

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники»

Лабораторная работа «Интерполяция функций. Полиномы Лагранжа, Ньютона»

Работу выполнил
Учащийся группы ПИН-33
Карпеченков Михаил Владимирович
Под руководством
Ярошевича Владимира Александровича

Москва 2023

Пусть есть прибор, который в дискретные моменты времени выдаёт сигнал по закону $f(t) = \sin \pi t$. Допустим, наблюдатель зарегистрировал пять отсчётов в моменты времени $t_i = \frac{i}{4}$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Задачей наблюдателя (который не знает закона выдачи сигнала) является получение приближённого значения функции на отрезке $[0, 1]$ в любой момент времени.

① Используя линейную интерполяцию, найдите значения функции в точках: $t = 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ и сравните с реальным значением синуса в этих точках. Постройте графики синуса и ломаной, проходящей через пять заданных точек. Отметьте, насколько сильно они различаются в разных частях графика. Чем это обусловлено?

```
clear; clc;
syms x;

y=@(x)sin(pi*x);
t=[0 1/6 1/3 1/2];
X=0:1/4:1
Y=y(X);
Apoints=[];
Bpoints=[];
ta=1;
for i=1:1:length(Y)-1

    while(t(i)>X(ta+1))
        ta=ta+1
    end
    Apoints=[Apoints (Y(ta+1)-Y(ta))/(X(ta+1)-X(ta))];
    Bpoints=[Bpoints Y(ta)-X(ta)*Apoints(i)];
    ta=1;
end
Apoints
Bpoints
hold on; grid on; xlabel('x'); ylabel('y');
fplot(y,[0 1])
for i=1:1:length(Y)-1
    plot(t(i),t(i)*Apoints(i)+Bpoints(i),'or')
end
InterPointsY=[t.*Apoints+Bpoints]
SinPointY=y(t)
```

Output:

X =

0 0.2500 0.5000 0.7500 1.0000

Apoints =

2.8284 2.8284 1.1716 1.1716

Bpoints =

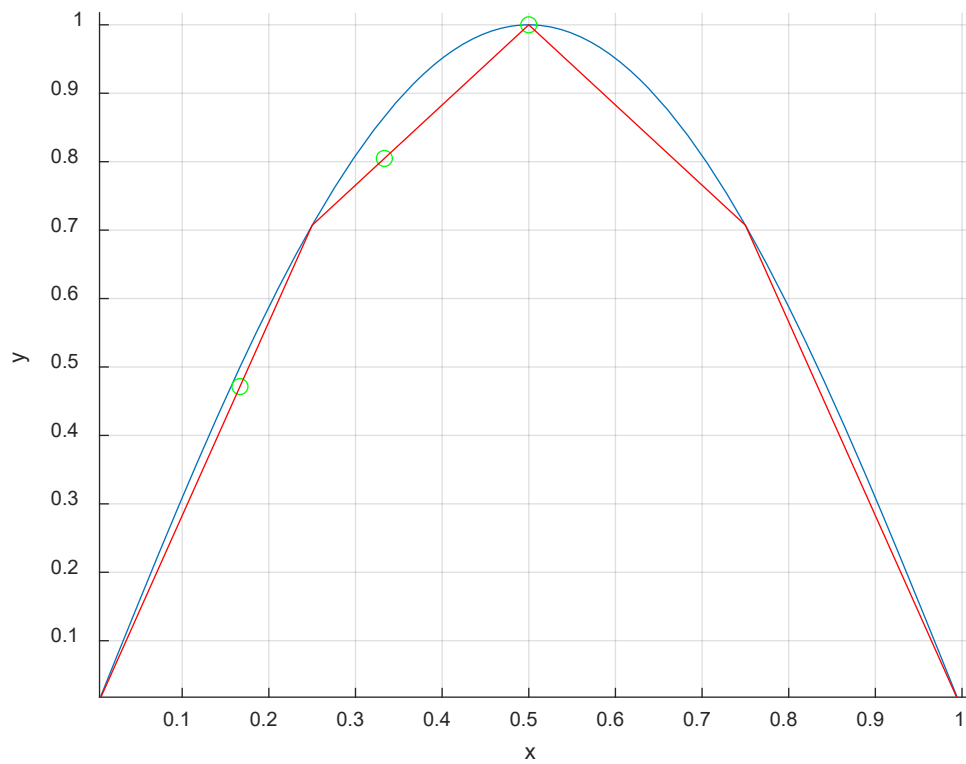
0 0 0.4142 0.4142

InterPointsY =

0 0.4714 0.8047 1.0000

SinPointY =

0 0.5000 0.8660 1.0000



Значения на графике синуса и на графике того, что я построил, так сильно различаются ввиду того, что в этом задании мы используем самый простой вид интерполяции – линейную интерполяцию. Также заметное различие в значениях обусловлено малым количеством узлов интерполяции.

