Cálculo 2

Exercícios de Fixação – Semana 7

Temas abordados: Equações diferenciais de 1a ordem lineares e separáveis

1) Determinar a ordem da equação diferencial e classificar em linear ou não linear

(a) $t^2\dfrac{d^2y}{dt^2} + t\dfrac{dy}{dt} + 2y = \text{sen}t;$

(b) $\dfrac{d^4y}{dt^4} + \dfrac{d^3y}{dt^3} + \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + y = 1;$

(c) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + \text{sen}(t+y) = \text{sen}t$

2) Em cada um dos itens abaixo, verifique se a função, ou as funções dadas, constituem solução da equação diferencial.

(a) $ty' - y = t^2; \quad y(t) = 3t + t^2.$

(b) $y^{(4)} + 4y^{(3)} + 3y = 0; \quad y_1(t) = t/3, \quad y_2(t) = e^{-t} + t/3$

(c) $t^2y'' + 5ty' + 4y = 0, t > 0; \quad y_1(t) = t^{-2}, \quad y_2(t) = t^{-2}\ln t$

3) Determine os valores de r para os quais a equação diferencial dada tenha solução da forma $y(t)$.

(a) $y' + 2y = 0;\ y(t) = e^{rt}$

(b) $y'' + y' - 6y = 0;\ y(t) = e^{rt}$

(c) $t^2y'' + 4ty' + 2y = 0;\ y(t) = t^r$, para $t > 0$.

4) Utilizando o método de resolução de equações diferenciais lineares, determine a solução geral para a equação diferencial dada:

(a) $y' + 3y = t + e^{-2t};$

(b) $y' + (1/t)y = 3\cos 2t,\ t > 0;$

(c) $(1+t^2)y' + 4ty = (1+t^2)^{-2};$

5) Em cada um dos itens abaixo, determine a solução do problema do valor inicial (PVI) proposto.

(a) $t^3y' + 4t^2y = e^{-t}; \quad y(-1) = 0$

(b) $ty' + (t+1)y = t; \quad y(\ln 2) = 1.$

6) Utilizando o método de separação de variáveis, resolva a equação diferencial proposta.

(a) $y' = x^2/y;$

(b) $y' + y^2\,\text{sen}x = 0;$

(c) $xy' = \sqrt{(1-y^2)}$

7) Para cada um dos problemas abaixo determine a solução explícita do PVI e um intervalo (pelo menos aproximado) em que a solução está definida. Faça também o gráfico da solução.

(a) $y' = (1 - 2x)/y, \quad y(1) = -2$

(b) $y' = (e^{-x} - e^{x})/(3 + 4y), \quad y(0) = 1$

8) Resolva a equação

$$\frac{dy}{dt} = \frac{ay + b}{cy + d},$$

onde a, b, c e d são constantes.

RESPOSTAS

1) (a) 2^a ordem linear;
   (b) 4^a ordem linear ;
   (c) 2^a ordem não-linear

2) -

3) (a) $r = -2$;
   (b) $r = -3$ ou $r = 2$;
   (c) $r = -1$ ou $r = -2$

4) (a) $y(t) = ce^{-3t} + t/3 - 1/9 + e^{-2t}$, $y(t)$ é assintótica a $y = t/3 - 1/9$ quando $t \to \infty$;
   (b) $y(t) = c/t + (3\cos 2t)/4t + (3\,\mathrm{sen}2t)/2$, $y(t)$ é assintótica a $y = (3\,\mathrm{sen}2t)/2$ quando $t \to \infty$;
   (c) $y(t) = (\arctan t + c)/(1+t^2)^2$, $y \to 0$ quando $t \to \infty$;

5) (a) $y(t) = -(1+t)e^{-t}/t^4$, $t \neq 0$;
   (b) $y(t) = (t - 1 + 2e^{-t})/t$, $t \neq 0$.

6) (a) $3y^2 - 2x^3 = c$, $y \neq 0$;
   (b) $y^{-1} + \cos x = c$ se $y \neq 0$ e $y(x) = 0$ para qualquer x.
   (c) $y(x) = \mathrm{sen}[\ln|x| + c]$, $x \neq 0$ e $|y| < 1$, $y = \pm 1$, $x \neq 0$

7) (a) $y(x) = -\sqrt{2x - 2x^2 + 4}$, definida para $-1 < x < 2$
   (b) $y(x) = -3/4 + \frac{1}{4}\sqrt{65 - 8e^x - 8e^{-x}}$ definida, aproximadamente, para $|x| < 2,0794$

8) $x(y) = cy/a + [(ad - bc)/a^2]\ln|ay + b| + k$, $a \neq 0$, $ay + b \neq 0$.