Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники»

Лабораторная работа «Методы дихотомии, Ньютона, простых итераций»

Работу выполнил
Учащийся группы ПИН-33
Карпеченков Михаил Владимирович
Под руководством
Ярошевича Владимира Александровича

Москва 2023

① Напишите файл-функцию `f.m` и постройте график функции на отрезке $[-10; 10]$, включив командой `grid on` отображение линий сетки. Выделите отрезки, содержащие нули функции (графический способ это один из методов локализации корней). Очевидно, функция имеет корни одинарной и двойной кратности. Запишите вектор `p`, содержащий коэффициенты полинома, и найдите его корни, выполнив команду `roots(p)`.

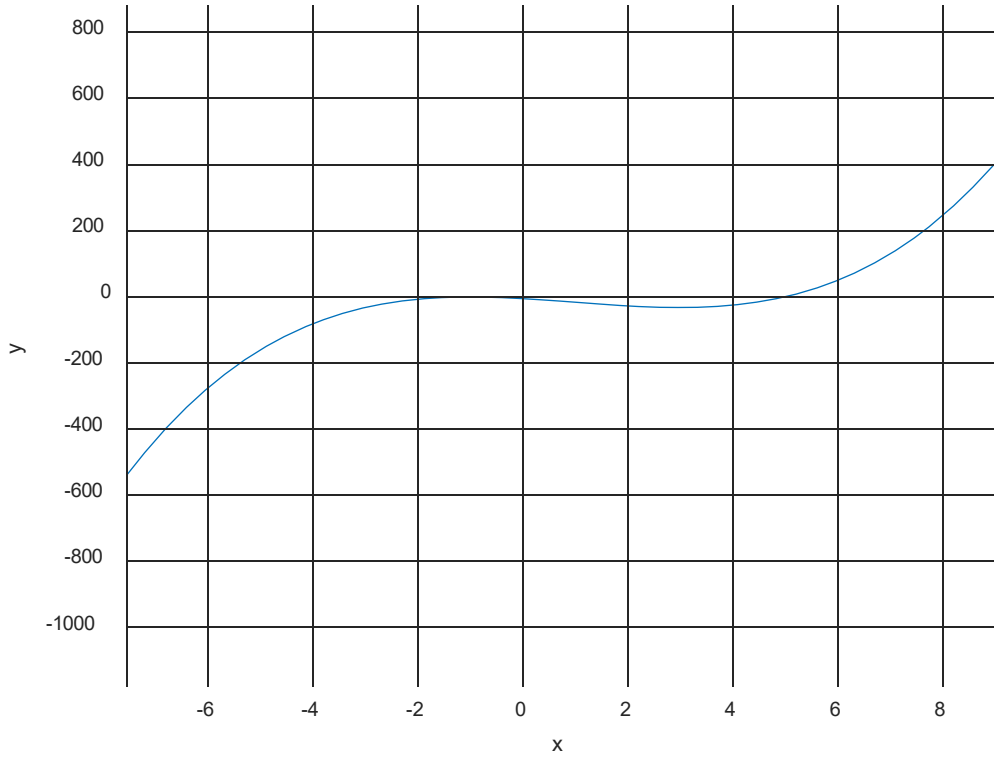
```
F=@(x)x^3-3*x^2-9*x-5
hold on; grid on; xlabel('x'); ylabel('y');
fplot(F, [-10 10]);
format long
p=[1 -3 -9 -5];
roots(p)
```

ans =

4.999999999999993 + 0.000000000000000i

-0.999999999999999 + 0.000000022357613i

-0.999999999999999 - 0.000000022357613i



① Напишите программу, реализующую нахождение корня одинарной кратности методом деления отрезка пополам. Обратите внимание, что метод дихотомии предполагает, что значения функции на концах отрезка различаются по знаку. Выведите на экран число итераций.

```
function[x] = dihotomiya(f,a,b,e)
    x=0;
    n=floor(log2(abs((b-a))/e))+1;
    c=0;
    if(f(a)*f(b)>0)
        fprintf("В данном отрезке нет корня!")
    else
        if(f(a)*f(b)==0)
            if(f(a)==0)
                x=a;
            end
            if(f(b)==0)
                x=b;
            end
        end
        if(f(a)*f(b)<0)
            for i=1:1:n
                c=(b+a)/2;
                if(f(a)*f(c)<0)
                    b=c;
                end
                if(f(a)*f(c)>0)
                    a=c;
                end
                if(f(a)*f(c)==0)
                    x=c;
                    break;
                end
                if(abs((b-a))<=e)
                    x=a;
                    break;
                end
            end
            fprintf("Количество итераций: %d\n", n);
        end
    end
end

x=dihotomiya(F,2.254789632457,6.000656584848,10^(-14))

F =
```

function_handle with value:

@(x)x^3-3*x^2-9*x-5

Количество итераций: 49

x =

4.999999999999998

① Напишите программу нахождения решений уравнения $f(x) = 0$ методом Ньютона и используйте её для поиска всех корней полинома. Выведите на экран число итераций.

