

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники»

Лабораторная работа «Решение системы линейных уравнений»

Работу выполнил
Учащийся группы ПИН-33
Карпеченков Михаил Владимирович
Под руководством
Ярошевича Владимира Александровича

Москва 2023

③ Задайте матрицу A и вектор-столбец f системы линейных уравнений $AX = f$, используя генератор случайных чисел. Очевидно, можно получить решение таким образом: $X = A^{-1}f$ (предварительно проверив, что матрица A не вырожденная) или по правилу Крамера ($x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$, где A_i — матрица, получающаяся из матрицы A заменой i -го столбца на столбец правой части f). Реализуйте и проверьте работоспособность этих методов. Несмотря на простоту использования в MATLAB, эти варианты чрезвычайно неэкономичны по числу операций.

```
clear; clc;
n=5;
limit=20;
A=randi(limit,n)
B=randi(limit,n,1)
%inverse matrix method
if det(A)~=0
    X=inv(A)*B
end
%Kramer's method
for i=1:n
    A_i=A;
    A_i(:,i)=B;
    X(i)=det(A_i)/det(A);
end
X

A =
     1     8    16    14     6
     2     4    10    17    13
    19     3    10    14    15
    11     8     3    20    10
     8     7    18    20    17

B =
     4
     3
     1
     4
    11

X =
-0.729375215740421
 5.011434242319640
-0.892043493268898
-2.927036589575422
 3.314851570590264
```

```
X =  
-0.729375215740421  
 5.011434242319639  
-0.892043493268899  
-2.927036589575422  
 3.314851570590265
```

③ Напишите программу нахождения решения системы линейных уравнений методом Гаусса с выбором главного элемента.

```
function X=doGaussMethod(A,B)  
l=length(B);  
Aa=[A B];  
for i=1:l-1  
    max=0;  
    maxId=0;  
    for j = i+1:l  
        if abs(Aa(j,i))>abs(max)  
            max=Aa(j,i);  
            maxId=j;  
        end  
    end  
    c=Aa(i,:);  
    Aa(i,:)=Aa(maxId,:);  
    Aa(maxId,:)=c;  
    Aa=Aa./max;  
    for j=i+1:l  
        Aa(j,:)=Aa(j,:)-Aa(j,i)*Aa(i,:)/Aa(i,i);  
        Aa(j,i)=0;  
    end  
end  
Aa=Aa./Aa(1,1);  
X=ones(l,1);  
X(1)=Aa(1,l+1);  
for i=1:l-1  
    Aa(:,l-i+1)=Aa(:,l-i+1)*X(l-i+1);  
    s=sum(Aa(l-i,:))-2*Aa(l-i,l+1)-Aa(l-i,l-i);  
    X(l-i)=-s/Aa(l-i,l-i);  
end  
end
```

③ Функция `rref` MATLAB также приводит матрицу $[A \ f]$ к диагональному виду, из которого сразу же видно решение системы. Также па-

кет содержит операцию левого матричного деления, с помощью которой очень просто найти решение: $X = A \setminus f$. Более того, эта операция позволяет решать недоопределённые и переопределённые системы линейных уравнений, выбирая алгоритм решения в зависимости от вида матрицы A .

```
clear; clc;
n=5;
limit=20;
A=randi(limit,n)
B=randi(limit,n,1)
X1=doGaussMethod(A,B)
%checking
X2=inv(A)*B
rr=rref([A B])
X3=rr(:,length(A)+1)
```

X1 =

```
0.786824591259952
4.120950586519175
0.263986810915943
-4.841993101562024
0.233129976296116
```

X2 =

```
0.786824591259953
4.120950586519175
0.263986810915942
-4.841993101562025
0.233129976296116
```

rr =

1.0000000000000000	0	0	0	0	0.786821705426357
0	1.0000000000000000	0	0	0	4.120950323974082
0	0	1.0000000000000000	0	0	0.2640000000000000
0	0	0	1.0000000000000000	0	-4.841991341991342
0	0	0	0	1.0000000000000000	0.233128834355828

X3 =

0.786821705426357

4.120950323974082

0.2640000000000000

-4.841991341991342

0.233128834355828

③ Задайте случайным образом матрицу A размерности 20×20 и вектор X . Определите число обусловленности матрицы A с помощью функции `cond`. Изменяя значения некоторых элементов матрицы A , добейтесь, чтобы её число обусловленности стало больше 10^3 . Используя A и X , найдите вектор $f = AX$. Полагая вектор X неизвестным, решите систему линейных уравнений всеми предложенными выше методами и сравните найденные решения с уже известным. Какой из методов дал более точный результат? Обратите внимание на решения, полученные обычным методом Гаусса и методом с выбором главного элемента.

```
clear; clc;
```

```
n=20;
MAX=100;
A=randi(MAX,n);
X_old=randi(MAX,n,1)
X_new=X_old;
cond=cond(A)
XX=repmat(X_new',n,1);
B=sum(A.*XX,2);
```

```
if det(A)~=0
    %reverse matrix method
    disp('reverse matrix method:')
    X_new=inv(A)*B
```

```

        abs(X_new-X_old)
end

%Kramer's method
disp("Kramer's method:")
for i=1:n
    A_i=A;
    A_i(:,i)=B;
    X_new(i)=det(A_i)/det(A);
end
X_new
abs(X_new-X_old)

%Gauss method with selection of the main element
disp("Gauss method with selection of the main element:")
X_new=doGaussMethod(A,B)
abs(X_new - X_old)

% X = A \ B
disp("X = A \ B")
X_new = A \ B
abs(X_new - X_old)

%rref
disp("rref:")
rr=rref([A B])
X_new=rr(:,length(A)+1)
abs(X_new - X_old)

X_old =

    944

    800

    438

     91

    934

    379

    759

    804

    805

    596

    325

    749

