**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** Приобретение навыков решения открытой транспортной задачи.

Стоимость доставки единицы груза из каждого пункта отправления в соответствующие пункты назначения задана матрицей тарифов

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **потребители**  **Поставщики** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **запасы** |
| **1** | 17 | 7 | 11 | 8 | 15 | 6 | 173 |
| **2** | 15 | 5 | 13 | 10 | 12 | 18 | 118 |
| **3** | 6 | 10 | 16 | 13 | 7 | 16 | 155 |
| **4** | 9 | 15 | 15 | 8 | 18 | 7 | 164 |
| **5** | 8 | 16 | 14 | 5 | 15 | 9 | 105 |
| **Потребности** | 148 | 112 | 136 | 198 | 100 | 168 |  |

Проверим необходимое и достаточное условие разрешимости задачи.   
∑a = 173+118+155+164+105 = 715

∑b = 148+112+136+198+100+168 = 862

Как видно, суммарная потребность груза в пунктах назначения превышает запасы груза на базах. Следовательно, модель исходной транспортной задачи является открытой. Чтобы получить закрытую модель, введем дополнительную (фиктивную) базу с запасом груза, равным 147 (862-715). Тарифы перевозки единицы груза из базы ко всем потребителям полагаем равны нулю.   
Занесем исходные данные в распределительную таблицу.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **потребители**  **Поставщики** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **запасы** |
| **1** | 17 | 7 | 11 | 8 | 15 | 6 | 173 |
| **2** | 15 | 5 | 13 | 10 | 12 | 18 | 118 |
| **3** | 6 | 10 | 16 | 13 | 7 | 16 | 155 |
| **4** | 9 | 15 | 15 | 8 | 18 | 7 | 164 |
| **5** | 8 | 16 | 14 | 5 | 15 | 9 | 105 |
| **6** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 147 |
| **Потребности** | 148 | 112 | 136 | 198 | 100 | 168 |  |

I. Метод наименьшей стоимости.

Сначала в таблице находим ячейку с наименьшей стоимостью. Затем переменной в этой ячейке присваивается наибольшее значение, допускаемое ограничениями по спросу и предложению (если таких несколько, то выбор произволен). Далее вычеркивается соответствующий столбец или строка и корректируется спрос и предложение. Затем просматриваются не вычеркнутые ячейки, и выбирается новая ячейка с минимальной стоимостью и т.д.

1) Искомый элемент равен c22=5. Для этого элемента запасы равны 118, потребности 112. Поскольку минимальным является 112, то вычитаем его.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **запасы** |
| **1** | 17 | 7 | 11 | 8 | 15 | 6 | 173 |
| **2** | 15 | 5 | 112 | 13 | 10 | 12 | 18 | 6 |
| **3** | 6 | 10 | 16 | 13 | 7 | 16 | 155 |
| **4** | 9 | 15 | 15 | 8 | 18 | 7 | 164 |
| **5** | 8 | 16 | 14 | 5 | 15 | 9 | 105 |
| **6** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 147 |
| **Потребности** | 148 | 0 | 136 | 198 | 100 | 168 |  |

2) Искомый элемент равен c54=5. Для этого элемента запасы равны 105, потребности 198. Поскольку минимальным является 105, то вычитаем его.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **запасы** |
| **1** | 17 | 7 | 11 | 8 | 15 | 6 | 173 |
| **2** | 15 | 5 | 112 | 13 | 10 | 12 | 18 | 6 |
| **3** | 6 | 10 | 16 | 13 | 7 | 16 | 155 |
| **4** | 9 | 15 | 15 | 8 | 18 | 7 | 164 |
| **5** | 8 | 16 | 14 | 5 | 105 | 15 | 9 | 0 |
| **6** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 147 |
| **Потребности** | 148 | 0 | 136 | 93 | 100 | 168 |  |

3) Искомый элемент равен c16=6. Для этого элемента запасы равны 173, потребности 168. Поскольку минимальным является 168, то вычитаем его.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **запасы** |
| **1** | 17 | 7 | 11 | 8 | 15 | 6 | 168 | 5 |
| **2** | 15 | 5 | 112 | 13 | 10 | 12 | 18 | 6 |
| **3** | 6 | 10 | 16 | 13 | 7 | 16 | 155 |
| **4** | 9 | 15 | 15 | 8 | 18 | 7 | 164 |
| **5** | 8 | 16 | 14 | 5 | 105 | 15 | 9 | 0 |
| **6** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 147 |
| **Потребности** | 148 | 0 | 136 | 93 | 100 | 0 |  |