① Постройте по заданным пяти точкам интерполяционный многочлен Лагранжа или Ньютона и, используя его, найдите значения функции в точках $t = 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$. Сравните результаты со значениями, полученными

при линейной интерполяции, и значениями синуса в этих точках. Постройте графики синуса и интерполяционного многочлена. Какую максимальную ошибку мы допускаем при аппроксимации синуса данным полиномом? Сравните экспериментальную погрешность с теоретической.

```
function[P] = LagPoly(t,F)
syms x;
temp = repmat (t',1,length(t));
power = repmat (0:(length(t)-1),length(t),1);
A = temp.^power
B=F'
X=inv(A)*B;
P=@(x) (sum(vpa(X'.*x.^power(1,:),10)));
end
```

```
P=LagPoly(X,y(X))
P(x)
ezplot(P(x),[0 1])
for i=1:1:length(t)
    P(t(i))
    plot(t(i),P(t(i)),'og')
end
```

Output:

X =

0 0.2500 0.5000 0.7500 1.0000

ans =

0

ans =

0.4990706583526554850072098901137

ans =

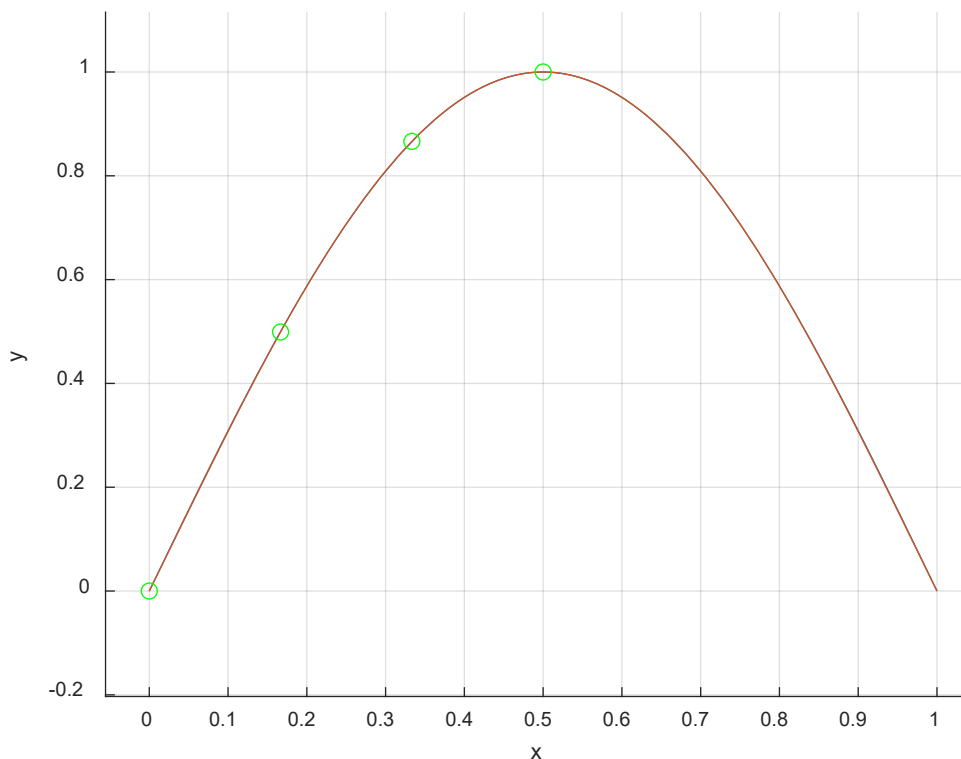
0.86629493000772994637515012072981

ans =

1.00000000000000030253577421035516

1849446653130145890031599265058

x +...+ 3.6602213387479527462176065455424



Можно заметить что график синуса и многочлена Лагранжа на отрезке $[0; 1]$ почти не различаются.

