Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ **Информатика и системы управления**

КАФЕДРА **Компьютерные системы и сети**

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ **09.03.03 Прикладная информатика**

ОТЧЕТ

по домашнему заданию № 1

вариант № 4

Название Закрепление знаний о LaTeX

Дисциплина Автоматизация процессов разработки научно-технической документации

Студент гр. ИУ6-64Б ________________ М.А.Гейне
(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Преподаватель ________________ Т.А.Ким
(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Москва, 2021

Цель работы: закрепление на практике теоретических знаний о LaTeX.

Задание

Оформить документ в LATEX, все формулы, которые встречаются, должны быть оформлены в математическом режиме (через equation). Если формула имеет номер и на неё есть ссылка, то необходимо также проставить метку для формулы и ссылаться по этой метке. Все сноски должны быть оформлены в виде сносок. Рисунки повторены при помощи пакета TikZ.

Выполнение задания

По определению однократного предела для любого $x \in X$, $x \neq x_0$,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{\delta} = \tilde{\delta}(\varepsilon) > 0 \forall y \in Y$$
$$\left(0 < |y - y_0| < \tilde{\delta} \Rightarrow |f(x,y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Возьмем $x \in X$ из проколотой δ-окрестности точки x_0 и рассмотрим разность $\varphi(x) - A$. Прибавим и отнимем в этом выражении $f(x,y)$ с $y \in Y$, $0 < |y - y_0| < \min\{\delta, \tilde{\delta}\}$, и получим оценку

$$|\varphi(x) - A| = |\varphi(x) \pm f(x,y) - A \leqslant$$
$$\leqslant |\varphi(x) - f(x,y)| + |f(x,y) - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y) = A$ $\square$

14. Непрерывность функции многих переменных

14.1. Непрерывность в точке. Локальные свойства непрерывных функций

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и $x_0 \in X$.

Определение 14.1. Функция f называется *непрерывной в точке*x_0, если

$$\forall O(f(x_0))\exists O(x_0)\forall x \in X \cap O(x_0) \Rightarrow f(x) \in O(f(x_0)),$$

или

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in X \quad (\rho(x,x_0) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon),$$

или $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in X$

$$\left(\begin{matrix} |x_1 - x_1^0| < \delta & \\ |x_2 - x_2^0| < \delta & \\ \vdots & \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \\ x_n - x_n^0| < \delta & \end{matrix}\right),$$

где $x = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $x_0 = (x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$.

Если $x_0 \in X'$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 14.2. Пусть $y = f(x), x \in X, x_0 \in X$. Функция

$f(x)$ называется непрерывной в точке $x_{0)}$ если

$$\forall x^p \subset X \left(\lim_{p\to\infty} x^p = x_0 \Rightarrow \lim_{p\to\infty} f(x^p) = f(x_0) \right).$$

Приведенные определения равносильны, что следует из эквивалентности определений предела по Коши и по Гейне.

Теорема 14.1. *Если функция f непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) > 0(f(x_0) < 0)$, то найдутся такие $O(x_0)$ и $r > 0$, что*

$$f(x) \geqslant r > 0(f(x) \leqslant -r < 0) \text{ \textit{при} } x \in O(x_0) \cap X.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $x_0 \in X'_)$ то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$), т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x \in O_\delta(x_0) \cap X \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Пусть $f(x_0) > 0$. Положим $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$, по нему найдем $\delta(\varepsilon)$ и для любого $x \in O_\delta(x_0) \cap X$ получим

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2},$$

т.е.

$$f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3}{2} f(x_0),$$

откуда

$$f(x) > r = \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

$\square$

Как и для функции одной переменной, имеют место теоремы о непрерывности суммы, произведения и частного двух непрерывных функций. Формулировки и доказательства этих теорем те же, что и для функции одной переменной.

Теорема 14.2 (Непрерывность сложной функции)**.** *Пусть отображение $x = \varphi(t)$ определено в некоторой окрестности точки $t_0 = (t_1^0, t_2^0, \ldots, t_m^0) \in \mathbb{R}^m$ и непрерывным образом отображает ее в точку $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$. пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и непрерывна в этой точке. Тогда сложная функция $F(t) = f(\varphi(t))$ непрерывна в точке t_0.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что для отображения

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$$

непрерывность в точке t_0 означает непрерывность каждой из функций $\varphi_i(t)$в точке t_0 как функции m переменных,т. е. если $\{t^p\} \subset \mathbb{R}^m$ и $t^p \xrightarrow[p\to\infty]{} t_0$, то

$$\varphi(t^p) = (\varphi_1(t^p), \varphi_2(t^p), \ldots, \varphi_n(t^p)) \xrightarrow[p\to\infty]{} \\ \xrightarrow[p\to\infty]{} (\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \ldots, \varphi_n(t_0)) = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = x_0.$$