4) Искомый элемент равен c31=6. Для этого элемента запасы равны 155, потребности 148. Поскольку минимальным является 148, то вычитаем его.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **запасы** |
| **1** | 17 | 7 | 11 | 8 | 15 | 6 | 168 | 5 |
| **2** | 15 | 5 | 112 | 13 | 10 | 12 | 18 | 6 |
| **3** | 6 | 148 | 10 | 16 | 13 | 7 | 16 | 7 |
| **4** | 9 | 15 | 15 | 8 | 18 | 7 | 164 |
| **5** | 8 | 16 | 14 | 5 | 105 | 15 | 9 | 0 |
| **6** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 147 |
| **Потребности** | 0 | 0 | 136 | 93 | 100 | 0 |  |

5) Искомый элемент равен c35=7. Для этого элемента запасы равны 7, потребности 100. Поскольку минимальным является 7, то вычитаем его.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **запасы** |
| **1** | 17 | 7 | 11 | 8 | 15 | 6 | 168 | 5 |
| **2** | 15 | 5 | 112 | 13 | 10 | 12 | 18 | 6 |
| **3** | 6 | 148 | 10 | 16 | 13 | 7 | 7 | 16 | 0 |
| **4** | 9 | 15 | 15 | 8 | 18 | 7 | 164 |
| **5** | 8 | 16 | 14 | 5 | 105 | 15 | 9 | 0 |
| **6** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 147 |
| **Потребности** | 0 | 0 | 136 | 93 | 93 | 0 |  |

6) Искомый элемент равен c14=8. Для этого элемента запасы равны 5, потребности 93. Поскольку минимальным является 5, то вычитаем его.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **запасы** |
| **1** | 17 | 7 | 11 | 8 | 5 | 15 | 6 | 168 | 0 |
| **2** | 15 | 5 | 112 | 13 | 10 | 12 | 18 | 6 |
| **3** | 6 | 148 | 10 | 16 | 13 | 7 | 7 | 16 | 0 |
| **4** | 9 | 15 | 15 | 8 | 18 | 7 | 164 |
| **5** | 8 | 16 | 14 | 5 | 105 | 15 | 9 | 0 |
| **6** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 147 |
| **Потребности** | 0 | 0 | 136 | 88 | 93 | 0 |  |

7) Искомый элемент равен c44=8. Для этого элемента запасы равны 164, потребности 88. Поскольку минимальным является 88, то вычитаем его.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **запасы** |
| **1** | 17 | 7 | 11 | 8 | 5 | 15 | 6 | 168 | 0 |
| **2** | 15 | 5 | 112 | 13 | 10 | 12 | 18 | 6 |
| **3** | 6 | 148 | 10 | 16 | 13 | 7 | 7 | 16 | 0 |
| **4** | 9 | 15 | 15 | 8 | 88 | 18 | 7 | 76 |
| **5** | 8 | 16 | 14 | 5 | 105 | 15 | 9 | 0 |
| **6** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 147 |
| **Потребности** | 0 | 0 | 136 | 0 | 93 | 0 |  |

8) Искомый элемент равен c25=12. Для этого элемента запасы равны 6, потребности 93. Поскольку минимальным является 6, то вычитаем его.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **запасы** |
| **1** | 17 | 7 | 11 | 8 | 5 | 15 | 6 | 168 | 0 |
| **2** | 15 | 5 | 112 | 13 | 10 | 12 | 6 | 18 | 0 |
| **3** | 6 | 148 | 10 | 16 | 13 | 7 | 7 | 16 | 0 |
| **4** | 9 | 15 | 15 | 8 | 88 | 18 | 7 | 76 |
| **5** | 8 | 16 | 14 | 5 | 105 | 15 | 9 | 0 |
| **6** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 147 |
| **Потребности** | 0 | 0 | 136 | 0 | 87 | 0 |  |

9) Искомый элемент равен c43=15. Для этого элемента запасы равны 76, потребности 136. Поскольку минимальным является 6, то вычитаем его.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **запасы** |
| **1** | 17 | 7 | 11 | 8 | 5 | 15 | 6 | 168 | 0 |
| **2** | 15 | 5 | 112 | 13 | 10 | 12 | 6 | 18 | 0 |
| **3** | 6 | 148 | 10 | 16 | 13 | 7 | 7 | 16 | 0 |
| **4** | 9 | 15 | 15 | 76 | 8 | 88 | 18 | 7 | 0 |
| **5** | 8 | 16 | 14 | 5 | 105 | 15 | 9 | 0 |
| **6** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 147 |
| **Потребности** | 0 | 0 | 60 | 0 | 87 | 0 |  |

