Πρώτη εργαστηριακή άσκηση
στο μάθημα
Εισαγωγή στις Τηλεπικοινωνίες

Από τον φοιτητή
Ζαμάγια Μιχαήλ Ανάργυρο
4 Απριλίου 2019

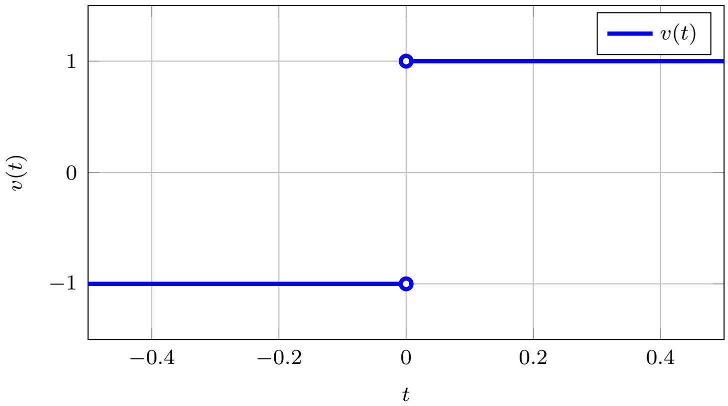
Περιεχόμενα

1 3.1

1.1 Ανάπτυγμα τριγωνομετρικής σειράς Fourier

Δίνεται η εξής περιοδική συνάρτηση:

$$v(t) = \begin{cases} -1, & -0.5 < t < 0 \\ 1, & 0 < t < 0.5 \end{cases}$$



Από την θεωρία, η τριγωνομετρική σειρά Fourier μιας περιοδικής συνάρτησης, με περίοδο T_0, δίνεται από τον τύπο:

$$v(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n2\pi f_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n2\pi f_0 t) \tag{1}$$

Όπου:

$$f_0 = \frac{1}{T_0}, \text{ η θεμελιώδης συχνότητα} \tag{2}$$

$$A_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} v(t)dt, \text{ η D.C. τιμή της } v(t) \tag{3}$$

$$A_n = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} v(t)\cos(n2\pi f_0 t)dt, \text{ το πλάτος των συνημιτοειδών αρμονικών της } v(t) \tag{4}$$

$$B_n = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} v(t)\sin(n2\pi f_0 t)dt, \text{ το πλάτος των ημιτοειδών αρμονικών της } v(t) \tag{5}$$

Μετά από πράξεις:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} v(t)dt \implies \\
A_0 &= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} v(t)dt + \frac{1}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} v(t)dt \implies \\
A_0 &= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} -1dt + \frac{1}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} 1dt \implies \\
A_0 &= \frac{1}{T_0}(-1)(-\frac{T_0}{2} - 0) + \frac{1}{T_0}(1)(0 - \frac{T_0}{2}) \implies \\
A_0 &= \frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) \implies \\
A_0 &= 0
\end{aligned} \tag{6}$$

$$
\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} v(t)\cos(n2\pi f_0 t)dt \implies \\
A_n &= \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} v(t)\cos(n2\pi f_0 t)dt + \frac{2}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} v(t)\cos(n2\pi f_0 t)dt \implies \\
A_n &= \frac{2}{T_0}(-\frac{\sin(n\pi)}{2nf_0\pi}) + \frac{2}{T_0}\frac{\sin(n\pi)}{2nf_0\pi} \implies \\
A_n &= -\frac{2}{T_0}(\frac{\sin(n\pi)}{2nf_0\pi}) + \frac{2}{T_0}\frac{\sin(n\pi)}{2nf_0\pi} \implies \\
A_n &= 0
\end{aligned} \tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
B_n &= \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} v(t)\sin(n2\pi f_0 t)dt \implies \\
B_n &= \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} v(t)\sin(n2\pi f_0 t)dt + \frac{2}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} v(t)\sin(n2\pi f_0 t)dt \implies \\
B_n &= \frac{2}{T_0}(-\frac{\cos(n\pi)}{2nf_0\pi}) + \frac{2}{T_0}(-\frac{\cos(n\pi)}{2nf_0\pi}) \implies \\
B_n &= -\frac{2}{T_0}(\frac{\cos(n\pi)}{2nf_0\pi}) + \frac{2}{T_0}(-\frac{\cos(n\pi)}{2nf_0\pi}) \implies \\
B_n &= 0
\end{aligned} \tag{8}
$$

