$R_a = K[X,Y]/(X^2 - Y^2 - X - Y - a) \cong K[S,T]/(ST - a)$ なので, $R_a = K[X,Y]/(XY - a)$ として考えればよい.

(1) Hilbert の零点定理より, $K[X,Y]$ の極大イデアルは $\alpha, \beta \in K$ を使って, $(X-\alpha, Y-\beta)$ と表せる. これを $\mathfrak{m}_{\alpha,\beta}$ と定める.
剰余環のイデアルの対応関係より, $\mathfrak{m}$ を R_0 の極大イデアルとすれば, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{\alpha,\beta}/(XY)$ と表せる. このとき, $(XY) \subseteq \mathfrak{m}_{\alpha,\beta}$ より, $X = \alpha, Y = \beta$ を代入する写像を考えれば, $\alpha\beta = 0$ となる. また, K は特に整域なので, $\alpha = 0$ または $\beta = 0$ である. 以下, $\beta = 0$ と仮定する. $\alpha = 0$ のとき,

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = (\mathfrak{m}_{0,0}/(XY))/(\mathfrak{m}_{0,0}/(XY))^2 = \mathfrak{m}_{0,0}/(\mathfrak{m}_{0,0}^2 + (XY)) = (X,Y)/(X^2, Y^2, XY)$$

となるので, $\dim_K \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 2$ である. また, $\alpha \neq 0$ のときには,

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = (\mathfrak{m}_{\alpha,0}/(XY))/(\mathfrak{m}_{\alpha,0}/(XY))^2 = \mathfrak{m}_{\alpha,0}/(\mathfrak{m}_{\alpha,0}^2 + (XY)) = (X-\alpha, Y)/((X-\alpha)^2, Y)$$

となるので, $\dim_K \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$ となる.
さらに, $\mathfrak{m}$ が単項イデアルの場合は

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m} \otimes_{R_0} R_0/\mathfrak{m} = R_0/\mathfrak{m} = K$$

となるので, $\dim_K \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$ となる. したがって, $\alpha = 0$ の場合には $\mathfrak{m}$ は単項イデアルでない. また, $\alpha \neq 0$ の場合には $\mathfrak{m} = (X-\alpha)R_0$ となるので, $\mathfrak{m}$ は単項イデアルになる.

(2) (1) と同様にして, $\alpha\beta = a \neq 0$ であって, K は特に整域なので, $\alpha \neq 0$ かつ $\beta \neq 0$ が成り立つ. このとき, $\mathfrak{m} = (X-\alpha)R_a$ なので, 単項イデアルであって, (1) で示していることから, $\dim_K \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$ が成り立つ.