Project 3

Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

Εαρινό εξάμηνο 2019-2020

Άσκηση 1 (25 μονάδες): Φτιάξτε μία συνάρτηση σε Octave που να δέχεται έναν nxn πίνακα ώς δεδομένα και να υπολογίζει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα, τα ιδιοδιανύσματα και τις ιδιοτιμές του πίνακα, χρησιμοποιώντας τις έτοιμες εντολές του Octave. Η συνάρτηση θα πρέπει να παίρνει σαν είσοδο τον πίνακα και να δίνει σαν έξοδο ένα πίνακα με στήλες τα μοναδιαία ιδιοδιανύσματα, ένα οριζόντιο διάνυσμα με τις ιδιοτιμές στην ίδια σειρά των ιδιοδιανυσμάτων και το χαρακτηριστικο πολυώνυμο σε μορφή διανύσματος συντελεστών (αριθμητική μορφή πολυωνύμων στο Matlab και Octave). Η συνάρτηση αυτή δεν πρέπει να κάνει χρήση του συμβολικού πακέτου του Octave γιατί αυτό είναι πολύ πιο αργό από το αριθμητικό πακέτο. Δώστε τα αποτελέσματα της συνάρτησης σας στον πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & \mu \end{pmatrix}$. Εδώ μ είναι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας. Επαληθεύονται οι σχέσεις του Vieta για αυτόν τον πίνακα;

Άσκηση 2(25 μονάδες): Χρησιμοποιόντας την συνάρτηση σας βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των A^2,A^{-1},$A^2 + 2A + I$. Πώς σχετίζονται οι ιδιοτιμές αυτών των πινάκων με τις ιδιοτιμές του A; Πως σχετίζονται τα ιδιοδιανύσματα; Γράψτε την σχέση που συνδέει αυτούς τους πίνακες με τον διαγώνιο πίνακα D που αντιστοιχεί στον A. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αυτήν την σχέση για να ορίσετε τους πίνακες e^A και $\sin(A)$;

Άσκηση 3(25 μονάδες): Ένας πίνακας A διάστασης n λέγεται διαγωνοποιήσιμος όταν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας M και διαγώνιος πίνακας D έτσι ώστε $A = MDM^{-1}$, όταν δηλαδή ό A είναι όμοιος με τον D. Όταν ο A έχει n ιδιοδιανύσματα, τότε ο M είναι απλά ο πίνακας που έχει σαν στήλες τα ιδιοδιανύσματα, και D είναι ο πίνακας με τις ιδιοτιμές στην διαγώνιο. Όταν ο πίνακας A έχει n διαφορετικές ιδιοτιμές, τότε έχει αναγκαστικά και n ιδιοδιανύσματα και άρα αναγκαστικά διαγωνοποιείται. Όταν όμως έχει λιγότερες από n ιδιοτιμές, τότε μπορεί να έχει n ή λιγότερα από n ιδιοδιανύσματα, και άρα μπορεί να διαγωνοποιείται ή να μήν διαγωνοποιείται. Για να το δούμε αυτό, βρείτε **με το χέρι** τα ιδιοδιανύσματα και τις ιδιοτιμές του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Συγκρίνετε τα αυτά με τα ιδιοδιανύσματα και τις ιδιοτιμές του ταυτοτικού 2x2 πίνακα. Στην περίπτωση που ένας πίνακας δεν είναι διαγωνοποιήσιμος, τότε αποδεικνύεται ότι γράφεται σαν άθροισμα ενός διαγώνιου πίνακα D και ενός nilpotent πίνακα N (πίνακα δηλαδή τέτοιου ώστε $N^{\kappa} = 0$ για κάποια ακέραια δύναμη κ). Μπορείτε στην περίπτωση του A να ταυτοποιήσετε τους πίνακες N, D; Με την χρήση της συνάρτησης που φτιάξατε, μπορείτε να βρείτε αν ο $A = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & \mu & \mu \end{pmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος; Πόσα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα έχει;

Άσκηση 4(25 μονάδες): Σκοπός της άσκησης είναι να επαληθεύσουμε το θεώρημα Cayley-Hamilton για ένα τυχαίο πίνακα A. Για το σκοπό αυτό φτιάξτε ένα πρόγραμμα που θα δέχεται ως δεδομένα την διάσταση n ενός πίνακα και θα παράγει ένα nxn πίνακα A με τυχαίους αριθμούς στο διάστημα (-10,10). Μετά θα υπολογίζει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα, p(λ), και τέλος θα υπολογίζει τον πίνακα p(A). Τι παρατηρείτε; Τέλος τροποποιείστε αυτό το πρόγραμμα για να ελέγξετε αν το θεώρημα Cayley-Hamilton ισχύει για τον 3x3 πίνακα A της άσκησης 3.

Η εργασία σας θα πρέπει να περιέχει μία αναφορά των αποτελεσμάτων σε word, μία εκτύπωση του κώδικα των προγραμμάτων και μία εκτύπωση των αποτελεσμάτων του προγράμματος. Μην ξεχάσετε όνομα και αριθμό μητρώου! Χειρόγραφες αναφορές δεν θα γίνουν δεκτές.