Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα
Project 2

Μιχαήλ Ανάργυρος Ζαμάγιας
ΤΡ5000

2 Ιουνίου 2020

Περιεχόμενα

Άσκηση 1

1.1 Ερώτημα

Δίνεται το σύστημα (1.1). Γράψτε αυτό το σύστημα στην μορφή $A\bar{x} = \bar{b}$ για κατάλληλα διανύσματα $\bar{x}$ και $\bar{b}$. Εδώ μ είναι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας. Φτιάξτε ένα πρόγραμμα που να δέχεται ως δεδομένα έναν $3x3$ πίνακα A και ένα $3x1$ διάνυσμα $\bar{b}$ και να είναι σε θεση να μας πει αν το σύστημα είναι αόριστο ή αδύνατο ή έχει μοναδική λύση. Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση πρέπει να δίνει αυτή την λύση υπολογισμένη με την μέθοδο του επαυξημένου πίνακα (απαλοιφή Gauss). Δώστε τα αποτελέσματα του προγράμματός σας στο σύστημα εξισώσεων (1.1) καθώς και στο σύστημα (1.2).

$$\begin{aligned} 3x + 4y + 2z &= 3 \\ x - 2y &= 3 \\ \mu x + 3y + z &= 2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} \mu x + y + z &= 3 \\ x + 2y &= \mu \\ (\mu - 1) + 3y + z &= 2 \end{aligned} \tag{1.2}$$

1.2 Λύση

1.2.1 Πρόγραμμα

Το (1.1) γράφεται ως (1.3) στην μορφή $A\bar{x} = \bar{b}$. Ομοίως, το (1.2) γράφεται ως (1.4), με $\mu = 0$ για αριθμό μητρώου 5000.

$$(1.3) \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\bar{b}}$$

$$(1.4) \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\bar{b}}$$

Η έξοδος του προγράμματός μου για τα συστήματα (1.3) και (1.4):

```
A =
   3   4   2
   1  -2   0
   0   3   1
b =
   3
   3
   2
Given linear system has a unique non-trivial solution:
x = -2.0000
y = -2.5000
z =  9.5000


A =
   0   1   1
   1   2   0
  -1   3   1
b =
   3
   0
   2
Given linear system has a unique non-trivial solution:
x =  0.50000
y = -0.25000
z =  3.2500
```

Το κύριο πρόγραμμα:

```
clc;
clear all;
close all;

#   matrix A with system coefficients
A = [3, 4, 2; 1, -2, 0; 0, 3, 1];
#   matrix b with system constants
b = [3; 3; 2];
#   print A and b
disp("A =");
disp(A);
disp("b =");
disp(b);
#   run first task's logic
[x, y, z] = lin_sys(A, b)

#   add new line to seperate outputs
disp("\n")

#   matrix A with system coefficients
A = [0, 1, 1; 1, 2, 0; -1, 3, 1];
#   matrix b with system constants
b = [3; 0; 2];
#   print A and b
disp("A =");
disp(A);
disp("b =");
disp(b);
#   run first task's logic
[x, y, z] = lin_sys(A, b)
```

Η *συνάρτηση* lin_sys:

```
#   check if linear system has solutions
function [x, y, z] = lin_sys(A, b)
    #   calulcate A's determinant
    det_A = det(A);
    #   check if the system has a unique non-trivial solution
    #   check if A's determinant is non-zero
    if (det_A != 0)
        disp("Given linear system has a unique non-trivial solution:")
        #   calculate system's unique non-trivial solution
        #   using Gaussian elimination
        Axb_roots = A\b;
        #   convert negative zeros to zeros (-0 to 0)
        Axb_roots(Axb_roots == 0) = 0;
        #   diplay solution
        x = Axb_roots(1);
        y = Axb_roots(2);
        z = Axb_roots(3);
    else
        #   get the size of b matrix
        n = size(b)(1);
        #   calculate Cramer's determinants for the system
        x_up = A;
        y_up = A;
        z_up = A;
        for i = 1 : n
            x_up(i, 1) = b(i);
        end
        det_x = det(x_up)/det_A;
        for i = 1 : n
            y_up(i, 2) = b(i);
        end
        det_y = det(y_up)/det_A;
        for i = 1 : n
            z_up(i, 3) = b(i);
        end
        det_z = det(z_up)/det_A;
        #   check if all of Cramer's determinants are equal to zero,
        #   then the system has infinite solutions
        if (det_x == 0 && det_y == 0 && det_z == 0)
            disp("Given linear system has infinite solutions.")
        #   if not all of Cramer's determinants are equal to zero,
        #   then the system has no non-trivial solutions
        else
            disp("Given linear has no non-trivial solutions.")
        endif
    endif
endfunction
```

