Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники»

«БДЗ-2»

Работу выполнил
Учащийся группы ПИН-33
Карпеченков Михаил Владимирович
Под руководством
Ярошевича Владимира Александровича

Москва 2023

9. Даны формула численного дифференцирования и таблично заданная функция $y(x)$ (данные в таблице могут содержать погрешность не более δ). Определить оптимальное значение шага $h_{\text{опт}}$, когда достигается максимально возможная точность данной формулы, а неустойчивость численного дифференцирования ещё себя не проявляет.

$$\text{ф-ла } y_2'' = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2); \quad \text{функ. } y(x) = \operatorname{ch} x \text{ на отрезке } [-1, 3]; \quad \text{погр. } \delta = 10^{-6}.$$

Файл Task9.m

```
clc,clear,clf,close all
syms x
f = cosh(x)
d1 = diff(f,x)
d2 = diff(d1,x)
d3 = diff(d2,x)
d4 = diff(d3,x)
temp = abs([subs(d4,-1),subs(d4,3)])
M4 = max(temp)
Hopt = (48*10^(-6)/cosh(3))^(1/4)
```

Вывод:

```
f =

cosh(x)


d1 =

sinh(x)

d2 =

cosh(x)

d3 =

sinh(x)

d4 =

cosh(x)

temp =

[cosh(1), cosh(3)]

M4 =

cosh(3)

Hopt =

    0.0467
```

10. Получить (письменно) приближённое значение интеграла I по квадратурной формуле $S(h)$ сначала с шагом h_1, а затем с шагом h_2. Используя метод Рунге, указать насколько значение $S(h_2)$ отличается от истинного значения интеграла I.

$$I = \int_1^3 x^3 \ln x \, dx; \quad S(h) = h \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1/2}) \text{ (ф-ла центр. прямоуг.)}; \quad h_1 = 2/4,\ h_2 = 2/10.$$

№ 10

$$I = \int_1^3 x^3 \ln x \quad dx \qquad h_1 = \frac{2}{4} \quad h_2 = \frac{2}{10}$$

$$S(h) = h \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1/2})$$

h_1:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4
1	1,5	2	2,5	3

$$S(h_1) = \frac{2}{4}(1 \ln 1 + 3,375 \ln 1,5 + 8 \ln 2 + 15,625 \ln 2,5 +$$
$$+ 27 \ln 3) = \frac{1}{2}(0 + 1,3684 + 5,5451 + 14,317 + 29,6625) \approx 20,4465$$

h_2:

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3

$$S(h_2) = \frac{2}{10}(1 \ln 1 + 0,3151 + 0,9233 + 1,9251 + 3,4280 + 5,5452$$
$$+ 9,3955 + 12,1025 + 16,7941 + 22,6022 + 29,6625) \approx 20,3387$$

$$I \approx S\left(\frac{1}{2}\right) + c\left(\frac{1}{2}\right)^2 \approx S\left(\frac{1}{5}\right) + c\left(\frac{1}{5}\right)^2$$

$$S\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{c}{4} \approx S\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{c}{25}$$

$$\frac{c}{4} - \frac{c}{25} = S\left(\frac{1}{5}\right) - S\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{21c}{100} = S\left(\frac{1}{5}\right) - S\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$c = \frac{100\left(S\left(\frac{1}{5}\right) - S\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{21}$$

$$\varepsilon = I - S\left(\tfrac{1}{5}\right) = C\,\frac{4}{100} = \left|\frac{100\left(S\left(\frac{1}{5}\right) - S\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{21 \cdot 25}\right| =$$

$$= \left|\frac{4\,(20{,}4465 - 20{,}3387)}{21}\right| \approx 0{,}0205$$

11. Предложить способ вычисления несобственного интеграла на компьютере. Указание: использовать один из методов, рассмотренных на лекции или семинаре.

$$\int_9^\infty \frac{\cos\frac{1}{1-x}}{(1+x^2)^2}dx$$

Производил вычисления при помощи метод Рунге

Файл byMethodRungle.m

```
function [ShNext] = byMethodRunge(a,b,counter,f,eps)
X=a:(b-a)/(counter-1):b;
h=X(2)-X(1);
F=f(X);
s = sum(F);
Sh=h*(s-1/2*F(1)-1/2*F(length(F)));
counter = counter*2-1;
X=a:(b-a)/(counter-1):b;
h=h/2;
F=f(X);
ShNext=Sh/2+h*(sum(F)-s);
step=0;
while(abs(Sh-ShNext)/3>eps)
    Sh=ShNext;
    s=sum(F);
    counter = counter*2-1;
    X=a:(b-a)/(counter-1):b;
    h=h/2;
    F=f(X);
    ShNext=Sh/2+h*(sum(F)-s);
    step=step+1;
end
step
ShNext;
End
```

