Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα
Project 3

Μιχαήλ Ανάργυρος Ζαμάγιας
ΤΠ5000

16 Ιουνίου 2020

Περιεχόμενα

Άσκηση 1

1.1 Ερώτημα

Φτιάξτε μια συνάρτηση σε Octave που να δέχεται έναν nxn πίνακα ως δεδομένα και να υπολογίζει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα, τα ιδιοδιανύσματα και τις ιδιοτιμές του πίνακα, χρησιμοποιώντας τις έτοιμες εντολές του Octave. Η συνάρτηση θα πρέπει να παίρνει σαν είσοδο τον πίνακα και να δίνει σαν έξοδο ένα πίνακα με στήλες τα μοναδιαία ιδιοδιανύσματα, ένα οριζόντιο διάνυσμα με τις ιδιοτιμές στην ίδια σειρά των ιδιοδιανυσμάτων και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο σε μορφή διανύσματος συντελεστών (αριθμητική μορφή πολυωνύμων στο Matlab και Octave). Η συνάρτηση αυτή δεν πρέπει να κάνει χρήση του συμβολικού πακέτου του Octave γιατί αυτό είναι πολύ πιο αργό από το αριθμητικό πακέτο. Δώστε τα αποτελέσματα της συνάρτησης σας στον πίνακα (1.1). Εδώ μ είναι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού μητρώου σας. Επαληθεύονται οι σχέσεις του Vieta για αυτόν τον πίνακα;

$$(1.1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & \mu \end{pmatrix}$$

1.2 Απάντηση

Δίνω δύο πίνακες στο πρόγραμμα, τους $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ και $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, επειδή ο πρώτος έχει ορίζουσα διαφορετική από το μηδέν, άρα δεν είναι αντιστρέψιμος. Επομένως, για να δείξω ότι δουλεύει ο κώδικας χρησιμοποιώ τον δεύτερο πίνακα, ο οποίος έχει ορίζουσα ίση με το μηδέν.

Η έξοδος `task1.txt` του προγράμματος `task1.m`:

```
A =
   1   2   3
   2   4   5
   3   5   0
Determinant of A does not equal to 0.


A =
   1   2   3
   4   5   6
   7   8   9
Determinant of A equals to 0.
Vieta's formulae are valid for matrix A
unit_eigenvectors =

  -0.231971  -0.785830   0.408248
  -0.525322  -0.086751  -0.816497
  -0.818673   0.612328   0.408248

eigenvalues =

   16   -1    0

characteristic_polynomial = 1*x^3 - 15*x^2 - 18*x^1 + 0
```

Το πρόγραμμα task1.m:

```
clc;
clear all;
close all;

#   matrix A
A = [1, 2, 3; 2, 4, 5; 3, 5, 0];

[rws, cols] = size(A);
#   if A square matrix, then do stuff
if (rws == cols)
    disp('A =')
    disp(A);
    #   if det(A) do not do stuff
    if (det(A) != 0)
        disp('Determinant of A does not equal to 0.')
    else
        disp('Determinant of A equals to 0.')
        [unit_eigenvectors, eigenvalues, characteristic_polynomial] =
    task1_function(A)
    endif
else
    disp('A is not square matrix.')
endif

disp("\n");

#   matrix A
A = [1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9];

[rws, cols] = size(A);
#   if A square matrix, then do stuff
if (rws == cols)
    disp('A =')
    disp(A);
    #   if det(A) do not do stuff
    if (det(A) != 0)
        disp('Determinant of A does not equal to 0.')
    else
        disp('Determinant of A equals to 0.')
        [unit_eigenvectors, eigenvalues, characteristic_polynomial] =
    task1_function(A)
    endif
else
    disp('A is not square matrix.')
endif
```

Η *συνάρτηση* lin_sys.m:

```
function [eves, evas, characteristic_polynomial] = task1_function(A)
    #   eigenvectors and eigenvalues at eves and evas respectively
    [eves, evas] = eig(A, balanceOption='vector');
    #   convert eigenvector matrix to a single column
    eves = eves(: );
    #   make each unit eigenvector
    eve1 = eves(1: 3)/norm(eves(1: 3));
    eve2 = eves(4: 6)/norm(eves(4: 6));
    eve3 = eves(7: 9)/norm(eves(7: 9));
    #   make unit eigenvector to return
    eves = [eve1, eve2, eve3];
    #   tolerance, to be used for converting -0 to 0
    tolerance = 1.e-6;
    #   transpose evas
    evas = evas';
    #   calculate vieta theorem with current state evas
    v_trace = round(sum(evas));
    v_det = round(prod(evas));
    #   multiply a 3x3 identity matrix with eigenvalues
    evas = eye(3)*evas';
    #   calculate vieta theorem with altered evas
    check_v_trace = round(sum(evas));
    check_v_det = round(prod(evas));
    #   transpose evas to row
    evas = evas';
    #   convert -0 to 0
    evas(evas<0 & evas>-tolerance) = 0;
    #   round evas
    evas = round(evas);
    #   set coefficients of characteristc polynomial of A to pre_polynomial
    pre_polynomial = poly(A);
    #   convert any -0 to 0
    pre_polynomial(pre_polynomial<0 & pre_polynomial>-tolerance) = 0;
    #   match coeffcients with variable x at characteristic_polynomial
    characteristic_polynomial = polyout(round(pre_polynomial), 'x');
    #   output message for vieta's formulae
    if (v_trace == check_v_trace & v_det == check_v_det)
        disp("Vieta's formulae are valid for matrix A")
    else
        disp("Vieta's formulae are not valid for matrix A")
    endif
endfunction
```

Άσκηση 2

2.1 Ερώτημα

Χρησιμοποιώντας την συνάρτησή σας, βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα των A^2, A^{-1}, A^2+2A+I. Πώς σχετίζονται οι ιδιοτιμές αυτών των πινάκων με τις ιδιοτιμές του ; Πώς σχετίζονται τα ιδιοδιανύσματα; Γράψτε την σχέση που συνδέει αυτούς τους πίνακες με τον διαγώνιο πίνακα D που αντιστοιχεί στον . Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε αυτήν την σχέση για να ορίσετε τους πίνακες e^A και $sin(A)$;

2.2 Απάντηση

Άσκηση 3

3.1 Ερώτημα

3.2 Απάντηση

Άσκηση 4

4.1 Ερώτημα

4.2 Απάντηση