Άσκηση 2

2.1 Ερώτημα

Φτιάξτε ένα πρόγραμμα για την αντιστροφή ενός πίνακα A με την μέθοδο Gauss, προσαρτώντας δηλαδή τον ταυτοτικό πίνακα Α και ακολουθώντας τον αλγόριθμο της απαλοιφής Gauss. Εξηγήστε γιατί με αυτόν τον τρόπο παίρνετε τον αντίστροφο πίνακα. Το πρόγραμμά σας πρέπει να είναι σε θέση να βρίσκει αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Εφαρμόστε το πρόγραμμά σας στον πίνακα (2.1).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & \mu \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

2.2 Λύση

2.2.1 Πρόγραμμα

Ο πίνακας (2.1) γράφεται ως (2.2) για $\mu = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Η έξοδος του προγράμματός μου για τον πίνακα (2.2):

```
Matrix A is non-invertible.
```

Το πρόγραμμα:

```
clc;
clear all;
close all;

#   square matrix A
A = [1, 2, 1; 2, 1, 0; -1, 1, 0];
#   make an identity matrix the size of A
I_M = eye(size(A)(1));
#   apply gaussian elimination to A and I
B = round(A\I_M);
#   convert negative zeros to zeros (-0 to 0)
B(B == 0) = 0;

#   check if A is invertible based on the relation A*A^-1=I,
#   check if A*B is equal to I, where B=A^-1
if (isequal(A*B, I_M) == 1)
    disp("Matrix A is invertible.")
    disp("A =");
    disp(A);
    disp("B = A\\I");
    disp(B);
else
    disp("Matrix A is non-invertible.")
endif
```

Άσκηση 3

3.1 Ερώτημα

Θεωρήστε τα διανύσματα του (3.1), όπου μ είναι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας. Ελέγξτε με το χέρι αν τα παραπάνω διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα ή όχι χωρίς την χρήση του κριτηρίου της ορίζουσας. Αποτελούν αυτά τα διανύσματα βάση του R^3; Κατόπιν φτιάξτε ένα πρόγραμμα που να αποφασίζει αν μία οποιαδήποτε τριάδα διανυσμάτων στο R^3 αποτελεί βάση του R^3 κάνοντας χρήση του κριτηρίου της ορίζουσας.

$$\begin{aligned} u &= 3i - 4j + 5k \\ v &= 2i - 3j + k \\ w &= i - j + \mu k \end{aligned} \tag{3.1}$$

3.2 Λύση

3.2.1 Έλεγχος με το χέρι

Στο χέρι

Το σύστημα διανυσμάτων (3.1) γράφεται ως το (3.2), για $\mu = 0$.

$$u = 3i - 4j + 5k$$
$$v = 2i - 3j + k \tag{3.2}$$
$$w = i - j + 0k$$

Από το (3.2) μπορώ να πάρω την σχέση:

$$\lambda_1 \bar{u} + \lambda_2 \bar{v} + \lambda_3 \bar{w} = \bar{0} \tag{3.3}$$

Και για να είναι γραμμικά ανεξάρτητα τα $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ πρέπει να ισχύει $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$.

$$\begin{gathered} \lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{b}} \end{gathered} \tag{3.4}$$

Με γραμμοπράξεις μετατρέπω τον πίνακα A του (3.4) σε ανηγμένο κλιμακωτό:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-(1/3)R_1]{R_2-(2/3)R_1} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_2} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-(1/4)R_3]{R_2+(7/3)R_2}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-3R_2]{R_1-5R_3} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+4R_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1/3)R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Είναι:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{b}} \implies \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Άρα όντως είναι $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$, οπότε και τα $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στο R^3.

Στην Octave

Για να είναι γραμμικά ανεξάρτητα τα $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ πρέπει να ισχύει η σχέση από το (3.3):

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Από το γραμμικό σύστημα εξισώσεων (3.4):

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathrm{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{b}} \tag{3.5}$$

Εφαρμόζω στο (3.5) την συνάρτηση lin_sys[1] από την Άσκηση 1 και δίνει έξοδο:

```
Given linear system has a unique non-trivial solution:
l1 = 0
l2 = 0
l3 = 0
```

Έτσι, με $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$ τα $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα στο R^3.

Το πρόγραμμα:

```
clc;
clear all;
close all;

#   vectors u, v, w
u = [3, -4, 5];
v = [2, -3, 1];
w = [1, -1, 0];
#   matrix A from vectors
A = [u; v; w];
#   make zero column matrix b the size of A
b = zeros(size(A)(1), 1);
#   run first task's logic
[l1, l2, l3] = lin_sys(A, b)
```

[1] Η συνάρτηση lin_sys στην σελίδα 5.

