Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники»

Лабораторная работа «Интерполяция функций. Полиномы Лагранжа, Ньютона»

Работу выполнил
Учащийся группы ПИН-33
Карпеченков Михаил Владимирович
Под руководством
Васекина Бориса Васильевича

Москва 2023

Пусть есть прибор, который в дискретные моменты времени выдаёт сигнал по закону $f(t) = \sin \pi t$. Допустим, наблюдатель зарегистрировал пять отсчётов в моменты времени $t_i = \frac{i}{4}$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Задачей наблюдателя (который не знает закона выдачи сигнала) является получение приближённого значения функции на отрезке $[0, 1]$ в любой момент времени.

① Используя линейную интерполяцию, найдите значения функции в точках: $t = 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ и сравните с реальным значением синуса в этих точках. Постройте графики синуса и ломаной, проходящей через пять заданных точек. Отметьте, насколько сильно они различаются в разных частях графика. Чем это обусловлено?

```
clear; clc;
syms x;

y=@(x)sin(pi*x);
t=[0 1/6 1/3 1/2];
X=0:1/4:1
Y=y(X);
Apoints=[];
Bpoints=[];
ta=1;
for i=1:1:length(Y)-1

   while(t(i)>X(ta+1))
       ta=ta+1
   end
   Apoints=[Apoints (Y(ta+1)-Y(ta))/(X(ta+1)-X(ta))];
   Bpoints=[Bpoints Y(ta)-X(ta)*Apoints(i)];
   ta=1;
end
Apoints
Bpoints
hold on; grid on; xlabel('x'); ylabel('y');
fplot(y,[0 1])
for i=1:1:length(Y)-1
    plot(t(i),t(i)*Apoints(i)+Bpoints(i),'or')
end
InterPointsY=[t.*Apoints+Bpoints]
SinPointY=y(t)
```

Output:

X =

0   0.2500   0.5000   0.7500   1.0000

Apoints =

2.8284   2.8284   1.1716   1.1716

Bpoints =

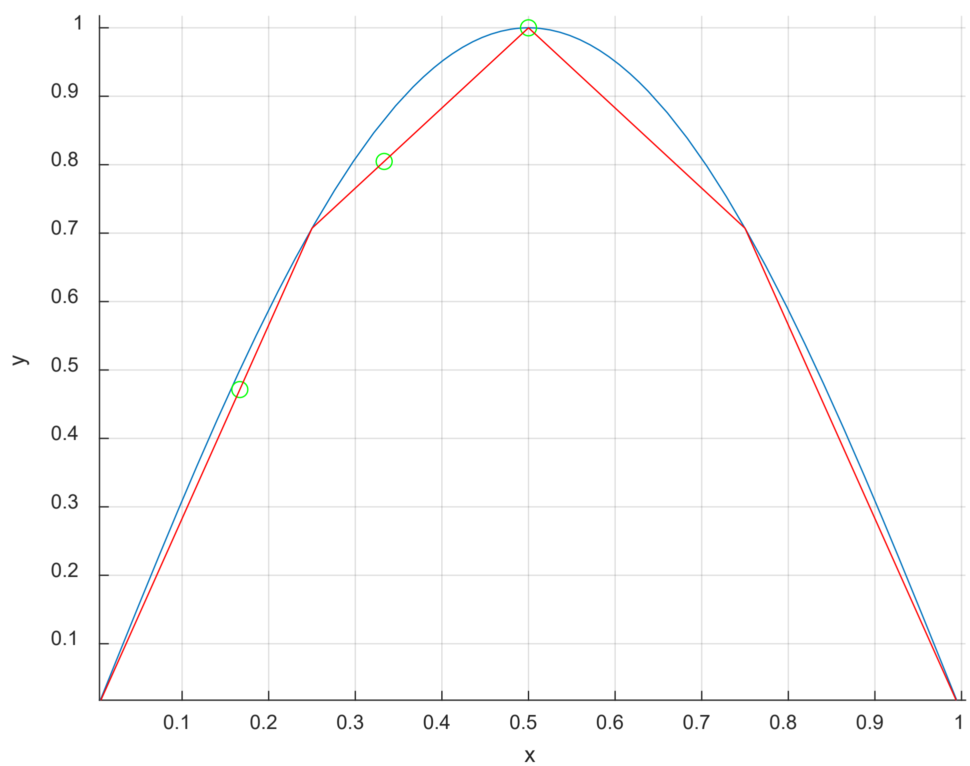
0   0   0.4142   0.4142

InterPointsY =

0   0.4714   0.8047   1.0000

SinPointY =

0   0.5000   0.8660   1.0000



Значения на графике синуса и на графике того, что я построил, так сильно различаются ввиду того, что в этом задании мы используем самый простой вид интерполяции – линейную интерполяцию. Также заметное различие в значениях обусловлено малым количеством узлов интерполяции.

