UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA
Disciplina: Estatística Inferencial
Professora: Laís Helen Loose

Lista 2 - Estimação e Distribuição amostral da média

1. Responda as seguintes perguntas e dê a devida justificativa:
   (a) Qual é a diferença entre um estimador e uma estatística?
   (b) É certo dizer que toda estatística é um estimador?
   (c) É certo que todo estimador é uma estatística?
   (d) É certo que toda função de uma amostra aleatória é uma estatística?
   (e) É certo que toda função de uma estatística é uma estatística?

2. Seja $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de $X \sim f(x;\theta)$ com θ desconhecido. Determine se as expressões das alternativas dadas abaixo são estatísticas:
   (a) $T = X_1$
   (b) $T = (X_1 + X_2)/2$
   (c) $T = X_1 + 2X_2 + \ldots + nX_n$
   (d) $T = (X_1 + 2X_2 + \ldots + nX_n) - \theta$
   (e) $T = \theta(X_{(n)} - X_{(1)})$
   (f) $T = X_1^2 + \ldots + X_n^2$
   (g) $T = (X_1 + \ldots + X_n)^2$
   (h) $T = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \dfrac{X_i - E(X_i)}{\sqrt{Var(X_i)}}$
   (i) $T = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \dfrac{X_i - \overline{X})}{\sqrt{S^2}}$

3. Foram sorteadas 15 famílias com filhos num certo bairro e observado o número de crianças de cada família, matriculadas na escola. Os dados foram 1, 1, 2, 0, 2, 0, 2, 3, 4, 1, 1, 2, 0, 0, e 2. Obtenha as estimativas correspondentes aos seguintes estimadores da média de crianças na escola nesse bairro,

$$\hat{\mu}_2 = \frac{X_1 + X_2}{2},$$
$$\hat{\mu}_3 = \overline{X}_n.$$

   Qual deles é o melhor estimador da média e por quê?

4. Para estimar a média θ desconhecida de uma população, foram propostos dois estimadores não viesados independentes, $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$, de tal foram que $Var(\hat{\theta}_1) = Var(\hat{\theta}_2)/3$. Considere os seguintes estimadores ponderados de θ:
   (i) $T_1 = (\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2)/2$;
   (ii) $T_2 = (4\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2)/5$;
   (iii) $T_3 = \hat{\theta}_1$.
   (i) Quais estimadores são não viesados?
   (ii) Disponha esses estimadores em ordem crescente de eficiência (quanto menor a variância, mais eficiente é o estimador).

5. Seja X_1, X_2, X_3 uma amostra aleatória de X com distribuição exponencial, $X \sim \text{Exp}(\theta)$, em que $E(X) = \dfrac{1}{\theta}$. Considere os estimadores

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_1 &= \overline{X}_n, \\ \hat{\theta}_2 &= X_2, \\ \hat{\theta}_3 &= \frac{X_1 + X_2}{2}. \end{aligned}$$

   (i) Mostre que o viés dos três estimadores é zero;

   (ii) Qual dos estimadores tem menor variância? Lembrar que no caso exponencial $V(X) = \dfrac{1}{\theta^2}$.

6. Considere um experimento consistindo de n provas de Bernoulli, com probabilidade de sucesso θ. Seja X o número de sucessos e considere os estimadores

   (i) $\hat{\theta}_1 = X/n$;

   (ii) $\hat{\theta}_2 = \begin{cases} 1, & \text{se sucesso na primeira prova} \\ 0, & \text{se fracasso na primeira prova} \end{cases}$.

   (i) Determine a esperança e variância de cada estimador. Por que $\hat{\theta}_2$ não é um "bom" estimador?

   (ii) Verifique se $\hat{\theta}_1$ e $\hat{\theta}_2$ são consistentes;

   (iii) Considere um estimador para a variância da população $\sigma^2 = \theta(1-\theta)$, dado por $\hat{\theta}_1(1-\hat{\theta}_1)$. Em média este estimador acertaria a verdadeira variância da população?

   (iv) Sugira um estimador para a variância da população diferente do sugerido em (iii) e justifique.

7. Para cada um dos problemas listados abaixo estime as quantidades de interesse utilizando o método dos momentos.

   (a) Considere que o tempo necessário para um medicamento fazer efeito, em minutos, seja modelado segundo uma distribuição uniforme contínua no intervalo $[a, b]$. Estime os limitantes a e b dessa distribuição a partir da amostra observada $\{9, 10, 14, 14, 12, 11, 13, 15, 13, 12, 16, 15, 13\}$. Temos $n = 13$, $\sum_{i=1}^{13} x_i = 167$ e $\sum_{i=1}^{13} x_i^2 = 2195$.

