Universität Duisburg-Essen

Seminarvortrag

Endliche Drehgruppen im zwei- und dreidimensionalen Raum

Autor:
Mike Barkmin

Seminarleiter:
Dr. Ingo Janiszczak

12. April 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In diesem Vortrag werden die endlichen Untergruppen im zwei- und dreidimensionalen Raum klassifiziert. Um die nachfolgenden Sätze verstehen zu können, ist es notwendig grundlegende gruppentheoretische Begriffe zu kennen. Ein besonderes Augenmerk soll auf die nachfolgenden Definitionen gelegt werden, da diese für den Vortrag essentiell sind.

Definition 1.1 (Zyklische Gruppe)**.** *Eine Gruppe $\mathcal{C}$ heißt zyklisch, wenn sie ein Element A enthält, sodass für jedes Element B von $\mathcal{C}$ ein $n \in \mathbb{Z}$ exisitiert, sodass $A^n = B$. Außerdem gilt, dass $\mathcal{C}$ die einzige Untergruppe von $\mathcal{C}$ ist, die A enthält. Dann nennen wir A den Erzeuger von $\mathcal{C}$ und können schreiben $\mathcal{C} =< A >$.*

Definition 1.2 (Diedergruppe)**.** *Eine Gruppe $\mathcal{H}$ ist eine Diedergruppe, wenn sie die Isometriegruppe eines regelmäßigen n-Ecks in der Ebene ist. Sie besteht dann aus n Drehungen und n Spiegelungen, also aus insgesamt $2n$ Elementen.*

Definition 1.3 (Invarianter Unterraum)**.** *Ein Unterraum $W \leq V$ einer linearen Abbildung $T : V \to V$ heißt invarianter Unterraum, wenn $T(W) \subseteq W$ gilt. Man sagt, dass W invariant unter T ist. Wenn dies gilt, dann können wir T auf W einschränken, um eine neue lineare Abbildung zu erhalten. $T|W : W \to W$.*

2 Orthogonale Transformationen im zweidimensionalen Raum

Bemerkung 2.1. *Sei* $T \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$*, dann ist* T *eindeutig über die Basisvektoren* $e_1 = (1,0)$ *und* $e_2 = (0,1)$ *definiert. Da* $T \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ *und somit längen- und orthogonalitätserhaltend ist, existiert ein eindeutiges* $\theta \in [0, 2\pi)$*, sodass* $Te_1 = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ *und* $Te_2 = \pm(-\sin(\theta), \cos(\theta))$*.*

Wenn $Te_2 = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$*, dann wird* T *durch die Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

repräsentiert und T *ist eine Drehung um den Ursprung mit dem Winkel* θ*. Außerdem gilt* $\det T = \det A = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

Wenn $Te_2 = (\sin(\theta), -\cos(\theta))$*, dann wird* T *durch die Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

repräsentiert und T *ist eine Spiegelung. Außerdem gilt* $\det T = \det A = -1$*.*

Satz 2.2. *Jede orthogonale Transformation im zweidimensionalen Raum ist entweder eine Spiegelung oder eine Drehung.*

3 Endliche Gruppen im zweidimensionalen Raum

Satz 3.1. *Sei $\mathcal{G}$ eine endliche Untergruppe von $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$, dann ist $\mathcal{G}$ entweder eine zyklische Gruppe $\mathcal{C}_2^n$ oder eine Diedergruppe $\mathcal{H}_2^n$ für $n \in \mathbb{N}$*

Beweis. Wir nehmen an, dass $\mathcal{H} \leq \mathcal{G}$ durch die Menge aller Drehungen in $\mathcal{G}$ gebildet wird.