10) Искомый элемент равен c63=0. Для этого элемента запасы равны 147, потребности 60. Поскольку минимальным является 60, то вычитаем его.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **запасы** |
| **1** | 17 | 7 | 11 | 8 | 5 | 15 | 6 | 168 | 0 |
| **2** | 15 | 5 | 112 | 13 | 10 | 12 | 6 | 18 | 0 |
| **3** | 6 | 148 | 10 | 16 | 13 | 7 | 7 | 16 | 0 |
| **4** | 9 | 15 | 15 | 76 | 8 | 88 | 18 | 7 | 0 |
| **5** | 8 | 16 | 14 | 5 | 105 | 15 | 9 | 0 |
| **6** | 0 | 0 | 0 | 60 | 0 | 0 | 0 | 87 |
| **Потребности** | 0 | 0 | 0 | 0 | 87 | 0 |  |

11) Искомый элемент равен c65=0. Для этого элемента запасы равны 87, потребности 87.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **запасы** |
| **1** | 17 | 7 | 11 | 8 | 5 | 15 | 6 | 168 | 0 |
| **2** | 15 | 5 | 112 | 13 | 10 | 12 | 6 | 18 | 0 |
| **3** | 6 | 148 | 10 | 16 | 13 | 7 | 7 | 16 | 0 |
| **4** | 9 | 15 | 15 | 76 | 8 | 88 | 18 | 7 | 0 |
| **5** | 8 | 16 | 14 | 5 | 105 | 15 | 9 | 0 |
| **6** | 0 | 0 | 0 | 60 | 0 | 0 | 87 | 0 | 0 |
| **Потребности** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |

Итог: значение целевой функции равно:

Z = 8\*5 + 6\*168 + 5\*112 + 12\*6 + 6\*148 + 7\*7 + 15\*76 + 8\*88 + 5\*105 + 0\*60 + 0\*87 = 4986

II. Метод потенциалов

В методе потенциалов каждой строке i и каждому столбцу j транспортной таблицы ставятся в соответствие числа (потенциалы) ui (поставщики) и vj (потребители). Для каждой базисной переменной xij потенциалы ui и vj удовлетворяют уравнению ui + vj = сij

Найдем предварительные потенциалы ui, vj. по занятым клеткам таблицы, в которых ui + vj = cij, произвольно взяв, что u1 = 0.

u1 + v4 = 8; 0 + v4 = 8; v4 = 8  
u4 + v4 = 8; 8 + u4 = 8; u4 = 0  
u4 + v3 = 15; 0 + v3 = 15; v3 = 15  
u6 + v3 = 0; 15 + u6 = 0; u6 = -15  
u6 + v5 = 0; -15 + v5 = 0; v5 = 15  
u2 + v5 = 12; 15 + u2 = 12; u2 = -3  
u2 + v2 = 5; -3 + v2 = 5; v2 = 8  
u3 + v5 = 7; 15 + u3 = 7; u3 = -8  
u3 + v1 = 6; -8 + v1 = 6; v1 = 14  
u5 + v4 = 5; 8 + u5 = 5; u5 = -3  
u1 + v6 = 6; 0 + v6 = 6; v6 = 6

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=14 | v2=8 | v3=15 | v4=8 | v5=15 | v6=6 |
| u1=0 | 17 | 7 | 11 | 8 | 5 | 15 | 6 | 168 |
| u2=-3 | 15 | 5 | 112 | 13 | 10 | 12 | 6 | 18 |
| u3=-8 | 6 | 148 | 10 | 16 | 13 | 7 | 7 | 16 |
| u4=0 | 9 | 15 | 15 | 76 | 8 | 88 | 18 | 7 |
| u5=-3 | 8 | 16 | 14 | 5 | 105 | 15 | 9 |
| u6=-15 | 0 | 0 | 0 | 60 | 0 | 0 | 87 | 0 |

Решение не является оптимальным, так как существуют оценки свободных клеток, для которых ui + vj > cij  
(1;2): 0 + 8 > 7; ∆12 = 0 + 8 - 7 = 1 > 0  
(1;3): 0 + 15 > 11; ∆13 = 0 + 15 - 11 = 4 > 0  
(4;1): 0 + 14 > 9; ∆41 = 0 + 14 - 9 = 5 > 0  
(5;1): -3 + 14 > 8; ∆51 = -3 + 14 - 8 = 3 > 0  
max(1,4,5,3) = 5

Вводимой в базис будет переменная, имеющая наибольшее положительное значение – (4;1) = 9

Определив вводимую в базис переменную, следует определить исключаемую из базиса переменную. Обозначим через θ количество груза, перевозимого по маршруту (4;1). Максимально возможное значение θ определяем из следующих условий:

1. Должны выполняться ограничения на спрос и предложение.
2. Ни по какому маршруту не должны выполняться перевозки с отрицательным объемом грузов.

