.03.2015	7,74		25.07.2016	13,03		22.11.2017	12,14
25.03.2015	7,74		26.07.2016	12,88		23.11.2017	12,15
26.03.2015	7,74		27.07.2016	12,81		24.11.2017	12,13
27.03.2015	7,94		28.07.2016	12,56		27.11.2017	12
30.03.2015	7,83		29.07.2016	12,73		28.11.2017	11,97
31.03.2015	7,93		01.08.2016	12,72		29.11.2017	11,97
01.04.2015	7,96		02.08.2016	12,62		30.11.2017	12,05
02.04.2015	7,75		03.08.2016	12,64		01.12.2017	12
06.04.2015	7,83		04.08.2016	12,57		04.12.2017	11,98
07.04.2015	7,87		05.08.2016	12,55		05.12.2017	11,9
08.04.2015	7,9		08.08.2016	12,6		06.12.2017	11,75
09.04.2015	7,93		09.08.2016	12,6		07.12.2017	11,67
10.04.2015	7,96		10.08.2016	12,55		08.12.2017	11,75
13.04.2015	7,92		11.08.2016	12,09		11.12.2017	11,77
14.04.2015	7,96		12.08.2016	12,16		12.12.2017	11,83
15.04.2015	7,92		15.08.2016	12,2		13.12.2017	11,85
16.04.2015	7,92		16.08.2016	12,2		14.12.2017	11,98
17.04.2015	7,92		17.08.2016	12,1		15.12.2017	12,16
20.04.2015	7,87		18.08.2016	11,99		18.12.2017	12,16
22.04.2015	7,92		19.08.2016	11,95		19.12.2017	12,34
23.04.2015	8,05		22.08.2016	12,26		20.12.2017	12,54
24.04.2015	8,14		23.08.2016	12,26		21.12.2017	12,45
27.04.2015	8,13		24.08.2016	12,24		22.12.2017	12,49
28.04.2015	8,05		25.08.2016	12,19		26.12.2017	12,5
29.04.2015	8,05		26.08.2016	12,13		27.12.2017	12,47
30.04.2015	8,39		29.08.2016	12,23		28.12.2017	12,52
04.05.2015	8,27		30.08.2016	12,02			

5 REFERÊNCIAS

- BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. **Journal Of Econometrics**, [s.l.], v. 31, n. 3, p.307-327, abr. 1986.
- DICKEY, D.A.; FULLER, W.A. Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. **Journal of American Statistical Association**, V. 74, N. 366, p. 427-431, Jun. 1979.
- ELLIOTT, G.; ROTHENBERG, T.J; STOCK, J.H. Efficient Tests for an Autoregressive Unit Root. **Econometrica**, v.64, 813–836.1996.
- ENGLE, R. Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of U. K. inflation. **Econometrica**, v.50, p.987-1008, 1982.
- ENGLE, R. GARCH 101: the use of ARCH/GARCH models in applied econometrics. **Journal of Economic Perspectives**. V. 15, n 14, p. 157 – 168. 2001.
- GUJARATI, D. N.; PORTER, D. C. **Econometria Básica**. 5. ed. Porto Alegre: Mcgraw-hill Bookman, 2011. Tradução de: Denise Durante; Mônica Rosemberg; Maria Lúcia G. L. Rosa.
- JONDEAU, E.; POON, S. H.; ROCKINGER, M. **Financial Modeling Under Non-Gaussian Distributions**. London: Springer, 2007.
- KAZEM, A. et al. Support vector regression with chaos-based firefly algorithm for stock market price forecasting. **Applied Soft Computing**, [s.l.], v. 13, n. 2, p.947-958, fev. 2013.
- KWIATKOWSKI, D.; PHILLIPS, P.;SCHMIDT, P.; SHIN, Y.. Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root. **Journal of Econometrics**, v. 54, 1992.
- MATTOS, L. B.; CASSUCE, F. C. C.; MÜLLER, C. A. S. Análise da volatilidade do retorno mensal de boi gordo: 1967-2005. **Unimontes Científica**, Montes Claros, v. 8, n. 1, p.99-106, jan./jun. 2006.
- MORETTIN, P. A. **Econometria Financeira: um curso em séries temporais financeiras**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2011. 384 p.

MORETTIN, P. A.; TOLOI, C.M.C. **Análise de séries temporais**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2006. 538 p.

PHILLIPS. P; PERRON, P. Testing for a unit root in time series regression. **Biometrika**, n. 75, 1988.

TSAY, R. S. **Analysis of Financial Time Series**: financial econometrics. [s.l.]: Wiley, 2002.

VOITURIEZ, T. What explains price volatility changes in commodity markets? Answers from the world palm-oil market. **Agricultural Economics**, [s.l.], v. 25, n. 2-3, p.295-301, set. 2001.

MODELOS LINEARES

ARIMA (P, D, Q)
SARIMA (P, D, Q)(P,D,Q)_s
ARFIMA (P, D*, Q)
ARMAX (P, D, Q, X)

www.arcoeditores.com
contato@arcoeditores.com
(55)99723-4952