# Cálculo 2

## Exercícios de Fixação – Semana 5

*Temas abordados*: Polinômio de Taylor; Série de Taylor

**1)** Determine os polinômios de Taylor de ordens 0, 1 e 2 de $f$ em torno do ponto $x = a$ para:

(a) $f(x) = \ln(x)$ e $a = 1$

(b) $f(x) = \ln(1 + x)$ e $a = 0$

**2)** Determine a série de Taylor de $f$ em torno de $a$ e o respectivo raio de convergência, para:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{2 - 3x}$ e $a = 0$

(b) $f(x) = (x - 2)^2$ e $a = 0$

(c) $f(x) = (x - 2)^2$ e $a = 2$

**3)** Use substituição para encontrar a série de Taylor em $x = 0$ das funções abaixo.

(a) $f(x) = 5\,\mathrm{sen}(-x)$

(b) $f(x) = x\cos(\pi x)$

(c) $f(x) = \mathrm{sen}^2(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}$

**4)** Para cada uma das funções abaixo calcule a série de Taylor em $x = 0$. Em seguida, usando a série, determine $\int f(x)dx$.

(a) $f(x) = e^{-x^2}$

(b) $f(x) = \dfrac{\mathrm{sen} x}{x}$

**5)** Considere a função $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n!}$ definida para $x \in \mathbb{R}$.

(a) Calcule $y'(x)$

(b) Verifique que $y'(x) + y(x) = 0$

**6)** Considere a função $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$ definida para $x \in \mathbb{R}$.

(a) Calcule $y''(x)$

(b) Verifique que $y''(x) + 4y(x) = 0$

## RESPOSTAS

1) Vamos denotar por $P_n(x)$ o polinômio de Taylor de ordem $n$.

   (a) $P_0(x) = 0$; $P_1(x) = (x-1)$; $P_2(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2}$.

   (b) $P_0(x) = 0$; $P_1(x) = x$; $P_2(x) = x - \frac{x^2}{2}$.

2) Usaremos a letra $R$ para denotar o raio de convergência.

   (a) $\dfrac{1}{2-3x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^{n+1}} x^n$; $R = \dfrac{2}{3}$

   (b) $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$; $R = \infty$ (observe que a série é uma soma finita)

   (c) $(x-2)^2 = (x-2)^2$; $R = \infty$ (observe que a série é uma soma finita)

3) (a) $5\,\mathrm{sen}(-x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} 5 \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

   (b) $x\cos(\pi x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \pi^{2n} \frac{x^{2n+1}}{(2n)!}$

   (c) observe que $\mathrm{sen}^2(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}$, logo

$$\mathrm{sen}^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 2^{2n-1} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

4) (a) $e^{-x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$, $\displaystyle\int e^{-x^2} dx = K + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$

   (b) $\dfrac{\mathrm{sen} x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n+1)!}$, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{sen} x}{x} dx = K + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$

5) (a) $y'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!}$

6) (a) $y''(x) = 4\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n-2}}{(2n-2)!} = 4\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}$