$$QFT|x\rangle \to \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{y=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{xy}{2^n}}|y\rangle$$

- Demostrar que

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{y=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{xy}{2^n}}|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(|0\rangle + e^{2\pi i \frac{x}{2}}|1\rangle\right)\otimes\left(|0\rangle + e^{2\pi i \frac{x}{4}}|1\rangle\right)\otimes \otimes \cdots \otimes \left(|0\rangle + e^{2\pi i \frac{x}{2^n}}\right)}$$

Recordemos que en la base computacional

$$|x\rangle = |x_{n-1}\, x_{n-2} \cdots x_0\rangle \to x = \sum_{k=0}^{n-1} x_k 2^k$$

$$|y\rangle = |y_{n-1}\, y_{n-2} \cdots y_0\rangle \to y = \sum_{k=0}^{n-1} y_k 2^k$$

Si sustituimos en la expresión de arriba tenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{y=0}^{N-1} e^{2\pi i x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_k 2^k}{2^n}}|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{y=0}^{N-1} e^{2\pi i x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_k}{2^{n-k}}}|y\rangle$$

Desarrollando el sumatorio:

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{y=0}^{N-1} e^{2\pi i x\left(\frac{y_0}{2^{n-0}} + \frac{y_1}{2^{n-1}} + \frac{y_2}{2^{n-2}} + \cdots + \frac{y_{n-1}}{2^{n-(n-1)}}\right)} |y\rangle$$

Aplicamos $e^{A+B} = e^A e^B$ para $A, B \in \mathbb{C}$

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{y=0}^{N-1} e^{2\pi i x \frac{y_0}{2^{n-0}}} \cdot e^{2\pi i x \frac{y_1}{2^{n-1}}} \cdot e^{2\pi i x \frac{y_2}{2^{n-2}}} \cdot \ldots \cdot e^{2\pi i x \frac{y_{n-1}}{2^{n-(n-1)}}} |y\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{y=0}^{N-1} \prod_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i x \frac{y_k}{2^{n-k}}} |y\rangle$$

Por propiedades de sumatorios

$$\sum_{y=0}^{N-1} |y\rangle = \sum_{y_{n-1}=0}^{1} \sum_{y_{n-2}=0}^{1} \sum_{y_{n-3}=0}^{1} \cdots \sum_{y_0=0}^{1} |y_{n-1} y_{n-2} \cdots y_0\rangle$$

Tenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{y_{n-1}=0}^{1} \sum_{y_{n-2}=0}^{1} \cdots \sum_{y_0=0}^{1} \prod_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i x \frac{y_k}{2^{n-k}}} |y_{n-1} y_{n-2} \cdots y_0\rangle$$

- Empezamos escribiendo el sumatorio de y_{n-1} de forma implícita. es decir, tenemos un caso en el que $y_{n-1} = 0$ y otro en el que $y_{n-1} = 1$

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{y_{n-2}=0}^{1}\sum_{y_{n-3}=0}^{1}\cdots\sum_{y_0=0}\left(\prod_{k=0} e^{2\pi i x \frac{y_k}{2^{n-k}}}\cdot e^{2\pi i x \frac{\overset{0}{\overset{\shortparallel}{y_{n-1}}}}{2^{n-(n-1)}}}\,|0\, y_{n-2}\, y_{n-3}\cdots y_0\rangle\right.$$

$$\left.+\prod_{k=0} e^{2\pi i x \frac{y_k}{2^{n-k}}}\cdot e^{2\pi i x \frac{\overset{1}{\overset{\shortparallel}{y_{n-1}}}}{2^{n-(n-1)}}}\,|1\, y_{n-2}\, y_{n-3}\cdots y_0\rangle\right)$$

sustituyendo por los posibles valores de y_{n-1} en cada caso

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{y_{n-2}=0}^{1}\sum_{y_{n-3}=0}^{1}\cdots\sum_{y_0=0}\left(\prod_{k=0}^{n-2} e^{2\pi i x \frac{y_k}{2^{n-k}}}\cdot \overset{0\quad 1}{e^{2\pi i x \frac{0}{2}}}\,|0\, y_{n-2}\, y_{n-3}\cdots y_0\rangle+\right.$$

$$\left.+\prod_{0}^{n-2} e^{2\pi i x \frac{y_k}{2^{n-k}}}\cdot e^{2\pi i x \frac{1}{2}}\,|1\, y_{n-2}\, y_{n-3}\cdots y_0\rangle\right)$$

como $|ab\rangle = |a\rangle\otimes|b\rangle$, sacamos factor común y tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\left(|0\rangle + e^{\frac{2\pi i x}{2}}|1\rangle\right)\otimes\sum_{y_{n-2}=0}^{1}\cdots\sum_{y_0=0}^{1}\prod_{k=0}^{n-2} e^{2\pi i x \frac{y_k}{2^{n-k}}}\,|y_{n-2}\, y_{n-3}\cdots y_0\rangle$$

Si repetimos el mismo proceso para el resto de qubits tenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\left(|0\rangle + e^{\frac{2\pi i x}{2}}|1\rangle\right)\otimes\left(|0\rangle + e^{\frac{2\pi i x}{2^2}}|1\rangle\right)\otimes\left(|0\rangle + e^{\frac{2\pi i x}{2^3}}|1\rangle\right)\otimes\cdots\otimes$$

$$\otimes\left(|0\rangle + e^{\frac{2\pi i x}{2^n}}|1\rangle\right)$$

Expandimos x y tenemos

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\left(|0\rangle + e^{2\pi i\left(\frac{x_0}{2} + x_1 + 2x_2 + 2^2 x_3 + \cdots 2^{n-1} x_n\right)}|1\rangle\right) \otimes$$

$$\left(|0\rangle + e^{2\pi i\left(\frac{x_0}{4} + \frac{x_1}{2} + x_2 + 2x_3 + \cdots 2^{n-2} x_n\right)}|1\rangle\right) \otimes$$

$$\left(|0\rangle + e^{2\pi i\left(\frac{x_0}{8} + \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{2} + x_3 + \cdots 2^{n-3} x_n\right)}|1\rangle\right) \otimes \cdots$$

Las rotaciones $2\pi n$ no tienen ningún efecto, ya que corresponden a dar una vuelta completa ($e^{2\pi n} = 1$)

Por lo tanto, de forma compacta.

$$QFT|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(|0\rangle + e^{2\pi i \frac{x}{2}}|1\rangle\right) \otimes \left(|0\rangle + e^{2\pi i \frac{x}{4}}|1\rangle\right) \otimes$$

$$\otimes \left(|0\rangle + e^{2\pi i \frac{x}{2^3}}|1\rangle\right) \otimes \cdots \otimes \left(|0\rangle + e^{2\pi i \frac{x}{2^n}}|1\rangle\right)$$

y expandiendo x teniendo en cuenta que podemos obviar los termino $2\pi n$ nos queda:

$$QFT|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(|0\rangle + e^{2\pi i \frac{x_0}{2}}|1\rangle\right) \otimes \left(|0\rangle + e^{2\pi i\left(\frac{x_0}{4} + \frac{x_1}{2}\right)}|1\rangle\right) \otimes$$

$$\otimes \left(|0\rangle + e^{2\pi i\left(\frac{x_0}{8} + \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{2}\right)}|1\rangle\right) \otimes \left(|0\rangle + e^{2\pi i\left(\frac{x_0}{2^n} + \frac{x_1}{2^{n-1}} + \cdots \frac{x_n}{2}\right)}|1\rangle\right)$$