Домашнее задание

Индивидуальный вариант для *Гейне М.А.*

Количество баллов: 16
Сложность: 0.54
Задание: Оформить документ в LaTeX, все формулы, которые встречаются, должны быть оформлены в математическом режиме (через equation). Если формула имеет номер и на неё есть ссылка, то необходимо также проставить метку для формулы и ссылаться по этой метке. Все сноски должны быть оформлены в виде сносок. Рисунки повторены при помощи пакета TikZ.

По определению однократного предела для любого $x \in X$, $x \neq x_0$,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \widetilde{\delta} = \widetilde{\delta}(\varepsilon) > 0 \;\; \forall\, y \in Y \\ \left(0 < |y - y_0| < \widetilde{\delta} \Rightarrow |f(x,y) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Возьмем $x \in X$ из проколотой δ-окрестности точки x_0 и рассмотрим разность $\varphi(x) - A$. Прибавим и отнимем в этом выражении $f(x,y)$ с $y \in Y$, $0 < |y - y_0| < \min\{\delta, \widetilde{\delta}\}$, и получим оценку

$$|\varphi(x) - A| = |\varphi(x) \pm f(x,y) - A| \leqslant \\ \leqslant |\varphi(x) - f(x,y)| + |f(x,y) - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y) = A$. $\square$

14. Непрерывность функции многих переменных

14.1. Непрерывность в точке. Локальные свойства непрерывных функций

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и $x_0 \in X$.

Определение 14.1. Функция f называется *непрерывной в точке* x_0, если

$$\forall\, O(f(x_0)) \;\; \exists\, O(x_0) \;\; \forall\, x \in X \cap O(x_0) \;\Rightarrow\; f(x) \in O(f(x_0)),$$

или

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \;\; \forall\, x \in X \\ (\rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon),$$

или $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \;\; \forall\, x \in X$

$$\left(\begin{array}{lcc} |x_1 - x_1^0| < \delta, & & \\ |x_2 - x_2^0| < \delta, & & \\ \quad\vdots & \Rightarrow & |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \\ |x_n - x_n^0| < \delta & & \end{array} \right),$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$.

Если $x_0 \in X'$, то функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 14.2. Пусть $y = f(x)$, $x \in X$, $x_0 \in X$. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если

$$\forall \{x^p\} \subset X \quad \left(\lim_{p\to\infty} x^p = x_0 \Rightarrow \lim_{p\to\infty} f(x^p) = f(x_0) \right).$$

Приведенные определения равносильны, что следует из эквивалентности определений предела по Коши и по Гейне.

Теорема 14.1. *Если функция f непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) > 0$ $(f(x_0) < 0)$, то найдутся такие $O(x_0)$ и $r > 0$, что*

$$f(x) \geqslant r > 0 \quad (f(x) \leqslant -r < 0) \ \ \textit{при} \ \ x \in O(x_0) \cap X.$$

Доказательство. Если $x_0 \in X'$, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) \ \forall x \in O_\delta(x_0) \cap X \ \Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Пусть $f(x_0) > 0$. Положим $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$, по нему найдем $\delta(\varepsilon)$ и для любого $x \in O_\delta(x_0) \cap X$ получим

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2},$$

т. е.

$$f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3}{2} f(x_0),$$

откуда

$$f(x) > r = \frac{f(x_0)}{2} > 0. \qquad \square$$

Как и для функции одной переменной, имеют место теоремы о непрерывности суммы, произведения и частного двух непрерывных функций. Формулировки и доказательства этих теорем те же, что и для функции одной переменной.

Теорема 14.2 (непрерывность сложной функции). *Пусть отображение $x = \varphi(t)$ определено в некоторой окрестности точки $t_0 = (t_1^0, t_2^0, \dots, t_m^0) \in \mathbb{R}^m$ и непрерывным образом отображает ее в точку $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и непрерывна в этой точке. Тогда сложная функция $F(t) = f(\varphi(t))$ непрерывна в точке t_0.*

Доказательство. Заметим, что для отображения

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$$

непрерывность в точке t_0 означает непрерывность каждой из функций $\varphi_i(t)$ в точке t_0 как функции m переменных, т. е. если $\{t^p\} \subset \mathbb{R}^m$ и $t^p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} t_0$, то

$$\varphi(t^p) = (\varphi_1(t^p), \varphi_2(t^p), \dots, \varphi_n(t^p)) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\underset{p\to\infty}{\longrightarrow} (\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = x_0.$$

Положим $x^p = \varphi(t^p)$, тогда $x^p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} x_0$. В силу непрерывности функции f, $f(x^p) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$, т. е.

$$F(t^p) = f(\varphi(t^p)) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0) = f(\varphi(t_0)) = F(t_0). \qquad \square$$

14.2. Непрерывность на множестве. Свойства функций, непрерывных на множестве

Определение 14.3. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на множестве* $X \subseteq \mathbb{R}^n$, если она непрерывна в каждой точке множества X.

Определение 14.4. Множество M из $\mathbb{R}^n$ называется *связным*, если любые две точки множества можно соединить непрерывной кривой, лежащей в этом множестве.

Напомним, что *непрерывной кривой* называется непрерывный образ отрезка

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t), \\ \quad\vdots \\ x_n = x_n(t), \end{cases} \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

где $x_i(t)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 14.3. *Пусть G — связное множество в $\mathbb{R}^n$. Пусть функция f непрерывна на G и существуют $a \in G$ и $b \in G$ такие, что $f(a) \neq f(b)$. Тогда для любого числа C, заключенного между $f(a)$ и $f(b)$, существует точка $c \in G$ такая, что $f(c) = C$.*

Доказательство. Так как G — связное множество, существует непрерывная кривая

$$L \ : \ \begin{cases} x_1 = \varphi_1(t), \\ x_2 = \varphi_2(t), \\ \quad\vdots \\ x_n = \varphi_n(t), \end{cases} \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

соединяющая точки a и b и лежащая в G, т. е.
$a = (\varphi_1(\alpha), \varphi_2(\alpha), \ldots, \varphi_n(\alpha))$, $b = (\varphi_1(\beta), \varphi_2(\beta), \ldots, \varphi_n(\beta))$ и $x = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in G$ при любом $t \in [\alpha, \beta]$.

Пусть $F(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$. По теореме о непрерывности сложной функции функция $F(t)$ непрерывна на $[\alpha, \beta]$ и $F(\alpha) = f(a)$, $F(\beta) = f(b)$, т. е. $F(\alpha) \neq F(\beta)$ и