3.2.2 Πρόγραμμα

Ένα σετ m διανυσμάτων μήκους n είναι γραμμικά ανεξάρτητο όταν η ορίζουσα του πίνακα, που προκύπτει με τα διανύματα αυτά να είναι στήλες του, να είναι μη μηδενική. Αλλίως, αυτο το σετ διανυσμάτων είναι γραμμικά εξαρτημένο.

Το κύριο πρόγραμμα:

```
clc;
clear all;
close all;

#   vectors u, v, w
u = [1, -2, 3];
v = [2, -1, 2];
w = [1, -2, 1];
#   run third task's logic
lin_dep(u, v, w);
```

Η συνάρτηση lin_dep:

```
#   check vectors linear dependence
function check = lin_dep(u, v, w)
    #   make matrix A from vectors, where vectors are A's columns
    A = [u; v; w]';
    #   calculate A's determinant
    det_A = det(A);
    #   if det_A != 0 then the set of vectors is linearly independent
    #   else the set is linearly dependent
    if (det_A != 0)
        disp("Given set of vectors is linearly independent.");
        check = 1;
        return;
    else
        disp("Given set of vectors is linearly dependent.");
        check = 0;
        return;
    endif
endfunction
```

Η έξοδος του προγράμματός μου:

```
Given set of vectors is linearly independent.
```

Άσκηση 4

4.1 Ερώτημα

Θεωρήστε τα διανύσματα του (4.1). Δείξτε ότι αυτά τα διανύσματα αποτελούν βάση του R^3. Εφαρμόστε με το χέρι τον αλγόριθμο Gram-Smith για την ορθοκανονικοποίηση της βάσης. Φτιάξτε ένα πρόγραμμα που θα δέχεται σαν είσοδο τρία διανύματα σαν στήλες ενός $3x3$ πίνακα, θα ελέγχει αν αυτά τα διανύσματα αποτελούν βάση του R^3, και κατόπιν θα εφαρμόζει τον αλγόριθμο Gram-Smith και θα δίνει σαν έξοδο μία ορθοκανονική βάση.

$$\begin{aligned} u &= i - 2j + 3k \\ v &= 2i - j + 2k \\ w &= i - 2j + k \end{aligned} \tag{4.1}$$

4.2 Λύση

4.2.1 Έλεγχος αν τα διανύσματα αποτελούν βάση

Στο χέρι

Για να δείξουμε ότι τα διανύσματα $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ αποτελούν βάση του R^3 αρκεί να δείξουμε ότι τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Έχουμε το σύστημα $A\bar{x} = \bar{b}$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{b}}$$

Με γραμμοπράξεις μετατρέπουμε τον πίνακα A σε ανηγμένο κλιμακωτό:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3=R_1]{R_1=R_3} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3=R_3-(1/3)R_1]{R_2=R_2+(2/3)R_1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3=R_2]{R_2=R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3=R_3-(1/4)R_2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3=-(2/3)R_3} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2=R_2-(2/3)R_3]{R_1=R_1-R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2=(3/4)R_2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1=R_1-2R_2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1=(1/3)R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Οπότε είναι:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}}_{\bar{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\bar{b}} \implies \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Είναι $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$, επομένως και τα $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ είναι γραμικώς ανεξάρτητα στο R^3, άρα αποτελούν βάση του R^3.

Στην Octave

Δίνω τα διανύσματα $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ στο πρόγραμμα της Άσκησης 3. Η έξοδος του προγράμματος:

```
Given set of vectors is linearly independent.
```

Εφόσον τα $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στο R^3, αποτελούν βάση του R^3.

Το πρόγραμμα:

```
clc;
clear all;
close all;

#   vectors u, v, w
u = [1, -2, 3];
v = [2, -1, 2];
w = [1, -2, 1];
#   run third task's logic
lin_dep(u, v, w);
```

Η συνάρτηση lin_dep:

```
#   check vectors linear dependence
function check = lin_dep(u, v, w)
    #   make matrix A from vectors, where vectors are A's columns
    A = [u; v; w]';
    #   calculate A's determinant
    det_A = det(A);
    #   if det_A != 0 then the set of vectors is linearly independent
    #   else the set is linearly dependent
    if (det_A != 0)
        disp("Given set of vectors is linearly independent.");
        check = 1;
        return;
    else
        disp("Given set of vectors is linearly dependent.");
        check = 0;
        return;
    endif
endfunction
```