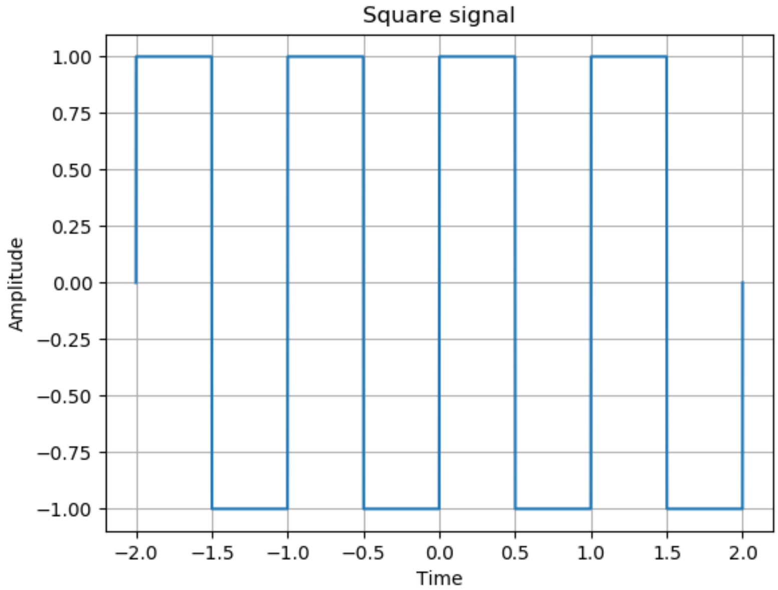
2 3.2

2.1 Υλοποίηση προγράμματος σε Python

```python
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy import linspace, pi, array, sin, sign, arange, cos


amplitude = 1
frequency = 1
signal_period = 1 / frequency
signal_resolution = 1000
number_of_signal_periods = 4
signal_duration = int(number_of_signal_periods*signal_period)
samples_per_signal_period = signal_resolution * number_of_signal_periods
period_sampling = signal_period / samples_per_signal_period
number_of_samples = int(1/period_sampling)+1
time = linspace(-2, 2, number_of_samples)
order_of_harmonics = int(
    input('Enter the order of harmonics to calculate:\t'))


colors = ['#1f77b4', '#ff7f0e', '#2ca02c', '#d62728',
          '#9467bd', '#8c564b', '#e377c2', '#7f7f7f',
          '#bcbd22', '#17becf']


square_wave = lambda time:  (abs((time % 1) - 0.25) < 0.25).astype(float) - (abs((time % 1) - 0.75) < 0.25).astype(float)

plt.figure(1)
plt.plot(time, square_wave(time), colors[0])
plt.xlabel('Time')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.title('Square signal')
plt.grid()
plt.savefig('Figure_1.png')


harmonic_values, harmonic_indexes = [], []
harmonic_sum, harmonic_order = 0, 1
harmonic_orders = order_of_harmonics + 1
while harmonic_order < harmonic_orders:
    if harmonic_order % 2 != 0:
        harmonic_value = 4 / (harmonic_order*pi) * \
            sin(2 * pi * harmonic_order * frequency * time)
        harmonic_values.append(harmonic_value)
        harmonic_indexes.append(harmonic_order)
        harmonic_sum += harmonic_value
    harmonic_order += 1
```