Wir wollen zeigen, dass $\mathcal{H}$ zyklisch sein muss. Für $|\mathcal{H}| = 1$ ist dieses bereits klar. Wenn $|\mathcal{H}| \neq 1$ wählen wir eine Drehung $R \in \mathcal{H}$, sodass $R \neq E_2$ und der Drehwinkel $\theta(R)$ minimal ist. Wenn wir jetzt eine weitere Drehung $T \in \mathcal{H}$ nehmen, dann können wir ein $m \in \mathbb{Z}$ finden, sodass

$$\begin{aligned} & m\theta(R) \leq \theta(T) < (m+1)\theta(R) \\ \Leftrightarrow\ & 0 \leq \theta(T) - m\theta(R) < \theta(R) \\ \Leftrightarrow\ & 0 \leq \theta(TR^{-m}) < \theta(R) \end{aligned}$$

Da wir $\theta(R)$ minimal gewählt haben, gilt $\theta(TR^{-m}) = 0$. Also muss $TR^{-m} = E_2$ sein und es folgt $T = R^m$. Demnach ist $\mathcal{H}$ zyklisch mit $\mathcal{H} =< R >$ (R ist Erzeuger von $\mathcal{H}$). Damit folgt auch, dass $\theta(R) = \frac{2}{n}\pi$, wenn $n = |\mathcal{H}|$. Wenn $\mathcal{G} = \mathcal{H}$ gilt, dann haben wir gezeigt, dass $\mathcal{G}$ zyklisch ist und wir bezeichnen $\mathcal{G}$ mit $\mathcal{C}_2^n$.

Als nächstes nehmen wir dann an, dass $\mathcal{G} \neq \mathcal{H}$ und wählen eine Spiegelung $S \in \mathcal{G}$. Nun wählen wir eine weitere beliebige Spiegelung $T \in \mathcal{G}$ mit $T \neq S$, dann gilt $\det(ST) = \det(S)\det(T) = 1$. Deshalb gilt $ST \in \mathcal{H}$ und es handelt sich bei ST um eine Drehung. Dann gilt $T \in S\mathcal{H}$, da $S^{-1} = S$. So gilt, dass $\mathcal{H}$ eine Untergruppe von $\mathcal{G}$ mit Index 2 ist und $\mathcal{H} =< R >$. Dann gilt $\mathcal{G} =< R, S > = \{1, R, \dots\ , R^{n-1}, S, SR, \dots, SR^{n-1}\}$ und $|\mathcal{G}| = 2n$. Da RS eine Spiegelung ist, gilt $(RS)^2 = E_2$ und $RS = SR^{-1} = SR^{n-1}$, damit sind alle Verknüpfungen in $\mathcal{G}$ festgelegt. Die Gruppe $\mathcal{G}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{H}_2^n =< S, R >$ (Die Diedergruppe von Ordnung 2n). □

4 Orthogonale Transformationen im dreidimensionalen Raum

Satz 4.1. *Angenommen T ist eine Drehung in $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$, dann ist T eine Drehung um eine fixierte Achse, sodass T einen Eigenvektor x zum Eigenwert 1 besitzt und die Einschränkung von T auf die Ebene $\mathcal{P} = x^\perp$ eine Drehung im zweidimensionalen Raum ist.*

Beweis. Angenommen T ist eine Drehung in $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind Eigenwerte von T. Sei $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, dann können λ_2 und λ_3 nur folgende Werte annehmen, da $\det(T) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$.

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = \pm 1 \tag{1}$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \overline{\lambda_3} \notin \mathbb{R} \tag{2}$$

Für uns ist aber nur der Eigenwert 1 interessant, dieser ist aber in beiden Fällen vorhanden.

Wir wählen einen Eigenvektor x zum Eigenwert 1 und bemerken, dass $x = T^{-1}Tx = T^{-1}x$ gilt. Deshalb gilt auch $0 = (x^\perp, x) = (x^\perp, T^{-1}x) = (Tx^\perp, x)$ und $\mathcal{P} = x^\perp$ ist invariant unter T. Betrachten wir nun die Determinate der Einschränkung $T|\mathcal{P}$, dann gilt $\det(T|\mathcal{P}) = 1$. Demnach ist $T|\mathcal{P}$ eine Drehung der Ebene $\mathcal{P}$. $\square$