Файл Task11.m

```
f = @(x) cos(1./(1-x))./(1+x.^2).^2;
a = 9;
b = 10000; % Верхний предел интегрирования (достаточно большое значение)
n = 1000; % Количество разбиений
disp('Мои вычисления')
```

```
result = byMethodRunge(a, b, n, f, 10^-9);
disp(result);
disp('Стандартная реализация');
defaultResult=integral(f,a,Inf);
disp(defaultResult);
```

Вывод:

```
Мои вычисления

step =

     9

   4.4854e-04

Стандартная реализация
   4.4854e-04
```

12. Для заданной матрицы вычислить подчинённую норму матрицы для следующих векторных норм: $||\mathbf{x}||_1 = \sum_i |x_i|$, $||\mathbf{x}||_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -9 & -4 \\ 9 & -2 & -5 \\ 1 & -7 & -6 \end{pmatrix}$$

Файл Task12.m

```
A = [1 -9 -4; 9 -2 -5; 1 -7 -6]
A'*A
syms l
B = [83-l -34 -55;-34 134-l 88;-55 88 77-l]
det(B)
sqrt(223.94)

C = A^(-1)
sum(abs(A),1)
sum(abs(C),2)
16 * 0.6455 * 0.8 / 9
```

Вывод:

```
A =

     1    -9    -4
     9    -2    -5
     1    -7    -6


ans =

    83   -34   -55
   -34   134    88
   -55    88    77
```

```
B =

[83 - l,      -34,     -55]
[   -34, 134 - l,       88]
[   -55,       88, 77 - l]


ans =

- l^3 + 294*l^2 - 15906*l + 48400


ans =

   14.9646


C =

    0.1045    0.1182   -0.1682
   -0.2227    0.0091    0.1409
    0.2773    0.0091   -0.3591


ans =

    11    18    15


ans =

    0.3909
    0.3727
    0.6455


ans =

    0.9180
```

13. Правая часть СЛАУ $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$ содержит погрешность, норма которой равна $||\delta\mathbf{f}||_\infty$. Оценить относительную погрешность нормы решения $\dfrac{||\delta\mathbf{x}||_\infty}{||\mathbf{x}||_\infty}$. Указание: воспользоваться оценкой $\dfrac{||\delta\mathbf{x}||_\infty}{||\mathbf{x}||_\infty} \leqslant \mu(A)\dfrac{||\delta\mathbf{f}||_\infty}{||\mathbf{f}||_\infty}$.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 5 \\ -6 & -3 & 2 \\ -3 & -6 & -3 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} -8,6 \\ 8,4 \\ 9,5 \end{pmatrix}, \quad ||\delta\mathbf{f}||_\infty = 0.1$$

№13

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 5 \\ -6 & -3 & 2 \\ -3 & -6 & -3 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} -8,6 \\ 8,4 \\ 9,5 \end{pmatrix} \quad ||\delta f||_\infty = 0,1$$

$$Ax = f$$

$$\frac{||\delta x||_\infty}{||x||_\infty} \leq \mu(A) \frac{||\delta f||_\infty}{||f||_\infty}$$

Решение

1) $\mu(A) = ||A^{-1}||_\infty \cdot ||A||_\infty$

2) $||A||_\infty = \max\limits_i \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right) = \max(|-5|+|1|+|5|, |-6|+|-3|+|2|, |-3|+|-6|+|-3|) = \max(11, 11, 12) = 12$

3) $$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} = 9 + 12 = 21$

$A_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = -(18+6) = -24$

$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = 36 - 9 = 27$

$A_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} = -(-3+30) = -27$

$A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 5 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 15 + 15 = 30$

$A_{23} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = -(30+3) = -33$

$A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 15 = 17$

$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -5 & 5 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = -(-10+30) = -20$

$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} = 15 + 6 = 21$

$\det A = -5 \cdot (-3 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6)) - ((-6) \cdot (-3) - 2 \cdot (-3)) + 5 \cdot ((-6) \cdot (-6) -$
$(-3) \cdot (-3)) = -105 - 24 + 135 = 6$

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 21 & -27 & 17 \\ -24 & 30 & -20 \\ 27 & -33 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & -4,5 & 17/6 \\ -4 & -5 & -10/3 \\ 4,5 & -5,5 & 3,5 \end{pmatrix}$$

$\|A^{-1}\|_\infty = \max_i \left(\sum_{i}^{n} |a_{ij}| \right) = \max \left(|3,5| + |-4,5| + \left|\frac{17}{6}\right|, \right.$

$\left(|-4| + |5| + \left|-\frac{10}{3}\right| \right), \left(|4,5| + |-5,5| + |3,5| \right) = \max \left(\frac{65}{6}; \frac{37}{3}; 13,5 \right) =$

$= \max (10,83; 12,33; 13,5) = 13,5$

3) $\|A_\infty\| = \max_j \left(\sum_i^n |a_{ij}| \right) = \max_i (8,6; 8,4; 9,5) = 9,5$

4) $\mu(A) = 12 \cdot 13,5 = 162$

5) $\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le 162 \cdot \frac{0,1}{9,5} = 1,7053$

Ответ: $\frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le 1,7053$