Оценим погрешность:

Теоретическая:

```
dfminus=matlabFunction(-diff(y,x,length(X)))
```

```

df=matlabFunction(diff(y,x,length(X)))
w=@(x)prod(x-X)
w(x)
maxwX=fminbnd(@(x)(-1)*prod(x-X),X(1),X(length(X)))
maxw=w(maxwX)
maxdf=df(fminbnd(dfminus,X(1),X(length(X))))
MaxwTheory=maxdf/factorial(length(X))*maxw

```

Output:

MaxwTheory =

0.0035

Практическая:

```

Prminus=matlabFunction(-abs(P(x)-y(x)))
Pr=matlabFunction(abs(P(x)-y(x)))
MaxPractice=Pr(fminbnd(Prminus,X(1),X(length(X))))

```

Output:

MaxPractice =

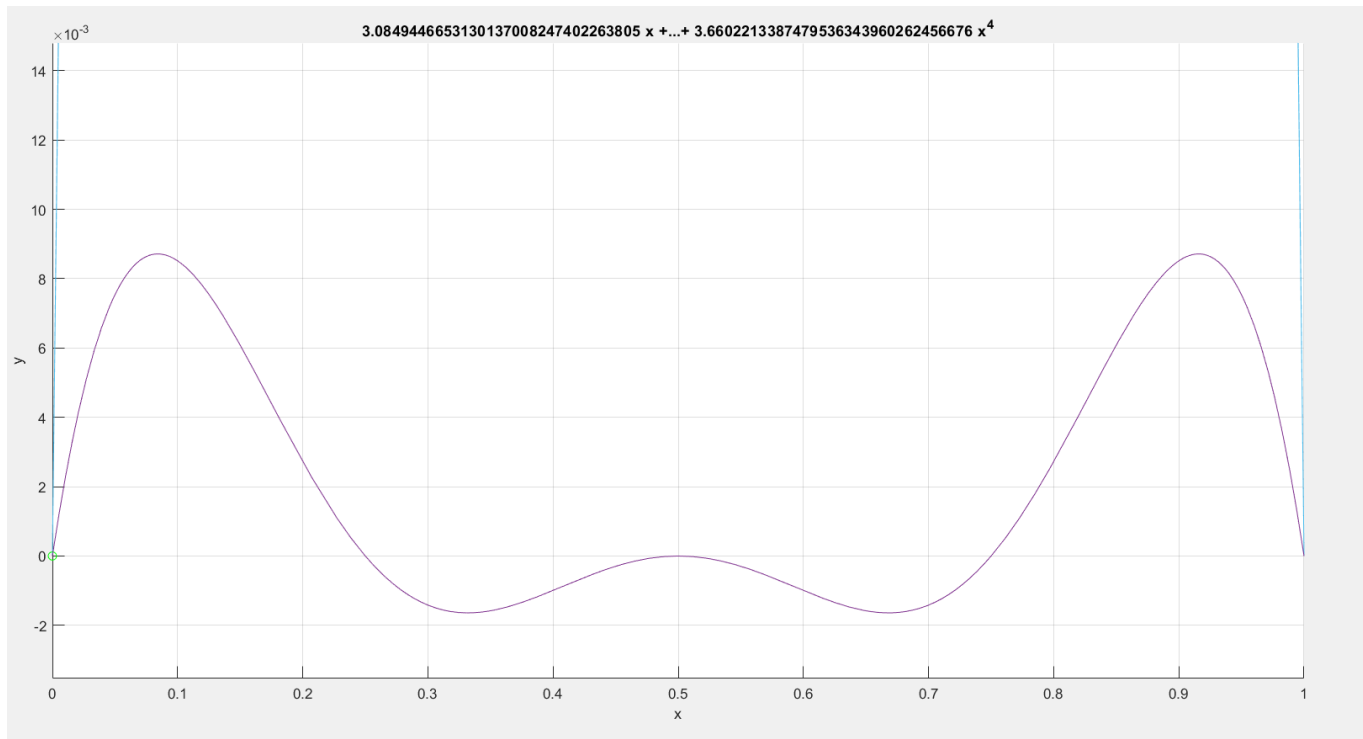
2.6993e-04

График теоретической погрешности:

```

R=feval(df,x)/factorial(length(X))*w(x)
fplot(R,[0 1])
ylim([-MaxwTheory, MaxwTheory])

```



Максимальное значение экспериментальной ошибки не превышает максимальное значение теоретической ошибки.

② В программе сделать возможность строить многочлен Лагранжа или Ньютона для произвольного набора точек $t = t_0, t_1, \dots, t_n$.

