

UNIVERSITÄT DUISBURG-ESSEN

SEMINARVORTRAG

Endliche Drehgruppen im zwei- und dreidimensionalen Raum

Autor:

Mike Barkmin

Seminarleiter:

Dr. Ingo Janiszcak

Inhaltsverzeichnis

1	Orthogonale Transformationen im zweidimensionalen Raum	2
2	Endliche Gruppen im zweidimensionalen Raum	2
3	Orthogonale Transformationen im dreidimensionalen Raum	2
4	Endliche Drehgruppen im dreidimensionalen Raum	3
5	Endliche Gruppen im dreidimensionalen Raum	4

1 Orthogonale Transformationen im zweidimensionalen Raum

Bemerkung 1.1. Sei $T \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$, dann ist T eindeutig über die Basisvektoren $e_1 = (1, 0)$ und $e_2 = (0, 1)$ definiert. Da $T \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ und somit längen- und orthogonalitätserhaltend ist, existiert ein eindeutiges $\theta \in [0, 2\pi)$, sodass $Te_1 = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ und $Te_2 = \pm(-\sin(\theta), \cos(\theta))$.

Wenn $Te_2 = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$, dann wird T durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

repräsentiert und T ist eine Drehung um den Ursprung mit dem Winkel θ . Außerdem gilt $\det T = \det A = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

Wenn $Te_2 = (\sin(\theta), -\cos(\theta))$, dann wird T durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

repräsentiert und T ist eine Spiegelung. Außerdem gilt $\det T = \det A = -1$.

Satz 1.2. Jede orthogonale Transformation im zweidimensionalen Raum ist entweder eine Spiegelung oder eine Drehung.

2 Endliche Gruppen im zweidimensionalen Raum

Satz 2.1. Sei \mathcal{G} eine endliche Untergruppe von $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$, dann ist \mathcal{G} entweder eine zyklische Gruppe \mathcal{C}_2^n oder eine Diedergruppe \mathcal{H}_2^n für $n \in \mathbb{N}$

3 Orthogonale Transformationen im dreidimensionalen Raum

Satz 3.1. Angenommen T ist eine Drehung in $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$, dann ist T eine Drehung um eine fixierte Achse, sodass T einen Eigenvektor x zum Eigenwert 1 besitzt und die Einschränkung von T auf die Ebene $\mathcal{P} = x^\perp$ eine Drehung im zweidimensionalen Raum ist.

Bemerkung 3.2. Wenn S eine Spiegelung an der Ebene \mathcal{P} in $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ ist, dann gilt $Sx = x \ \forall x \in \mathcal{P}$ und $Sy = -y \ \forall y \in \mathcal{P}^\perp$. Wir können nun einen Einheitsvektor $r \in \mathcal{P}^\perp$ so wählen, dass $Sx = x - 2(x, r)r \ \forall x \in \mathbb{R}^3$ gilt. Wir wählen nun eine Basis $\{x_2, x_3\}$ von \mathcal{P} , sodass die Transformationsmatrix unter der Basis $\{r, x_2, x_3\}$ von S durch

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

repräsentiert wird. Es gilt außerdem $S^2 = E_3$.

Satz 3.3. Sei $T \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ mit $\det T = -1$. Dann ist T eine Drehspiegelung mit Spiegelebene \mathcal{P} und Drehachse \mathcal{P}^\perp .

4 Endliche Drehgruppen im dreidimensionalen Raum

Bemerkung 4.1. Sei W ein Untervektorraum mit $\dim W = 2$ im Vektorraum V mit $\dim V = 3$. Wenn R eine Drehung in $\mathcal{O}(W)$ ist, dann kann R zu einer Drehung in $\mathcal{O}(V)$ erweitert werden. Dazu wählen wir eine Basis $\{x_1, x_2, x_3\}$ von V mit $x_1 \in W^\perp$ und $x_2, x_3 \in W$, sodass die Matrix R durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

repräsentiert wird.

Bemerkung 4.2. Wenn wir jede Transformation T aus einer Diederuntergruppe \mathcal{H}_2^n zu einer Drehung in $\mathcal{O}(V)$ erweitern, dann erhalten wir eine Menge von Drehungen die eine Untergruppe von $\mathcal{O}(V)$ bildet und diese Untergruppe ist isomorph zu \mathcal{H}_2^n . Wir bezeichnen sie als Diedergruppe \mathcal{H}_3^n .

Bemerkung 4.3. Aus den Modellen der platonische Körper können wir uns ihre Drehgruppen überlegen. Im nächsten Abschnitt nehmen wir an, dass die Schwerpunkte der Körper im Ursprung vom \mathbb{R}^3 liegen.

$$|\mathcal{T}| = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 = 12 \text{ (Tetraeder)}$$

$$|\mathcal{W}| = 6 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 = 24 \text{ (Hexaeder / Oktaeder)}$$

$$|\mathcal{I}| = 15 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 1 = 60 \text{ (Dodekaeder / Ikosaeder)}$$

Definition 4.4. Sei $E_3 \neq T \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ eine Drehung, dann hat T genau zwei Fixpunkte auf der Einheitskugel, nämlich die Schnittpunkte der Einheitskugel mit der Drehachse. Diese Punkte nennen wir die Pole der Drehung.

Bemerkung 4.5. Wenn wir uns die Bahnen, die Ordnung der Stabilisatoren und die Anzahl der Pole einer Symmetriegruppe \mathcal{G} mit Polmenge \mathcal{P} anschauen, dann ergeben sich folgende charakteristische Werte.

\mathcal{G}	$ \mathcal{G} $	$ \mathcal{P} $	Anzahl Bahnen	Ordnung der Stabilisatoren		
\mathcal{C}_3^n	n	2	2	n	n	
\mathcal{H}_3^n	$2n$	$2n + 2$	3	2	2	n
\mathcal{T}	12	14	3	2	3	3
\mathcal{W}	24	26	3	2	3	4
\mathcal{I}	60	62	3	2	3	5

Satz 4.6. Haben $\mathcal{C}_3^n, \mathcal{H}_3^n, \mathcal{T}, \mathcal{W}$ und \mathcal{I} die gleichen Eigenschaften wie in Bemerkung 4.5., dann ist $\mathcal{C}_3^n, n \geq 1; \mathcal{H}_3^n, n \geq 2; \mathcal{T}; \mathcal{W}; \mathcal{I}$ eine komplette Liste aller endlichen Untergruppen von Drehungen aus $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$.

5 Endliche Gruppen im dreidimensionalen Raum

Satz 5.1. Sei $\mathcal{G} \leq \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$, dann ist \mathcal{G} isomorph zu einer der folgenden Klassen:

- $\mathcal{C}_3^n, n \geq 1; \mathcal{H}_3^n, n \geq 2; \mathcal{T}; \mathcal{W}; \mathcal{I}$
- $(\mathcal{C}_3^n)^*, n \geq 1; (\mathcal{H}_3^n)^*, n \geq 2; \mathcal{T}^*; \mathcal{W}^*; \mathcal{I}^*$
- $\mathcal{C}_3^{2n}[\mathcal{C}_3^n, n \geq 1; \mathcal{H}_3^n[\mathcal{C}_3^n, n \geq 2; \mathcal{H}_3^{2n}, n \geq 2; \mathcal{W}]\mathcal{T}$

Hinweis: $\mathcal{R}^* := \mathcal{R} \cup -\mathcal{R}$ und $\mathcal{R}[\mathcal{P}] := \mathcal{P} \cup \{-U | U \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{P}\}$

