Cálculo 2

Exercícios de Fixação – Semana 3

Temas abordados: Testes de convergência de séries de termos positivos: Comparação, Razão, Raiz e Integral

1) Use o Teste da Razão para estudar a convergência das séries abaixo.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{\pi}}{4^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}$

(c) $\sum a_n$ onde $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = \dfrac{\text{sen}(n) + 1}{n} a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$

(d) $\sum a_n$ onde $a_1 = 1/3$, $a_{n+1} = \dfrac{3n - 1}{2n + 5} a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$

2) Use o Teste da Comparação para estudar a convergência das séries abaixo.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n + 1}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos^3(n)|}{n^3}$

3) Em cada um dos itens abaixo, determine se a série converge ou diverge. Você vai perceber que, em alguns casos, mais de um teste pode ser utilizado.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \log n}{n(n+2)!}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^3 e^{-n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(1,3)^n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{(n+3)!}$ (h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\log n)^n}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log n}{n}$ (j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1 + e^{2n}}$

RESPOSTAS

1) As séries dos itens (a) e (c) são convergentes, enquanto que as demais são divergentes.

2) (a) Comparando com a série tipo harmônica $\sum \frac{1}{3n}$ pode-se concluir que a série diverge
   (b) Comparando com a p-série $\sum \frac{1}{n^3}$ pode-se concluir que a série converge

3) (a) $\sum n!e^{-n}$ diverge.
   Pode-se usar o Teste da Razão ou notar que o termo geral da série não vai para zero

   (b) $\sum \frac{n!\log n}{n(n+2)!}$ converge
   Pode-se comparar com a p-série $\sum \frac{1}{n^2}$

   (c) $\sum e^{-n}$ converge
   Pose-se usar o Teste da Razão ou notar que é uma série geométrica de razão $1/e < 1$

   (d) $\sum n^3 e^{-n}$ converge
   Pode-se usar o Teste da Razão

   (e) $\sum \left(\frac{n+2}{n}\right)^n$ diverge
   Pode-se notar que o termo geral não vai para zero, lembrando que $(1+\frac{1}{n})^n \to e$

   (f) $\sum \frac{2}{(1{,}3)^n}$ converge
   Pode-se notar que é uma série geométrica

   (g) $\sum \frac{3^n n!}{(n+3)!}$ diverge
   Pode-se usar o Teste da Razão

   (h) $\sum \frac{n}{(\log n)^n}$ converge
   Pode-se usar o Teste da Raiz, lembrando que $\sqrt[n]{n} \to 1$

   (i) diverge
   Para calcular $\int \frac{\log x}{x} dx$ use uma mudança de variáveis apropriada

   (j) converge
   Para calcular $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$ use uma mudança de variáveis apropriada e, em seguida, calcule a integral $\int \frac{1}{1+u^2} du$ usando uma substituição trigonométrica ou lembrando que a função $\frac{1}{(1+u^2)}$ é a derivada de uma função conhecida.