

UNIVERSITÄT DUISBURG-ESSEN
INSTITUT FÜR EXPERIMENTELLE MATHEMATIK

BACHELORARBEIT

Endliche Untergruppen der orthogonalen Gruppen im zwei- und dreidimensionalen Raum

Autor:

Mike Barkmin

Seminarleiter:

Dr. Ingo Janiszcak

5. September 2014

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Orthogonale Abbildungen im zweidimensionalen Raum	3
2.1	Klassifikation der endlichen orthogonalen Gruppen	4
3	Orthogonale Abbildungen im dreidimensionalen Raum	7
3.1	Platonische Körper	9
3.2	Klassifikation der endlichen Rotationsgruppen	10
3.3	Klassifikation der endlichen orthogonalen Gruppen	10
4	Schulische Anwendung	10
	Literaturverzeichnis	11

1 Einleitung

2 Orthogonale Abbildungen im zweidimensionalen Raum

Sei T aus $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$, der Menge der orthogonalen Abbildungen, dann ist T eindeutig über die Basisvektoren $e_1 = (1, 0)$ und $e_2 = (0, 1)$ definiert. Da T aus $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ ist und somit längen- und orthogonalitätserhaltend ist, können wir ein θ zwischen 0 und 2π wählen, sodass gilt wenn $Te_1 = (\cos(\theta), \sin(\theta))$, dann ist $Te_2 = \pm(-\sin(\theta), \cos(\theta))$. Wir müssen nun die zwei Fälle für Te_2 unterscheiden. Zunächst wollen wir uns mit dem positiven Fall beschäftigen.

Wenn $Te_2 = +(-\sin(\theta), \cos(\theta))$, dann können wir eine geordnete orthogonale Basis W wählen, sodass für die Abbildungsmatrix von T zur Basis W gilt:

$$A =_W (T)_W = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

und wir können erkennen, dass es sich um eine Rotation in der Ebene durch den Ursprung, mit Rotationswinkel θ handelt. Außerdem können wir erkennen, dass wegen der Additionstheoreme gilt $\det T = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$. Jetzt möchten wir uns mit dem negativen Fall beschäftigen und gehen ähnlich wie im positiven Fall vor.

Wenn $Te_2 = -(-\sin(\theta), \cos(\theta))$, dann können wir eine geordnete orthogonale Basis U wählen, sodass für die Abbildungsmatrix von T zur Basis U gilt:

$$B =_U (T)_U = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall können wir erkennen, dass gilt $\det T = -\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = -(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = -1$. Außerdem kann eine weitere Eigenschaft der Abbildungsmatrix festgestellt werden, dass

$$B^2 = \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

gilt. Wenn wir uns die Vektoren $x_1 = (\cos(\theta/2), \sin(\theta/2))$ und $x_2 = (-\sin(\theta/2), \cos(\theta/2))$ anschauen, dann können wir leicht sehen, dass diese Eigenvektoren von B mit den Eigenwerten 1 und -1 sind. Um das zu überprüfen verknüpfen wir B mit x_1 und

erhalten mit Hilfe der Additionstheoreme folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned} Bx_1 &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\theta/2) + \sin(\theta)\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta)\cos(\theta/2) - \cos(\theta)\sin(\theta/2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta - \theta/2) \\ \sin(\theta - \theta/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Demnach ist x_1 ein Eigenvektor zum Eigenwert 1 von B . Genauso können wir überprüfen, ob x_2 ein Eigenvektor zum Eigenwert -1 von B ist.

$$\begin{aligned} Bx_2 &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(\theta)\sin(\theta/2) + \sin(\theta)\cos(\theta/2) \\ -\sin(\theta)\sin(\theta/2) - \cos(\theta)\cos(\theta/2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin(\theta - \theta/2) \\ -\cos(\theta - \theta/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wenn wir nun die Abbildungsmatrix C von T bezüglich der Basis $\{x_1, x_2\}$ bestimmen, dann erhalten wir

