Cálculo 2

Exercícios de Fixação – Semana 2

Temas abordados: Propriedades da soma para séries; Série geométrica; Série telescópica e Teste da Divergência

1) Estude a convergência de cada uma das séries abaixo. No caso de convergência, calcule o valor da soma.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{4^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{n^2+1}$

2) Encontre o valor de cada uma das somas abaixo.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

3) Estude a convergência de cada uma das séries abaixo.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{3}{2^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\pi)$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\frac{5}{4^n}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n-1}{3^n}$

RESPOSTAS

1) (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} = 4/5$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{4^n} = 7/3$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) = 23/2$

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n} = e^2/(e^2 - 1)$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 1}$ diverge

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ diverge

2) (a) série converge para 1. Para ver isso, use frações parciais para escrever

$$\frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{(16n-2)} - \frac{1}{(16n+4)}.$$

(b) série converge para 1. Para ver isso, escreva os primeiros elementos das somas parciais S_n e note que ocorrem vários cancelamento.

3) (a) série geométrica de razão $r = 1/\sqrt{2}$, portanto convergente

(b) série tipo a geométrica de razão $r = -1/2$, portanto convergente

(c) série divergente, pois o termo geral não tende para zero

(d) série divergente, pois a soma parcial é dada por

$$S_n = (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + \cdots + (\ln n - \ln(n+1)) = \ln 1 - \ln(n+1),$$

de modo que $S_n \to -\infty$

(e) série tipo a geométrica de razão $r = -1/4$, portanto convergente

(f) diferença de duas séries geométricas de razões $2/3$ e $1/3$, portanto convergente