4.2.2 Ορθοκανονικοποίηση βάσης με τον αλγόριθμο Gram-Smith

Έστω η βάση $S = [u, v, w]$ του R_3, αφού u, v, w γραμμικά ανεξάρτητα.
Κατασκευάζουμε την ορθογώνια βάση $S' = [a, b, c]$:

$$\begin{aligned} a &= u \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} b &= v - \frac{a \cdot v}{a \cdot a} a \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}}{14} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \frac{10}{14} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{10}{7} & \frac{15}{7} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{9}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} c &= w - \frac{a \cdot w}{a \cdot a} a - \frac{b \cdot w}{b \cdot b} b \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}{14} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} - \frac{b \cdot w}{b \cdot b} b \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{8}{14} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} - \frac{b \cdot w}{b \cdot b} b \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{8}{7} & \frac{12}{7} \end{pmatrix} - \frac{b \cdot w}{b \cdot b} b \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} \frac{9}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \frac{9}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{9}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \frac{9}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} \frac{9}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}{\frac{13}{7}} \begin{pmatrix} \frac{9}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix} - \frac{\frac{2}{7}}{\frac{13}{7}} \begin{pmatrix} \frac{9}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{5}{7} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{18}{91} & \frac{6}{91} & -\frac{2}{91} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{13} & -\frac{12}{13} & -\frac{9}{13} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.4}$$

Κατασκευάζουμε την ορθοκανονική βάση $S'' = [e_1, e_2, e_3]$:

$$e_1 = \frac{a}{|a|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}}{|\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{14}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{-2}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

$$e_2 = \frac{b}{|b|} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{9}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}}{|\begin{pmatrix} \frac{9}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}|} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{9}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}}{\sqrt{\frac{13}{7}}} = \begin{pmatrix} \frac{9}{\sqrt{91}} & \frac{3}{\sqrt{91}} & -\frac{1}{\sqrt{91}} \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

$$e_3 = \frac{c}{|c|} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{3}{13} & -\frac{12}{13} & -\frac{9}{13} \end{pmatrix}}{|\begin{pmatrix} \frac{3}{13} & -\frac{12}{13} & -\frac{9}{13} \end{pmatrix}|} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{3}{13} & -\frac{12}{13} & -\frac{9}{13} \end{pmatrix}}{\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{13}}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{26}} & -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{13}} & -\frac{3}{\sqrt{26}} \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

4.2.3 Πρόγραμμα

Το κύριο πρόγραμμα:

```
clc;
clear all;
close all;
#   vectors u, v, w
u = [1, -2, 3];
v = [2, -1, 2];
w = [1, -2, 1];
#   check if vector set is basis
basis = lin_dep(u, v, w);
if (basis == 1)
    disp("Orthonormal basis:");
    [e1, e2, e3] = orthonorm_base(u, v, w);
else
    disp("No basis");
endif
```

Η *συνάρτηση* orthonorm_base:

```
#   make orthonormal base from given vectors
function [e1, e2, e3] = orthonorm_base(u, v, w)
    #   make orthogonal vectors a, b,c from u, v, w respectively
    a = u;
    b = v - (dot(a, v) / dot(a, a) * a);
    c = w - (dot(a ,w) / dot(a, a) * a) - (dot(b, w) / dot(b, b) * b);
    #   make orthonormal vectors e1, e2, e3 from a, b, c respectively
    e1 = rats(a/sqrt(dot(a, a)))
    e2 = rats(b/sqrt(dot(b, b)))
    e3 = rats(c/sqrt(dot(c, c)))
endfunction
```

Η έξοδος του προγράμματός μου:

```
Given set of vectors is linearly independent.
Orthonormal basis:
e1 =     929/3476  -929/1738  3596/4485
e2 =    3554/3767  3059/9727  -165/1574
e3 =    1020/5201   -404/515  -919/1562
```

Πηγές

5.1 Βιβλία

5.2 Video

- Inverse Matrix Using Gauss-Jordan
- Solving a 3x3 System Using Cramer's Rule
- Εύρεση αντίστροφου πίνακα με μέθοδο Gauss
- Γραμμική εξάρτηση διανυσμάτων
- Linear Independence and Linear Dependence, Ex 1
- Linear Algebra: Orthonormal Basis
- Linear Algebra: Gram-Schmidt

5.3 Σύνδεσμοι

- Systems of Linear Equations
- Γραμμικά συστήματα Εξισώσεων
- 11. Solving Ax = b, Matrix division and the slash operator
- Gaussian elimination calculator
- Cramer's Rule
- Inserting code in a LaTeX document
- Testing for Linear Dependence of Vectors

5.4 Χρήσιμα αρχεία

- Octave, Vectors and Matrices
- Hardcore LaTeX Math
- Βάση και Διάσταση Διανυσματικού Χώρου