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Daraus können wir entnehmen, dass die orthogonale Abbildung T , wenn wir einen Vektor x als Linearkombination von x_1 und x_2 wählen, x auf sein Spiegelbild bezüglich der Gerade, die durch den Vektor x_1 ausgespannt wird, abgebildet wird. (Siehe Skizze 1). Solche orthogonalen Abbildungen nennen wir Spiegelungen an der Gerade $\langle x_1 \rangle$. Weiterhin können wir festhalten, dass für alle Vektoren x aus der Ebene \mathbb{R}^2 gilt

$$Tx = x - 2(x, x_2)x_2.$$

Somit haben wir gezeigt, dass jede orthogonale Abbildung von \mathbb{R}^2 entweder eine Rotation oder eine Spiegelung ist.

2.1 Klassifikation der endlichen orthogonalen Gruppen

Nachdem wir uns mit den orthogonalen Abbildungen im zweidimensionalen Raum vertraut gemacht und ihre besonderen Eigenschaften kennen gelernt haben, möchten wir uns mit der Klassifizierung von endlichen Untergruppen der orthogonalen Gruppe befassen.

Der nachfolgende Satz 2.1 teilt die endlichen Untergruppen der orthogonalen Gruppe in zwei Klassen ein. Einmal in die Untergruppen vom Typ der zyklischen Gruppe und in die vom Typ der Diedergruppe.

Satz 2.1. *Sei \mathcal{G} eine endliche Untergruppe von $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$, dann ist \mathcal{G} entweder eine zyklische Gruppe C_2^n oder eine Diedergruppe \mathcal{H}_2^n für $n \in \mathbb{N}$*

Bevor wir diesen Satz beweisen sollten wir uns vorher die Definitionen der Diedergruppe, der zyklischen Gruppe und der Nebenklassen anschauen und nachvollziehen.

Definition 2.2 (Zyklische Gruppe). *Eine Gruppe \mathcal{C} heißt zyklisch, wenn sie ein Element A enthält, sodass für jedes Element B von \mathcal{C} ein $n \in \mathbb{Z}$ existiert, sodass $A^n = B$. Außerdem gilt, dass \mathcal{C} die einzige Untergruppe von \mathcal{C} ist, die A enthält. Dann nennen wir A den Erzeuger von \mathcal{C} und können schreiben $\mathcal{C} = \langle A \rangle$.*

Damit wir die Definition der zyklischen Gruppe besser verstehen können, werden wir uns eine Gruppe anschauen und überprüfen, ob diese zyklisch ist.

Wir nehmen uns die Gruppe \mathcal{C}_4 . Diese Gruppe enthält alle möglichen Drehungen der Ebene die ein Quadrat in sich überführen. Also besteht die Gruppe wie in der Abbildung 1 zu erkennen ist aus den Drehungen um 90° , 180° , 270° und 0° , da Drehwinkel immer Modulo 360° gerechnet werden.

