Universität Duisburg-Essen

Seminarvortrag

Endliche Drehgruppen im zwei- und dreidimensionalen Raum

Autor:
Mike Barkmin

Seminarleiter:
Dr. Ingo Janiszczak

Inhaltsverzeichnis

1 Orthogonale Transformationen im zweidimensionalen Raum

Bemerkung 1.1. *Sei $T \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$, dann ist T eindeutig über die Basisvektoren $e_1 = (1,0)$ und $e_2 = (0,1)$ definiert. Da $T \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ und somit längen- und orthogonalitätserhaltend ist, existiert ein eindeutiges $\theta \in [0, 2\pi)$, sodass $Te_1 = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ und $Te_2 = \pm(-\sin(\theta), \cos(\theta))$.*

Wenn $Te_2 = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$, dann wird T durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

repräsentiert und T ist eine Drehung um den Ursprung mit dem Winkel θ. Außerdem gilt $\det T = \det A = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

Wenn $Te_2 = (\sin(\theta), -\cos(\theta))$, dann wird T durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

repräsentiert und T ist eine Spiegelung. Außerdem gilt $\det T = \det A = -1$.

Satz 1.2. *Jede orthogonale Transformation im zweidimensionalen Raum ist entweder eine Spiegelung oder eine Drehung.*

2 Endliche Gruppen im zweidimensionalen Raum

Satz 2.1. *Sei $\mathcal{G}$ eine endliche Untergruppe von $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$, dann ist $\mathcal{G}$ entweder eine zyklische Gruppe $\mathcal{C}_2^n$ oder eine Diedergruppe $\mathcal{H}_2^n$ für $n \in \mathbb{N}$*

3 Orthogonale Transformationen im dreidimensionalen Raum

Satz 3.1. *Angenommen T ist eine Drehung in $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$, dann ist T eine Drehung um eine fixierte Achse, sodass T einen Eigenvektor x zum Eigenwert 1 besitzt und die Einschränkung von T auf die Ebene $\mathcal{P} = x^\perp$ eine Drehung im zweidimensionalen Raum ist.*

Bemerkung 3.2. *Wenn S eine Spiegelung an der Ebene $\mathcal{P}$ in $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ ist, dann gilt $Sx = x \; \forall x \in \mathcal{P}$ und $Sy = -y \; \forall y \in \mathcal{P}^\perp$. Wir können nun einen Einheitsvektor $r \in \mathcal{P}^\perp$ so wählen, dass $Sx = x - 2(x,r)r \; \forall x \in \mathbb{R}^3$ gilt. Wir wählen nun eine Basis $\{x_2, x_3\}$ von $\mathcal{P}$, sodass die Transformationsmatrix unter Basis $\{r, x_2, x_3\}$ von S durch*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

repräsentiert wird. Es gilt außerdem $S^2 = E_3$.

Satz 3.3. *Sei $T \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ mit $\det T = -1$. Dann ist T eine Drehspiegelung mit Spiegelebene $\mathcal{P}$ und Drehachse $\mathcal{P}^\perp$.*

4 Endliche Drehgruppen im dreidimensionalen Raum

Bemerkung 4.1. *Sei W ein Untervektorraum mit $\dim W = 2$ im Vektorraum V mit $\dim V = 3$. Wenn R eine Drehung in $\mathcal{O}(W)$ ist, dann kann R zu einer Drehung in $\mathcal{O}(V)$ erweitert werden. Dazu wählen wir eine Basis $\{x_1, x_2, x_3\}$ von V mit $x_1 \in W^\perp$ und $x_2, x_3 \in W$, sodass die Matrix R von*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

repräsentiert wird.

Bemerkung 4.2. *Wenn wir jede Transformation T aus einer Diederuntergruppe $\mathcal{H}_2^n$ zu einer Drehung in $\mathcal{O}(V)$ erweitern, dann erhalten wir eine Menge von Drehungen die eine Untergruppe von $\mathcal{O}(V)$ bilden und diese Untergruppe ist isomorph zu $\mathcal{H}_2^n$. Wir bezeichnen sie als Diedergruppe $\mathcal{H}_3^n$.*

Bemerkung 4.3. *Aus den Modellen der platonische Körper können wir uns ihre Drehgruppen überlegen. Im nächsten Abschnitt nehmen wir an, dass die Schwerpunkte der Körper im Ursprung vom $\mathbb{R}^3$ liegen.* $|\mathcal{T}| = 4{\cdot}2+3{\cdot}1+1 = 12$ $|\mathcal{W}| = 6{\cdot}1+4{\cdot}2+3{\cdot}3+1 = 24$ $|\mathcal{I}| = 15 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + 1 = 60$

Definition 4.4. *Sei $E_3 \neq T \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ eine Drehung, dann hat T genau zwei Fixpunkte auf der Einheitskugel, nämlich die Schnittpunkte der Einheitskugel mit der Drehachse. Diese Punkte nennen wir die Pole der Drehung.*

Bemerkung 4.5. *Wenn wir uns die Bahnen, die Ordnung der Stabilisatoren und die Anzahl der Pole einer Symmetriegruppe $\mathcal{G}$ mit Polmenge $\mathcal{P}$ anschauen, dann ergeben sich folgende charakteristische Werte.*

$\mathcal{G}$	$\lvert\mathcal{G}\rvert$	$\lvert\mathcal{P}\rvert$	*Anzahl Bahnen*	*Ordnung der Stabilisatoren*		
$\mathcal{C}_3^n$	n	2	2	n	n	
$\mathcal{H}_3^n$	$2n$	$2n+2$	3	2	2	n
$\mathcal{T}$	12	14	3	2	3	3
$\mathcal{W}$	24	26	3	2	3	4
$\mathcal{I}$	60	62	3	2	3	5

Satz 4.6. *Haben $\mathcal{C}_3^n, \mathcal{H}_3^n, \mathcal{T}, \mathcal{W}$ und $\mathcal{I}$ die gleichen Eigenschaften wie in Bemerkung 4.5, dann ist $\mathcal{C}_3^n, n \geq 1; \mathcal{H}_3^n, n \geq 2; \mathcal{T}; \mathcal{W}; \mathcal{I}$ eine komplette Liste aller endlichen Untergruppen von Drehungen aus $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$.*

5 Endliche Gruppen im dreidimensionalen Raum

Satz 5.1. *Sei $\mathcal{G} \leq \mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$, dann ist $\mathcal{G}$ isomorph zu einer der folgenden Klassen:*

- $\mathcal{C}_3^n, n \geq 1; \mathcal{H}_3^n, n \geq 2; \mathcal{T}; \mathcal{W}; \mathcal{I}$
- $(\mathcal{C}_3^n)^*, n \geq 1; (\mathcal{H}_3^n)^*, n \geq 2; \mathcal{T}^*; \mathcal{W}^*; \mathcal{I}^*$
- $\mathcal{C}_3^{2n}]\mathcal{C}_3^n, n \geq 1; \mathcal{H}_3^n]\mathcal{C}_3^n, n \geq 2; \mathcal{H}^2 n_3, n]\mathcal{H}_3^n, \geq 2; \mathcal{W}]\mathcal{T}$

Hinweis: $\mathcal{R}^* := \mathcal{R} \cup -\mathcal{R}$ *und* $\mathcal{R}]\mathcal{P} := \mathcal{P} \cup \{-U | U \in \mathcal{R} \backslash \mathcal{P}\}$