

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники»

Лабораторная работа «Дифференцирование функции, заданной таблично»

Работу выполнил
Учащийся группы ПИН-33
Карпеченков Михаил Владимирович
Под руководством
Васекина Бориса Васильевича

Москва 2023

① Выберите некоторую функцию (например, $\sin x$, $\cos x$, $\exp x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\ln x$, ...) и некоторую точку x из области определения функции. Найдите значение производной функции в выбранной точке (используя любую формулу численного дифференцирования) с точностью 10^{-3} , 10^{-6} . Пользоваться точным значением производной в качестве эталона запрещено³.

```
function[derNext] = DerSquare(f,x0,eps)
h=eps;
res=0;
der=(f(x0+h)-f(x0-h))/2/h
h=h/2;
derNext=(f(x0+h)-f(x0-h))/2/h;
while(abs(der-derNext)>=eps)
    deltaDer=abs(der-derNext)
    h=h/2
    der=derNext;
    derNext=(f(x0+h)-f(x0-h))/2/h;
end
h
deltaDer=abs(der-derNext)
```

```
clear; clc;
syms x;
format long
y=@(x)exp(x);
x0=5;
eps=10^-3;
DerSquare(y,x0,eps)
x0=5;
eps=10^-6;
DerSquare(y,x0,eps)
```

der =

1.484131838381586e+02

h =

5.000000000000000e-04

deltaDer =

1.855178766163590e-05

ans =

```

1.484131652863709e+02
der =
1.484131591382720e+02
h =
5.000000000000000e-07
deltaDer =
1.421085471520200e-07
ans =
1.484131589961635e+02

```

② Выберите некоторую функцию (например, $\sin x$, $\cos x$, $\exp x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\ln x$, ...) и некоторую точку x из области определения функции. Сравните погрешности у формул с разными порядками погрешностей (например, $y'(x) \approx \frac{y(x+h)-y(x)}{h}$ и $y'(x) \approx \frac{y(x+h)-y(x-h)}{2h}$) для последовательности убывающих шагов (например, $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$). С какими скоростями убывают погрешности для каждой формулы? Дайте теоретическую оценку и подтвердите ответ экспериментом⁴.

```

clear; clc; clf;
syms x;
format long
y=matlabFunction(exp(x));
y1=matlabFunction(diff(y(x),x,1));
y2=matlabFunction(diff(y(x),x,2));
y1minus=matlabFunction(-diff(y(x),x,1));
y2minus=matlabFunction(-diff(y(x),x,2));
y3minus=matlabFunction(-diff(y(x),x,3));
x0=5;
i=1:1:5;
h=2.^-i;
ErrorDerLinear = (y(x0+h)-y(x0))./h - y1(x0);
ErrorDerSquare = (y(x0+h)-y(x0-h))./(2./h - y1(x0));
ErrorTheoryLinear = abs(y2(fminbnd(y2minus,-x0-1, x0+1))).*h/2;
ErrorTheorySquare = abs(y2(fminbnd(y3minus,-x0-1,
x0+1))).*(h.^2)/6;
hold on; grid on; xlabel('x'); ylabel('y');
plot(h,ErrorDerLinear,'-g');
plot(h,ErrorTheoryLinear,'-b');
plot(h,ErrorTheorySquare,'-m');

```

```
plot(h,ErrorDerSquare,'-r');  
for j=1:1:length(i)-1  
    RelationLinearError = ErrorDerLinear(j)/ErrorDerLinear(j+1)  
    RelationSquareError = ErrorDerSquare(j)/ErrorDerSquare(j+1)  
end  
hold off;
```

```
RelationLinearError =  
    2.185443782584281
```

```
RelationSquareError =  
    4.037662167885960
```

```
RelationLinearError =  
    2.087845165744683
```

