

Definição de Convergência de Sequências

DEFINIÇÕES A sequência $\{a_n\}$ **converge** para o número L se para todo número positivo ϵ corresponder um número inteiro N , de forma que para todo n ,

$$n > N \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| < \epsilon.$$

Se nenhum número L existir, dizemos que $\{a_n\}$ **diverge**.

Se $\{a_n\}$ converge para L , escrevemos $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$, ou simplesmente $a_n \rightarrow L$, e chamamos L o **limite** da sequência (Figura 10.2).

Definição Formal de Limite de uma Sequência (ϵ -N)

A **definição épsilon-N** é o pilar da análise de convergência em Matemática. Embora pareça complexa à primeira vista, o conceito é bastante intuitivo.

♦ Regra de Convergência

Uma sequência (a_n) **converge** para um número (L) se:

$$[\forall, \epsilon > 0; \exists, N \in \{N\} ; \text{tal que}; \forall n > N \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon]$$

☞ Em outras palavras: **não importa o quão perto você queira que os termos da sequência cheguem de (L) , eles sempre chegarão (e permanecerão próximos).**

🔗 Elementos da Definição

1. O que é (L) ?

- **Limite:** É o valor para o qual a sequência está "apontando" e se aproximando.
- Pense em (L) como o **alvo** da sequência.

2. O Papel do (ϵ) (Épsilon)

- **Distância (Tolerância):** É um número positivo arbitrariamente pequeno ($(\epsilon > 0)$).
- Representa a **margem de erro** ou a distância máxima permitida entre (a_n) e (L) .

⚠ Importante: você **não escolhe** o (ϵ) . Ele é dado como um **desafio**, podendo ser minúsculo (ex.: 0.000001).

3. A Condição $|a_n - L| < \epsilon$

- **Proximidade:** Essa desigualdade significa que (a_n) está a menos de (ϵ) unidades de distância de (L) .
- Equivalente a dizer que:

Ou seja, os termos da sequência ficam **dentro de uma faixa de tolerância** em torno de (L) .

4. O Papel do (N) (Êne)

- **Índice de Viragem:** É um número natural que marca o ponto a partir do qual **todos os termos da sequência** satisfazem a proximidade exigida.
- Se $(N = 100)$, isso significa que:

$[a_{101}, a_{102}, a_{103}, \dots]$

estão todos dentro da faixa $((L - \epsilon, L + \epsilon))$.

- Quanto **menor** o (ϵ) , **maior** o (N) necessário.

🚫 Quando não existe limite

Se **nenhum número (L)** satisfaz essa definição, dizemos que a sequência **diverge**.

Quem é quem na Definição de Limite (ϵ -N)

Quem é?	Símbolo	Função	Significado Intuitivo
Limite	(L)	O alvo da sequência.	O número para onde a sequência está indo.
Epsilon	(ϵ)	A margem de erro ou exigência de proximidade.	O desafio: "Quão perto eu quero que a sequência chegue de (L)?"
Êne	(N)	O índice a partir do qual a exigência é cumprida.	A resposta: "A partir de qual termo (N) a sequência fica e permanece dentro dessa proximidade (ϵ)?"

Resumindo Intuitivamente

- (L) = alvo da sequência
- (ϵ) = margem de erro
- ($|a_n - L| < \epsilon$) = proximidade desejada
- (N) = ponto em que a sequência "entra na faixa" e não sai mais