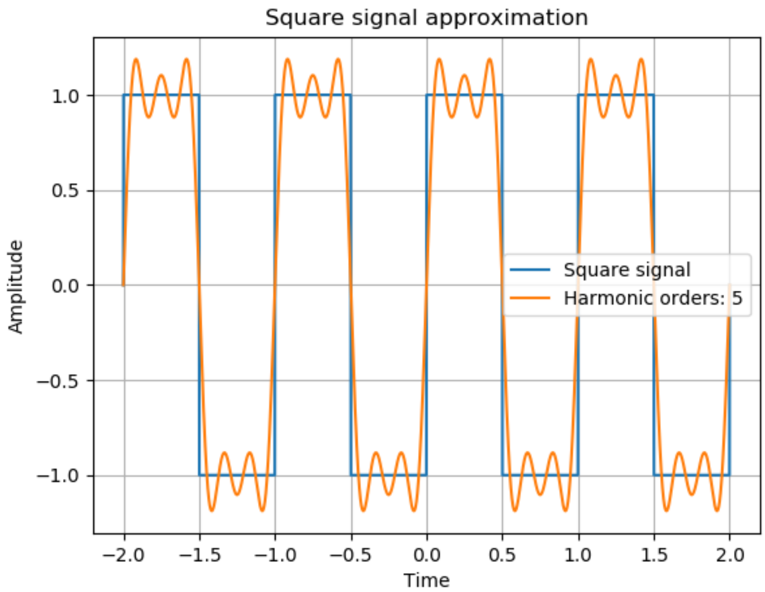
```
plt.figure(2)
plt.plot(time, square_wave(time), colors[0], label='Square signal')
plt.plot(time, harmonic_sum, colors[1],
         label=f'Harmonic orders: {order_of_harmonics}')
plt.xlabel('Time')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.title('Square signal approximation')
plt.legend()
plt.grid()
plt.savefig('Figure_2.png')


harmonic_order = 0
color_index = 0
harmonic_length = len(harmonic_indexes)
while harmonic_order < harmonic_length:
    plt.figure(3)
    plt.plot(time, harmonic_values[harmonic_order],
             colors[color_index], label=f'Harmonic order: {harmonic_indexes[harmonic_order]}')
    plt.xlabel('Time')
    plt.ylabel('Amplitude')
    plt.title('Square signal harmonic orders')
    plt.legend()
    plt.grid()
    color_index += 1
    harmonic_order += 1
    if color_index >= len(colors):
        color_index = 0
plt.savefig('Figure_3.png')


nth_harmonic_order_amplitude = lambda order:  2 / (pi * order)

harmonic_order_plane = array(harmonic_indexes)
plt.figure(4)
plt.stem(harmonic_order_plane, nth_harmonic_order_amplitude(
    harmonic_order_plane), label=f'Amplitude of {order_of_harmonics} harmonic orders')
plt.xlabel('Harmonic orders')
plt.ylabel('Amplitude')
plt.title(f'Amplitude of {order_of_harmonics} harmonic orders')
plt.legend()
plt.grid()
plt.savefig('Figure_4.png')
```

