Universidade de Brasília
Departamento de Matemática

Lista 1 de exercícios - Módulo 1

Sequências de números reais

1. (a) O que é uma sequência?
   (b) O que significa dizer que $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$?
   (c) O que é uma sequência convergente? Dê dois exemplos.
   (d) O que é uma sequência divergente? Dê dois exemplos.

2. Liste os cinco primeiros termos da sequência:
   (a) $a_n = \frac{2n}{n^2+1}$;
   (b) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{5^n}$;
   (c) $a_n = \frac{3(-1)^n}{n!}$;
   (d) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 5a_n - 3$;
   (e) $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$.

3. Determine se o limite de cada uma das sequências abaixo existe ou não. No caso de existência, determine o limite da sequência.
   (a) $a_n = \dfrac{2^n}{3^{n+1}}$
   (b) $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n^2+1}$
   (c) $a_n = \dfrac{2n+1}{1-3\sqrt{n}}$
   (d) $a_n = \dfrac{\cos^2 n}{2^n}$
   (e) $a_n = n\,\mathrm{sen}(1/n)$
   (f) $a_n = \dfrac{1}{(0,9)^n}$
   (g) $a_n = e^{1/n}$;
   (h) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

4. Lembrando que $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$, verifique as afirmações abaixo:
   (a) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e$
   (b) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n} = 1$]

5. Seja f uma função real contínua. Mostre que se $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ então $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$

6. Mostre que se $\{a_n\}$ for limitada e $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, então $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0$.

RESPOSTAS

1.

2.

3. (a) O limite existe e é 0
   (b) existe e é 0
   (c) não existe
   (d) existe e é 0
   (e) $a_n = \frac{\text{sen }(1/n)}{1/n}$ tem limite e é 1
   (f) $a_n = \frac{10^n}{9^n}$ não tem limite
   (g) existe e é 1
   (h) existe e é 0

4. (a) Basta fazer $k = n^2$ e observar que $k \to +\infty$ quando $n \to \infty$.
   (b) Se $a_n = (1 + \frac{1}{n})^{n^2}$ é a sequência do item anterior então, como $a_n \to e$, temos que $e - 1 < a_n < e + 1$, para todo $n \geq n_0$. Para esses valores de n temos que $\sqrt[n]{e-1} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{e+1}$ e o resultado segue do Teorema do Confronto.

5.

6. Use o Teorema do Confronto para mostrar que $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n b_n| = 0$