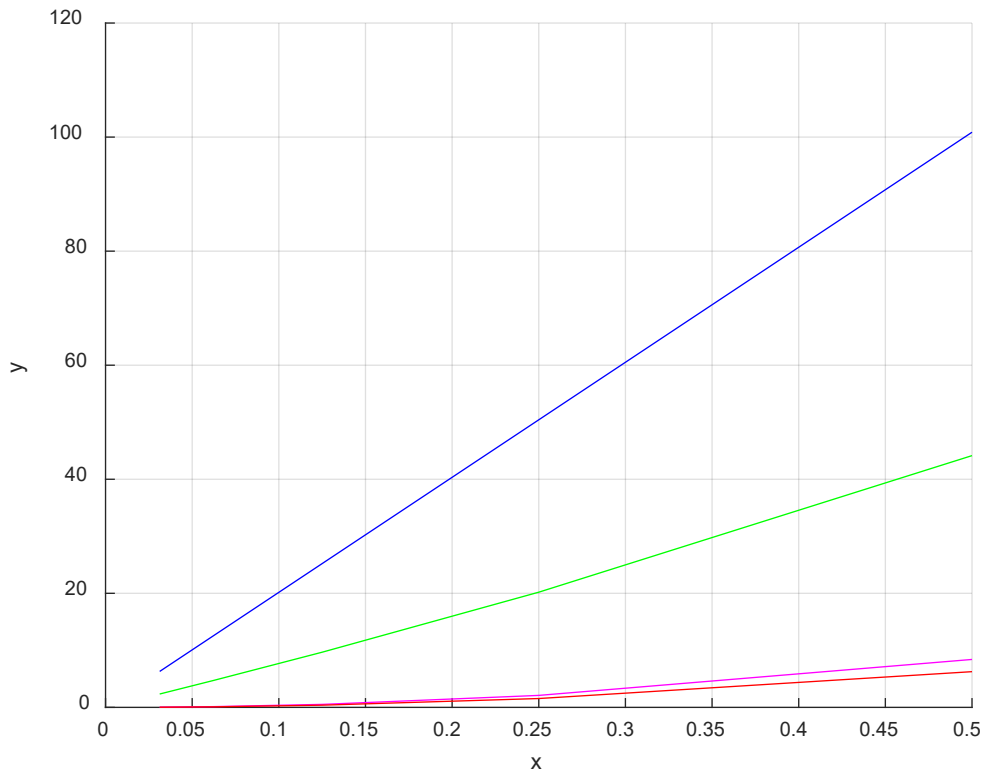
```
RelationSquareError =  
    4.009385119666721
```

```
RelationLinearError =  
    2.042772852792520
```

```
RelationSquareError =  
    4.002344382231999
```

```
RelationLinearError =  
    2.021107220184978
```

```
RelationSquareError =  
    4.000585977035284
```



③ Неустойчивость численного дифференцирования. Выберите некоторую функцию (например, $\sin x$, $\cos x$, $\exp x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\ln x$, ...) и некоторую точку x из области определения функции. Попробуйте применить формулу $y'(x) \approx \frac{y(x+h)-y(x)}{h}$ для стремящейся к нулю последовательности $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$. Будет ли погрешность $\varepsilon = \left| y'(x) - \frac{y(x+h)-y(x)}{h} \right|$ монотонно убывать при уменьшении h ? Сравните практический и теоретический результаты.

```
clear; clc; clf;
syms x;
format long
y=matlabFunction(exp(x));
y1=matlabFunction(diff(y(x),x,1));
y2=matlabFunction(diff(y(x),x,2));
x0=5;
i=1:1:40;
h=2.^-i
epsPractice=abs(y1(x0)-(y(x0+h)-y(x0))./h)
epsPractice(length(epsPractice))
hold on; grid on; xlabel('x'); ylabel('y');
```

```

%plot(h,epsPractice,'-g');
plot(log(h),log(epsPractice),'-g');
hOpt=0;
hOptLog=log(hOpt)
hOpt=2*sqrt(10^-16/y2(fminbnd(matlabFunction(-diff(y(x),x,2)),-
abs(x0)-1, abs(x0)+1)))
fhOpt=2*sqrt(y2(fminbnd(matlabFunction(-diff(y(x),x,2)),-abs(x0)-1,
abs(x0)+1))*10^-16)
plot(log(hOpt), log(fhOpt),'or')
hold off;

```