③ При вычислении многочлена стараться заменить циклы матричными операциями (см. первое практическое занятие).

```
function[P] = LagPoly(t,F)
syms x;
temp = repmat (t',1,length(t));
power = repmat (0:(length(t)-1),length(t),1);
A = temp.^power
B=F'
X=inv(A)*B;
P=@(x) (sum(vpa(X'.*x.^power(1,:),10)));
end
```

на вход функции подается вектор значений точек (t) и вектор значений неизвестной функции в точках из вектора t.

① Найдите значение интерполяционного полинома при $t = 2$. Почему оно так сильно отличается от значения синуса в этой точке?

P (2)

ans =

8.4709960243659097045565431471914

Потому что значение $t=2$ не принадлежит отрезку $[0;1]$, в котором мы производим интерполяцию (это влечет за собой очень большую практическую погрешность, ведь коэффициенты полинома Лагранжа были посчитаны для точек из отрезка $[0;1]$)

② Задайте функцию Рунге $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ на отрезке $[-5, 5]$ в десяти равноотстоящих точках. Сравните значения функции и интерполяционного полинома при $x = 4, 5$. Постройте графики функции и полинома на заданном отрезке и объясните поведение интерполяционного полинома. Посмотрите, что будет происходить при постепенном увеличении числа узлов интерполяции и подумайте, как можно избавиться от получившегося эффекта.

③ Для приближения функции Рунге используйте Чебышёвские узлы. Постройте графики функции и многочлена.

P (4.5)

y (4.5)

