Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования «Белорусский государственный технологический университет»

Факультет информационных технологий

Кафедра информационных систем и технологий

**Отчет**

К практической работе №8:

Основы защиты информации

«Криптографическая защита информации»

Выполнил:

студент 2 курса 7 группы

специальности ПОИТ

Городилов М.П.

Проверил:

Буснюк Н. Н.

**Практическое занятие №8**

Криптографическая защита информации

**Цель**: получение основных сведений из курса теории чисел

**Теоретические сведения**

Ниже рассматриваются: *N* – множество натуральных чисел, *Z* – множество рациональных чисел. Множество целых чисел *Z* – счетное, состоит из элементов 0; ±1; ±2; …; ± *n*,…. На нем определены две алгебраические операции – сложение и умножение. Эти операции обладают следующими свойствами (для любых ):

1. ассоциативность: ; ;

2. коммутативность: ; ;

3. существует нейтральный элемент – 0 и 1 соответственно:



4.  – закон дистрибутивности;

5. для каждого целого  существует единственное противоположное, то есть такое целое *b*, что *a* + *b* = *b* + *a* = 0.

*Теорема 2.1* (*О делении с остатком*). Для любых целых чисел *a* и *b*, , существует единственные целые числа *q* и  , такие, что .

В этом равенстве  называют остатком, а  – частным (неполным частным – при ) от деления *a*  на  При *r* = 0 величины *b* и *q* называют делителями или множителями числа *а*. Читатель со школьной скамьи умеет находить частное и остаток методом деления уголком.

*Следствие.* Пусть  – натуральное число,  Для всякого целого числа *a*  и максимального целого  с условием  существуют единственные целые  такие, что 

Такое равенство записывают сокращённо  или  (если *b* известно по контексту) и называют записью числа *a* в *b* – ичной позиционной системе счисления или системе счисления по основанию *b*. Нам кажется естественной привычная десятичная позиционная система записи целых чисел . В различных ситуациях более удобными оказываются другие основания. К примеру, во всех компьютерах на микроуровне вычисления проводятся в двоичной системе счисления. Для перехода к ней с десятичной применяют промежуточную – 16 - ричную систему счисления.

*Лемма 2.1.* Если в равенстве  все слагаемые – целые числа и все, кроме может быть одного, делятся на целое , то и это исключенное слагаемое делится на .

**Определение 2.1*.***Если целые числа  делятся на целое , то *d*  называют их *общим делителем*.

В дальнейшем речь идет только о положительных целых делителях.

**Определение 2.2.** Максимальный из общих делителей целых чисел  называется их *наибольшим общим делителем* и обозначается через НОД ().

*Теорема 2.2.* Если *,* то НОД *(a, b)*=НОД *(b, c).*

Теорема 2.2 позволила Евклиду (примерно 2300 лет тому назад) обосновать следующий факт.

*Теорема 2.3.* Наибольший общий делитель целых чисел  *a* и *b*   равен последнему отличному от нуля остатку цепочки равенств:

*;*

*;*

*…………………*

**

**

то есть  *=* НОД *.*

Теорема 2.3 формулирует алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя целых чисел. Его вариантом является следующий – второй способ вычисления наибольшего общего делителя по алгоритму Евклида – вычисляем последовательно разности  до получения последней ненулевой разности, которая и совпадает с НОД *(a, b).*

**Определение 2.3.** Натуральное число ** называется *простым*, если оно делится только на1 и на себя.

*Теорема 2.5.* Всякое натуральное число ** либо является простым числом, либо имеет простой делитель.

Заметим, что из соотношения  натуральных чисел, больших единицы, следует, что, либо *p,* либо *q* принадлежит отрезку . Легко видеть, что наименьший натуральный делитель ** натурального числа ** является простым числом. Исторически первый метод проверки натурального числа ** на простоту заключается в делении его на простые числа, не превосходящие , носит название “решета Эратосфена”. К настоящему времени разработан достаточно большой цикл алгоритмов проверки числа на простоту.

