$R_a = K[X,Y]/(X^2 - Y^2 - X - Y - a) \cong K[S,T]/(ST - a)$ であることに注意する．$I = (ST - a)$ とおく．

(1) Hilbert の零点定理より，$K[X,Y]$ の極大イデアルは $(X - \alpha, Y - \beta)$ という形をしている．また，剰余環のイデアルの対応関係により，R_a の極大イデアルは $\mathfrak{m} = (X - \alpha, Y - \beta)/I$ と表せる．ここで，$(XY) = I \subseteq (X - \alpha, Y - \beta)$ より，$\alpha\beta = 0$ となるので，$\alpha = 0$ または $\beta = 0$ が成り立つ．$\beta = 0$ としても一般性は失わないので，以下では $\beta = 0$ を仮定する．

$$((X - \alpha, Y)/I)^2 = ((X - \alpha, Y)^2 + I)/I$$

であることに注意し，$\mathfrak{m}_\alpha = (X - \alpha, Y)$ とおけば，

$$(\mathfrak{m}_\alpha/I)/(\mathfrak{m}_\alpha/I)^2 = (\mathfrak{m}_\alpha/I)/((\mathfrak{m}_\alpha^2 + I)/I) = \mathfrak{m}_\alpha/(\mathfrak{m}_\alpha^2 + I)$$

となる．

$\alpha = 0$ とすれば，

$$\mathfrak{m}_0/(\mathfrak{m}_0^2 + I) = (X,Y)/((X^2, XY, Y^2) + (XY)) = (X,Y)/(X^2, XY, Y^2)$$

となるので，$\dim_K(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 2$ となる．これと次元理論の基本定理より，$\mathfrak{m}$ が単項生成でないことが従う．

$\alpha \neq 0$ とすれば，