ans =

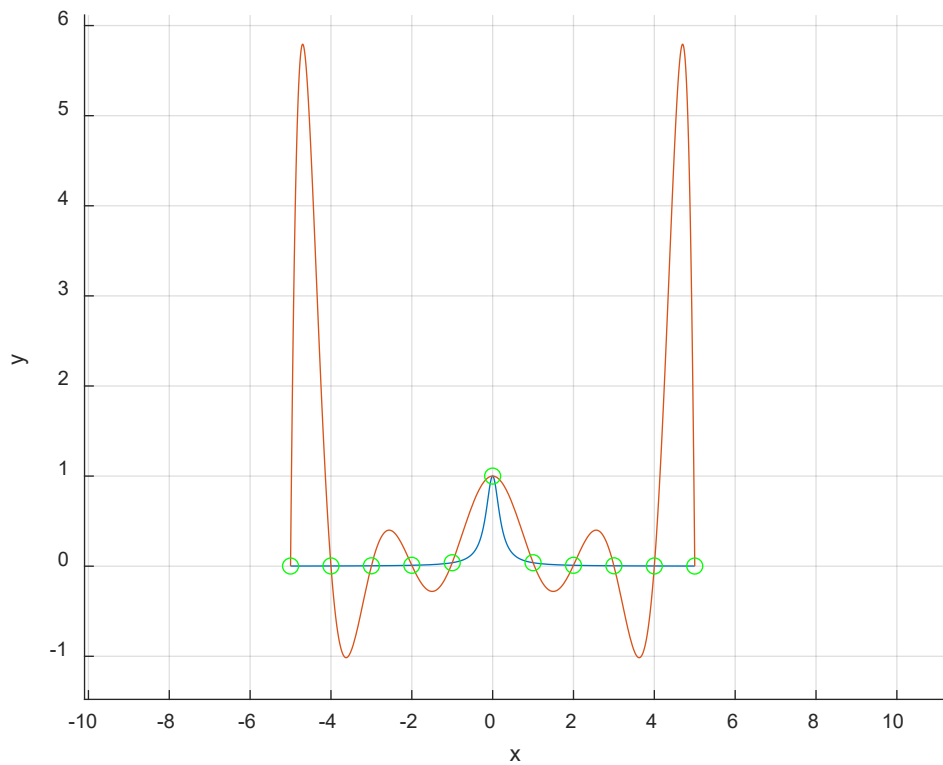
4.6496952901589903725109538136908

ans =

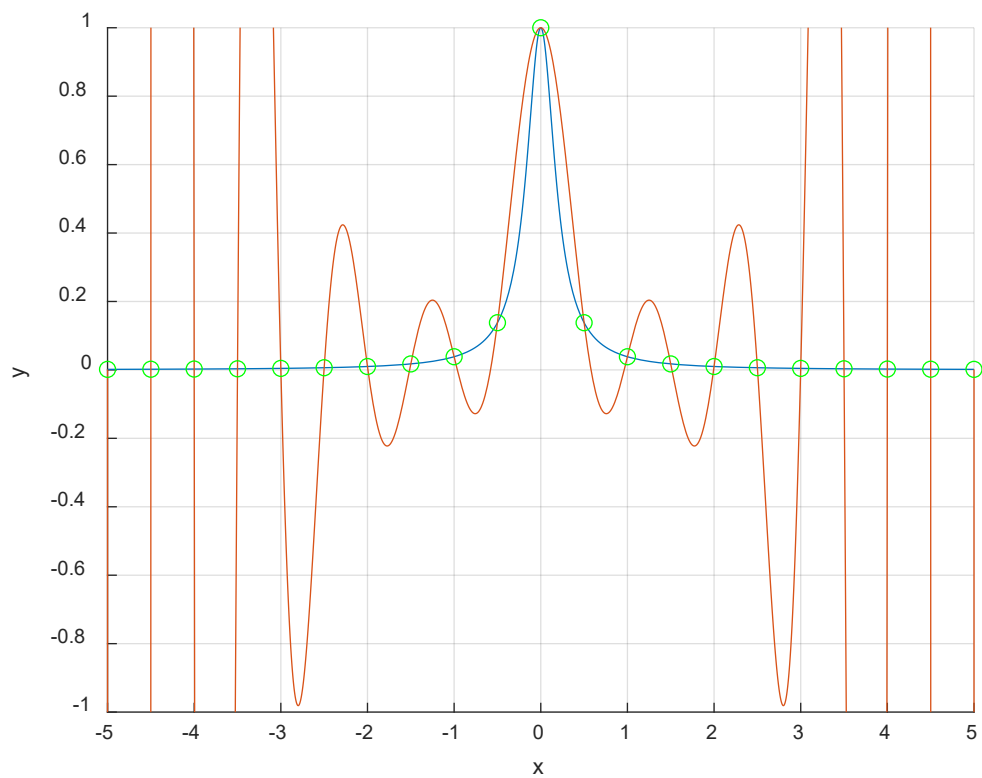
0.0020

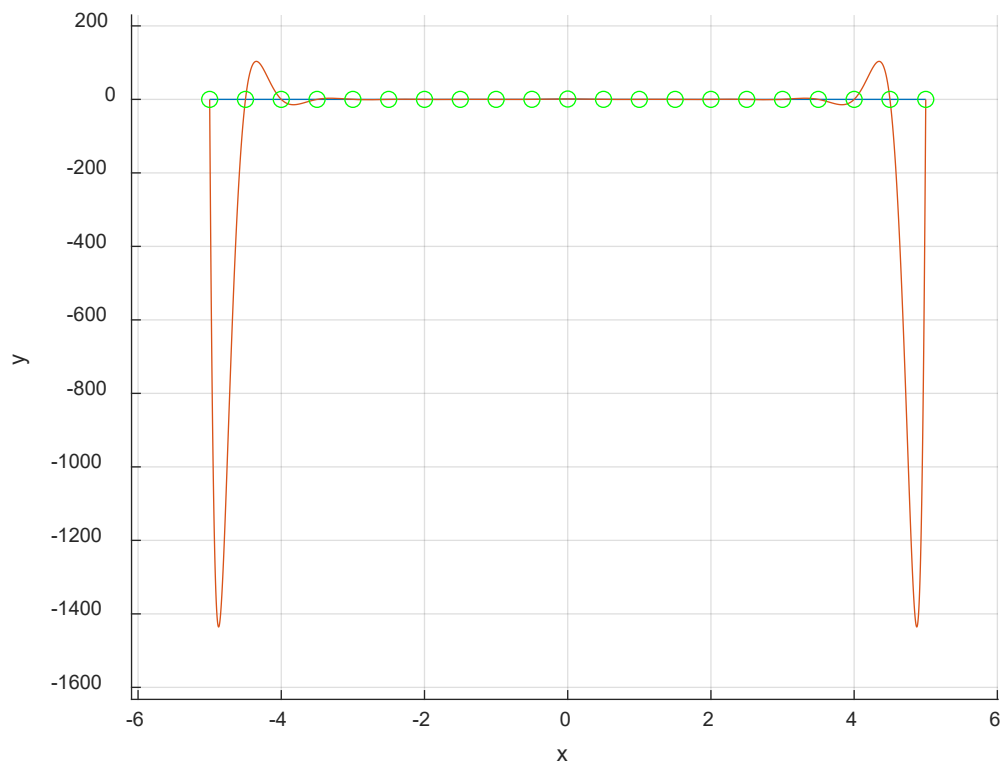
Значения функции и значение полинома в точке 4.5 очень сильно различаются, потому что