Bemerkung 4.2. *Wenn S eine Spiegelung an der Ebene $\mathcal{P}$ in $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ ist, dann gilt $Sx = x\ \forall x \in \mathcal{P}$ und $Sy = -y\ \forall y \in \mathcal{P}^\perp$. Wir können nun einen Einheitsvektor $r \in \mathcal{P}^\perp$ so wählen, dass $Sx = x - 2(x,r)r\ \forall x \in \mathbb{R}^3$ gilt. Wir wählen nun eine Basis $\{x_2, x_3\}$ von $\mathcal{P}$, sodass die Transformationsmatrix unter Basis $\{r, x_2, x_3\}$ von S durch*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

repräsentiert wird. Es gilt außerdem $S^2 = E_3$.

Satz 4.3. *Sei $T \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ mit $\det T = -1$. Dann ist T eine Drehspiegelung mit Spiegelebene $\mathcal{P}$ und Drehachse $\mathcal{P}^\perp$.*

Beweis. Angenommen T ist eine Spiegelung in $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind Eigenwerte von T. Sei $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, dann können λ_2 und λ_3 nur folgende Werte annehmen, da $\det(T) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -1$.

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = \pm 1 \tag{1}$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \overline{\lambda_3} \notin \mathbb{R} \tag{2}$$

Wir wählen einen Eigenvektor x zum Eigenwert -1 und wählen $\mathcal{P} = x^\perp$. Betrachten wir nur die Determinate der Einschränkung $T|\mathcal{P}$, also $\det(T|\mathcal{P}) = \lambda_2\lambda_3 = 1$, dann lässt sich erkennen, dass $T|\mathcal{P}$ eine Drehung der Ebene $\mathcal{P}$ sein muss. Wir wählen nun eine Basis $\{x_1, x_2\}$ von $\mathcal{P}$, sodass die Transformationsmatirx von T unter der Basis $\{x, x_1, x_2\}$ durch

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

repräsentiert wird. □

5 Endliche Drehgruppen im dreidimensionalen Raum

Bemerkung 5.1. *Sei W ein Untervektorraum mit $\dim W = 2$ im Vektorraum V mit $\dim V = 3$. Wenn R eine Drehung in $\mathcal{O}(W)$ ist, dann kann R zu einer Drehung in $\mathcal{O}(V)$ erweitert werden. Dazu wählen wir eine Basis $\{x_1, x_2, x_3\}$ von V mit $x_1 \in W^\perp$ und $x_2, x_3 \in W$, sodass die Matrix R von*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

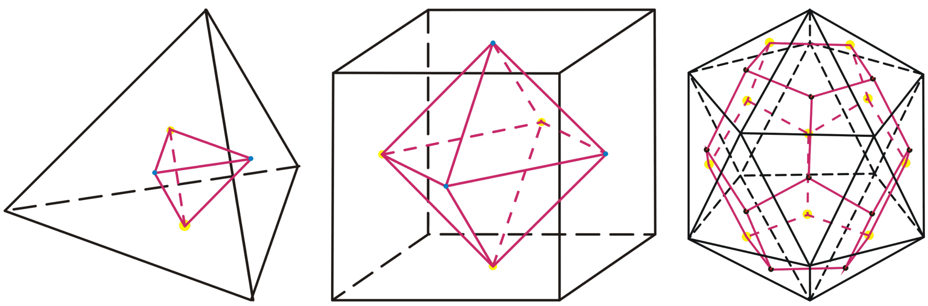
repräsentiert wird.

Bemerkung 5.2. *Wenn wir jede Transformation T aus einer Diederuntergruppe $\mathcal{H}_2^n$ zu einer Drehung in $\mathcal{O}(V)$ erweitern, dann erhalten wir eine Menge von Drehungen die eine Untergruppe von $\mathcal{O}(V)$ bilden und diese Untergruppe ist isomorph zu $\mathcal{H}_2^n$. Wir bezeichnen sie als Diedergruppe $\mathcal{H}_3^n$.*

5.1 Platonische Körper

Da endliche Untergruppen von $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ Symmetriegruppen von regelmäßigen Polygonen sind, ist es naheliegend, dass wir uns nun mit regelmäßigen Polyedern beschäftigen. Es gibt genau 5 regelmäßige Polyeder, die sogenannten platonischen Körper.