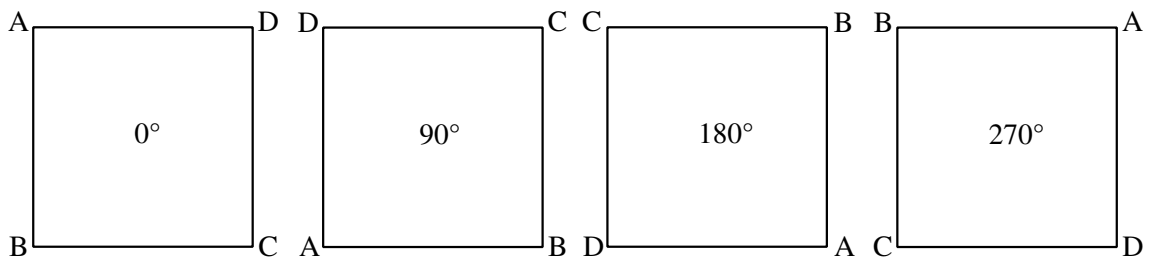


Abbildung 1: Grafische Darstellung der Elemente von \mathcal{C}_4

Um zu überprüfen ob diese Gruppe zyklisch ist, können wir nun versuchen die Definition der zyklischen Gruppe anzuwenden. Wählen wir uns zum Beispiel das Element A , die Drehung um 90° . Wir müssen nun zeigen, dass wir jedes andere Element der Gruppe mit dem Element A darstellen können. Dies können wir natürlich. Damit wir die Drehung um 180° darstellen können müssen wir A mit sich selber verknüpfen. Um 270° darstellen müssen wir A dreimal mit sich selber verknüpfen. Da wir nun alle Element der Gruppe \mathcal{C}_4 mit A darstellen können, haben wir herausgefunden, dass die Gruppe eine zyklische Gruppe mit Erzeuger A , der Drehung um 90° ist.

Wenn wir auch Spiegelungen zulassen, dann erhalten wir im Falle von regelmäßigen Polygonen eine Diedergruppe.

Definition 2.3 (Diedergruppe). *Eine Gruppe \mathcal{H} ist eine Diedergruppe, wenn sie die Isometriegruppe eines regelmäßigen n -Ecks in der Ebene ist. Sie besteht dann aus n Drehungen und n Spiegelungen, also aus insgesamt $2n$ Elementen.*

Auch für Diedergruppen möchten wir uns ein Beispiel, dazu können wir uns dem vorherigen Beispiel bedienen und wie schon erwähnt noch Spiegelungen der Gruppe hinzufügen, die das Viereck in sich selber überführen, hinzunehmen.

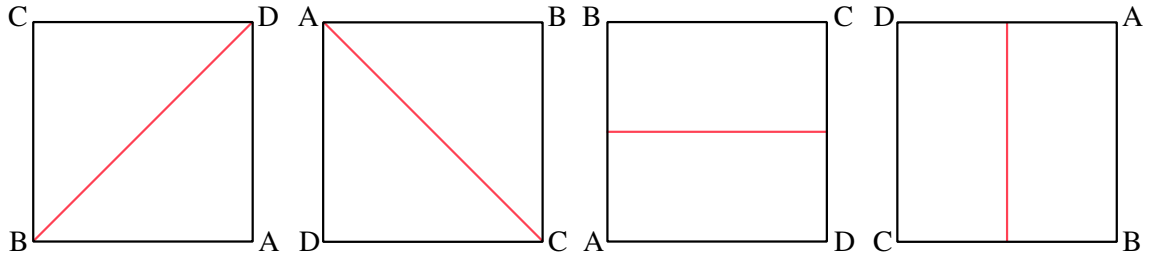


Abbildung 2: Grafische Darstellung der Elemente von \mathcal{D}_4

Wie in der Abbildung 2 zu sehen ist, kommen vier weitere Elemente zu der Gruppe hinzu. Diese vier Spiegelungen zusammen mit den vier Rotationen vom vorherigen Beispiel bilden die Diedergruppe \mathcal{D}_4 . Diese Gruppe besitzt zwei Erzeuger, zum einen den Erzeuger der zyklischen Gruppe \mathcal{C}_4 und zum anderen eine der vier Spiegelungen.

Definition 2.4 (Linksnebenklasse). *Zu einer Untergruppe $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ heißt eine Teilmenge der Form $g\mathcal{H} = \{gh|h \in \mathcal{H}\}$ mit $g \in G$ eine Linksnebenklasse. Die Anzahl der Linksnebenklassen heißt der Index von \mathcal{H} in \mathcal{G} .*

Als Beispiel nehmen wir uns die Diedergruppe \mathcal{D}_4 , mit der wir uns schon besser vertraut gemacht haben. Die zyklische Gruppe \mathcal{C}_4 ist eine Untergruppe der Diedergruppe mit Index 2. Es ist leicht zu sehen, dass die zyklische Gruppe eine Untergruppe der Diedergruppe ist, wir können die zyklische Gruppe auch als Linksnebenklasse auffassen, indem wir die Gruppe von Links mit Einheitsmatrix verknüpfen. Eine zweite Linksnebenklasse die wir finden können, entsteht durch die Verknüpfung einer beliebigen Spiegelung der Diedergruppe mit der zyklischen Gruppen. Wenn wir nun beide Linksnebenklassen miteinander verbinden erhalten wir die vollständige Diedergruppe. Daher hat die zyklische Gruppe in der Diedergruppe den Index 2.

