Autor/Estudiante:

Miguel Maldonado
Lic. Ciencias de la Computacion

Empezamos de la definicion de logaritmo, sabemos que:

$$\text{si } y = ln(x)$$

Decimos que el logaritmo en base e de un numero y,
es el numero al que hay que elevar la base para obtener y.

$$e^x = y$$

Enunciamos algunas propiedades de logaritmos para su posterior uso.

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \tag{1}$$

$$\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y \tag{2}$$

$$\log_a(x)^y = y \log_a x \tag{3}$$

Para demostrar la derivada de $y = ln(x)$ tomamos la
definicion de Derivada.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

entonce hacemos que para $y = ln(x)$ osea $f(x) = ln(x)$
aplicamos la definicion:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{ln(x+h) - ln(x)}{h}$$

Utilizando la propiedad (2) de logaritmos.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{ln(\frac{x+h}{x})}{h}$$

Sacamos factor comun x.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{ln(\frac{(1+\frac{h}{x})x}{x})}{h}$$

Simplificamos.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{ln(1 + \frac{h}{x})}{h}$$

Expresamos la expresion anterior de la siguiente forma aplicando algebra.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(ln(1 + \frac{h}{x}))$$

Utilizando la propiedad (3) de logaritmos.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} ln(1 + \frac{h}{x})^{\frac{1}{h}}$$

Lo que debemos hacer es llegar a la definicion de e que es la siguiente.

$$\lim_{h \to 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}} = \text{e}$$

Para ello reemplazaremos la expresion.

$$\frac{h}{x} = u$$

A lo que es igual decir.

$$h = ux$$

Y lo reemplazamos en la expresion de la siguiente forma.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} ln(1 + u)^{\frac{1}{ux}}$$

Que es lo mismo decir.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} ln(1 + u)^{\frac{1}{x}\frac{1}{u}}$$

Aplicamos propiedad (3) de logaritmos.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} ln(1 + u)^{\frac{1}{u}}$$

Y por definicion de e enunciado anteriormente y valuando el limite tenemos lo siguiente.

$$f'(x) = \frac{1}{x} ln(e)$$

Aplicando definicion de logaritmo resulta.

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$