10 узлов:

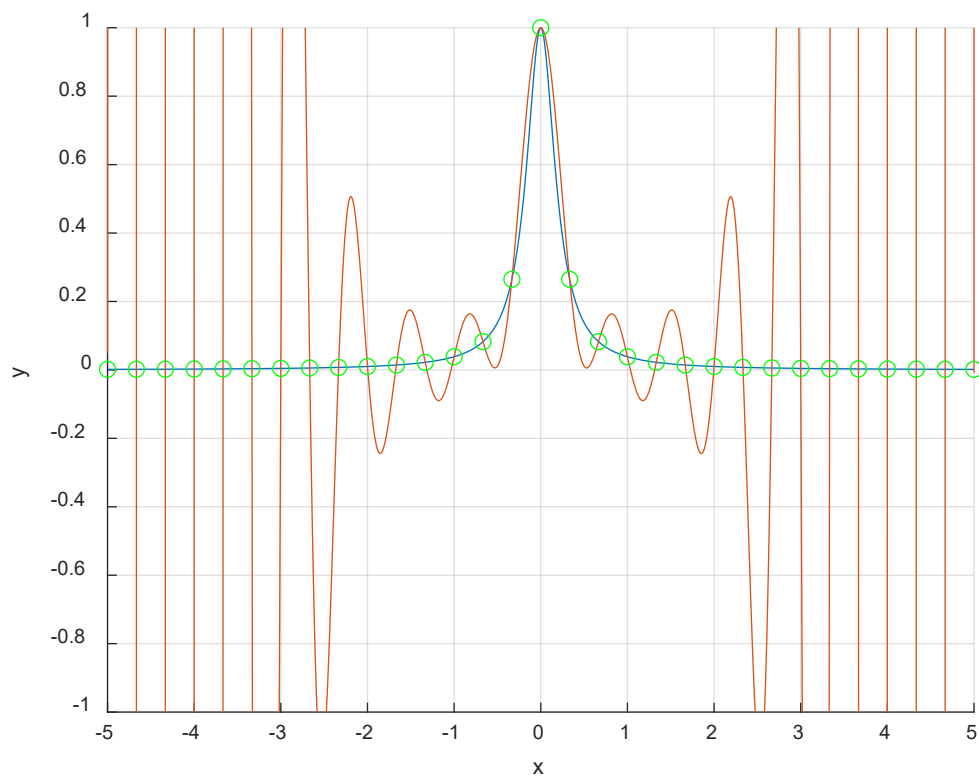


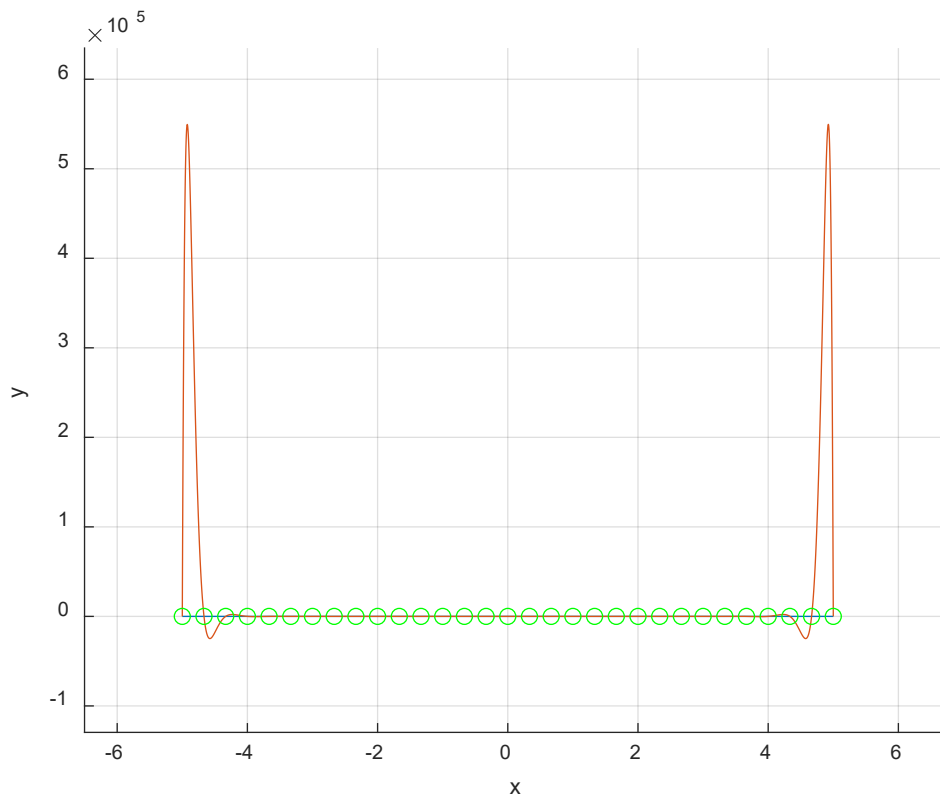
20 узлов:





30 узлов:

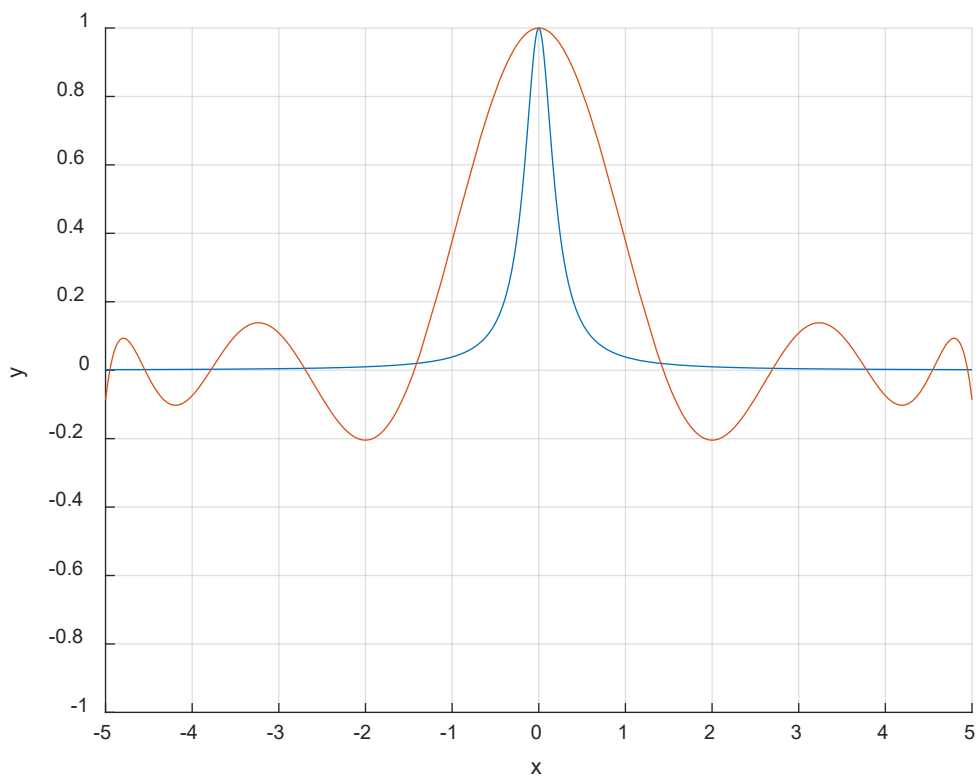




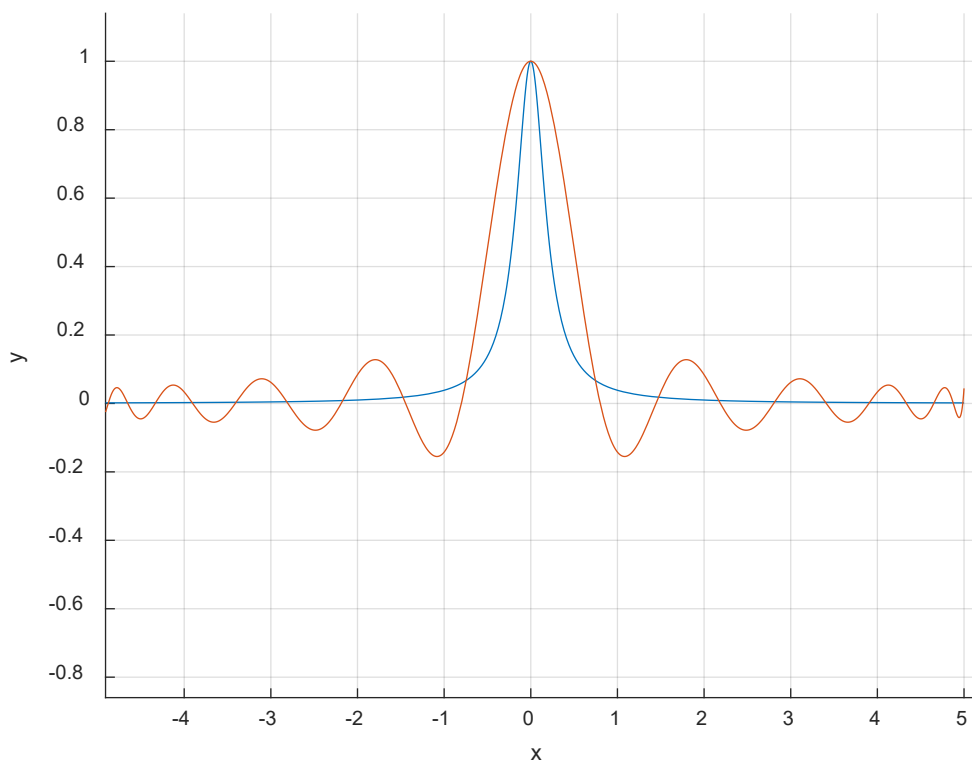
Воспользуемся Чебышевскими узлами:

```
clear; clc;
syms x;
format short
y=@(x)1./(1+25*x.^2);
hold on; grid on; xlabel('x'); ylabel('y');
fplot(y,[-5 5]); count=30;
a=-5; b=5; c=b-a;
t=a:c/count:b;
