Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών

Ακ. έτος 2020-2021, 6ο Εξάμηνο: Συστήματα Αναμονής

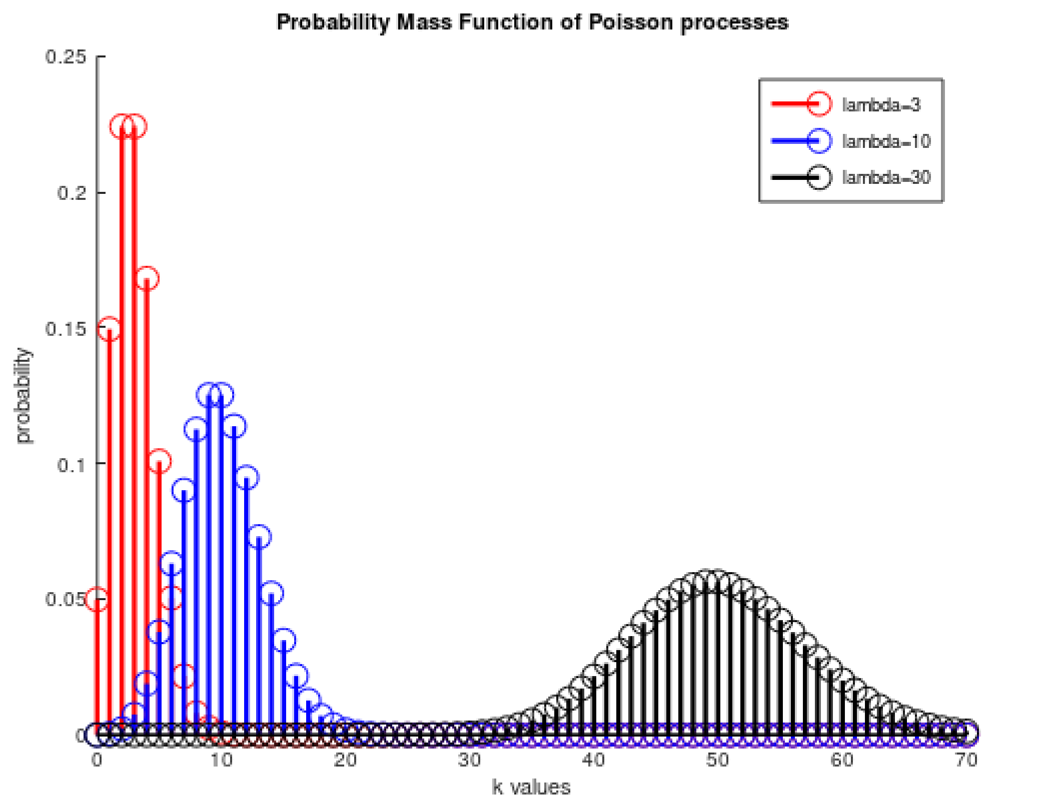
Παναγιώτα-Μικαέλα Ξυλια

AM:03118859

1η Ομάδα Ασκήσεων

Κατανομή Poisson

A) Η συνάρτηση μάζας πιθανότητας των κατανομών Poisson με παραμέτρους λ={3, 10, 50}:

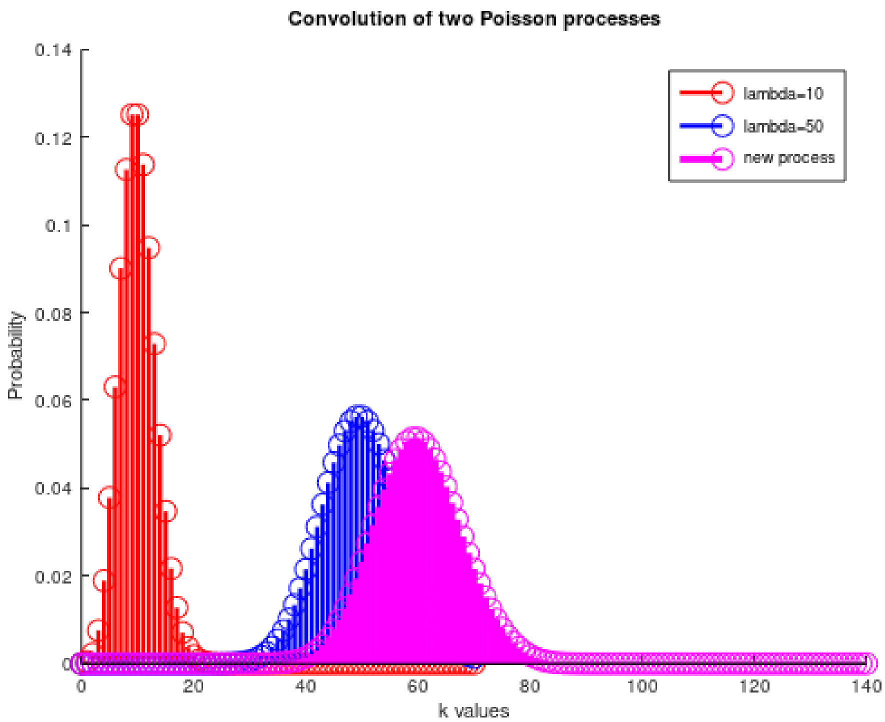


Παρατηρούμε πως όσο μεγαλώνει το λάμδα, τόσο μειώνεται το ύψος της κατανομής και μεγαλώνει η διακύμανση της. Αυτό συμβαίνει, επειδή το άθροισμα των επιμέρους τμημάτων της διακριτής κατανομής εκφράζει την συνολική πιθανότητα που θα πρέπει να ισούται με 1.

Β) Από τα αποτελέσματα του κώδικα μας στο Command Window βλέπουμε ότι η μέση τιμή και η διακύμανση είναι ίσες με 30. Επομένως είναι ίσες με το λάμδα.

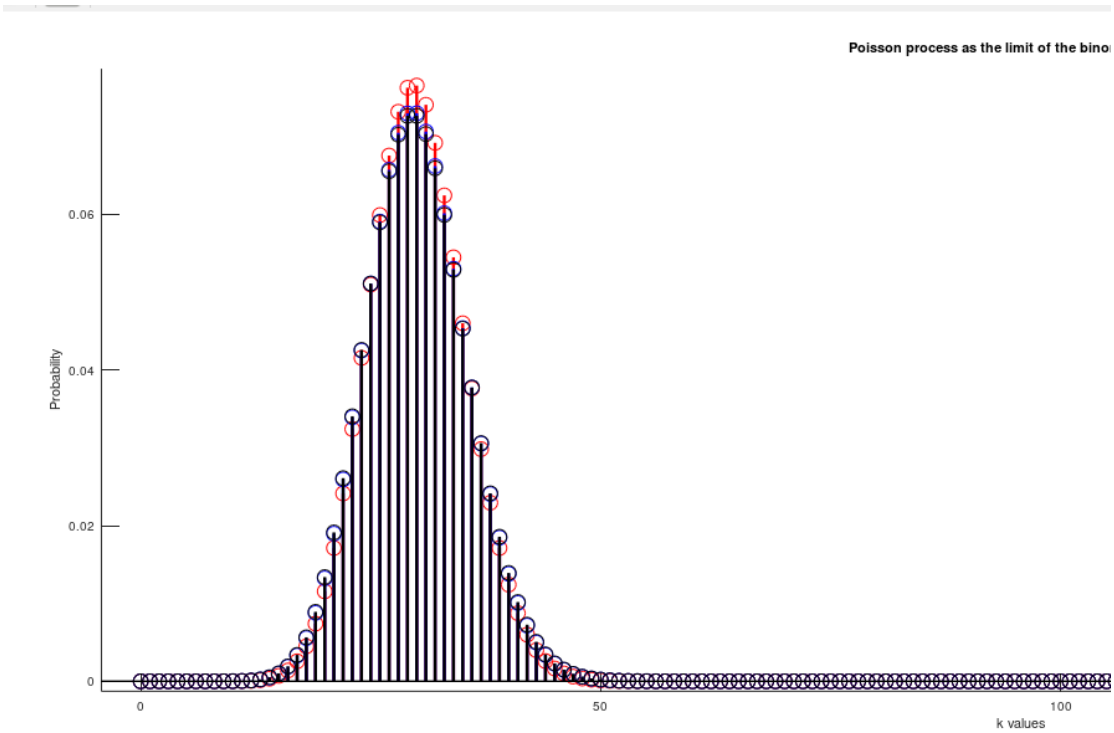
```
mean value of Poisson with lambda 30 is
mean_value = 30.000
Variance of Poisson with lambda 30 is
variance = 30.000
```

Γ) Η Υπέρθεση κατανομών Poisson:



Προκύπτει μία νέα κατανομή Poisson, η οποία έχει ως λάμδα το άθροισμα των επιμέρους λάμδα των 2 κατανομών, δηλαδή 50+10=60. Απαραίτητη προϋπόθεση είναι οι δύο κατανομές να είναι ανεξάρτητες.