① Постройте по заданным пяти точкам интерполяционный многочлен Лагранжа или Ньютона и, используя его, найдите значения функции в точках $t = 0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$, Сравните результаты со значениями, полученными

при линейной интерполяции, и значениями синуса в этих точках. Постройте графики синуса и интерполяционного многочлена. Какую максимальную ошибку мы допускаем при аппроксимации синуса данным полиномом? Сравните экспериментальную погрешность с теоретической.

```
function[P] = LagPoly(t,F)
syms x;
temp = repmat (t',1,length(t));
power = repmat (0:(length(t)-1),length(t),1);
A = temp.^power
B=F'
X=inv(A)*B;
P=@(x)(sum(vpa(X'.*x.^power(1,:),10)));
end
```

```
P=LagPoly(X,y(X))
P(x)
ezplot(P(x),[0 1])
for i=1:1:length(t)
   P(t(i))
   plot(t(i),P(t(i)),'og')
end
```

Output:

X =

0   0.2500   0.5000   0.7500   1.0000

ans =

0

ans =

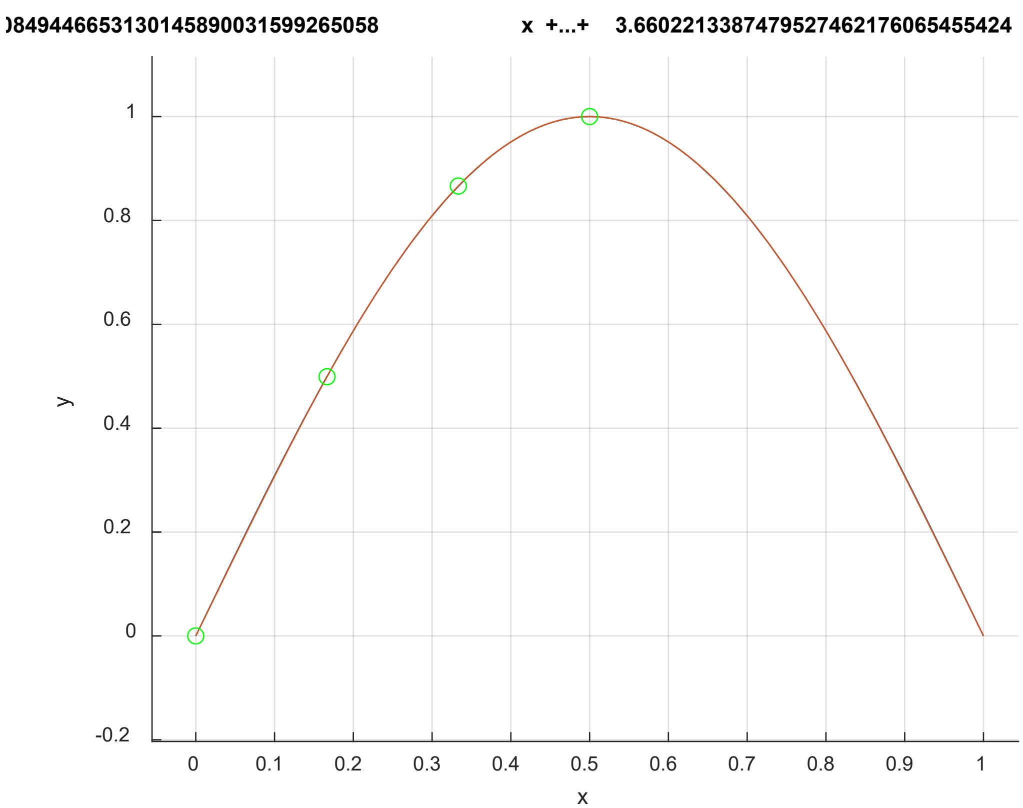
0.49907065835265548500720989011137

ans =

0.86629493000772994637515012072981

ans =

1.0000000000000030253577421035516



Можно заметить что график синуса и многочлена Лагранжа на отрезке [0; 1] почти не различаются.