mas_i= repmat(0:1:count,count+1,1);
X=[];
X=(a+b)/2+c/2.*cos((2.*mas_i(1,:)+1)*pi/2/(count+1))
y_k=y(X)
P=LagPoly(X,y(X))
fplot(P(x),[a b])
ylim([-1 1])
```

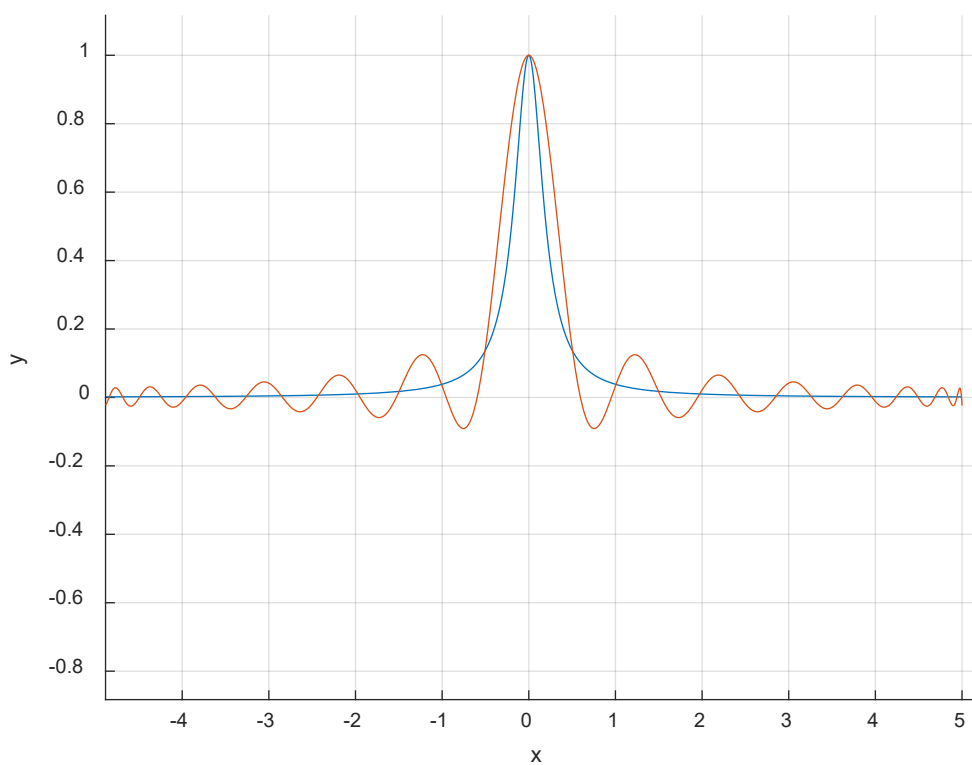
10 узлов:



20 узлов:



30 узлов:



Можно заметить, что при увеличении количества Чебышевских узлов уменьшается значение ошибки.