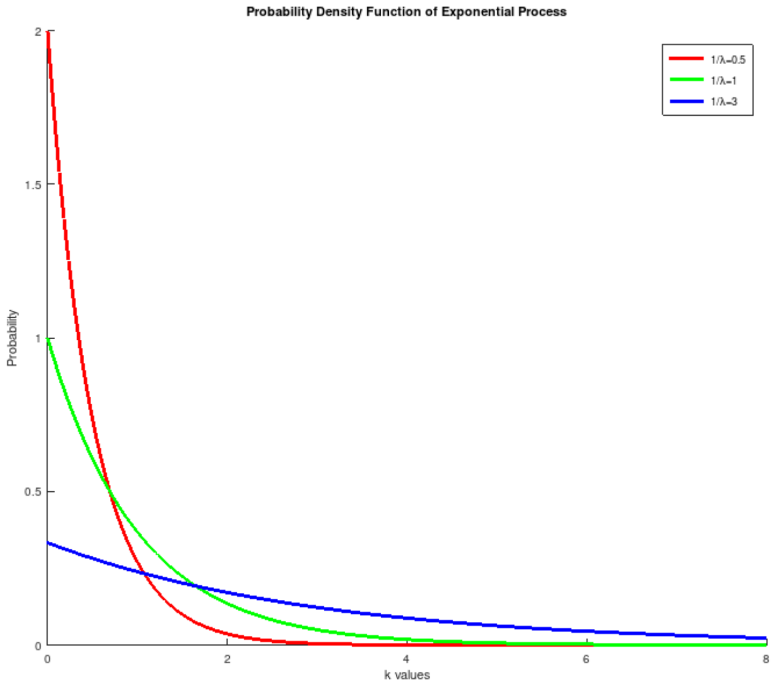
Δ) Η Κατανομή Poisson ως το όριο μιας διωνυμικής κατανομής:



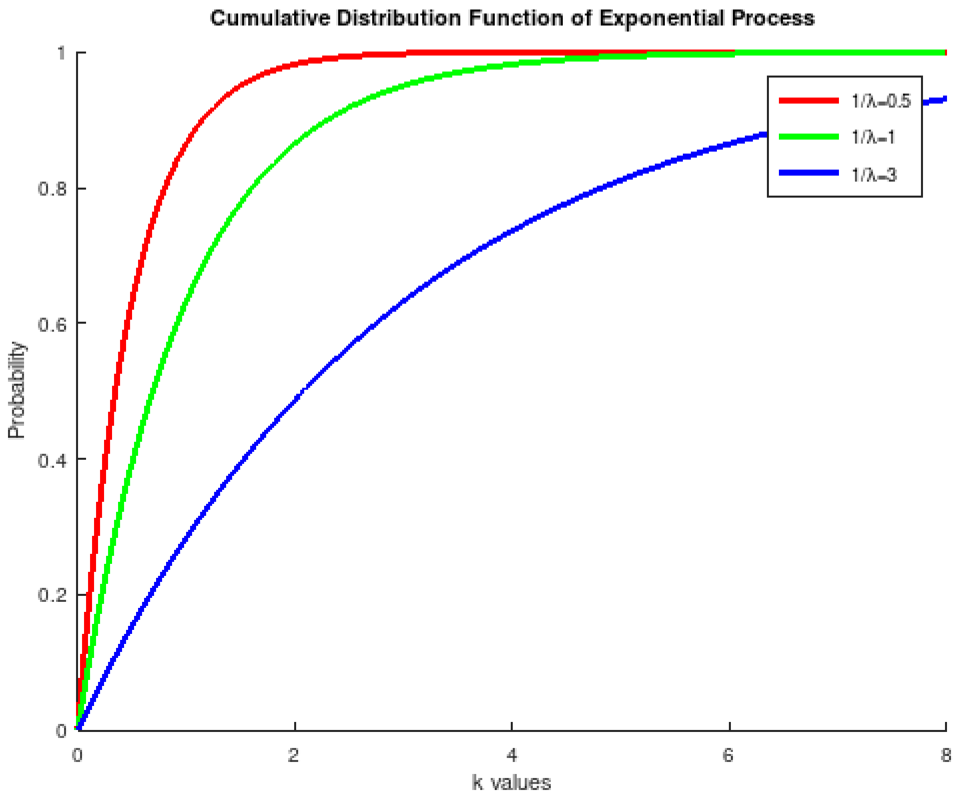
Το όριο μίας διωνυμικής κατανομής είναι μια κατανομή Poisson. Το λάμδα ισούται με το γινόμενο των n και p το οποίο είναι σταθερό, όπου n τείνει άπειρο και p τείνει μηδέν.