```

477

516

481

425

177

281

878

874

cond =

2.554507214621228e+03

reverse matrix method:

X_new =

1.0e+02 *

9.439999999999941

8.000000000000016

4.380000000000011

0.910000000000022

9.340000000000039

3.790000000000109

7.590000000000000

8.039999999999745

8.049999999999523

5.959999999999939

3.249999999999545

7.4900000000000508

4.769999999999579

5.1600000000000223

4.809999999999917

4.2500000000001267

1.769999999999837

2.809999999999886

8.780000000000053

8.739999999999963

ans =

1.0e-09 *

0.005911715561524

0.001591615728103

0.001023181539495

0.002202682480856

0.003979039320257

0.010913936421275

0

0.025465851649642

0.047634785005357

0.006139089236967

0.045531578507507

0.050818016461562

0.042177816794720

0.022282620193437

0.008299139153678

0.126760824059602

0.016342482922482

0.011368683772162

0.005343281372916

0.003637978807092

Kramer's method:

X_new =

1.0e+02 *

9.439999999999523

7.999999999999755

4.379999999999762
0.909999999999957
9.339999999999916
3.789999999999885
7.589999999999807
8.039999999999726
8.049999999999335
5.95999999999996
3.250000000000331
7.489999999999612
4.769999999999872
5.160000000000207
4.809999999999971
4.250000000000030
1.769999999999925
2.809999999999959
8.780000000000099
8.739999999999938

ans =

1.0e-10 *
0.476347850053571
0.245563569478691
0.238173925026786
0.043200998334214
0.084128259913996
0.114823706098832
0.193267624126747
0.273985278909095
0.665068000671454
0.003410605131648

0.331397131958511
0.387672116630711
0.128466126625426
0.206910044653341
0.028421709430404
0.030127011996228
0.075033312896267
0.040927261579782
0.098907548817806
0.062527760746889

Gauss method with selection of the main element:

X_new =

1.0e+02 *
9.440000000000065
7.99999999999971
4.379999999999840
0.909999999999990
9.340000000000373
3.789999999999805
7.590000000000117
8.040000000000221
8.049999999999727
5.960000000000054
3.250000000000410
7.489999999999521
4.769999999999723
5.160000000000658
4.809999999999439
4.249999999999532
1.770000000000216

2.8100000000000081

8.7800000000000065

8.7399999999999975

ans =

1.0e-10 *

0.065938365878537

0.029558577807620

0.160298441187479

0.009947598300641

0.372892827726901

0.194972926692571

0.117097442853265

0.220552465179935

0.272848410531878

0.054569682106376

0.409841049986426

0.478621586808003

0.276827449852135

0.658246790408157

0.560476109967567

0.468389771413058

0.216289208765374

0.081286088970955

0.064801497501321

0.025011104298756

X = A \ B

X_new =

1.0e+02 *

9.440000000000000

8.000000000000002

4.3800000000000051
0.9100000000000021
9.339999999999939
3.790000000000013
7.590000000000011
8.039999999999935
8.050000000000026
5.959999999999997
3.249999999999941
7.490000000000075
4.770000000000029
5.159999999999925
4.810000000000040
4.250000000000067
1.769999999999960
2.809999999999970
8.780000000000047
8.739999999999982

ans =

1.0e-11 *
0.011368683772162
0.022737367544323
0.505906427861191
0.207478478841949
0.602540239924565
0.130739863379858
0.102318153949454
0.648014975013211
0.250111042987555
0.022737367544323

0.181898940354586

$$rr =$$
[illegible]

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Columns 18 through 21

0	0	0	944
0	0	0	800
0	0	0	438
0	0	0	91
0	0	0	934
0	0	0	379
0	0	0	759
0	0	0	804
0	0	0	805
0	0	0	596
0	0	0	325
0	0	0	749
0	0	0	477
0	0	0	516
0	0	0	481
0	0	0	425
0	0	0	177
1	0	0	281
0	1	0	878
0	0	1	874

X_new =

944

800

438

91

934

379

759

804

805

596

325

749

477

516

481

425

177

281

878

874

ans =

0

0

0

0

0

0

0

0

0

0

0

0

0

0

0
0
0
0
0
0