Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Cálculo 2

Exercícios de Fixação – Semana 8

Temas abordados: Equações diferenciais de 1a ordem lineares e separáveis

1) Resolva cada um dos PVI's abaixo.

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3 - 2y}{x}$, $y(2) = -1$

(b) $x\dfrac{dy}{dx} + xy = 1 - y$, $y(1) = 0$

(c) $x\dfrac{dy}{dx} + 2y = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, $y(\pi) = 0$

2) Neste exercício vamos resolver a equação diferencial

$$(x+y) - (x-y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

usando a mudança de variável $v(x) = y(x)/x$.

(a) Verifique que $y'(x) = v(x) + xv'(x)$.

(b) Substitua a expressão acima na equação para verificar, se $y(x)$ é solução da equação original, então $v(x)$ satisfaz

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{1-v}.$$

(c) Verifique que a equação acima é separável para, em seguida, encontrar $v(x)$.

(d) Use o item acima para verificar que a solução $y(x)$ satisfaz

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = \ln x + c_1,$$

onde c_1 é uma constante.

3) (Equações de Riccati) A equação

$$\frac{dy}{dt} = q_1(t) + q_2(t)y + q_3(t)y^2,$$

é conhecida como a equação de Riccati. Suponhamos que uma certa solução y_1 desta equação é conhecida. Uma solução mais geral, com uma constante arbitrária, pode ser conseguida pela substituição

$$y(t) = y_1(t) + \frac{1}{v(t)}.$$

(a) Sabendo que y_1 é uma solução, verifique que $v(t)$ satisfaz a equação linear de 1^a ordem

$$\frac{dv}{dt} = -(q_2 + 2q_3y_1)v - q_3.$$

(b) Considere a equação de Riccati

$$\frac{dy}{dt} = 1 + t^2 - 2ty + y^2.$$

Verifique que $y_1(t) = t$ é uma solução da equação. Em seguida, utilize as informações do item (a) para resolver a equação.

4) Suponha que a temperatura ambiente é igual a T_a e que a temperatura $T(t)$ de um corpo depende apenas do tempo t. A *lei do resfriamento de Newton* afirma que a taxa de variação da temperatura do corpo é proporcional à sua diferença com a temperatura ambiente. Com base nisto, resolva os itens que se seguem.

(a) Verifique que a temperatura $T(t)$ satisfaz a equação

$$T'(t) = -k(T(t) - T_a), \qquad t > 0,$$

onde $k > 0$ é uma constante. Qual é o significado do sinal de menos do lado direito da igualdade?

(b) Supondo que $T(0) = T_0 > T_a$, encontre a expressão de $T(t)$.

(c) Calcule o limite $\lim_{t\to\infty} T(t)$ e interprete este resultado fisicamente.

RESPOSTAS

1) (a) $y(x) = \dfrac{x^3}{5} + \dfrac{12}{5x^2}$

   (b) $y(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{e}{xe^x}$

   (c) $y(x) = -\dfrac{\cos x}{x^2} - \dfrac{1}{x^2}$

2) Após os cálculos a equação do item (b) se transforma na seguinte equação separável

$$\left(\frac{1}{1+v^2} - \frac{v}{1+v^2}\right) dv = \frac{1}{x} dx$$

3) (a)

   (b) A função v satisfaz a equação

$$\frac{dv}{dt} = -(-2t + 2t)v - 1 = -1,$$

   de modo que $v(t) = -t + c_1$. Desse modo, a solução da equação de Ricatti é

$$y(t) = t + \frac{1}{c_1 - t},$$

   onde $c_1 \in \mathbb{R}$ é uma constante.

4) (a) Para explicar o significado do sinal lembre que o corpo perde calor quando sua temperatura é maior que a temperatura ambiente e ganhar calor no caso contrário.

   (b) $T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$ para $t \geq 0$

   (c) O limite é igual à temperatura ambiente, o que significa que o corpo vai esfriando até atingir a termperatura ambiente.