Εκθετική κατανομή

A) Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (PDF, Probability Density Function) της εκθετικής κατανομής με μέσους όρους 1/λ={0.5,1,3}:



B) Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της εκθετικής κατανομής:

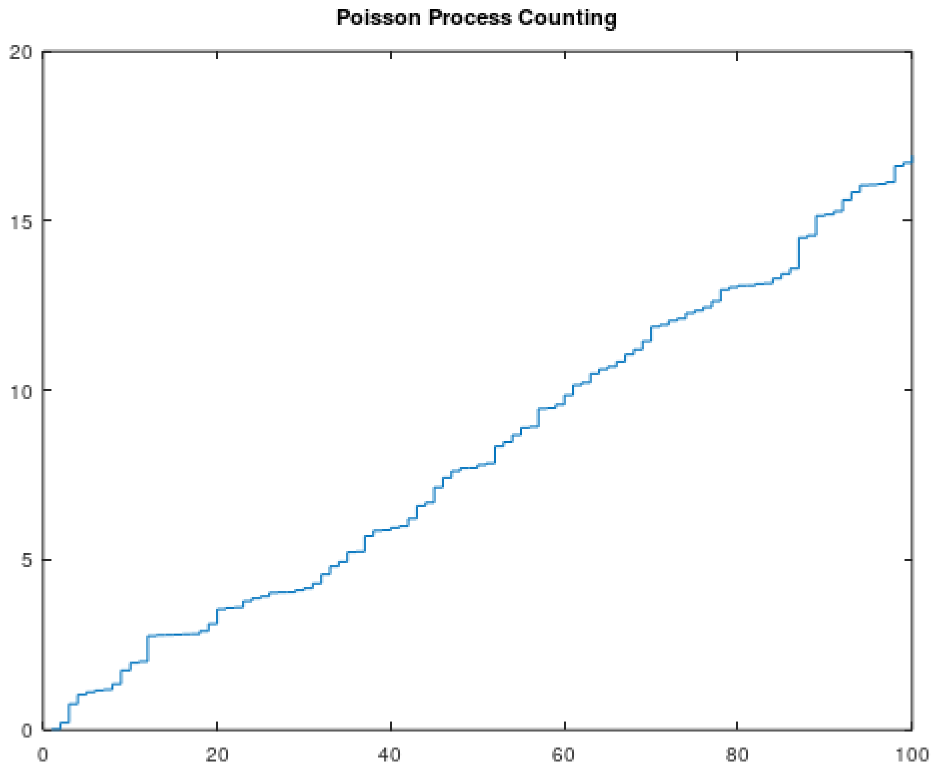


Γ) Ισχύει η ιδιότητα της απώλειας μνήμης, βάση της οποίας $\Pr(X > 50000|X > 20000) = P(X > 30000)$. Μέσω του Octave, υπολογίζουμε την πιθανότητα.

```
Pr(X>30000) =
p1 = 0.8869
Pr(X>50000|X>20000) =
p2 = 0.8869
```

Διαδικασία Καταμέτρησης Poisson

Α) Από το γράφημα, παρατηρούμε πως οι χρόνοι που μεσολαβούν ανάμεσα στην εμφάνιση δύο διαδοχικών γεγονότων Poisson ακολουθούν την εκθετική κατανομή.



Β) Υπολογίζοντας την μέσο αριθμό γεγονότων σε μία συγκεκριμένη χρονική περίοδο, μεταβάλλοντας τον αριθμό των διαδοχικών τυχαίων γεγονότων, παρατηρούμε πως όσο αυξάνουμε τον αριθμό, τόσο πιο κοντά προσεγγιστικά βρισκόμαστε γύρω από τον αριθμό 5.

```
mean = 4.8380
mean = 5.3005
mean = 5.2025
mean = 5.1710
mean = 5.0974
```

Επειδή, ακολουθεί κατανομή Poisson, για την μέση τιμή ισχύει E[n(t)]=λt. Άρα, ορθώς προσεγγίζουν την τιμή του λ=5.

