

## Testes-C2

---

Testes Para estudar Convergência de Séries e Sequências

### **Teste da Série Alternada**

---

Considere uma série da forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - \dots$$
$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - \dots \right)$$

onde

$$b_n > 0 \quad \forall n$$

$$(b_n > 0 \quad \forall n)$$

Essa série é chamada de *série alternada*, pois seus termos mudam de sinal sucessivamente (positivo, negativo, positivo, negativo...).

### ☒ **Condições do Teste da Série Alternada**

---

A série converge se forem satisfeitas as duas condições:

- **Decrescimento dos termos**

$$b_n \geq b_{n+1} \quad \forall n$$

$$(b_n \geq b_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N})$$

A sequência  $(b_n)$  deve ser *monótona decrescente*.

- **Limite dos termos nulos**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \right)$$

### **Observações Importantes**

- O teste *não exige convergência absoluta*.

- Se a série alternada converge, mas  $\sum b_n$  diverge, então a série é chamada de *condicionalmente convergente*.
- Se também  $\sum b_n$  converge, a série é *absolutamente convergente*.  
(LaTeX:  $(\sum b_n)$ )

### ■ Exemplo Clássico

---

A série harmônica alternada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} / n = 1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

- Atende às condições do teste:

- $\frac{1}{n}$  é decrescente

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

(LaTeX:  $(\frac{1}{n}, )$ )

☒ Logo, a série *converge*.

---

## ■ Séries de Potências e Somas Infinitas

### ◇ Definição

---

Série de potências centrada em  $a$ :

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \dots \right)$$

onde:

$a$  é o **centro** da série

$C_0, C_1, C_2, \dots$  são **constantes (coeficientes)**

$x$  é a variável real

### ◇ Caso Particular: Série centrada em 0

---

Quando  $a = 0$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots$$

Para cada valor fixado de  $x$ , obtemos uma **série numérica real**.

### ◇ Exemplo Clássico

---

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n / n!$$

$$(\text{LaTeX: } (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}))$$

#### ◇ Caso 1: $x = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$$

$$(\text{LaTeX: } (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}))$$

Teste da Razão:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A_{n+1} / A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/(n+1) = 0 < 1$$

$$(\text{LaTeX: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1))$$

☒ Converge

◇ **Caso 2:  $x = 2$**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!})$$

Teste da Razão:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |2 / (n+1)| = 0 < 1$$

$$(\text{LaTeX: } (\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2}{n+1} \right| = 0 < 1))$$

☒ Converge

◇ **Caso Geral:  $x \neq 0$**

$$A_n = x^n / n!$$

$$\text{Teste da Razão: } \lim_{n \rightarrow \infty} |A_{n+1} / A_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| / (n+1) = 0 < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{A_{n+1}}{A_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1)$$

☒ Converge  $\forall x \in \mathbb{R}$

✎ Intervalo de convergência:  $(-\infty, +\infty)$

$$(\text{LaTeX: } ((-\infty, +\infty)))$$