Relaciones de indeterminación

- El principio de incertidumbre de Heisenberg proporciona una relación entre la posición y el momento.

$$\Delta x \, \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

- Vamos a generalizar esta relación a dos valores genéricos A y B

el valor esperado de A en un estado $|\alpha\rangle$ viene dado por

$$\langle A \rangle = \langle \alpha | A | \alpha \rangle$$

Calculamos su desviación estandar

$$(\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$$

$$(\Delta B)^2 = \langle (B - \langle B \rangle)^2 \rangle = \langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2$$

Podemos definir la incertidumbre de A y B en el estado α como:

$$(\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle = \langle \alpha | (A - \langle A \rangle)^2 | \alpha \rangle$$

$$(\Delta B)^2 = \langle (B - \langle B \rangle)^2 \rangle = \langle \alpha | (B - \langle B \rangle)^2 | \alpha \rangle$$

Definimos los Kets:

$$|x\rangle = (A - \langle A\rangle)|\alpha\rangle$$

$$|y\rangle = (B - \langle B\rangle)|\alpha\rangle$$

Podemos escribir:

$$(\Delta A)^2 = \langle (A - \langle A\rangle)^2\rangle = \langle\alpha|(A - \langle A\rangle)^2|\alpha\rangle = \langle x|x\rangle$$

$$(\Delta B)^2 = \langle (B - \langle B\rangle)^2\rangle = \langle\alpha|(B - \langle B\rangle)^2|\alpha\rangle = \langle y|y\rangle$$

Por lo tanto $(\Delta A)^2(\Delta B)^2 = \langle x|x\rangle\langle y|y\rangle$

Aplicando la desigualdad de Schwartz

$$\langle x|x\rangle\langle y|y\rangle \geq |\langle x|y\rangle|^2 = \langle x|y\rangle\langle x|y\rangle$$

- Calculamos $\langle x|y\rangle = \langle\alpha|(A - \langle A\rangle)(B - \langle B\rangle)|\alpha\rangle$

$$= \langle\alpha|AB - A\langle B\rangle - \langle A\rangle B + \langle A\rangle\langle B\rangle|\alpha\rangle$$

$$\langle\alpha|AB|\alpha\rangle - \langle\alpha|A\langle B\rangle|\alpha\rangle - \langle\alpha|\langle A\rangle B|\alpha\rangle + \langle\alpha|\langle A\rangle\langle B\rangle|\alpha\rangle$$

$\langle A\rangle$ y $\langle B\rangle$ son numeros reales y los podemos sacar fuera

$$\underbrace{\langle\alpha|AB|\alpha\rangle}_{\langle AB\rangle} - \underbrace{\langle\alpha|A|\alpha\rangle}_{\langle A\rangle}\langle B\rangle - \langle A\rangle\underbrace{\langle\alpha|B|\alpha\rangle}_{\langle B\rangle} + \langle A\rangle\langle B\rangle$$

$$= \langle AB\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle + \langle A\rangle\langle B\rangle$$

$$\langle X|Y\rangle = \langle AB\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle$$

De la misma forma llegamos a

$$\langle Y|X\rangle = \langle\alpha|(B-\langle B\rangle)(A-\langle A\rangle)|\alpha\rangle =$$

$$\langle\alpha|(BA - B\langle A\rangle - \langle B\rangle A + \langle B\rangle\langle A\rangle|\alpha\rangle =$$

$$\langle\alpha|BA|\alpha\rangle - \langle\alpha|B\langle A\rangle|\alpha\rangle - \langle\alpha|\langle B\rangle A|\alpha\rangle + \langle|\alpha|\langle B\rangle\langle A\rangle|\alpha\rangle$$

$$\langle\alpha|BA|\alpha\rangle - \langle\alpha|B|\alpha\rangle\langle A\rangle - \langle B\rangle\langle\alpha|A|\alpha\rangle + \langle B\rangle\langle A\rangle$$

$$\langle BA\rangle - \langle B\rangle\langle A\rangle - \langle B\rangle\langle A\rangle + \langle B\rangle\langle A\rangle$$

$$\langle Y|X\rangle = \langle BA\rangle - \langle B\rangle\langle A\rangle$$

- Volviendo a la desigualdad de swarctz

$$\langle X|X\rangle\langle Y|Y\rangle \geq |\langle X|Y\rangle|^2 = \langle X|Y\rangle\langle X|Y\rangle$$

- El producto interno de un $\langle bra|$ y un $|ket\rangle$ es un número complejo :

$$\langle \chi | \psi \rangle = z \in \mathbb{C}$$

Por lo tanto $|\langle \chi | \psi \rangle|^2 = |z|^2 = z \cdot \bar{z}$

Aplicamos: $z \cdot \bar{z} = Re(z)^2 + Im(z)^2 \geqslant Im(z)^2 = \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2$

Si asignamos $\langle \chi | \psi \rangle \langle \psi | \chi \rangle = z \cdot z^* \begin{cases} \langle \chi | \psi \rangle = z \\ \langle \psi | \chi \rangle = z^* \end{cases}$

Entonces:

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geqslant |\langle \chi | \psi \rangle|^2 = z \cdot z^* = \left(\frac{\langle \chi | \psi \rangle - \langle \psi | \chi \rangle}{2i}\right)^2$$

simplificando $\longrightarrow (\Delta A)^2 (\Delta B)^2 = \left(\frac{\langle \chi | \psi \rangle - \langle \psi | \chi \rangle}{2i}\right)^2$

Operamos $\langle \chi | \psi \rangle - \langle \psi | \chi \rangle$ usando: $\langle \chi | \psi \rangle = \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$
$\langle \psi | \chi \rangle = \langle BA \rangle - \langle B \rangle \langle A \rangle$

$$= \langle AB \rangle - \cancel{\langle A \rangle \langle B \rangle} - \langle BA \rangle + \cancel{\langle A \rangle \langle B \rangle}$$

$$= \langle \chi | \psi \rangle - \langle \psi | \chi \rangle = \langle AB - BA \rangle$$

$$(\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geqslant \left(\frac{\langle AB - BA \rangle}{2i}\right)^2$$

- Utilizamos el conmutador $\langle AB - BA \rangle = [A, B]$

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{[A, B]}{2i}$$