(ii) $\Rightarrow$ (i)　k を代数閉体とし, ある $f \in k[X,Y]$ が存在して, $V(f) = \{(0,0)\}$ と仮定する. このとき,

$$V(f) = \{(0,0)\} = V((X,Y))$$

なので, Hilbert の零点定理より, $\sqrt{(f)} = \sqrt{(X,Y)} = (X,Y)$ が成り立つ. ここで, $X, Y \in (X,Y)$ なので, ある n, m が存在して, $X^n, Y^m \in (f)$ となる. ゆえに, ある $g, h \in k[X,Y]$ が存在して, $X^n = fg$ かつ $Y^m = fh$ が成り立つ. したがって, f が定数または $n = m = 0$ となる. f が定数の場合は明らかに矛盾であり, $n = m = 0$ の場合は, $g = h = f^{-1}$ なので, $V(f) \neq \emptyset$ であることに矛盾. これらより, 任意の $f \in k[X,Y]$ について, $V(f) \neq \{(0,0)\}$ が成り立つ.

(i) $\Rightarrow$ (ii)　k は代数閉ではないので, 二次以上の既約多項式 $g \in k[X]$ が存在して, g は k 上で根をもたない. この g に対して, $f = Y^{\deg g} g(X/Y)$ が (ii) を満たす.