Κώδικας:

demo1a-edit.m:

```
pkg load statistics

clc;
clear all;
close all;

# TASK: In a common diagram, design the Probability Mass Function of Poisson processes
# with lambda parameters 3, 10, 30, 50. In the horizontal axes, choose k parameters
# between 0 and 70.

k = 0:1:70;
lambda = [3,10,30, 50];

for i=1:columns(lambda)
  poisson(i,:) = poisspdf(k,lambda(i));
endfor

colors = "rbkm";
figure(1);
hold on;
for i=1:(columns(lambda)-1)
  stem(k,poisson(i,:),colors(i),"linewidth",1.2);
endfor
hold off;

title("Probability Mass Function of Poisson processes");
xlabel("k values");
ylabel("probability");
legend("lambda=3","lambda=10","lambda=30","lambda=50");

# TASK: regarding the poisson process with parameter lambda 30, compute its mean
# value and variance

index = find(lambda == 30);
chosen = poisson(index,:);
mean_value = 0;
for i=0:(columns(poisson(index,:))-1)
  mean_value = mean_value + i.*poisson(index,i+1);
endfor

display("mean value of Poisson with lambda 30 is");
```

```
display(mean_value);

second_moment = 0;
for i=0:(columns(poisson(index,:))-1)
  second_moment = second_moment + i.*i.*poisson(index,i+1);
endfor

variance = second_moment - mean_value.^2;
display("Variance of Poisson with lambda 30 is");
display(variance);

# TASK: consider the convolution of the Poisson distribution with lambda 20 with
# the Poisson distribution with lambda 30.

first = find(lambda==10);
second = find(lambda==50);
poisson_first = poisson(first,:);
poisson_second = poisson(second,:);

composed = conv(poisson_first,poisson_second);
new_k = 0:1:(2*70);

figure(2);
hold on;
stem(k,poisson_first(:),colors(1),"linewidth",1.2);
stem(k,poisson_second(:),colors(2),"linewidth",1.2);
stem(new_k,composed,"mo","linewidth",2);
hold off;
title("Convolution of two Poisson processes");
xlabel("k values");
ylabel("Probability");
legend("lambda=10","lambda=50","new process");

# TASK: show that Poisson process is the limit of the binomial distribution.
k = 0:1:200;
# Define the desired Poisson Process
lambda = 30;
i = 1:1:5;
n =[300, 3000, 30000];
p = lambda./n;

figure(3);
title("Poisson process as the limit of the binomial process");
xlabel("k values");
ylabel("Probability");
hold on;
for i=1:3
  binomial = binopdf(k,n(i),p(i));
  stem(k,binomial,colors(i),'linewidth',1.2);
endfor
hold off;
```

lab1.m:

```
pkg load statistics

clc;
clear all;
close all;

k = 0:0.00001:8
exp1=exppdf(k,0.5)
exp2=exppdf(k,1)
exp3=exppdf(k,3)

figure(1,"graphicssmoothing","off")
hold on;
plot(k,exp1,"r","linewidth",1.3)
plot(k,exp2,"g","linewidth",1.3)
plot(k,exp3,"b","linewidth",1.3)

hold off;

title("Probability Density Function of Exponential Process")
xlabel("k values")
ylabel("Probability")
legend("1/λ=0.5","1/λ=1","1/λ=3")


exp5=expcdf(k,0.5)
exp6=expcdf(k,1)
exp7=expcdf(k,3)

figure(2,"graphicssmoothing","off")
hold on;
plot(k,exp5,"r","linewidth",1.3)
plot(k,exp6,"g","linewidth",1.3)
plot(k,exp7,"b","linewidth",1.3)

hold off;

title("Cumulative Distribution Function of Exponential Process")
xlabel("k values")
ylabel("Probability")
legend("1/λ=0.5","1/λ=1","1/λ=3")


exp4=expcdf(k,2.5)
p1=1-exp4(30000);
display("Pr(X>30000) =");
display(p1);
p2=(1-exp4(50000))/(1-exp4(20000));
display("Pr(X>50000|X>20000) =");
display(p2);

d=exprnd(0.2,1,100);
time=zeros(1,100);
time(1)=d(1);
for i=2:100
  time(i)=time(i-1)+d(i);
endfor
```

```
figure(3)
stairs(1:100, time);
title("Poisson Process Counting")

E = 100/time(100)

for n = [200,300,500,1000,10000]
d=exprnd(0.2,1,n);
time=zeros(1,n);
time(1)=d(1);
for i=2:n
  time(i)=time(i-1)+d(i);
endfor

mean=n/time(n)
endfor
```