(1) 有限アーベル群の構造定理より, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ であって,

$$G \cong \prod_i \mathbb{Z}/a_i\mathbb{Z} =: \prod_i H_i$$

かつ a_i は a_{i+1} の約数であるようなものが存在する．このとき, $n \geq 2$ と仮定すれば, a_{n-1} は a_n の約数であって, H_n は巡回群なので, 位数 a_{n-1} の巡回群を部分群として含む．しかし, G は条件 $(*)$ を満たすので, $H_{n-1} \subseteq H_n$ が成り立つ．これは矛盾なので, $n = 1$ となる．ゆえに, G は巡回群である．

(2) G/H の部分群の集合と G の H を含む部分群の集合には包含関係を保存するような自然な全単射が存在する．ゆえに, ある k が存在して, 位数 k の部分群 $N_1/H, N_2/H \subseteq G/H$ が存在したと仮定すれば,

$$|N_1|/|H| = |N_1/H| = k = |N_2/H| = |N_2|/|H|$$

より, $|N_1| = |N_2|$ となって, G が条件 $(*)$ を満たすことに反する．したがって, G/H も条件 $(*)$ を満たす．

(3) $n = |G|$ として, $n = 1$ の場合には主張は明らかに成り立つ．
$n \geq 2$ のとき, $n-1$ 以下の位数を持つ有限群で, 条件 $(*)$ を満たすものは巡回群であると仮定する．特に, G の真部分群はすべて巡回群であると仮定する．$|G| = p_1^{e_1} \cdots p_m^{e_m}$ とおき, G の Sylow-p_k 部分群を H_k とする．$m \geq 2$ のとき, H_k は帰納法の仮定より巡回群であり, その生成元を h_k とおく．また, 条件 $(*)$ より, G の任意の部分集合について, 共役な部分群は自分自身のみなので, 正規部分群である．これより, $i \neq j$ のとき, $[H_i, H_j] \subseteq H_i \cap H_j = 1$ となるので, H_i と H_j の元はそれぞれ可換である．さらに, $\gcd(p_i, p_j) = 1$ より, $h_i h_j$ で生成される巡回群 $H_i H_j$ の位数は $p_i p_j$ なので,

$$H_i \times H_j \ni (h_i^a, h_j^b) \longmapsto h_i^a h_j^b \in H_i H_j$$

は全単射準同型である．ゆえに, 中国式剰余定理より,

$$H_i H_j \cong H_i \times H_j \cong \mathbb{Z}/p_i^{e_i}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p_j^{e_j}\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_i^{e_i} p_j^{e_j}\mathbb{Z}$$

となる．これは巡回群かつ G の正規部分群なので, これを他の Sylow 部分群に対しても繰り返すことにより, G が巡回群であることが従う．