Оценим погрешность:

Теоретическая:

```
dfminus=matlabFunction(-diff(y,x,length(X)))
```

```
df=matlabFunction(diff(y,x,length(X)))
w=@(x)prod(x-X)
w(x)
maxwX=fminbnd(@(x)(-1)*prod(x-X),X(1),X(length(X)))
maxw=w(maxwX)
maxdf=df(fminbnd(dfminus,X(1),X(length(X))))
MaxwTheory=maxdf/factorial(length(X)+1)*maxw
```

Output:

MaxwTheory =

0.0015

Практическая:

```
Prminus=matlabFunction(-abs(P(x)-y(x)))
Pr=matlabFunction(abs(P(x)-y(x)))
MaxPractice=Pr(fminbnd(Prminus,X(1),X(length(X))))
```

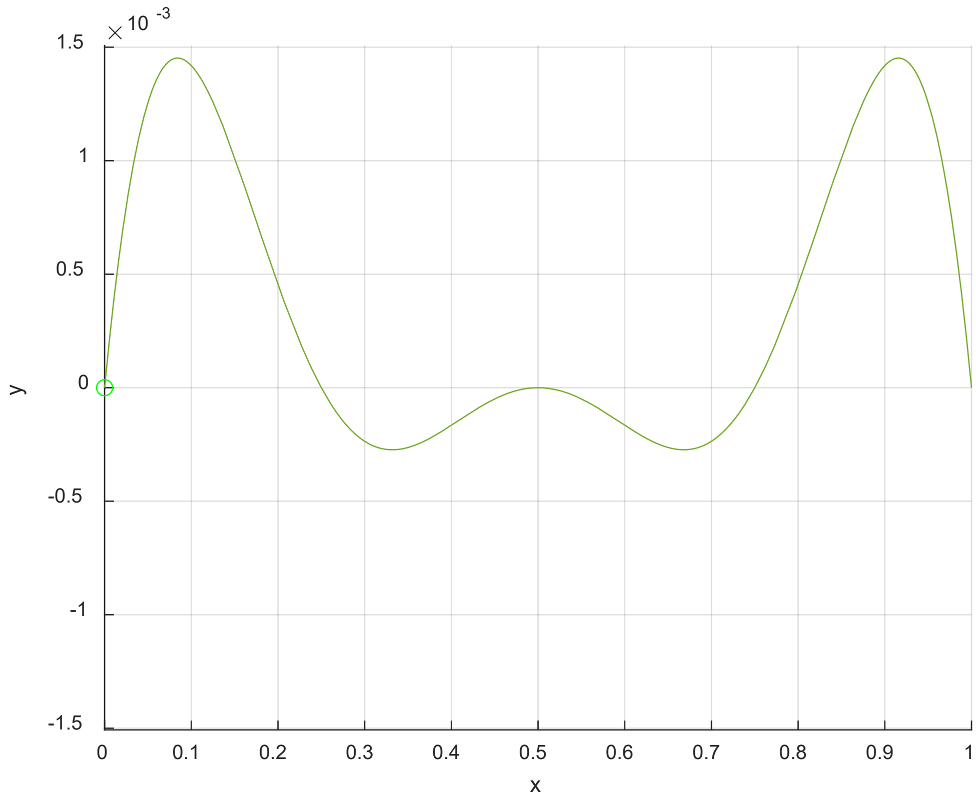
Output:

MaxPractice =

2.6993e-04

График теоретической погрешности:

```
R=feval(df,x)/factorial(length(X)+1)*w(x)
fplot(R,[0 1])
ylim([-MaxwTheory, MaxwTheory])
```



Максимальное значение экспериментальной ошибки не превышает максимальное значение теоретической ошибки.

② В программе сделать возможность строить многочлен Лагранжа или Ньютона для произвольного набора точек $t = t_0, t_1, \ldots, t_n$.

③ При вычислении многочлена стараться заменить циклы матричными операциями (см. первое практическое занятие).

```
function[P] = LagPoly(t,F)
syms x;
temp = repmat (t',1,length(t));
power = repmat (0:(length(t)-1),length(t),1);
A = temp.^power
B=F'
X=inv(A)*B;
P=@(x)(sum(vpa(X'.*x.^power(1,:),10)));
end
```

на вход функции подается вектор значений точек (t) и вектор значений неизвестной функции в точках из вектора t.