Положим $x^p = \varphi(t^p)$, тогда $X^p \xrightarrow[p\to\infty]{} x_0$. В силу непрерывности функции f, $f(x^p) \xrightarrow[p\to\infty]{} f(x_0)$, т.е.

$$F(t^p) = f(\varphi(t^p)) \xrightarrow[p\to\infty]{} f(x_0) = f(\varphi(t_0)) = F(t_0)$$

□

14.2. Непрерывность на множестве. Свойства функций, непрерывных на множестве

Определение 14.3. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на множестве* $X \subseteq \mathbb{R}^n$, если она непрерывна в каждой точке множества X.

Определение 14.4. Множество M из $\mathbb{R}^n$ называется *связным*, если любые две точки множества можно соединить непрерываной кривой, лежайщей в этом множестве.

Напомним, что *непрерывной кривой* называется непрерывный образ отрезка

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ \quad\vdots \\ x_n = x_n(t) \end{cases} \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

где $x_i(t)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$ при всех $i = 1,2,\ldots,n$.

Теорема 14.3. *Пусть G — связное множество в $\mathbb{R}^n$.Пусть функция f непрерывна на G и существуют $a \in G$ и $b \in G$такие, что $f(a) \neq f(b)$.Тогда для любого числа C, заключенного между $f(a)$ и $f(b)$, существует точка $c \in G$ такая, что $f(c) = C$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как G — связное множество, существует непрерывная кривая

$$L \ : \ \begin{cases} x_1 = \phi_1(t), \\ x_2 = \phi_2(t), \\ \quad\vdots \\ x_n = \phi_n(t), \end{cases} \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

соединяющая точки a и b и лежащая в G, т.е. $a = (\phi_1(\alpha), \phi_2(\alpha), \ldots, \phi_n(\alpha$
$(\phi_1(\beta), \phi_2(\beta), \ldots, \phi_n(\beta))$ и $x = (\phi 1(t), \phi 2(t), \ldots, \phi n(t)) \in G$ при любом $t \in [\alpha, \beta]$.

Пусть $F(t) = f(\phi 1(t), \phi 2(t),\ \ldots, \phi n(t))$. По теореме о непрерывности сложной функции функция $F(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$ и $F(\alpha) = f(a)_{)}F(\beta) = f(b)$, т.е. $F(\alpha) \neq F(\beta)$ и