   (b) Assuma que o tempo de vida de lâmpadas de determinada marca tenha distribuição exponencial ($f_\theta(x) = \frac{1}{\theta}\exp(-x/\theta)$, se $x > 0$ e zero caso contrário). Estime o parâmetro θ considerando a amostra observada $\{4, 6, 13, 12, 8, 5, 7, 10, 11, 9\}$. Temos $n = 10$ e $\sum_{i=1}^{10} x_i = 85$.

   (c) Assuma que a altura das pessoas seja modelada segundo uma distribuição normal. Estime a média e a variância populacional da altura das pessoas quando se observa a seguinte amostra $\{1.86, 1.67, 1.37, 1.53, 1.97, 1.77, 1.48, 1.96, 1.65, 1.58, 1.78, 1.74, 1.53, 1.73, 1.36\}$. Temos $n = 15$, $\sum_{i=1}^{15} x_i = 24.98$ e $\sum_{i=1}^{13} x_i^2 = 42.11$.

   (d) Para os itens (b) e (c) quais seriam as estimativas de máxima verossimilhança?

8. Estamos interessados em estimar a proporção θ de mulheres que frequentam um estádio de futebol. Para isso foi realizado um experimento durante n jogos consecutivos observando-se a variável aleatória $X_1, \ldots, X_n$ de X, sendo $X =$ "O número de homens que chegam ao estádio até o aparecimento da primeira mulher". Temos que $E(X) = \frac{1-\theta}{\theta}$.

   (a) Obtenha o estimador de momentos de θ.

(b) Seja $\widehat{\theta} = \frac{1}{1+\overline{X}_n}$ o estimador de máxima verossimilhança para o parâmetro θ. Calcule as estimativas de θ com base nos estimadores de momentos e de máxima verossimilhança, considerando a amostra observada: $\{8, 20, 30, 15, 12, 10, 18, 25\}$. O que esse valor quer dizer?

9. Seja 2.53, 0.49, 1.12, 0.17, 2.71, 0.52, 1.42, 2.72, 2.45, 1.56, 0.40, 0.05, 2.44, 2.41, 2.84, uma amostra aleatória da variável aleatória X com distribuição uniforme em $[0, b]$, ou seja $X \sim U(0, b)$.

   Encontre a estimativa de b pelo método dos momentos.

   (a) Obtenha o estimador de momentos de b.

   (b) Obtenha a estimativa de momentos de b.

   Temos $n = 15$ e $\sum_{i=1}^{15} x_i = 23.83$.

10. Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória da distribuição da variável aleatória X cuja função densidade é dada por:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}, & x \geq 0, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

   em que $\alpha > 0$, $\beta > 0$ são os parâmetros da distribuição. A esperança e variância são dadas por $E(X) = \dfrac{\alpha}{\beta}$ e $V(X) = \dfrac{\alpha}{\beta^2}$.

   (a) Obtenha os estimadores de momentos para α e β.

   (b) Para a amostra observada $\{1.4, 2.5, 1.6, 0.8, 3.4, 2.7\}$ calcule as estimativas de momentos para α e β.

11. No monitoramento da qualidade da produção de uma indústria, amostras de nove unidades de cilindros metálicos são selecionadas periodicamente, e uma das variáveis avaliadas é o diâmetro dos cilindros. Considere que, quando operando "sob controle"(sem ocorrência de problemas identificáveis), os diâmetros dos cilindros produzidos têm distribuição normal, com média $\mu = 10cm$ e desvio padrão $\sigma = 0.3cm$.

   (a) Qual a distribuição de $\overline{X}_n$, da média amostral de 9 diâmetros de cilindros metálicos?

   (b) Qual a probabilidade da média de uma amostra exceder 10.12cm?

   (c) Qual a probabilidade da média de uma amostra ser inferior a 9.7cm ou superior a 10.3cm? Você diria que um valor fora desse intervalo seria típico de um processo operando sob controle??

   (d) Suponha que a média do processo, devido a um problema de manutenção das máquinas, seja alterada para 9.8cm. Recalcule a probabilidade solicitada no ítem anterior, agora considerando essa nova configuração do processo. O que muda?

12. A duração do "tonner"de uma máquina de fotocópias pode ser modelada por uma distribuição normal com média 15 e desvio padrão 2 (em milhares de cópias). Para uma amostra de 12 fotocopiadoras a duração do "tonner"será observada, qual a probabilidade da média amostral do "tonner"durar:

   (a) Menos de 16 mil cópias?

   (b) Mais de 13 mil cópias?

   (c) Entre 12 e 14 mil cópias?

13. Um fabricante afirma que sua vacina contra gripe imuniza em 80% dos casos. Uma amostra de 25 indivíduos que tomaram a vacina foi sorteada e testes foram feitos para verificar a imunização ou não desses indivíduos. Se o fabricante estiver correto, qual é a probabilidade de a proporção de imunizados na amostra ser inferior a 0.75? E superior a 0.85?