Wenn wir ein regelmäßiges Polyeder am Ursprung des $\mathbb{R}^3$ ausrichten, dann sind die Drehungen die das Polyeder wieder in sich überführen eine endliche Untergruppe von $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$. Auf diese Art entstehen drei unterschiedliche endliche Gruppen von Drehungen, denn der Würfel besitzt die gleiche Menge von Drehungen wie das Oktaeder und das Ikosaeder besitzt die gleiche Menge von Drehungen wie das Dodekaeder. Die folgende Illustration verdeutlicht warum dies der Fall ist.



Aus der Skizze lassen sich auch die Drehungen, die die Körper in sich überführen, leicht ablesen. Im nächsten Abschnitt nehmen wir an, dass die Schwerpunkte der Körper im Ursprung vom $\mathbb{R}^3$ liegen.

Zunächst betrachten wir die Untergruppe $\mathcal{T}$ der Drehungen von $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ des Tetraeders. Diese enthält

- die Identität
- 8 Drehungen, um die Drehachsen zwischen einem Eckpunkte und dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite mit Drehwinkel $\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$
- 3 Drehungen, um die Drehachsen zwischen den Mittelpunkten zweier gegenüberliegender Kanten mit Drehwinkel π

Es gilt somit $|\mathcal{T}| = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 = 12$

Als nächstes betrachen wir die Untergruppe $\mathcal{W}$ der Drehungen von $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ des Würfels. Diese enthält

- die Identität
- 9 Drehungen, um die Drehachsen zwischen den Mittelpunkten zweier gegenüberliegender Seiten mit Drehwinkel $\frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi$
- 8 Drehungen, um die Drehachsen zwischen zwei gegenüberliegenden Eckpunkten mit Drehwinkel $\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$
- 6 Drehungen, um die Drehachsen zwischen den Mittelpunkten zweier gegenüberliegenden Kanten mit Drehwinkel π

Es gilt somit $|\mathcal{W}| = 6 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 = 24$

Zuletzt betrachen wir die Untergruppe $\mathcal{I}$ der Drehungen von $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ des Ikosaeders. Diese enthält

- die Identität
- 24 Drehungen, um die Drehachsen zwischen zwei gegenüberliegendenden Eckpunkten mit Drehwinkel $\frac{2}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi, \frac{6}{5}\pi, \frac{8}{5}\pi$
- 20 Drehungen, um die Drehachsen zwischen den Mittelpunkten zweier gegenüberliegender Seiten mit Drehwinkel $\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$

- 15 Drehungen, um die Drehachsen zwischen den Mittelpunkten zweier gegenüberliegender Kanten mit Drehwinkel π

Es gilt somit $|\mathcal{I}| = 15 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 1 = 60$

Definition 5.3. *Sei $E_3 \neq T \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ eine Drehung, dann hat T genau zwei Fixpunkte auf der Einheitskugel, nämlich die Schnittpunkte der Einheitskugel mit der Drehachse. Diese Punkte nennen wir die Pole der Drehung.*

Lemma 5.4. *Sei $\mathcal{G} \leq \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$, dann ist $\mathcal{G}$ eine Permutationsgruppe auf der Menge $\mathcal{P}$ ihrer Pole.*

Beweis. Wenn $x \in \mathcal{P}$ ist, dann ist x ein Pol einer Drehung $T \in \mathcal{G}$ mit $T \neq E_3$. Für jede Drehung $R \in \mathcal{G}$ wissen wir $Rx = RTx = (RTR^{-1})Rx$. Also ist Rx ein Pol der Drehung RTR^{-1} und es gilt $Rx \in \mathcal{P}$. □

Bemerkung 5.5. *Wenn wir uns die Bahnen, die Ordnung der Stabilisatoren und die Anzahl der Pole einer Symmetriegruppe $\mathcal{G}$ mit Polmenge $\mathcal{P}$ anschauen, dann ergeben sich folgende charakteristische Werte.*

