

Testes-C2

Testes Para estudar Convergência de Séries e Sequências

💡 Teste da Série Alternada

Considere uma série da forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - \dots$$
$$\left(\sum_{\{n=1\}}^{\{\infty\}(-1)^n \{n-1\} b} = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - \dots \right)$$

onde

$$b_n > 0 \quad \forall n$$

$$(b_n > 0 \quad \forall n)$$

Essa série é chamada de *série alternada*, pois seus termos mudam de sinal sucessivamente (positivo, negativo, positivo, negativo...).

☑ Condições do Teste da Série Alternada

A série converge se forem satisfeitas as duas condições:

- **Decrescimento dos termos**

$$b_n \geq b_{n+1} \quad \forall n$$

$$(b_{\{n\}} \geq b_{\{n+1\}}, \quad \forall n \in \{N\})$$

A sequência (b_n) deve ser *monótona decrescente*.

- **Limite dos termos nulos**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \right)$$

💡 Observações Importantes

- O teste *não exige convergência absoluta*.

- Se a série alternada converge, mas $\sum b_n$ diverge, então a série é chamada de *condicionalmente convergente*.
- Se também $\sum b_n$ converge, a série é *absolutamente convergente*.
(LaTeX: (\sum b_n))

Exemplo Clássico

A série harmônica alternada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} / n = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \dots$$

$$\sum_{\{n=1\}}^{\{\infty\}} \frac{(-1)^{\{n-1\}}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

- Atende às condições do teste:
 - $\frac{1}{n}$ é decrescente
 - $\lim_{\{n \rightarrow \infty\}} \frac{1}{n} = 0$
(LaTeX: (\frac{1}{n}))

Logo, a série *converge*.

■ Séries de Potências e Somas Infinitas

◊ Definição

Série de potências centrada em a :

$$\left(\sum_{\{n=0\}}^{\infty} c_n (x-a)^n = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \dots \right)$$

onde:

a é o **centro** da série

C_0, C_1, C_2, \dots são **constantes (coeficientes)**

x é a variável real

◊ Caso Particular: Série centrada em 0

Quando $a = 0$:

$$\sum_{\{n=0\}}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots$$

Para cada valor fixado de x , obtemos uma **série numérica real**.

◊ Exemplo Clássico

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n / n!$$

$$(\text{LaTeX: } (\sum_{n=0}^{\infty} n!^{-1} x^n))$$

◊ Caso 1: $x = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$$

$$(\text{LaTeX: } (\sum_{n=0}^{\infty} 1/n!))$$

Teste da Razão:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A_{n+1} / A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/(n+1) = 0 < 1$$

$$(\text{LaTeX: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1))$$

Converge

◊ **Caso 2: $x = 2$**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!})$$

Teste da Razão:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |2 / (n+1)| = 0 < 1$$

(LaTeX: $(\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2}{n+1} \right| = 0 < 1)$)

Converge

◊ **Caso Geral: $x \neq 0$**

$$A_n = x^n / n!$$

Teste da Razão: $\lim_{n \rightarrow \infty} |A_{n+1} / A_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| / (n+1) = 0 < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{A_{n+1}}{A_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

Converge $\forall x \in \mathbb{R}$

❖ Intervalo de convergência: $(-\infty, +\infty)$
(LaTeX: $((-\infty, +\infty))$)