Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα
Project 3

Μιχαήλ Ανάργυρος Ζαμάγιας
ΤΠ5000

16 Ιουνίου 2020

Περιεχόμενα

Άσκηση 1

1.1 Ερώτημα

Φτιάξτε μια συνάρτηση σε Octave που να δέχεται έναν nxn πίνακα ως δεδομένα και να υπολογίζει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα, τα ιδιοδιανύσματα και τις ιδιοτιμές του πίνακα, χρησιμοποιώντας τις έτοιμες εντολές του Octave. Η συνάρτηση θα πρέπει να παίρνει σαν είσοδο τον πίνακα και να δίνει σαν έξοδο ένα πίνακα με στήλες τα μοναδιαία ιδιοδιανύσματα, ένα οριζόντιο διάνυσμα με τις ιδιοτιμές στην ίδια σειρά των ιδιοδιανυσμάτων και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο σε μορφή διανύσματος συντελεστών (αριθμητική μορφή πολυωνύμων στο Matlab και Octave). Η συνάρτηση αυτή δεν πρέπει να κάνει χρήση του συμβολικού πακέτου του Octave γιατί αυτό είναι πολύ πιο αργό από το αριθμητικό πακέτο. Δώστε τα αποτελέσματα της συνάρτησης σας στον πίνακα (1.1). Εδώ μ είναι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας. Επαληθεύονται οι σχέσεις του Vieta για αυτόν τον πίνακα;

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & \mu \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

1.2 Απάντηση

Η έξοδος `task1.txt` του προγράμματος `task1.m` για τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$:

```
A =
   1   2   3
   2   4   5
   3   5   0
unit_eigenvectors =

  -0.330266   0.855839   0.398075
  -0.445164  -0.513122   0.733849
   0.832318   0.065156   0.550455

eigenvalues =

  -3.864649   0.029286   8.835363

characteristic_polynomial = 1*x^3 - 5*x^2 - 34*x^1 + 1

Vieta's formulae are valid for matrix A.
```

Η συνάρτηση `task1_function.m`:

```
function [eves, evas, char_poly] = task1_function(A)
    #   eigenvectors and eigenvalues at eves and evas respectively
    [eves, evas] = eig(A, balanceOption='vector');
    #   convert eigenvalues matrix to a row vector
    evas = evas';
    #   convert eigenvectors matrix to a column vector
    eves = eves(: );
    #   make each unit eigenvector
    eve1 = eves(1: 3)/norm(eves(1: 3));
    eve2 = eves(4: 6)/norm(eves(4: 6));
    eve3 = eves(7: 9)/norm(eves(7: 9));
    #   make unit eigenvector to return
    eves = [eve1, eve2, eve3];
    #   set coefficients of characteristc polynomial of A to pre_polynomial
    pre_polynomial = poly(A);
    #   tolerance, to be used for converting -0 to 0
    tolerance = 1.e-6;
    #   convert any -0 to 0
    pre_polynomial(pre_polynomial<0 & pre_polynomial>-tolerance) = 0;
    #   match coeffcients with variable x at char_poly
    char_poly = polyout(round(pre_polynomial), 'x');
endfunction
```

Το πρόγραμμα task1.m:

```
clc;
clear all;
close all;
warning('off', 'all');

#   matrix A
A = [1, 2, 3; 2, 4, 5; 3, 5, 0];

[rws, cols] = size(A);
#   if A square matrix, then do stuff
if (rws == cols)
    disp('A =');
    disp(A);
    [ueves, evas, char_poly] = task1_function(A)
    #   tolerance, to be used for converting -0 to 0
    tolerance = 1.e-6;
    #   transpose evas
    evas = evas;
    #   calculate vieta theorem with current state evas
    v_trace = round(sum(evas));
    v_det = round(prod(evas));
    #   multiply a 3x3 identity matrix with evas
    evas = eye(3)*evas';
    #   calculate vieta theorem with altered evas
    check_v_trace = round(sum(evas));
    check_v_det = round(prod(evas));
    #   transpose evas to row
    evas = evas';
    #   convert -0 to 0
    evas(evas<0 & evas>-tolerance) = 0;
    #   output message for vieta's formulae
    if (v_trace == check_v_trace & v_det == check_v_det)
        disp("\nVieta's formulae are valid for matrix A.")
    else
        disp("\nVieta's formulae are not valid for matrix A.")
    endif
else
    disp('A is not square matrix.')
endif
```

Άσκηση 2

2.1 Ερώτημα

Χρησιμοποιώντας την συνάρτησή σας, βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των A^2, A^{-1}, A^2+2A+I. Πώς σχετίζονται οι ιδιοτιμές αυτών των πινάκων με τις ιδιοτιμές του A; Πώς σχετίζονται τα ιδιοδιανύσματα; Γράψτε την σχέση που συνδέει αυτούς τους πίνακες με τον διαγώνιο πίνακα D που αντιστοιχεί στον A. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αυτήν την σχέση για να ορίσετε τους πίνακες e^A και $sin(A)$;

2.2 Απάντηση

Άσκηση 3

3.1 Ερώτημα

Ένας πίνακας διάστασης n λέγεται διαγωνοποιήσιμος όταν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας M και διαγώνιος πίνακας D έτσι ώστε $A = MDM^{-1}$. Όταν ο A έχει n ιδιοδιανύσματα, και D είναι ο πίνακας με τις ιδιοτιμές στην διαγώνιο. Όταν ο πίνακας A έχει n διαφορετικές ιδιοτιμές, τότε έχει αναγκαστικά και n ιδιοδιανύσματα και άρα αναγκαστικά διαγωνοποιείται. Όταν όμως έχει λιγότερες από n ιδιοτιμές, τότε μπορεί να έχει n ή λιγότερα από n ιδιιοδιαν΄

3.2 Απάντηση

Άσκηση 4

4.1 Ερώτημα

4.2 Απάντηση