Contents

Chapter 1

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

1.1 Θεωρία

1.1.1 Συνήθης Διαφορική Εξίσωση (Σ.Δ.Ε.)

$$\alpha y''(x) + \beta y'(x) + \gamma y = 0$$

Η Σ.Δ.Ε. είναι γραμμική, δεύτερης τάξης, ομογενής, με α, β, γ σταθερούς συντελεστές.

1.1.2 Χαρακτηριστική Εξίσωση

$$\alpha r^2 + \beta r + \gamma = 0$$

Για την γενική λύση της Χ.Ε. διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

1. $\Delta > 0$
$$\begin{aligned} &r_1, r_2 \in \Re \\ &y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \\ &y_1(x) = c_1 e^{r_1 x} \\ &y_2(x) = c_2 e^{r_2 x} \\ &c_1, c_2 \text{ σταθερές} \end{aligned}$$

2. $\Delta = 0$
$$\begin{aligned} &r \in \Re \\ &y(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx} \\ &y_1(x) = c_1 e^{rx} \\ &y_2(x) = c_2 x e^{rx} \\ &c_1, c_2 \text{ σταθερές} \end{aligned}$$

3. $\Delta < 0$
$$\begin{aligned} &r_1 = A + Bi \\ &r_2 = A - Bi \\ &A = \frac{-\beta}{2\alpha},\ B = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2\alpha} \\ &y(x) = c_1 e^{Ax} \sin Bx + c_2 e^{Ax} \cos Bx \\ &y_3(x) = c_1 e^{Ax} \sin Bx \\ &y_4(x) = c_2 e^{Ax} \cos Bx \\ &c_1, c_2 \text{ σταθερές} \end{aligned}$$

Η απόδειξη περίπτωσης $\Delta < 0$ Είναι:

$$y_1(x) = e^{Ax}(\sin Bx + i \cos Bx) \quad (1.1)$$
$$y_2(x) = e^{Ax}(\sin Bx - i \cos Bx) \quad (1.2)$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} &(1.1) + (1.2) \\ &e^{Ax}(\sin Bx + i\cos Bx) + e^{Ax}(\sin Bx - i\cos Bx) \\ &e^{Ax}(\sin Bx + i\cos Bx + \sin Bx - i\cos Bx) \\ &e^{Ax}(2\sin Bx) \\ &\Longrightarrow \\ &y_1(x) + y_2(x) = 2e^{Ax}\sin Bx \\ &\frac{1}{2}y_1(x) + \frac{1}{2}y_2(x) = e^{Ax}\sin Bx \\ &y_3(x) = e^{Ax}\sin Bx \end{aligned}$$

Και:

$$\begin{aligned} &(1.1) - (1.2) \\ &e^{Ax}(\sin Bx + i\cos Bx) - e^{Ax}(\sin Bx - i\cos Bx) \\ &e^{Ax}(\sin Bx + i\cos Bx - \sin Bx + i\cos Bx) \\ &e^{Ax}(2i\cos Bx) \\ &\Longrightarrow \\ &y_1(x) + y_2(x) = 2ie^{Ax}\cos Bx \\ &\frac{1}{2i}y_1(x) + \frac{1}{2i}y_2(x) = e^{Ax}\cos Bx \\ &y_4(x) = e^{Ax}\cos Bx \end{aligned}$$

1.2 Παραδείγματα

1.2.1 Εύρεση Γ.Λ. Σ.Δ.Ε.

1. $y'' - y' - 6y = 0$
$$\begin{aligned} &r^2 - r - 6 = 0,\ \Delta = 25 > 0 \\ &r_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{\Delta}}{-2} = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{-2} = -3 \\ &r_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{\Delta}}{-2} = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{-2} = 2 \end{aligned}$$

Άρα η γενική λύση είναι η

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$$

2. $y'' - 4y' - 5y = 0$

$$r^2 - 4r - 5 = 0,\ \Delta = -4 < 0$$
$$r_1 = \frac{-(-4) + i\sqrt{-\Delta}}{-2} = 2 + i$$
$$r_2 = 2 - i$$

Άρα η γενική λύση είναι η

$$y(x) = c_1 e^{2x} \sin x + c_2 e^{2x} \cos$$

3. $y'' - 4y' - 4y = 0$

$$r^2 - r - 6 = 0,\ \Delta = 25 > 0$$
$$r_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{\Delta}}{-2} = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{-2} = -3$$
$$r_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{\Delta}}{-2} = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{-2} = 2$$

Άρα η γενική λύση είναι η

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$$

1.2.2 Προβλήματα αρχικών (ή συνοριακών) τιμών Σ.Δ.Ε

1. $y'' + 4y' = 0,\ y(0) = 0,\ y(\frac{\pi}{12}) = 1$

   Η Χ.Ε. είναι η
   $$r^2 + 4 = 0$$
   Οι ρίζες της Χ.Ε. είναι οι
   $$r_1 = 2i, r_2 = -2i$$
   Η Γ.Λ. της Δ.Ε. δίνεται από
   $$y(x) = c_1 e^{0x} \sin 2x + c_2 e^{0x} \cos 2x$$
   $$y(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$$

2. $y'' + 4y' = 0,\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 1$

3. $y'' + 4y' = 0,\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 0$

4. $y'' - 2y' + 2y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$

1.2.3 Επίλυση Γ.Λ. των παρακάτω Σ.Δ.Ε.

1. $y'' - 2y' - 3y = 0$
2. $y'' - 4y' = 0$
3. $y'' - 4y' + 4y = 0$

Chapter 2

Μετασχηματισμός Laplace

Chapter 3

Σειρές Fourier

Chapter 4

Πιθανότητες