Cálculo 2 - Lista Extra - Sequências

1. Para as sequências abaixo, associe-as às funções correspondentes e use Regra de l'Hôpital para calcular seus respectivos limites.

   (a) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, x qualquer;

   (b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$;

   (c) $\lim_{n\to\infty} \frac{ln(n)}{3\sqrt{n}}$;

   (d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$;

   (e) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c}$ onde $c > 0$.

2. Para a sequência $\sqrt[n]{(\frac{a}{b})^n + 1}$, onde $0 < a < b$, verifique que:

   (a) $1 < (\frac{a}{b})^n + 1 < 2$;

   (b) usando o item (a) e o Teorema do Confronto, mostre que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\frac{a}{b})^n + 1} = 1$;

   (c) use o item (b) para mostrar que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b$.

3. Decida sobre a convergência das sequências a seguir:

   (a) $a_n = \sqrt{\frac{3n}{n+1}}$;

   (b) $a_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{ln(n)}}$;

   (c) $a_n = (n - \sqrt{n^2 - n})$;

   (d) $a_n = \frac{n}{3^n}$;

   (e) $a_n = \frac{2^n}{3n}$.

4. Considere uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Suponha que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

   (a) Se $a < b$, mostre que para $n > n_0$ temos que $a_n < b$;

   (b) Se $a > b$, mostre que para $n > n_0$ temos que $a_n > b$.

5. Dadas as sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Se $|a_n| \leq b_n$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, mostre que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Gabarito

1. (a) e^x;
   (b) e^2;
   (c) 0;
   (d) 1;
   (e) 1.
2. (a) Usando que $0 < a < b$, basta verificar que $0 < (\frac{a}{b})^n < 1$;
   (b) Note que, a sequência está entre $(1)^{\frac{1}{n}}$ e $(2)^{\frac{1}{n}}$;
   (c) Manipulação algébrica.
3. (a) Converge com limite $\sqrt{3}$;
   (b) Converge com limite e^{-1};
   (c) Converge com limite $\frac{1}{2}$;
   (d) Converge com limite 0;
   (e) Diverge.
4. (a) Use a definição de limite com $\epsilon = b - a$;
   (b) Use a definição de limite com $\epsilon = a - b$
5. Use o Teorema do Confronto.