Исходный код

```
\newtheorem{theorem}{Теорема}[section]
\theoremstyle{definition}
\newtheorem{definition}{Определение}[section]
\renewcommand{\proofname}{\rm Д о к а з а т е л ь с т в о}
\setcounter{section}{13}
\titleformat{\section}[hang]{\normalfont\Large\bfseries}{\thesec
 ↪  tion.
 ↪  }{0.1em}{}
\titleformat{\subsection}[hang]{\normalfont\Large\bfseries}{\the
 ↪  subsection.
 ↪  }{0.1em}{}

По определению однократного предела для любого $x \in X$, $x
 ↪  \neq x_0$,
\begin{multline}
    \forall \varepsilon > 0 \exists\tilde{\delta}=\tilde{\delta}
     ↪  (\varepsilon)>0\forall y\in Y
     ↪  \\
    \left( 0< \left\lvert y - y_0 \right\rvert < \tilde{\delta}
     ↪  \Rightarrow \left\lvert f(x,y)-\varphi(x)\right\rvert <
     ↪  \frac{\varepsilon}{2}  \right)
\end{multline}
Возьмем $x\in X$ из проколотой $\delta$-окрестности точки $x_0$
 ↪  и рассмотрим разность $\varphi (x)-A$.
Прибавим и отнимем в этом выражении \(f(x,y)$ с $y\in Y\), \(0<
 ↪  |y-y_0|< \min \{\delta, \tilde{\delta}\}\), и получим оценку
\begin{multline}
    \left\lvert \varphi(x) - A\right\rvert = |\varphi(x)\pm
     ↪  f(x,y)-A\leqslant \\
    \leqslant
     ↪  |\varphi(x)-f(x,y)|+|f(x,y)-A|<\frac{\varepsilon}{2}+
     ↪  \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{multline}
т.е. $\displaystyle \lim_{x\rightarrow x_0}\lim_{y\rightarrow
 ↪  y_0} f(x,y) = A$ \qed
\pagebreak

\section{Непрерывность функции многих переменных}
\subsection{Непрерывность в точке. Локальные свойства
 ↪  непрерывных функций}
Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X\subseteq
 ↪  \mathbb{R}^n$ и $x_0 \in X$.

\begin{definition}
    Функция $f$ называется \emph{непрерывной в точке}$x_0$, если
    \begin{multline}
        \forall O(f(x_{0}))\exists O(x_{0})\forall x\in X\cap
         ↪  O(x_{0})\Rightarrow f(x)\in O(f(x_{0})),
```

```
    \end{multline}
    или
    \begin{multline}
        \forall \varepsilon>0\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0
         ↪  \forall x\in X
         ↪  \\
        (\rho(x,x_{0})<\delta\Rightarrow|f(x)-f(x_{0})|<\varepsi
         ↪  lon),
    \end{multline}
    или $\forall \varepsilon>0
     ↪  \exists\delta=\delta(\varepsilon)>0 \forall x\in X$
    \[\left(
        \begin{aligned}
            |x_{1}-&x_{1}^{0}|<\delta & & \\
            |x_{2}-&x_{2}^{0}|<\delta & & \\
            &\vdots & \Rightarrow & |f(x)-f(x_{0})|<\varepsilon\\
            x_{n}-&x_{n}^{0}|<\delta \\
        \end{aligned} \right),
    \]
    где $x= (x_{1},x_{2}, \ldots ,x_{n})$,
     ↪  $x_{0}=(x_{1}^{0},x_{2}^{0},\ldots , x_{n}^{0})$.
\end{definition}
Если $x_0 \in X'$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$
 ↪  тогда и только тогда,
когда $\displaystyle \lim_{x \rightarrow x_0}f(x) = f(x_0)$.
\begin{definition}
    Пусть $y=f(x),x\in X, x_{0}\in X.$
    Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_{0)}$ если
    \[
    \forall{x^{p}}\subset X
     ↪  \left(\lim_{p\rightarrow\infty}x^{p}=x_{0}\Rightarrow\li
     ↪  m_{p\rightarrow\infty}f(x^{p})=f(x_{0})\right)
     ↪  .
    \]
\end{definition}
Приведенные определения равносильны, что следует из
 ↪  эквивалентности определений предела по Коши и по Гейне.
\begin{theorem}
    Если функция $f$ непрерывна в точке
    $x_{0}$ и $f(x_{0})>0(f(x_{0})<0)$ , то найдутся такие
     ↪  $O(x_{0})$ и $r>0$, что
    \[f(x)\geqslant r>0 (f(x)\leqslant-r<0)~\text{при}~x\in
     ↪  O(x_{0})\cap X.\]
\end{theorem}
\begin{proof}
    Если $x_{0}\in X_{)}'$ то $\displaystyle \lim_{x\rightarrow
     ↪  x_{0}}f(x)=f(x_{0}))$, т.е.
    \[\forall
     ↪  \varepsilon>0\exists\delta=\delta(\varepsilon)\forall
     ↪  x\in O_{\delta}(x_{0})\cap
     ↪  X\Rightarrow|f(x)-f(x_{0})|<\varepsilon.\]
```

```
    Пусть $f(x_{0})>0$. Положим $\displaystyle
     ↪  \varepsilon=\frac{f(x_{0})}{2}>0$, по нему найдем
     ↪  $\delta(\varepsilon)$ и для любого $x\in
     ↪  O_{\delta}(x_{0})\cap X$ получим
    \[|f(x)-f(x_{0})|<\frac{f(x_{0})}{2},\]
    т.е.
    \[f(x_{0})-\frac{f(x_{0})}{2}<f(x)<\frac{3}{2}f(x_{0}),\]
    откуда
    \[f(x)>r=\frac{f(x_{0})}{2}>0.\]
