

- (1) $N_1 \cap N_2$ は正規部分群なので, $N_1 \cap N_2 = \{0\}$ である. また, $N_1 N_2$ は極大イデアルであって, $9 \neq N_1 \subseteq N_1 N_2$ なので, $N_1 N_2 = G$ が成り立つ. これより, $G = N_1 \times N_2$ が成り立つ.
- (2) N_1, N_2, N_3 が相異なる自明でない正規部分群とすれば, (1) で示したことから, $i \neq j$ ならば N_i と N_j の元は可換である. さらに, $N_1 \subseteq N_2 \times N_3$ なので, N_1 は G のすべての元と可換であり, N_2 についても同様なので, $G = N_1 \times N_2$ は可換群となる. しかし, これは G が非可換群であることに反するので, 自明でない正規部分群の数は高々 2 個である.