Da wir nun wichtige Definitionen für Satz 2.1 uns angeschaut und anhand von Beispiel versucht haben zu verstehen, können wir nun mit dem Beweis des Satzes beginnen.

Beweis. Zunächst wollen wir zeigen, dass wenn wir eine beliebige endliche Untergruppe von $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ wählen, die nur Rotationen enthält, dass diese vom Typ einer zyklischen Gruppen sein muss.

Sei \mathcal{G} eine beliebige endliche Untergruppe von $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$. Wir nehmen an, dass $\mathcal{H} \leq \mathcal{G}$ eine Untergruppe in \mathcal{G} ist, die die Menge aller Rotationen in \mathcal{G} enthält.

Wir wollen zeigen, dass \mathcal{H} zyklisch sein muss. Für $|\mathcal{H}| = 1$ ist dieses bereits klar. Wenn $|\mathcal{H}| \neq 1$ wählen wir eine Drehung $R \in \mathcal{H}$, sodass $R \neq E_2$ und der Drehwinkel $\theta(R)$ minimal ist. Wenn wir jetzt eine weitere Drehung $T \in \mathcal{H}$ nehmen, dann können

wir ein $m \in \mathbb{Z}$ finden, sodass

$$\begin{aligned} m\theta(R) &\leq \theta(T) < (m+1)\theta(R) \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \theta(T) - m\theta(R) < \theta(R) \\ \Leftrightarrow 0 &\leq \theta(TR^{-m}) < \theta(R) \end{aligned}$$

Da wir $\theta(R)$ minimal gewählt haben, gilt $\theta(TR^{-m}) = 0$. Also muss $TR^{-m} = E_2$ sein und es folgt $T = R^m$. Demnach ist \mathcal{H} zyklisch mit $\mathcal{H} = \langle R \rangle$ (R ist Erzeuger von \mathcal{H}). Damit folgt auch, dass $\theta(R) = \frac{2}{n}\pi$, wenn $n = |\mathcal{H}|$. Wenn $\mathcal{G} = \mathcal{H}$ gilt, dann haben wir gezeigt, dass \mathcal{G} zyklisch ist und wir bezeichnen \mathcal{G} mit \mathcal{C}_2^n .

Als nächstes nehmen wir dann an, dass $\mathcal{G} \neq \mathcal{H}$ und wählen eine Spiegelung $S \in \mathcal{G}$. Nun wählen wir eine weitere beliebige Spiegelung $T \in \mathcal{G}$ mit $T \neq S$, dann gilt $\det(ST) = \det(S)\det(T) = 1$. Deshalb gilt $ST \in \mathcal{H}$ und es handelt sich bei ST um eine Drehung. Dann gilt $T \in S\mathcal{H}$, da $S^{-1} = S$. So gilt, dass \mathcal{H} eine Untergruppe von \mathcal{G} mit Index 2 ist und $\mathcal{H} = \langle R \rangle$. Dann gilt $\mathcal{G} = \langle R, S \rangle = \{E_2, R, \dots, R^{n-1}, S, SR, \dots, SR^{n-1}\}$ und $|\mathcal{G}| = 2n$. Da RS eine Spiegelung ist, gilt $(RS)^2 = E_2$ und $RS = SR^{-1} = SR^{n-1}$, damit sind alle Verknüpfungen in \mathcal{G} festgelegt. Die Gruppe \mathcal{G} bezeichnen wir mit $\mathcal{H}_2^n = \langle S, R \rangle$ (Die Diedergruppe von Ordnung $2n$). \square

3 Orthogonale Abbildungen im dreidimensionalen Raum

In den folgenden Abschnitten setzen wir $V = \mathbb{R}^3$ fest.

