(1) $\phi(x)=x'$, $\phi(y)=x't$ なので, $\phi(y^2-6x^2)=X^2(T^2-6)\in(X^2-6)$ となり, well-defined.
$f\in\mathbb{Z}[X,Y]/(Y^2-6x^2)\setminus\{0\}$ の代表元を $f_0\in\mathbb{Z}[X,T]$ とする．このとき, $\deg_Y f_0\leq 1$ と仮定してよいので, ある $g,h\in\mathbb{Z}[X]$ が存在して, $f_0=gY+h$ と表せる．このとき, $\phi(f_0)=gXT+h$ であって, $gXT+h\in(T^2-6)$ と仮定すれば, $\mathbb{Z}[X,T]$ は整域であって, $1,T$ は $\mathbb{Z}[X]$ 上線形独立なので, $gX=h=0$ となる．さらに, $\mathbb{Z}[X]$ も整域なので, $g=h=0$ となるが, $f_0\neq 0$ に反するので, $\phi$ は単射である.

(2) $A/P_1$ が整域であることを示す．まず, $A=\mathbb{Z}[X,Y]/(Y^2-6X^2)$ のイデアルは $(Y^2-6X^2)$ を含む $\mathbb{Z}[X,Y]$ のイデアルと対応しており, ある $I_1\subseteq\mathbb{Z}[X,Y]$ が存在して, $P_1=I_1/(Y^2-6X^2)$ と表せる．このとき, $(X,Y,5)\subseteq I_1$ なので, $(X,Y,5)+(Y^2-6X^2)\subseteq I_1$ となる．ここで,

$$P_1\subseteq((X,Y,5)+(Y^2-6X^2))/(Y^2-6X^2)\subseteq I_1/(Y^2-6X^2)=P_1$$

なので,

$$P_1=((X,Y,5)+(Y^2-6X^2))/(Y^2-6X^2)$$

であり,

$$(X,Y,5)+(Y^2-6X^2)=(X,Y,5)$$

も成り立つので,

$$A/P_1=(\mathbb{Z}[X,Y]/(Y^2-6X^2))/((X,Y,5)/(Y^2-6X^2))=\mathbb{Z}[X,Y]/(X,Y,5)=\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$$

となる．これは整域なので, $P_1$ は素イデアルである.
次に, $A/P_2$ が整域であることを示す．$A/P_1$ の場合と同様にして,

$$P_2=((X-Y,5)+(Y^2-6X^2))/(Y^2-6X^2)$$

であり,

$$(X-Y,5)+(Y^2-6X^2)=(X-Y,5)$$

なので,

$$A/P_2=(\mathbb{Z}[X,Y]/(Y^2-6X^2))/((X-Y,5)/(Y^2-6X^2))=\mathbb{Z}[X,Y]/(X-Y,5)=\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[X]$$

となる．これは整域なので, $P_2$ は素イデアルである.
$A/P_1\neq A/P_2$ より, $P_1\neq P_2$ であって, $P_2\subseteq P_1$ は明らかに成り立つので, $P_2\subsetneq P_1$ となる.

(3) $B/Q_1$ が整域であることを示す. (2) と同様にして,

$$B/Q_1=(\mathbb{Z}[X,T]/(T^2-6))/((X,T+1)+(T^2-6)/(T^2-6))$$

であって,

$$(X,T+1)+(T^2-6)=(X,T+1,5)$$

なので,

$$B/Q_1=\mathbb{Z}[X,T]/(X,T+1,5)=\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$$

となる．これは整域なので, $Q_1$ は素イデアルである.

また, (2) で示したことから, $P_1$ は特に極大イデアルであって, $Q_1 \neq 1$ なので, $P_1 \subseteq Q_1 \cap A$ を示せば十分である. $\phi(X) \in Q_1$ は明らかであり,

$$\phi(Y) = TX = X(T+1) - X \in Q_1$$

と,

$$\phi(5) = 5 = -(T^2-6) + (T-1)(T+1) \in Q_1$$

も成り立つので, $P_1 \subseteq Q_1 \cap A$ が成り立つ. これより, $P_1 = Q_1 \cap A$ となる.

(4) $\mathbb{Z}$ がネーターであることから, $\mathbb{Z}[X,T] = 2$ であり, $\mathbb{Z}[X,T]$ において

$$0 \subsetneq (T^2-6) \subsetneq (X, T+1) = Q_1$$

が成り立つこととイデアルの対応関係から, $B$ の素イデアルであって, $Q_1$ に真に含まれる素イデアルは 0 しか存在しないが, $P_2 \neq 0$ なので, 条件を満たす $Q_2$ は存在しない.