Περιεχόμενα

Διάλεξη Πρώτη

1 Διαφορική Εξίσωση

$$\alpha y''(x) + \beta y'(x) + \gamma y = 0$$

Η συνήθης Δ.Ε. είναι γραμμική, δεύτερης τάξης, ομογενής, με α, β, γ σταθερούς συντελεστές.

2 Χαρακτηριστική Εξίσωση

$$\alpha r^2 + \beta r + \gamma = 0$$

Για την γενική λύση της Χ.Ε. διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

1. $\Delta > 0$:
$$\begin{aligned} &r_1, r_2 \in \Re \\ &y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \\ &y_1(x) = c_1 e^{r_1 x} \\ &y_2(x) = c_2 e^{r_2 x} \\ &c_1, c_2 \text{ σταθερές} \end{aligned}$$

2. $\Delta = 0$:
$$\begin{aligned} r &\in \Re \\ y(x) &= c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx} \\ y_1(x) &= c_1 e^{rx} \\ y_2(x) &= c_2 x e^{rx} \\ &c_1, c_2 \text{ σταθερές} \end{aligned}$$

3. $\Delta < 0$:
$$\begin{aligned} r_1 &= A + Bi \\ r_2 &= A - Bi \\ A = \frac{-\beta}{2\alpha}&, \ B = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2\alpha} \\ y(x) &= c_1 e^{Ax} \sin Bx + c_2 e^{Ax} \cos Bx \\ y_3(x) &= c_1 e^{Ax} \sin Bx \\ y_4(x) &= c_2 e^{Ax} \cos Bx \\ &c_1, c_2 \text{ σταθερές} \end{aligned}$$

2.1 Απόδειξη περίπτωσης $\Delta < 0$

Είναι:

$$y_1(x) = e^{Ax}(\sin Bx + i \cos Bx) \tag{1}$$

$$y_2(x) = e^{Ax}(\sin Bx - i \cos Bx) \tag{2}$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} &(1) + (2) \\ e^{Ax}(\sin Bx + i \cos Bx) &+ e^{Ax}(\sin Bx - i \cos Bx) \\ e^{Ax}(\sin Bx + i \cos Bx &+ \sin Bx - i \cos Bx) \\ &e^{Ax}(2 \sin Bx) \\ &\Longrightarrow \\ y_1(x) + y_2(x) &= 2e^{Ax} \sin Bx \\ \frac{1}{2} y_1(x) + \frac{1}{2} y_2(x) &= e^{Ax} \sin Bx \\ y_3(x) &= e^{Ax} \sin Bx \end{aligned}$$

Και:

$$\begin{aligned} &(1) - (2) \\ e^{Ax}(\sin Bx + i \cos Bx) &- e^{Ax}(\sin Bx - i \cos Bx) \\ e^{Ax}(\sin Bx + i \cos Bx &- \sin Bx + i \cos Bx) \\ &e^{Ax}(2i \cos Bx) \\ &\Longrightarrow \\ y_1(x) + y_2(x) &= 2ie^{Ax} \cos Bx \\ \frac{1}{2i} y_1(x) + \frac{1}{2i} y_2(x) &= e^{Ax} \cos Bx \\ y_4(x) &= e^{Ax} \cos Bx \end{aligned}$$

3 Παραδείγματα

3.1 Λύστε τις ακόλουθες Δ.Ε.

3.1.1 $y'' - y' - 6y = 0$

$$\begin{aligned} r^2 - r - 6 = 0&, \ \Delta = 25 > 0 \\ r_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{\Delta}}{-2} &= \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{-2} = -3 \\ r_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{\Delta}}{-2} &= \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{-2} = 2 \end{aligned}$$

Άρα η γενική λύση είναι η

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$$

3.1.2 $y'' - 4y' - 5y = 0$

$$\begin{aligned} r^2 - 4r - 5 = 0&, \ \Delta = -4 < 0 \\ r_1 = \frac{-(-4) + i\sqrt{-\Delta}}{-2} &= 2 + i \\ r_2 &= 2 - i \end{aligned}$$

Άρα η γενική λύση είναι η

$$y(x) = c_1 e^{2x} \sin x + c_2 e^{2x} \cos$$

3.1.3 $y'' - 4y' - 4y = 0$

$$r^2 - r - 6 = 0,\ \Delta = 25 > 0$$
$$r_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{\Delta}}{-2} = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{-2} = -3$$
$$r_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{\Delta}}{-2} = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{-2} = 2$$

Άρα η γενική λύση είναι η

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$$

3.2 Λύστε τα προβλήματα συνοριακών (ή αρχικών) τιμών των παρακάτω Δ.Ε.

3.2.1 $y'' + 4y' = 0,\ y(0) = 0,\ y(\frac{\pi}{12}) = 1$

Η Χ.Ε. είναι η

$$r^2 + 4 = 0$$

Οι ρίζες της Χ.Ε. είναι οι

$$r_1 = 2i,\ r_2 = -2i$$

Η Γ.Λ. της Δ.Ε. δίνεται από

$$y(x) = c_1 e^{0x} \sin 2x + c_2 e^{0x} \cos 2x$$
$$y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$$

Είναι

3.2.2 $y'' + 4y' = 0,\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 1$

3.2.3 $y'' + 4y' = 0,\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 0$

3.2.4 $y'' - 2y' + 2y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$

3.3 Λύστε την Γ.Λ. των παρακάτω Δ.Ε.

3.3.1 $y'' - 2y' - 3y = 0$

3.3.2 $y'' - 4y' = 0$

3.3.3 $y'' - 4y' + 4y = 0$