② Для кратного корня использовать модифицированный метод Ньютона. Выведите на экран число итераций.

Метод Ньютона:

```
a1=3.5451515481644815554;
b1=8.51154896511841565;
x0=b1; mul=1; e=10^(-6)
x=NewtonForTasks(F,x0,a1,b1,mul,e)

a1=-1.1823219223882;
b1=-0.923280154896511841565;
x0=a1; mul=1; e=10^(-6)
x=NewtonForTasks(F,x0,a1,b1,mul,e)
```

Модифицированный метод Ньютона (для корня кратности 2)

```
a1=-1.1823219223882;
b1=-0.923280154896511841565;
x0=a1; mul=2; e=10^(-6)
x=NewtonForTasks(F,x0,a1,b1,mul,e)
```

Количество итераций: 6

x =

5.000000000000015

Количество итераций: 18

x =

-1.000000716474364

Количество итераций: 3

x =

-0.999999999995509

Действительно, можно заметить, что модифицированный метод Ньютона дает верный результат в разы быстрее, чем обычный метод Ньютона.

① Найдем методом простых итераций корни уравнения $x^2 - a = 0$ (квадратный корень из числа a). Приведем уравнение к виду, удобному для использования метода: $x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x} + x\right)$. Можно убедиться, что правая часть уравнения удовлетворяет условию сходимости метода (в отличие от таких представлений как: $x = x^2 + x - a$, $x = \frac{a}{x}$). Напишите программу вычисления квадратного корня с машинной точностью.

Правая часть действительно удовлетворяет условию сходимости метода (достаточно взять 1-ую производную от правой части уравнения, чтобы понять, что модуль этой производной не превосходит 1)

```
function[Xnext] = SIM(fi,x0,e)
    X=x0;
    Xnext=X+2*e;
    n=0;
    while(abs(Xnext-X)>=e)
        X=Xnext;
        Xnext=fi(Xnext)
        n=n+1;
    end
    fprintf("Количество итераций: %d\n", n);
end


a=3;
fi=@(x)1/2*(a/x+x)
x0=1;
e=10^(-10);
solution=SIM(fi,x0,e)
```

fi =

function_handle with value:

@(x)1/2*(a/x+x)

Количество итераций: 6

solution =

1.732050807568877

② Исследовать область сходимости представления $x = x^2 + x - a$. Произвести расчёт в найденной области и за её пределами.

Из условия сходимости метода простых итераций (МПИ) находим область сходимости:

$|2xx + 1| < 1 \rightarrow xx \in [-1; 0]$

А а, в свою очередь, находится из того, что корень уравнения x^2=a (которое мы и решаем) должен находится в области сходимости (ввиду условия, которое я упоминал выше) →

$0 \leq aa \leq 1$

Это можно проверить в матлабе:

```
function[Xnext] = SIM(fi,x0,e)
    X=x0;
    Xnext=X+2*e;
    n=0;
    while(abs(Xnext-X)>=e)
        X=Xnext;
        Xnext=fi(Xnext);
        n=n+1;
    end
    fprintf("Количество итераций: %d\n", n);
end
```

Возьмем а чуть больше, чем 1:

```
fi=@(x)x^2+x-1.0001;
x1=solve(diff(fi,x)==-1)
x2=solve(diff(fi,x)==1)
x0=-0.5;
e=10^(-3);
s=SIM(fi,x0,e)
```

Алгоритм зацикливается (даже на плохой точности (10^-3)), вот последние значения X:

Xnext =

-1.010000000000671

Xnext =

-0.989999999999315

Xnext =

-1.010000000000671

Xnext =

-0.989999999999315

Xnext =

-1.010000000000671

Xnext =

-0.989999999999315

Xnext =

-1.010000000000671

Xnext =

-0.989999999999315

Xnext =

-1.010000000000671

Xnext =

-0.989999999999315

Xnext =

-1.010000000000671

Xnext =

-0.989999999999315

Xnext =

-1.010000000000671

Xnext =

-0.989999999999315

Xnext =

-1.010000000000671

Xnext =

-0.989999999999315

Xnext =

-1.010000000000671

Xnext =

-0.989999999999315

Xnext =

-1.010000000000671

Xnext =

-0.989999999999315

Xnext =

-1.010000000000671

Xnext =

-0.989999999999315

Теперь a=0.9999:

x1 =

-1

x2 =

0

Количество итераций: 29954

s =

-0.999449900190642

В первом случае мы вышли за область сходимости, поэтому алгоритм зациклился, а во втором случае получили верный ответ.

① В MATLAB для решения уравнений вида $f(x) = 0$ есть функция `fzero`, в качестве параметров которой передаётся имя файл-функции и начальное приближение корня (или отрезок его содержащий). Обратите внимание, что `fzero` так же как и метод дихотомии требует, чтобы при переходе через корень функция меняла знак (например, с её помощью не удастся найти нули функции, $f(x) = \sin x + 1$, корни полинома двойной кратности и т.д.)

