(1) K は X^7-11 の最小分解体なので, $\xi, \alpha := 11^{1/7} \in K$ であり, $\mathbb{Q}(\xi,\alpha) \subseteq K$ となる. さらに, K の最小性より, $\mathbb{Q}(\xi,\alpha) = K$ が成り立つ. ここで, 円分拡大の一般論から, $[\mathbb{Q}(\xi):\mathbb{Q}] = 6$ であり, アイゼンシュタインの既約判定法から, X^7-11 は既約なので, $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = 7$ が成り立つ. これより,

$$[K:\mathbb{Q}] = 6[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] = 7[\mathbb{Q}(\xi):@\mathbb{Q}]$$

が成り立つ. さらに,

$$[K:\mathbb{Q}] = [K:\mathbb{Q}(\alpha)][\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}] \leq [\mathbb{Q}(\xi):\mathbb{Q}][\mathbb{Q}(alpha):\mathbb{Q}] = 42$$

となるので, $[K:\mathbb{Q}] = 42$ が成り立つ.

(2) $\mathbb{Q}$ が標数 0 の体であることから, $K/\mathbb{Q}$ は分離拡大であり, K は X^7-11 の最小分解体なので, $K/\mathbb{Q}$ は正規拡大である. したがって, $K/\mathbb{Q}$ は Galois 拡大である.

$K/\mathbb{Q}$ の真なる中間体の数をもとめるには, Galois 理論の基本定理から, $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の非自明な部分群の数を求めれば十分である. ここで, $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の元は ξ, α の像によって決定され, $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ について,

$$\sigma(\xi)^7 - 1 = 0 \qquad\qquad \sigma(\alpha)^7 - 11 = 0$$

なので, $\sigma(\xi) = \xi^i$, $\sigma(\alpha) = \alpha\xi^j$ が成り立つ. ただし, $i \in \mathbb{F}_7^\times$ かつ $j \in \mathbb{F}$ である. σ がこのような写像であるとき, $\sigma_{i,j} = \sigma$ とおく. また, (1) より, $|\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})| = 42$ なので, この対応によって, 全単射 $\mathbb{F}_7^\times \times \mathbb{F}_7 \to \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ が存在することに注意する.

$\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の非自明な部分群は位数が $2, 3, 6, 7, 14, 21$ のいずれかになるので, それぞれの位数の部分群を数えればよい. 位数 k の部分群の数を s_k とする. ここで,

$$\sigma_{i.j}^n(\xi) = \xi^{i^n} \qquad\qquad \sigma_{i,j}^n(\alpha) = \alpha\xi^{j(1+i+i^2+\cdots+i^{n-1})}$$

となることに注意する.

(a) s_2 は位数 2 の元の数と等しく, $\sigma_{i,j}^2(\xi) = \xi$ となるのは, $i = 1, 6$ の場合である.

i. $i = 1$ のとき, $\sigma_{1,j}^2(\alpha) = \alpha\xi^{2j}$ であり, $2j = 0$ となるのは $j = 0$ のみである. しかし, $\sigma_{1,0}$ は位数 1 なので, この場合は位数 2 の元は存在しない.

ii. $i = 6$ のとき,

$$\sigma_{i,j}^2(\alpha) = \alpha\xi^0 = \alpha$$

なので, すべての j について $\sigma_{6,j}$ は位数 2 の元となる.

以上より, 位数 2 の元は 7 個存在するので, $s_2 = 7$.

(3) s_3 は位数 3 の元の数の半分であり, $\sigma_{i,j}^3(\xi) = \xi$ となるのは, $i = 1, 2, 4$ の場合である.

(a) $i = 1$ のとき, $\sigma_{1,j}^3(\alpha) = \alpha\xi^{3j}$ であり, $3j = 0$ となるのは, $j = 0$ のみである. しかし, $\sigma_{1,0}$ は位数 1 なので, この場合は位数 2 の元は存在しない.

(b) $i = 2$ のとき, $\sigma_{2,j}^3(\alpha) = \alpha$ なので, すべての j について, $\sigma_{2,j}$ は位数 3 の元となる.

(c) $i = 4$ のとき, $\sigma_{4,j}^3(\alpha) = \alpha$ なので, すべての j について, $\sigma_{4,j}$ は位数 3 の元となる.

以上より, 位数 3 の元は 14 個存在するので, $s_3 = 7$ が成り立つ.

(4) Sylow の定理より, $s_7 = 1$ である. $\sigma_{i,j}^7(\xi) = \xi^{i^7} = \xi^i$ なので, $\sigma_{i,j}^7(\xi) = \xi$ となるのは, $i = 1$ の場合である.

$$\sigma_{1,j}^7(\alpha) = \alpha\xi^{j(1+i+\cdots+i^6)} = \alpha$$

なので, すべての j に対して, $\sigma_{1,j}^7 = 1$ が成り立つ. しかし, $(i,j) = (1,0)$ のときには $\sigma_{1,0}$ は位数 1 なので, 位数 7 の元は 6 個である.

(5) 位数 6 の元を数える. $\sigma_{i,j}^6(\xi) = \xi^{i^6} = \xi$ なので, すべての i について, $\sigma_{i,j}^6(\xi) = \xi$ が成り立つ.

(a) $i \neq 1$ のときには, $1 + i + \cdots + i^5 = 0$ なので, このとき, すべての j に対して, $\sigma_{i,j}^6 = 1$ が成り立つ. ゆえに, $i \neq 1$ かつ, 位数 $2, 3$ でないような $\sigma_{i,j}$ はすべて位数 6 の元である

(b) $i = 1$ のときには, 位数 1 または 7 となるので, この場合は位数 6 の元は存在しない.

したがって, 位数 6 の元は 14 個存在する.

ここで, $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ であることから, 自然に

$$\phi : \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \to \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \qquad\qquad \psi : \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$$

が得られる. $G \subseteq \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ を位数 6 の部分群とすれば, $\phi(G) = 0$ なので, $\psi(G) = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ が成り立つ. ゆえに, $G \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ である. したがって, $s_6 = 7$ である.