① Найдите значение интерполяционного полинома при $t = 2$. Почему оно так сильно отличается от значения синуса в этой точке?

```
P(2)
```

ans =

8.4709960243659097045565431471914

Потому что значение t=2 не принадлежит отрезку [0;1], в котором мы производим интерполяцию (это влечет за собой очень большую практическую погрешность, ведь коэффициенты полинома Лагранжа были посчитаны для точек из отрезка [0;1])

② Задайте функцию Рунге $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ на отрезке $[-5, 5]$ в десяти равноотстоящих точках. Сравните значения функции и интерполяционного полинома при $x = 4,5$. Постройте графики функции и полинома на заданном отрезке и объясните поведение интерполяционного полинома. Посмотрите, что будет происходить при постепенном увеличении числа узлов интерполяции и подумайте, как можно избавиться от получившегося эффекта.

③ Для приближения функции Рунге используйте Чебышёвские узлы. Постройте графики функции и многочлена.

```
P(4.5)
y(4.5)
```

ans =

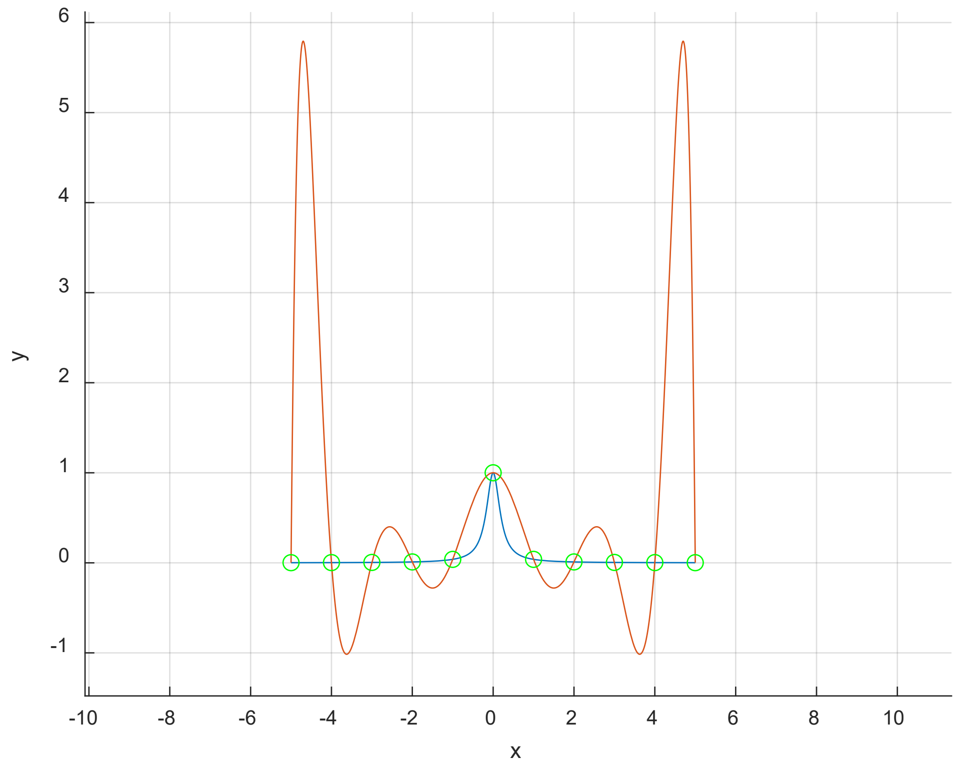
4.6496952901589903725109538136908

ans =

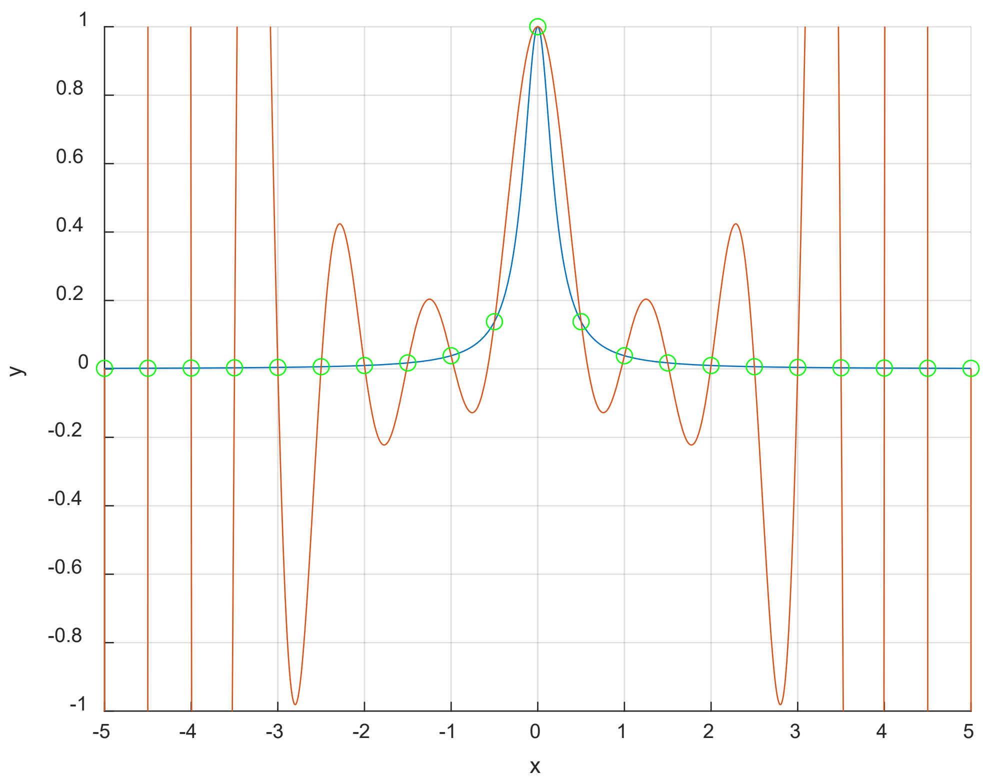
0.0020

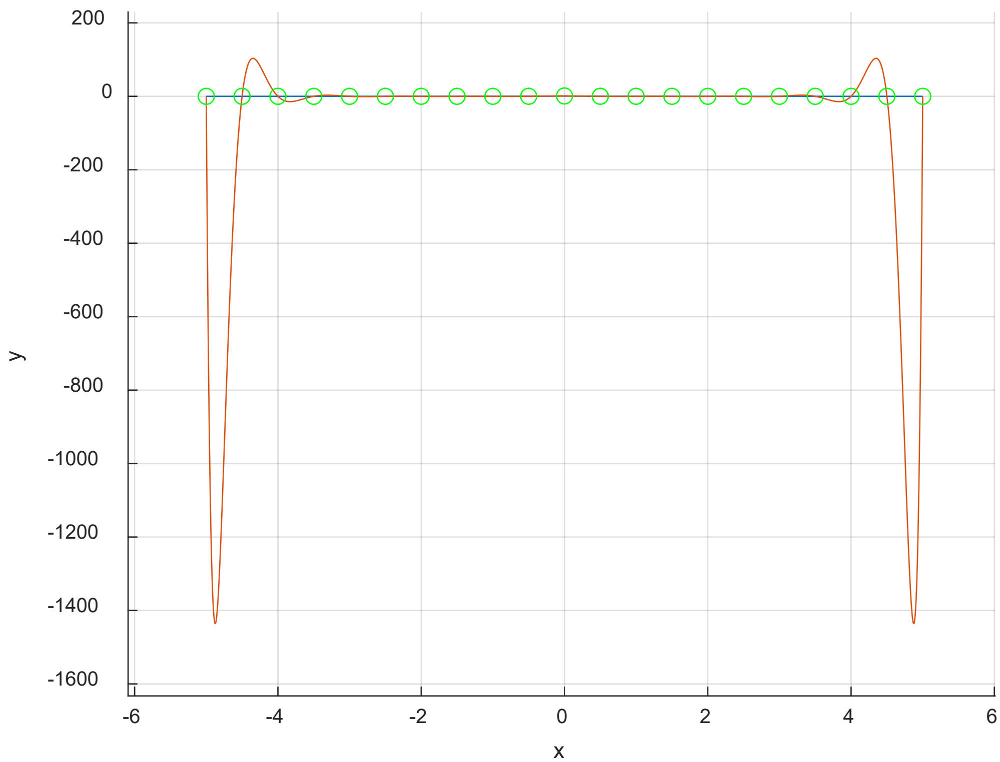
Значения функции и значение полинома в точке 4.5 очень сильно различаются, потому что

10 узлов:

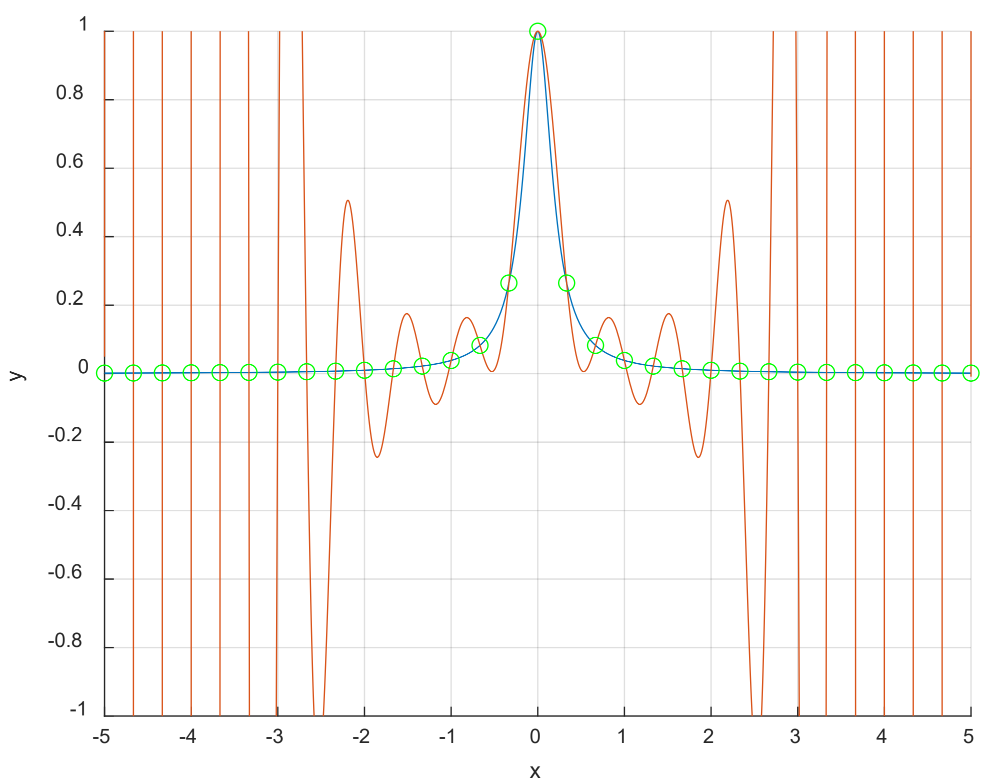

6
5
4
3
2
1
0
-1
y
-10
-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
x

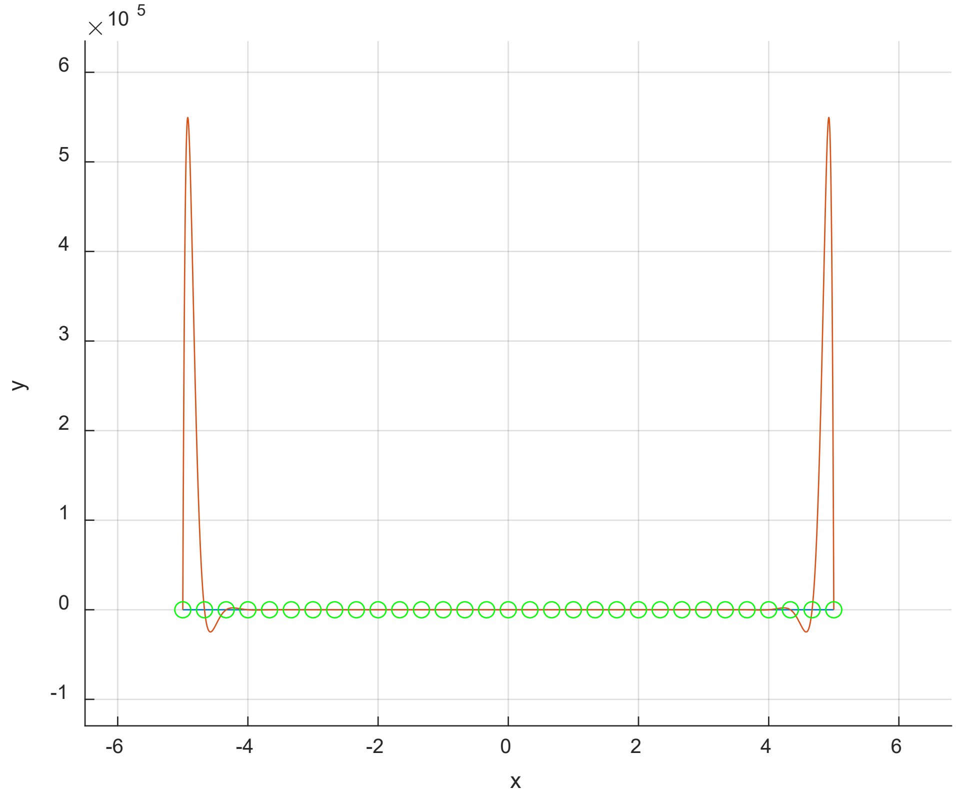
20 узлов:


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
y
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
x


200
0
-200
-400
-600
-800
-1000
-1200
-1400
-1600
y
-6
-4
-2
0
2
4
6
x

30 узлов:

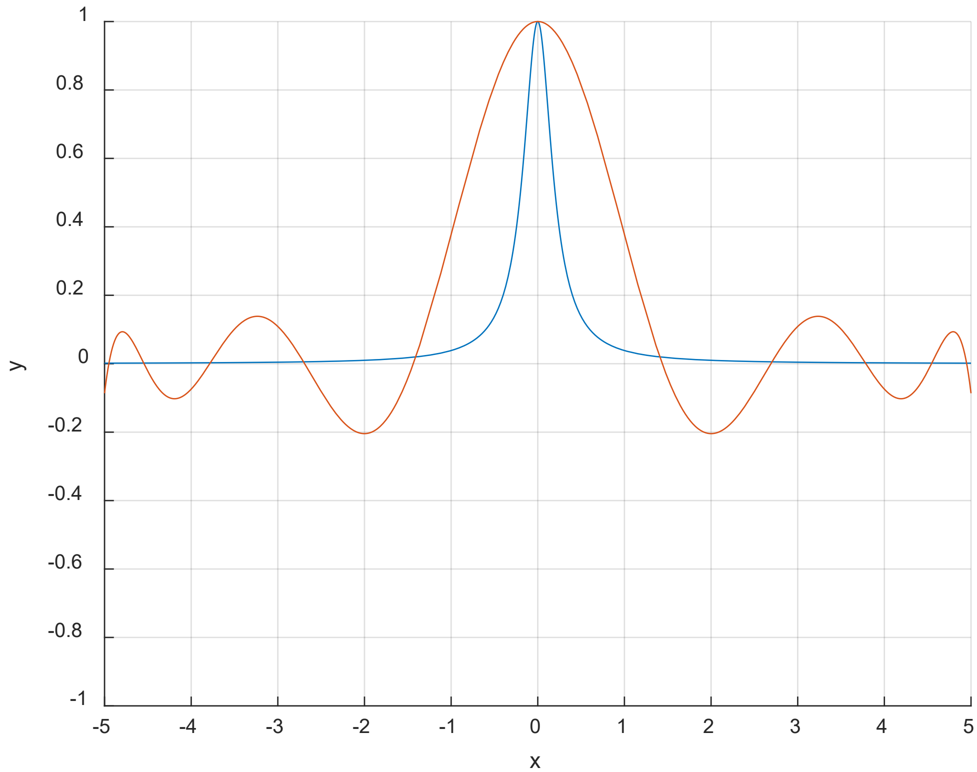

1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
y
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
x