2.2 Τετραγωνικός παλμός

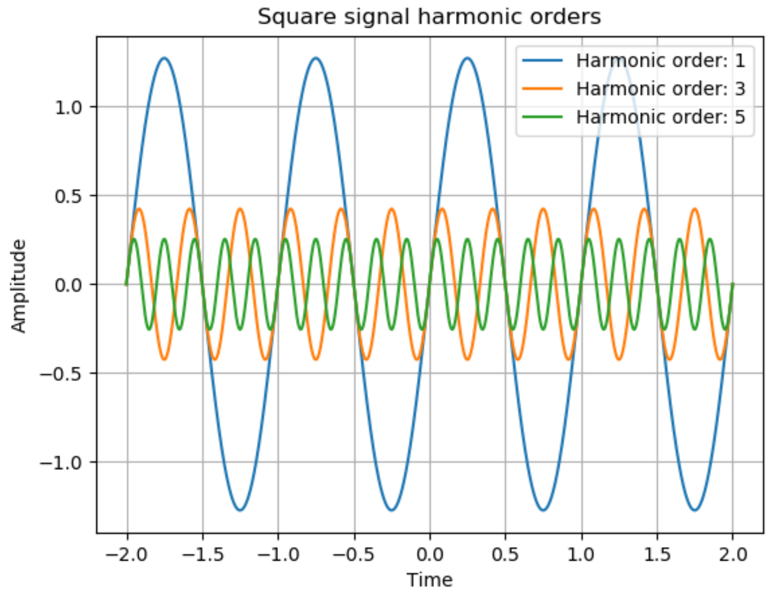


2.3 5 αρμονικές τάξεις

2.3.1 Προσέγγιση τετραγωνικού παλμού



2.3.2 Αρμονικές τετραγωνικού παλμού



2.3.3 Σφάλμα προσέγγισης τετραγωνικού παλμού

Δεν το έλυσα

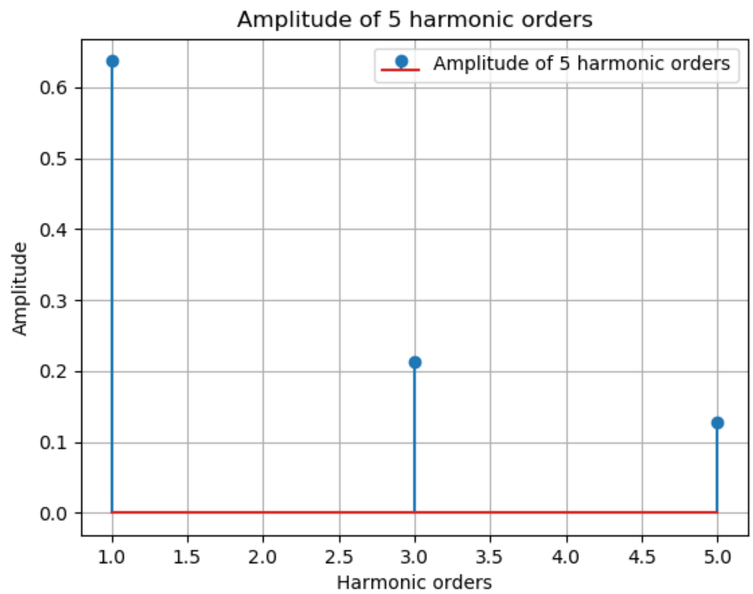
2.3.4 Πλάτη αρμονικών τετραγωνικού παλμού

Το πλάτος των αρμονικών υπολογίζεται από τον τύπο:

$$A_n = \frac{2}{n * \pi} \tag{9}$$

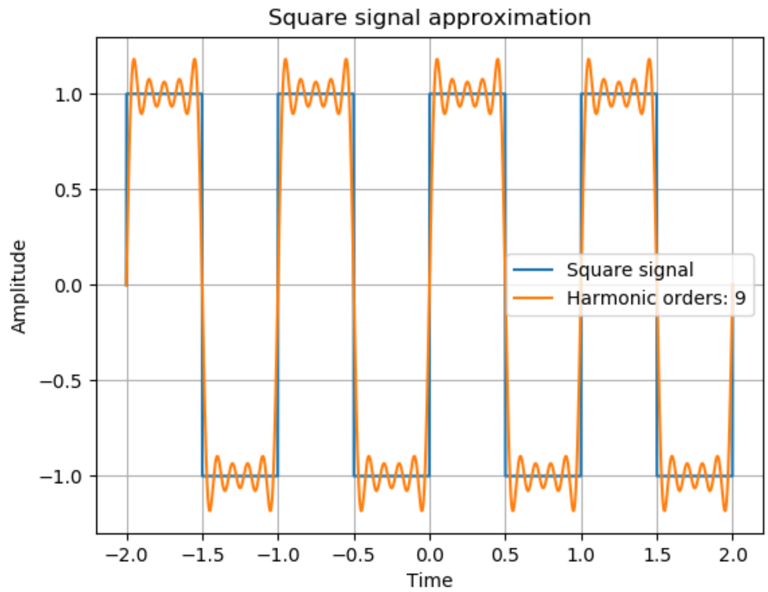
Όπου:

A_n, το πλάτος της n-ιοστής αρμονικής
n, η τάξη της αρμονικής

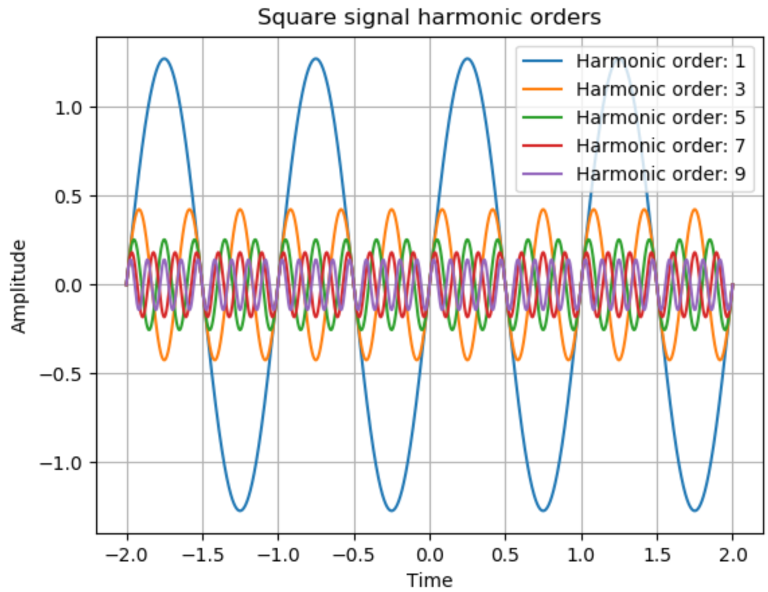


2.4 9 αρμονικές τάξεις

2.4.1 Προσέγγιση τετραγωνικού παλμού



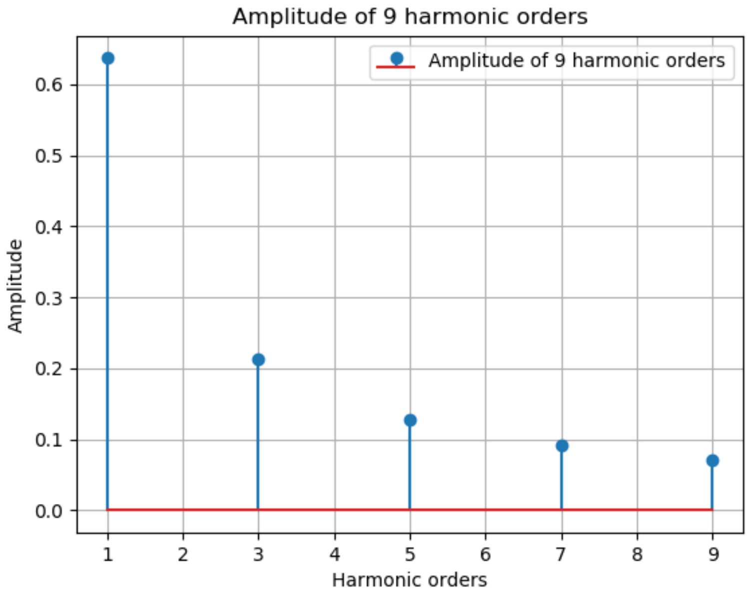
2.4.2 Αρμονικές τετραγωνικού παλμού



2.4.3 Σφάλμα προσέγγισης τετραγωνικού παλμού

Δεν το έλυσα

2.4.4 Πλάτη αρμονικών τετραγωνικού παλμού



2.5 Παρατηρήσεις για τις διαφορές μεταξύ 5 και 9 αρμονικών τάξεων

Η αύξηση των αρμονικών τάξεων έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση της λεπτομέρειας και της πληροφορίας που περιέχουν τα σχήματα. Επομένως, υπάρχει περισσότερη ακρίβεια στις μετρίσεις με μεγαλύτερες αρμονικές τάξεις.
Γενικότερα, το σήμα, όσο αυξάνονται οι αρμονικές τάξεις, τόσο πλησιάζει το ιδανικό τετραγωνικό σήμα.