TESTE DO N-ÉSIMO TERMO PARA DIVERGENCIA

Teste do n-ésimo termo para uma série divergente

Um motivo que pode levar a série a deixar de convergir é que seus termos não se tornam pequenos.

EXEMPLO 6 A série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \cdots + \frac{n+1}{n} + \cdots$$

diverge porque as somas parciais finalmente ultrapassam cada número predeterminado. Cada um dos termos é maior que 1 e, portanto, a soma de n termos é maior que n.

Observe que $\lim_{n\to\infty} a_n$ deve ser igual a zero se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergir. Para saber por quê, faça S representar a soma da série e $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ representar a n-ésima soma parcial. Quando n é grande, tanto s_n quanto s_{n-1} estão próximas de S, assim a diferença delas, a_n, está próxima de zero. Mais formalmente,

$$a_n = s_n - s_{n-1} \to S - S = 0.$$

Regra da diferença para sequências

▧ Teste do Termo $n - ésimo$

O **Teste do Termo** $n - ésimo$ é uma ferramenta fundamental no estudo de **séries infinitas**.
Ele estabelece uma condição necessária para a convergência de uma série.

◇ A Regra Fundamental

Para que a série

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

convirja (ou seja, tenha uma soma finita (S)), é necessário que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

💡 Intuição

Imagine que você está tentando encher um copo (o limite (S)) com infinitas gotas (os termos (a_n)):

- **Se as gotas nunca diminuem de tamanho:**
  Se (a_n) não tende a zero (por exemplo, ($a_n \to 0.5$)), você adicionará (0.5 + 0.5 + 0.5 + ...).
  O copo nunca para de encher → **a série diverge**.
- **Se as gotas ficam cada vez menores:**
  A única chance de convergência é se ($a_n \to 0$).
  Nesse caso, eventualmente, você estará adicionando "quase nada" ao copo.

📐 Demonstração Formal (Explicada)

O argumento é feito usando **somas parciais**.

1. **Definições**
   a. (S): o limite da série (soma total).
   b. (s_n): a soma parcial até o termo (n).
      [$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$]
   c. (s_{n-1}): a soma parcial anterior.
2. **Relação chave** [$a_n = s_n - s_{n-1}$]
3. **Cálculo do limite** Se a série converge para (S), então:
   -> $\lim_{n\to\infty} s_n = S$ e $\lim_{n\to\infty} s_{n-1} = S$

Assim: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = S - S = 0$

☑ Conclusão: **se a série converge, então obrigatoriamente ($a_n \to 0$).**

📊 Exemplo Prático (do Livro)

Considere a série:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots$

- Termo geral: $a_n = \frac{n}{n+1}$
- Limite do termo: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$
- Como o limite ($\neq 0$), o teste garante que: A série DIVERGE

🔎 Intuição: no fim das contas, você está somando muitos números que são, essencialmente, iguais a 1.
E $(1 + 1 + 1 + \cdots)$ infinito → **diverge**.

⚠ Observação Importante

O Teste do Termo $n - ésimo$ é útil principalmente para **provar divergência**:

- Se ($\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$) → a série **diverge**. ☑
- Se ($\lim_{n\to\infty} a_n = 0$) → o teste é **inconclusivo**. ❌

Exemplo clássico:
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ Aqui $\left(a_n = \frac{1}{n} \to 0\right)$, mas a série **diverge** (Série Harmônica).

Portanto, o teste do termo $n - ésimo$ **não prova convergência**, apenas divergência

--->TABELA

Quem é?	Símbolo	Função	Intuição
Teorema 7	Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $a_n \to 0$	Condição necessária para convergência de uma série	Se os termos não forem ficando cada vez menores (indo a 0), a soma infinita não pode convergir
Teste do $n - \acute{e}simo$ **termo para divergência**	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge se : $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$ ou não existe	Critério prático para identificar divergência	Se os termos não tendem a zero, somar infinitos termos explode (não converge)