Сначала строим замкнутый цикл, который начинается и заканчивается в искомой ячейке. Цикл состоит из последовательности горизонтальных и вертикальных отрезков (но не диагональных), соединяющих ячейки, соответствующие текущим базисным переменным, и ячейку, соответствующую вводимой переменной. Для того, чтобы удовлетворять ограничениям по спросу и предложению, надо поочередно отнимать и прибавлять θ к значениям базисных переменных, расположенных в угловых ячейках цикла. Направление обхода цикла (по часовой стрелке или против не имеет значения).

В клетку (4;1) поставим знак «+», в остальных чередующиеся знаки «-», «+», «-».

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
| **1** | 17 | 7 | 11 | 8 | 5 | 15 | 6 | 168 |
| **2** | 15 | 5 | 112 | 13 | 10 | 12 | 6 | 18 |
| **3** | 6 | 148- | 10 | 16 | 13 | 7 | 7+ | 16 |
| **4** | 9+ | 15 | 15 | 76- | 8 | 88 | 18 | 7 |
| **5** | 8 | 16 | 14 | 5 | 105 | 15 | 9 |
| **6** | 0 | 0 | 0 | 60+ | 0 | 0 | 87- | 0 |

Цикл, приведенный в таблице (4,1 → 4,3 → 6,3 → 6,5 → 3,5 → 3,1).

Из минусовых клеток, выбираем наименьшее, т.е. (4, 3) = 76. Прибавляем 76 к плюсовым клеткам, и вычитаем 76 из минусовых клеток.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
| **1** | 17 | 7 | 11 | 8 | 5 | 15 | 6 | 168 |
| **2** | 15 | 5 | 112 | 13 | 10 | 12 | 6 | 18 |
| **3** | 6 | 72 | 10 | 16 | 13 | 7 | 83 | 16 |
| **4** | 9 | 76 | 15 | 15 | 8 | 88 | 18 | 7 |
| **5** | 8 | 16 | 14 | 5 | 105 | 15 | 9 |
| **6** | 0 | 0 | 0 | 136 | 0 | 0 | 11 | 0 |

Определяем потенциалы для всех базисных переменных ((4,3) уже не базисная):

u1 + v4 = 8; 0 + v4 = 8; v4 = 8  
u4 + v4 = 8; 8 + u4 = 8; u4 = 0  
u4 + v1 = 9; 0 + v1 = 9; v1 = 9  
u3 + v1 = 6; 9 + u3 = 6; u3 = -3  
u3 + v5 = 7; -3 + v5 = 7; v5 = 10  
u2 + v5 = 12; 10 + u2 = 12; u2 = 2  
u2 + v2 = 5; 2 + v2 = 5; v2 = 3  
u6 + v5 = 0; 10 + u6 = 0; u6 = -10  
u6 + v3 = 0; -10 + v3 = 0; v3 = 10  
u5 + v4 = 5; 8 + u5 = 5; u5 = -3  
u1 + v6 = 6; 0 + v6 = 6; v6 = 6

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | v1=9 | v2=3 | v3=10 | v4=8 | v5=10 | v6=6 |
| u1=0 | 17 | 7 | 11 | 8 | 5 | 15 | 6 | 168 |
| u2=2 | 15 | 5 | 112 | 13 | 10 | 12 | 6 | 18 |
| u3=-3 | 6 | 72 | 10 | 16 | 13 | 7 | 83 | 16 |
| u4=0 | 9 | 76 | 15 | 15 | 8 | 88 | 18 | 7 |
| u5=-3 | 8 | 16 | 14 | 5 | 105 | 15 | 9 |
| u6=-10 | 0 | 0 | 0 | 136 | 0 | 0 | 11 | 0 |

Решение является оптимальным, т.к. все оценки свободных клеток удовлетворяют условию ui + vj ≤ cij.

Минимальные затраты составят: Z = 8\*5 + 6\*168 + 5\*112 + 12\*6 + 6\*72 + 7\*83 + 9\*76 + 8\*88 + 5\*105 + 0\*136 + 0\*11 = 4606