Попробуем выполнить следующий код:

```
fi = @(x) sin(x) + 1;
x0 = fzero(fi,[-pi pi])
```

Error using fzero (line 290)

The function values at the interval endpoints must differ in sign.

Error in f (line 43)

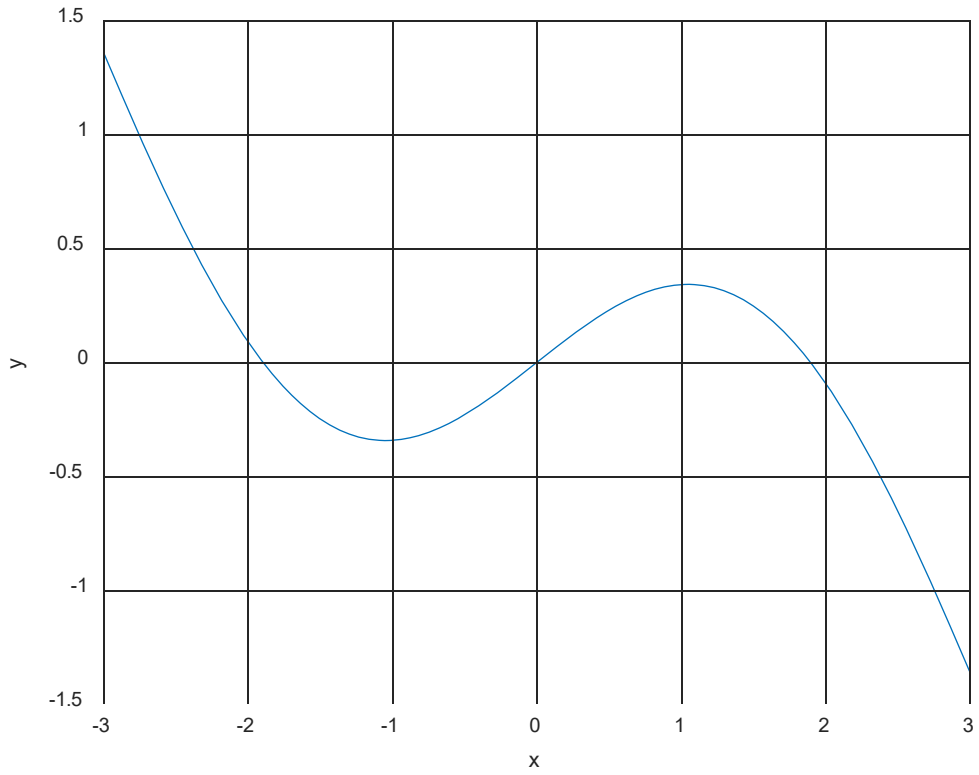
x0 = fzero(fi,[-pi pi])

Получили вполне ожидаемую ошибку (необходима смена знака функции при переходе через корень)

③ Сделайте предположения о том, где находятся корни уравнения $\sin x = x/2$ и найдите их, используя все изученные методы.

График функции – синусоида (обычная), которая колеблется около прямой $yy = -\frac{xx}{2}$

Будет 3 корня (один около нуля, второй около -2 и третий симметрично второму – около 2)



Метод дихотомии:

```
fi=@(x)sin(x)-x/2;
hold on; grid on; xlabel('x'); ylabel('y');
fplot(fi, [-3 3]);
e=10^(-6);
x=dihotomiya(fi,-3,-1,e)
x=dihotomiya(fi,-1,1,e)
x=dihotomiya(fi,1,3,e)
```

Количество итераций: 21

x =

-1.895494461059570

Количество итераций: 21

x =

0

Количество итераций: 21

x =

1.895493507385254

Похоже на правду.

Метод Ньютона (модифицированный применять нет смысла, все корни кратности 1):

Количество итераций: 4

x =

-1.895494267033981

e =

1.000000000000000e-06

Количество итераций: 3

x =

9.529120656610879e-22

e =

1.000000000000000e-06

Количество итераций: 4

x =

1.895494267033981

Ответы сошлись с предыдущими ответами.

МПИ (метод простых итераций):

```
fi=@(x)sin(x)+x/2;
e=10^(-6);
x0=cos(pi)
s=SIM(fi,x0,e)
```

```
x0=0.001;
s=SIM(fi,x0,e)
x0=cos(pi/3)
s=SIM(fi,x0,e)
```

Количество итераций: 11

s =

-1.895494156499375

Количество итераций: 28

s =

1.895494087325744

x0 =

0.500000000000000

Количество итераций: 13

s =

1.895494172982301

Можно заметить, что мы вместо корня x=0 получили корень x=1.895494172982301

Это произошло, потому что 0 не находится в области сходимости функции $\varphi\varphi(xx)$ (её область сходимости: cos(x)<0.5). Поэтому, чтобы получить 0 нужно подобрать какую-нибудь другую функцию для этого метода.

Вывод: В этой лабораторной работе я познакомился с методами решения с заданной точностью нелинейных уравнений и применил их на практике.