Wir betrachten nacheinander Drehungen, Spiegelungen und Drehspiegelungen und charakterisieren diese, indem wir ihre Eigenschaften nennen und durch Beweis begründen.

Satz 3.1. *Sei T eine Drehung aus der orthogonalen Gruppe $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$, dann hat T eine fixierte Drehachse, die durch den Eigenvektor x von T zum Eigenwert 1 eindeutig festgelegt ist. Wenn wir T auf die durch x^\perp eindeutig festgelegte Ebene \mathcal{P} einschränken, ist T' eine Drehung im zweidimensionalen Raum \mathbb{R}^2 .*

Beweis. Zunächst wollen wir klären, wie der Eigenwert 1 zustande kommt: Angenommen T ist eine Drehung in $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind Eigenwerte von T . Mindestens einer der Koeffizienten muss aus \mathbb{R} sein, da nach dem Zwischenwertsatz aus der Analysis ein reelles Polynom dritten Grades mindestens eine reelle Nullstelle besitzt. Sei λ_1 (ggf. nach Umbenennung) aus \mathbb{R} , dann können λ_2 und λ_3 nur folgende Werte

annehmen, da $\det(T) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$.

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = \pm 1 \quad (1)$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \overline{\lambda_3} \notin \mathbb{R} \quad (2)$$

Für uns ist aber nur der Eigenwert 1 interessant, dieser ist aber in beiden Fällen vorhanden.

Es bleibt zu nachzuweisen, weshalb $T|_{\mathcal{P}}$ eine Drehung in der Ebene \mathcal{P} ist. Sei x ein Eigenvektor zum Eigenwert 1, dann gilt nach der Definition eines Eigenvektors: $x = T^{-1}Tx = T^{-1}x$. Daraus können wir folgende Gleichungskette ableiten: $0 = (x^\perp, x) = (x^\perp, T^{-1}x) = (Tx^\perp, x)$ und direkt ablesen, dass $\mathcal{P} = x^\perp$ invariant ist unter T . Betrachten wir nun die Determinante der Einschränkung $T|_{\mathcal{P}}$, dann gilt $\det(T|_{\mathcal{P}}) = 1$, wegen $\det(T|_{\mathcal{P}}) = \lambda_2 \lambda_3$ und λ_2, λ_3 wie oben. \square

Die Eigenschaften der Spiegelungen in $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ fassen wir in einer Bemerkung zusammen:

Bemerkung 3.2. Eine Spiegelung S an der Ebene \mathcal{P} ist eine Abbildung, für die gilt, dass $Sx = x$ für alle $x \in \mathcal{P}$. Die y aus dem orthogonalen Komplement \mathcal{P}^\perp der Ebene \mathcal{P} werden auf ihr Negatives abgebildet, kurz $Sy = -y$ für alle $y \in \mathcal{P}^\perp$.

Für alle Vektoren $z \in \mathbb{R}^3$ gibt es einen Einheitsvektor r aus \mathcal{P}^\perp , sodass die Abbildungsvorschrift $Sz = z - 2(z, r)r$ gilt.

Nach Wahl einer geeigneten Basis $\{r, x_2, x_3\}$, wobei x_2, x_3 Basis der Spiegelebene \mathcal{P} sind, kann die Spiegelung S durch die Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden.

Zweimaliges Spiegeln eines Vektors z aus \mathbb{R}^3 überführt den Vektor wieder in sich selbst, wegen: $A^2 = S^2 = E_3 = id$.

Zuletzt betrachten wir Drehspiegelungen als Kombination von Spiegelung und Drehung.

Satz 3.3. Sei $T \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ mit $\det T = -1$. Dann ist T eine Drehspiegelung mit Spiegelebene \mathcal{P} und Drehachse \mathcal{P}^\perp .

Der Beweis verläuft ähnlich wie oben.

