

Unidade 4 - Teste U de Mann-Whitney

É um teste alternativo ao teste paramétrico t-Student para duas médias.

Hipóteses:

H_0 : população1 = população 2 (os tratamentos são iguais);

H_1 : população1 \neq população 2 (os tratamentos são diferentes).

Procedimento:

a) determinar os valores de n_1 e n_2 , onde:

n_1 = número de casos do grupo menor;

n_2 = número de casos do grupo maior.

b) dispor em conjunto os escores dos dois grupos, atribuindo o posto 1 ao escore que for menor algebricamente. Os postos variam de 1 a $n = n_1 + n_2$;

Às observações empatadas atribuir a média dos postos correspondentes.

c) determinar o valor de U, mediante contagem ou mediante aplicação das fórmulas:

$$U = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_1(n_1 + 1)}{2} - R_1 \quad \text{ou} \quad U' = n_1 \cdot n_2 + \frac{n_2(n_2 + 1)}{2} - R_2$$

Onde:

R_1 = soma dos postos atribuídos ao grupo cujo tamanho da amostra é n_1 ;

R_2 = soma dos postos atribuídos ao grupo cujo tamanho da amostra é n_2 ;

Para a realização do teste, consideraremos o U de menor valor.

Regras de decisão:

Dependem dos valores de n_1 e n_2 .

- se $n_2 \leq 8$, uma tabela específica mostra a probabilidade exata p. Se $p\text{-valor} \leq \alpha$, rejeita-se H_0

- se $9 \leq n_2 \leq 20$, utilizar outra tabela em que encontraremos um valor crítico de U. Se U calculado $>$ U tabelado, não rejeitamos H_0

- se $n_2 > 20$, utilizar a aproximação pela normal:

$$Z = \frac{U - \frac{n_1 \cdot n_2}{2}}{\sqrt{\frac{n_1(n_2)(n_1 + n_2 + 1)}{12}}}$$

Exemplo:

São apresentados, na Tabela abaixo, os minutos que dois grupos diferentes levaram para completar um teste escrito para renovação de sua carteira de motorista. Aplique o teste U de Mann-Whitney para testar, ao nível de 5%, se existe diferença significativa entre os tempos que o grupo 1 e o grupo 2 levam para completar o teste escrito, respectivamente.

| <i>Grupo 1</i> | <i>Grupo 2</i> |
|----------------|----------------|
| 9,9 | 8,6 |
| 7,4 | 10,9 |
| 8,9 | 9,8 |
| 9,1 | 10,7 |
| 7,7 | 9,4 |
| 9,7 | 10,3 |
| 11,8 | 7,3 |
| 7,5 | 11,5 |
| 9,2 | 7,6 |
| 10,0 | 9,3 |
| 10,2 | 8,8 |
| 9,5 | 9,6 |
| 10,8 | |
| 8,0 | |
| 11,0 | |

Resolução:

H_0 : os grupos são iguais;

H_1 : os grupos são diferentes.

Primeiramente vamos obter n_1 e n_2 .

$$n_1 = 12$$

$$n_2 = 15$$

Agora vamos atribuir os postos a todas as observações em conjuntos.

Não separaremos por grupos. Depois somaremos os postos do grupo 1 (R_1) e do grupo 2 (R_2)

| Grupo 1 | Postos | Grupo 2 | Postos |
|---------|-------------|---------|-------------|
| 9,9 | 18 | 8,6 | 7 |
| 7,4 | 2 | 10,9 | 24 |
| 8,9 | 9 | 9,8 | 17 |
| 9,1 | 10 | 10,7 | 22 |
| 7,7 | 5 | 9,4 | 13 |
| 9,7 | 16 | 10,3 | 21 |
| 11,8 | 27 | 7,3 | 1 |
| 7,5 | 3 | 11,5 | 26 |
| 9,2 | 11 | 7,6 | 4 |
| 10,0 | 19 | 9,3 | 12 |
| 10,2 | 20 | 8,8 | 8 |
| 9,5 | 14 | 9,6 | 15 |
| 10,8 | 23 | | $R_1 = 170$ |
| 8,0 | 6 | | |
| 11,0 | 25 | | |
| | $R_2 = 208$ | | |

Obtendo os valores de U

$$U = 12 \times 15 + \frac{12(12+1)}{2} - 170 = 88 \quad e \quad U' = 12 \times 15 + \frac{15(15+1)}{2} - 208 = 92$$

O U calculado será o menor, portanto $U=88$.

Pela tabela do teste:

| | | Bilateral ($\alpha = 0,05$) | | | | | | | Unilateral ($\alpha = 0,025$) | | | | | | |
|---------------------------------|--|-------------------------------|----|----|----|----|----|----|---------------------------------|-----|-----|-----|-----|--|--|
| n ₁ \ n ₂ | | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | | |
| | | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | | |
| 1 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | | |
| 3 | | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | | |
| 4 | | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 11 | 12 | 13 | 13 | | |
| 5 | | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 17 | 18 | 19 | 20 | | |
| 6 | | 10 | 11 | 13 | 14 | 16 | 17 | 19 | 21 | 22 | 24 | 25 | 27 | | |
| 7 | | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 26 | 28 | 30 | 32 | 34 | | |
| 8 | | 15 | 17 | 19 | 22 | 24 | 26 | 29 | 31 | 34 | 36 | 38 | 41 | | |
| 9 | | 17 | 20 | 23 | 26 | 28 | 31 | 34 | 37 | 39 | 42 | 45 | 48 | | |
| 10 | | 20 | 23 | 26 | 29 | 33 | 36 | 39 | 42 | 45 | 48 | 52 | 55 | | |
| 11 | | 23 | 26 | 30 | 33 | 37 | 40 | 44 | 47 | 51 | 55 | 58 | 62 | | |
| 12 | | 26 | 29 | 33 | 37 | 41 | 45 | 49 | 53 | 57 | 61 | 65 | 69 | | |
| 13 | | 28 | 33 | 37 | 41 | 45 | 50 | 54 | 59 | 63 | 67 | 72 | 76 | | |
| 14 | | 31 | 36 | 40 | 45 | 50 | 55 | 59 | 64 | 67 | 74 | 78 | 83 | | |
| 15 | | 34 | 39 | 44 | 49 | 54 | 59 | 64 | 70 | 75 | 80 | 85 | 90 | | |
| 16 | | 37 | 42 | 47 | 53 | 59 | 64 | 70 | 75 | 81 | 86 | 92 | 98 | | |
| 17 | | 39 | 45 | 51 | 57 | 63 | 67 | 75 | 81 | 87 | 93 | 99 | 105 | | |
| 18 | | 42 | 48 | 55 | 61 | 67 | 74 | 80 | 86 | 93 | 99 | 106 | 112 | | |
| 19 | | 45 | 52 | 58 | 65 | 72 | 78 | 85 | 92 | 99 | 106 | 113 | 119 | | |
| 20 | | 48 | 55 | 62 | 69 | 76 | 83 | 90 | 98 | 105 | 112 | 119 | 127 | | |

Logo, $U_{0,05} = 49$. Como o U calculado é maior que $U_{0,05}$ ($88 > 49$) não rejeitamos H_0 . Não existem evidências de que o tempo de execução do teste seja diferente nos dois grupos.
