Περιεχόμενα

Διάλεξη Πρώτη

1 Διαφορική Εξίσωση

$$\alpha y''(x) + \beta y'(x) + \gamma y = 0$$

Η συνήθης Δ.Ε. είναι γραμμική, δεύτερης τάξης, ομογενής, με α, β, γ σταθερούς συντελεστές.

2 Χαρακτηριστική Εξίσωση

$$\alpha r^2 + \beta r + \gamma = 0$$

Για την γενική λύση της Χ.Ε. διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

1. $\Delta > 0$:
$$\begin{aligned} r_1, r_2 &\in \Re \\ y(x) &= c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \\ y_1(x) &= c_1 e^{r_1 x} \\ y_2(x) &= c_2 e^{r_2 x} \\ c_1, c_2 & \text{ σταθερές} \end{aligned}$$

2. $\Delta = 0$:
$$\begin{aligned} r &\in \Re \\ y(x) &= c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx} \\ y_1(x) &= c_1 e^{rx} \\ y_2(x) &= c_2 x e^{rx} \\ c_1, c_2 & \text{ σταθερές} \end{aligned}$$

3. $\Delta < 0$:
$$\begin{aligned} r_1 &= A + Bi \\ r_2 &= A - Bi \\ A = \frac{-\beta}{2\alpha},\ B &= \frac{\sqrt{-\Delta}}{2\alpha} \\ y(x) &= c_1 e^{Ax} \sin Bx + c_2 e^{Ax} \cos Bx \\ y_3(x) &= c_1 e^{Ax} \sin Bx \\ y_4(x) &= c_2 e^{Ax} \cos Bx \\ c_1, c_2 & \text{ σταθερές} \end{aligned}$$

2.1 Απόδειξη περίπτωσης $\Delta < 0$

Είναι:

$$y_1(x) = e^{Ax}(\sin Bx + i \cos Bx) \tag{1}$$

$$y_2(x) = e^{Ax}(\sin Bx - i\cos Bx) \tag{2}$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned}
(1) + (2) &= e^{Ax}(\sin Bx + i\cos Bx) \\
&+ e^{Ax}(\sin Bx - i\cos Bx) \\
&= e^{Ax}(\sin Bx + i\cos Bx + \sin Bx - i\cos Bx) \\
&= e^{Ax}(2\sin Bx) \implies \\
y_1(x) + y_2(x) &= 2e^{Ax}\sin Bx \\
\frac{1}{2}y_1(x) + \frac{1}{2}y_2(x) &= e^{Ax}\sin Bx \\
y_3(x) &= e^{Ax}\sin Bx
\end{aligned}$$

Και:

$$\begin{aligned}
(1) - (2) &= e^{Ax}(\sin Bx + i\cos Bx) \\
&- e^{Ax}(\sin Bx - i\cos Bx) \\
&= e^{Ax}(\sin Bx + i\cos Bx - \sin Bx + i\cos Bx) \\
&= e^{Ax}(2i\cos Bx) \implies \\
y_1(x) + y_2(x) &= 2ie^{Ax}\cos Bx \\
\frac{1}{2i}y_1(x) + \frac{1}{2i}y_2(x) &= e^{Ax}\cos Bx \\
y_4(x) &= e^{Ax}\cos Bx
\end{aligned}$$

3 Παραδείγματα

3.1 Λύστε τις ακόλουθες Δ.Ε.

3.1.1 $y'' - y' - 6y = 0$

3.1.2 $y'' - 4y' - 5y = 0$

3.1.3 $y'' - 4y' - 4y = 0$