Beweis. Diesmal sei T eine Spiegelung aus $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ und $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Eigenwerte von T . Wie oben gibt es unter der Voraussetzung, dass $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ und $\det T =$

$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -1$ gilt, nur zwei mögliche Fälle:

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = \pm 1 \quad (3)$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \overline{\lambda_3} \notin \mathbb{R} \quad (4)$$

Sei von nun an x ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$ und \mathcal{P} das orthogonale Komplement x^\perp . Dass die Einschränkung $T|_{\mathcal{P}}$ eine Drehung in der Ebene \mathcal{P} ist, wissen wir wegen $\det(T|_{\mathcal{P}}) = \lambda_2 \lambda_3 = 1$. \square

Wir wählen nun eine geeignete Basis $\{x_1, x_2\}$ zu \mathcal{P} , sodass wir T darstellen können durch die Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Die Darstellung als Produkt von einer Drehung und einer Spiegelung verdeutlicht den dargelegten Zusammenhang:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.1 Platonische Körper

In den vorherigen Kapiteln haben wir uns mit der Klassifizierung der endlichen Untergruppen der orthogonalen Gruppen in zwei Dimensionen beschäftigt. Dabei haben wir feststellen können, dass es für die Klassifizierung ausreicht nur Gruppen zu betrachten, die zu reguläre Polygonen gehören. Wie zum Beispiel die Gruppe \mathcal{C}_4 die zu einem Quadrat gehört. Da wir uns nun damit beschäftigen wollen wie wir die endlichen Untergruppen der orthogonalen Gruppe in drei Dimensionen klassifizieren können, liegt es nahe sich mit reguläre Polyedern zu befassen. Im Verlauf dieses Kapitels werden wir sehen, dass es nur fünf reguläre Polyeder geben kann, die fünf platonischen Körper. Bevor wir jedoch den Beweis diskutieren wollen, werfen wir zunächst einen Blick zurück in die Geschichte und befassen uns mit der Entdeckung der platonischen Körper und ihrer Bedeutung im Laufe der Jahrhunderte.

Warum beschäftigen wir uns mit den platonischen Körpern? Motivation: 2dimensional: regelmäßige Polygone alle Gruppen im 2dimensionalen wirken auf reguläre Polygonen Wie ist es im 3dimensionalen? Wir betrachten regelmäßige Polyeder: wir werden sehen, es nur 5 regelmäßige Polyeder gibt. Das sind gerade die platonischen Körper

Bevor wir uns mit dem Beweis der eulerschen Polyederformel beschäftigen müssen wir zunächst klären was einfache, konvexe und reguläre Polyeder sind.

Definition 3.4 (Einfaches Polyeder). *Ein Polyeder heißt einfach, wenn seine Oberfläche sich stetig in eine Kugelfläche überführen lässt, das heißt einfach Polyeder haben keine „Löcher“ (Mainzer, 1988, S. 211)*

Definition 3.5 (Konvexes Polyeder). *Ein Polyeder heißt konvex, wenn zu je zwei Punkten aus dem Inneren des Polyeders auch deren Verbindungsstrecke ganz im Polyeder liegt. (Müller-Philipp und Gorski, 2012, S. 51)*

Definition 3.6 (Reguläres Polyeder). *Ein konvexes Polyeder heißt regulär, wenn alle Flächen zueinander kongruente regelmäßige Vielecke sind und in jeder Ecke gleich viele Vielecke zusammenstoßen. (Müller-Philipp und Gorski, 2012, S. 51)*

3.2 Klassifikation der endlichen Rotationsgruppen

3.3 Klassifikation der endlichen orthogonalen Gruppen

4 Schulische Anwendung

(Grove und Benson, 1985, S. 4) (Quaisser, 1994, S. 3)

Literaturverzeichnis

- Grove, Larry C. und Clark T. Benson (1985). *Finite Reflection Groups*. 2. Aufl. New York: Springer.
- Mainzer, Klaus (1988). *Symmetrie der Natur*. Berlin und New York: de Gruyter.
- Müller-Philipp, Susanne und Hans-Joachim Gorski (2012). *Leitfaden Geometrie*. 5. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag.
- Quaisser, Erhard (1994). *Diskrete Geometrie : Einführung, Probleme, Übungen*. Heidelberg, Berlin und Oxford: Spektrum Akademischer Verlag.