$\mathcal{G}$	$\lvert\mathcal{G}\rvert$	$\lvert\mathcal{P}\rvert$	*Anzahl Bahnen*	*Ordnung der Stabilisatoren*		
$\mathcal{C}_3^n$	n	2	2	n	n	
$\mathcal{H}_3^n$	$2n$	$2n+2$	3	2	2	n
$\mathcal{T}$	12	14	3	2	3	3
$\mathcal{W}$	24	26	3	2	3	4
$\mathcal{I}$	60	62	3	2	3	5

Satz 5.6. *Haben $\mathcal{C}_3^n, \mathcal{H}_3^n, \mathcal{T}, \mathcal{W}$ und $\mathcal{I}$ die gleichen Eigenschaften wie in Bemerkung 5.5, dann ist $\mathcal{C}_3^n, n \geq 1; \mathcal{H}_3^n, n \geq 2; \mathcal{T}; \mathcal{W}; \mathcal{I}$ eine komplette Liste aller endlichen Untergruppen von Drehungen aus $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$.*

6 Endliche Gruppen im dreidimensionalen Raum

Nachdem wir die endlichen Drehgruppen im dreidimensionalen Raum klassifiziert haben, möchten wir nun die endlichen Gruppen klassifizieren. Wir schauen uns zunächst die Gruppe $\mathcal{W}^*$ an. Diese soll alle orthogonalen Abbildungen umfassen, welche den Würfel wieder auf sich selber abbilden. Natürlich ist leicht zu sehen, dass $\mathcal{W}$ kleiner ist als $\mathcal{W}^*$. Aber wir können bemerken, dass für $T \in \mathcal{W}^* \backslash \mathcal{W} \quad -T = -1 \cdot T \in \mathcal{W}$ gilt. Daher gilt $\mathcal{W}^* = \mathcal{W} \cup (-1)\mathcal{W}$ und wir können ohne Berücksichtigung der Dimension folgendes Lemma aufstellen.

Lemma 6.1. *Wenn $\mathcal{G} \leq \mathcal{O}(V)$ und $\mathcal{H}$ eine Untergruppe aus Drehungen von $\mathcal{G}$ ist, dann gilt entweder $\mathcal{H} = \mathcal{G}$ oder $[\mathcal{G} : \mathcal{H}] = 2$. Insbesonder ist $\mathcal{H}$ eine Untergruppe von $\mathcal{G}$*

Beweis. Angenommen $T \in \mathcal{G} \backslash \mathcal{H}$, dann können wir ein beliebiges $S \in \mathcal{G} \backslash \mathcal{H}$ finden, sodass $\det(T^{-1}S) = (-1)^2 = 1$ und $T^{-1}S \in \mathcal{H}$ gilt. Folglich ist dann $\mathcal{G} = \mathcal{H} \cup T\mathcal{H}$ und $[\mathcal{G} : \mathcal{H}] = 2$ □

Satz 6.2. *Sei $\mathcal{G} \leq \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$, dann ist $\mathcal{G}$ isomorph zu einer der folgenden Klassen:*

- $\mathcal{C}_3^n, n \geq 1; \mathcal{H}_3^n, n \geq 2; \mathcal{T}; \mathcal{W}; \mathcal{I}$
- $(\mathcal{C}_3^n)^*, n \geq 1; (\mathcal{H}_3^n)^*, n \geq 2; \mathcal{T}^*; \mathcal{W}^*; \mathcal{I}^*$
- $\mathcal{C}_3^{2n}]\mathcal{C}_3^n, n \geq 1; \mathcal{H}_3^n]\mathcal{C}_3^n, n \geq 2; \mathcal{H}^2 n_3, n]\mathcal{H}_3^n, \geq 2; \mathcal{W}]\mathcal{T}$

Hinweis: $\mathcal{R}^* := \mathcal{R} \cup -\mathcal{R}$ *und* $\mathcal{R}]\mathcal{P} := \mathcal{P} \cup \{-U | U \in \mathcal{R} \backslash \mathcal{P}\}$