\end{proof}

Как и для функции одной переменной, имеют место теоремы о
 ↪  непрерывности суммы, произведения и частного двух
 ↪  непрерывных функций. Формулировки и доказательства этих
 ↪  теорем те же, что и для функции одной переменной.

\begin{theorem}[Непрерывность сложной функции]
    Пусть отображение $x = \varphi(t)$ определено в некоторой
     ↪  окрестности точки $t_0=(t_1^0, t_2^0,\ldots,t_m^0)\in
     ↪  \mathbb{R}^m $
    и непрерывным образом отображает ее в точку $x_0=(x_1^0,
     ↪  x_2^0, \ldots, x_n^0)\in \mathbb{R}^n$. пусть функция
     ↪  $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки
    $x_0$ и непрерывна в этой точке. Тогда сложная функция
     ↪  $F(t)=f(\varphi(t))$ непрерывна в точке $t_0$.
\end{theorem}
\begin{proof}
    Заметим, что для отображения
    \[\varphi(t)=(\varphi_{1}(t),\varphi_{2}(t),\ldots,\varphi_{⌋
     ↪  n}(t))\]
    непрерывность в точке $t_0$ означает непрерывность каждой из
     ↪  функций $\varphi_i(t)$в точке $t_0$ как функции m
     ↪  переменных,т. е. если
    $\left\{ t^p\right\}\subset \mathbb{R}^m$ и $t^p
     ↪  \xrightarrow[p\rightarrow\infty]{}t_0 $, то
    \begin{multline}
        \displaystyle
        \varphi(t^{p})=(\varphi_{1}(t^{p}),\varphi_{2}(t^{p}),\l⌋
         ↪  dots,\varphi_{n}(t^{p}))\xrightarrow[p\rightarrow\in⌋
         ↪  fty]{}
         ↪  \\
        \xrightarrow[p\rightarrow\infty]{} (\varphi_{1}(t_{0}),
         ↪  \varphi_{2}(t_{0}),\ldots
         ↪  ,\varphi_{n}(t_{0}))=(x_{1}^{0},x_{2}^{0},\ldots ,
         ↪  x_{n}^{0})=x_{0}.
    \end{multline}
    Положим $x^{p}=\varphi(t^{p})$, тогда
     ↪  $X^{p}\xrightarrow[p\rightarrow\infty]{}x_{0}$. В силу
     ↪  непрерывности функции $f,
     ↪  f(x^{p})\xrightarrow[p\rightarrow\infty]{}f(x_{0}),$ т.е.
```

```
    \[F(t^{p})=f(\varphi(t^{p}))\xrightarrow[p\rightarrow\infty]⌋
     ↪  {}
     ↪  f(x_{0})=f(\varphi(t_{0}))=F(t_{0})\]
\end{proof}
\subsection{Непрерывность на множестве. Свойства функций,
 ↪  непрерывных на множестве}
\begin{definition}
    Функция $f(x)$ называется \emph{непрерывной на множестве}
     ↪  $X\subseteq \mathbb{R}^n,$ если она непрерывна в каждой
     ↪  точке множества $X$.
\end{definition}
\begin{definition}
    Множество $M$ из $\mathbb{R}^{n}$ называется \emph{связным},
     ↪  если любые две точки множества можно соединить
     ↪  непрерываной кривой, лежайщей в этом множестве.
\end{definition}

Напомним, что \emph{непрерывной кривой} называется непрерывный
 ↪  образ отрезка
\[ \left\{
    \begin{aligned}
        x_{1}=&x_{1}(t) & \\
        &\vdots & \alpha\leqslant t\leqslant\beta,\\
        x_{n}=&x_{n}(t) &
    \end{aligned}\right.
\]
где $x_i(t)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$ при всех
 ↪  $i=1,2,\ldots, n$.

\begin{theorem}
    Пусть $G$ --- связное множество в $\mathbb{R}^n$.Пусть
     ↪  функция $f$ непрерывна на $G$ и существуют $a \in G$ и
     ↪  $b \in G$такие, что
    $f(a)\neq f(b)$.Тогда для любого числа $C$, заключенного
     ↪  между $f(a)$ и $f(b)$, существует точка $c \in G$ такая,
     ↪  что $f(c)=C$.
\end{theorem}
\begin{proof}
    Так как $G$ --- связное множество, существует непрерывная
     ↪  кривая
    \[
        L~:~\left\{
            \begin{array}{c}
            x_{1}=\phi_{1}(t),\\
            x_{2}=\phi_{2}(t),\\
            \vdots \\
            x_{n}=\phi_{n}(t),
            \end{array}\right. \alpha\leqslant t\leqslant\beta,
    \]
    соединяющая точки $a$ и $b$ и лежащая в $G$, т.е.
```

```
    $a=(\phi_{1}(\alpha), \phi_{2}(\alpha), \ldots,
     ↪  \phi_{n}(\alpha)))b=(\phi_{1}(\beta), \phi_{2}(\beta),
     ↪  \ldots, \phi_{n}(\beta))$ и $x=(\phi 1(t), \phi 2(t),
     ↪  \ldots,\ \phi n(t))\in G$ при любом $t\in[\alpha,
     ↪  \beta].$

    Пусть $F(t)=f(\phi 1(t),\ \phi 2(t),\ \ldots,\ \phi n(t))$ .
     ↪  По теореме о непрерывности сложной функции функция
     ↪  $F(t)$ непрерывна на $[\alpha,\ \beta]$ и
     ↪  $F(\alpha)=f(a)_{}}F(\beta)=f(b),$ т.е. $F(\alpha)\neq
     ↪  F(\beta)$ и
    \renewcommand{\qedsymbol}{}
\end{proof}
```