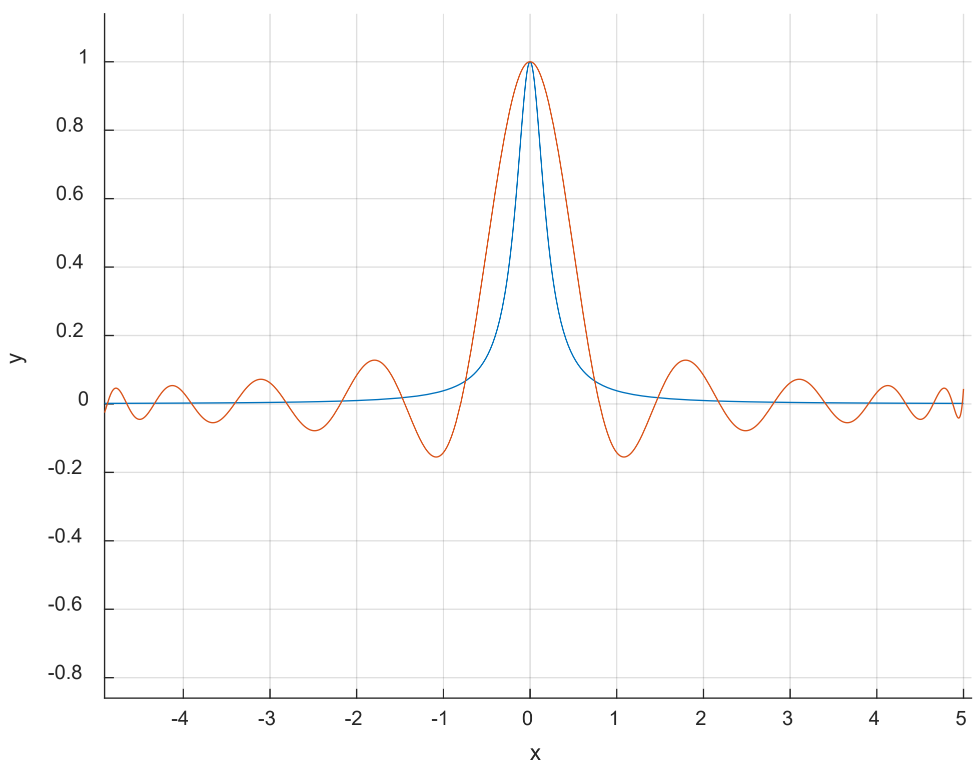
Воспользуемся Чебышевскими узлами:

```
clear; clc;
syms x;
format short
y=@(x)1./(1+25*x.^2);
hold on; grid on; xlabel('x'); ylabel('y');
fplot(y,[-5 5]); count=30;
a=-5; b=5; c=b-a;
t=a:c/count:b;
mas_i=repmat(0:1:count,count+1,1);
X=[];
X=(a+b)/2+c/2.*cos((2.*mas_i(1,:)+1)*pi/2/(count+1))
y_k=y(X)
P=LagPoly(X,y(X))
fplot(P(x),[a b])
ylim([-1 1])
```

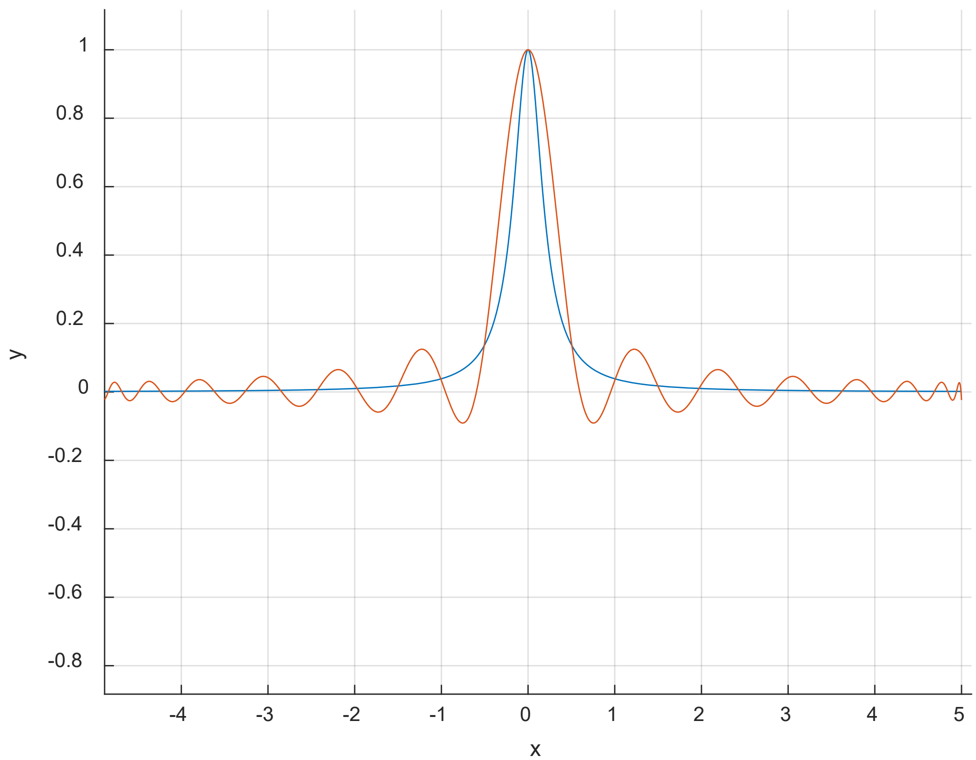
10 узлов:



20 узлов:



30 узлов:



Можно заметить, что при увеличении количества Чебышевских узлов уменьшается значение ошибки.