*Теорема 2.6 (Евклид).* Простых чисел бесконечно много.

Значение простых чисел в том, что они по теореме 2.5 являются составными кирпичиками всех натуральных чисел.

**Определение 2.4.** Целые числа *a*  и  *b* называются *взаимно простыми,* еслиНОД .

*Теорема 2.7* (*Критерий взаимной простоты целых чисел*). Целые числа  *a* и *b* взаимно просты тогда и только тогда, когда существуют такие целые u и v, что выполняется равенство .

**Следствие.** НОД** тогда и только тогда, когдаНОД иНОД .

Важным в теории чисел и ее приложениях является следующее свойство взаимно простых целых чисел.

*Лемма 2.2.* Пусть произведение целых чисел *ab* делится на целое число *с* и НОД . Тогда *b*  делится на  *с*.

*Теорема 2.8**(Основная теорема арифметики)*. Всякое целое число ** однозначно раскладывается в произведение простых множителей

*.*

Если в этом равенстве собрать одинаковые множители, то получим каноническое разложение целого числа: .

**Определение 2.5.**Целые числа *а* и *b* называются сравнимыми по модулю *m*, если они удовлетворяют одному из условий теоремы 2.9.Этот факт обозначают формулой ** илии называют данную формулу сравнением.

**Индивидуальные задания к ПЗ №8 “Теория чисел”**

**Вариант 8**

1-3. *а* = 83748733, *b* = 73435591.

6. Найти остаток от деления  на 11.

1.Найти канонические разложения чисел *а* и *b*.

2. Найти НОД  пользуясь a) алгоритмом Евклида, б) разложением чисел на простые множители.

3. С помощью расширенного алгоритма Евклида найти целые *u*, *v*, удовлетворяющие соотношению Безу: *au* + *bv* = НОД .

6. Найти остаток от деления данного числа на простое.

**Задание 1.** Найти канонические разложения чисел *а* = 83748733, *b* = 73435591.

83748733 = 89 · 89 · 97 · 109

73435591 = 73 · 89 · 89 · 127

**Задание 2.** Найти НОД (83748733*,* 73435591) пользуясь а) алгоритмом Евклида, б) разложением чисел на простые множители.

**Решение.** Применим алгоритм Евклида.

83748733=73435591\*1 + 10313142;

73435591=10313142\*7 + 1243597;

10313142 = 1243597\*8 + 364366;

1243597 = 364366\*3 + 150499;

364366 = 150499\*2 + 63368;

150499 = 63368\*2 + 23763;

63368 = 23763\*3 + 15842;

23763 = 15842\* 2 + 7921;

15842=7921\*2 + 0;

Следовательно, НОД = 7921.

Найдём НОД (*a, b*), воспользовавшись разложением на простые множители чисел *a* и *b*, полученным в решении предыдущего задания: Наибольшим общим делителем будет произведение одинаковых множителей, входящих, как в одно, так и в другое разложения чисел: НОД = 89\*89 = 7921.

**Задание 3.** С помощью расширенного алгоритма Евклида найти целые числа *u*,*v*, удовлетворяющие соотношению Безу:  для целых чисел а = 83748733, b = 73435591.

Коэффициент перед большим числом -3425

Коэффициент перед меньшим числом 3906

660422941\*(-3425)+ 36481301\*3906 = 7921

**Задание 6**. Найти остаток от деления на 11.

19961 делится на 11 с остатком 5

19962 делится на 11 с остатком 3

19963 делится на 11 с остатком 4

19964 делится на 11 с остатком 9

19965 делится на 11 с остатком 1

19966 делится на 11 с остатком 5

19967 делится на 11 с остатком 3

19968 делится на 11 с остатком 4

Получили один из предыдущих остатков, значит «зациклились». Число 19962003 дает тот же остаток деления на 11, что и 19963. Значит, длина цикла равна 5. Остаток от деления 19962003 на 11 равен 4.