問題 1.

問題 2.

$\widehat{M}$ を M の $\mathfrak{a}$ 進完備化と仮定する．

問題 3.　$E=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{a}^nM\subseteq M$ とする．このとき，Kull の定理より，ある $a\in\mathfrak{a}$ が存在して，E は $1+a$ で零化される．任意の極大イデアル $\mathfrak{m}\supseteq\mathfrak{a}$ について，$1+a\in A\setminus\mathfrak{m}$ となるので，$E_{\mathfrak{m}}=0$ が成り立つ．ゆえに，$E\subseteq\bigcap_{\mathfrak{m}\supseteq\mathfrak{a}}\ker(M\to M_{\mathfrak{m}})$ が成り立つ．

逆に，$N=\bigcap_{\mathfrak{m}\supseteq\mathfrak{a}}\ker(M\to M_{\mathfrak{m}})$ とすれば，任意の $\mathfrak{m}\supseteq\mathfrak{a}$ に対して，$N_{\mathfrak{m}}=0$ となるので，3.14 より，$N=\mathfrak{a}N$ が成り立つ．これより，任意の n に対して，$N=\mathfrak{a}^nN$ となるので，$N=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{a}^nN$ が成り立つ．さらに，$N\subseteq M$ であることから，

$$N=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{a}^nN\subseteq\bigcap_{\mathfrak{m}\supseteq\mathfrak{a}}\mathfrak{a}^nM$$

となるので，主張が成り立つ．

$\widehat{M}=0$ と仮定すれば，

$$M=\ker(M\to\widehat{M})=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{a}^nM$$

となるが，Kull の定理より，ある $a\in\mathfrak{a}$ が存在して，M は $1+a$ で零化されるので，任意の $\mathfrak{p}\in V(\mathfrak{a})$ について，$M_{\mathfrak{p}}=0$ が成り立つ．したがって，$\operatorname{supp}M\cap V(\mathfrak{a})=\emptyset$ である．

逆に，任意の素イデアル $\mathfrak{p}\in V(\mathfrak{a})$ について，$M_{\mathfrak{p}}=0$ と仮定する．このとき，特に

$$M=\bigcap_{\mathfrak{m}\supseteq\mathfrak{a}}\ker(M\to M_{\mathfrak{m}})=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{a}^nM$$

となる．ゆえに，任意の n について，$\mathfrak{a}M=M$ が成り立つ．これより，

$$\widehat{M}=\operatorname{colim}M/\mathfrak{a}^nM=\operatorname{colim}0=0$$

となる．

問題 4.　$x\in A$ が零因子でないことは，x をかける写像を考えたときに

$$0\longrightarrow A\longrightarrow A$$

が完全列であることと同値である．また，A が Notherian であることから，$\widehat{A}$ は平坦 A 代数なので，

$$0\longrightarrow\widehat{A}\otimes_A A=\widehat{A}\longrightarrow\widehat{A}\otimes_A A=\widehat{A}$$

が完全列となる．これより，$\widehat{x}$ をかける写像は単射なので，$\widehat{x}\in\widehat{A}$ は零因子である．

反例はわからん。

問題 5.

問題 6.　$\mathfrak{a} \subseteq J(A)$ とすれば, 任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$ が成り立つ. 任意の $x \in A \setminus \mathfrak{m}$ に対して,

$$x + a \subseteq x + \mathfrak{m} \subseteq A \setminus \mathfrak{m}$$

が成り立つので, $A \setminus \mathfrak{m}$ は開集合となる. これより, $\mathfrak{m}$ は閉集合である.

逆に $A \setminus \mathfrak{m}$ が開集合と仮定すれば, 任意の $x \in A \setminus \mathfrak{m}$ に対して, ある n が存在して, $x + \mathfrak{a} - n \subseteq A \setminus \mathfrak{m}$ となる. これより, 任意の $a \in \mathfrak{a}$ に対して, ある $m \in \mathfrak{m}$ が存在して,

$$x + a^n + m = 1$$

となる. ここで, $1 - x \notin \mathfrak{m}$ と仮定すれば, ある m' が存在して, $1 - x + m' = 1$ となるので, $x = m' \in \mathfrak{m}$ となり, 不合理. したがって, $1 - x \in \mathfrak{m}$ が成り立つ. これと, $x + a^n + m = 1$ より, $a^n \in \mathfrak{m}$ となり, $\mathfrak{m}$ は特に素イデアルであることから, $a \in \mathfrak{m}$ が成り立つ. ここで, a は任意だったので, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$ となり, さらに $\mathfrak{m}$ も任意だったので, $\mathfrak{a} \subseteq J(A)$ となる.

問題 7.　まず, $\widehat{A}$ が Zariski 環であることを仮定する. このとき, $\mathfrak{a} \subseteq J(A)$ なので, 任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$ が成り立つ. A が Noetherian なので, 有限生成な A-加群 M に対して, $M \to \widehat{M}$ が単射であることを示せばよい. これは

$$\ker(M \to \widehat{M}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n M = 0$$

が (10.18) から従うので, 成り立つ.

逆に, $M \to \widehat{M}$ が単射であると仮定すれば, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n M = 0$ となるが, $M = A/\mathfrak{m}$ としたとき, これは明らかに A-加群であって, 特に体である. $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{m}$ なる極大イデアル $\mathfrak{m}$ が存在すると仮定すれば, ある $a \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{m}$ が存在して, $a/1 \in A/\mathfrak{m}$ は零ではない. ゆえに, $\mathfrak{a}A/\mathfrak{m} = A/\mathfrak{m}$ が成り立つ. しかし, これは $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n M = 0$ に反するので, 任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$ が成り立ち, $\mathfrak{a} \subseteq J(A)$ が従う.

問題 8.　$z_i \in B$ なので, $I = (z_1, \dots, z_n)$ が唯一の極大イデアルであることを示せばよい. そのためには, 定数項が零でない B の元は単元であることを示せば十分である. まず, 1.5 より, $n = 1$ の場合に定数項が非零な $f \in C$ は単元をもつ. ゆえに, 帰納的にすべての n について, 定数項が非零な $f \in C$ は単元をもつ. これより, $f^{-1} \in C$ であるが, これが $f \in B$ のときに $f^{-1} \in B$ となることを示せば十分である. $f \in B$ より, ある 0 の近傍 U が存在して, f は U 上で収束する. ここで, 可算個以上の $x \in U$ について, $f(x) = 0$ となるなら, Bolzano-Weierstrass の定理と一致の定理より, U 上で $f = 0$ となり, 定数項が非零であることに反する. したがって, U において, f は有限個の零点をもち, $f(0) \neq 0$ なので, ある 0 の近傍 V が存在して, $1/f$ は V 上で収束するので, $f^{-1} \in B$ が成り立つ. 以上より, B は局所環である.

完備化は大小関係を保つ？

問題 9.　任意の k に対して, ある $g_k, h_k \in A[X]$ が存在して, $g_k h_k - f \in \mathfrak{m}^k[X]$ が成り立つことを示す.

$k=1$ に対しては仮定によって与えられている.

k の場合に存在すると仮定して, $k+1$ の場合に g_{k+1}, h_{k+1} が存在することを示す. $p : A[X] \to A/\mathfrak{m}[X]$ を射影とする. このとき, $p(g_k), p(h_k)$ が互いに素であることから, ある $\alpha_k, \beta_k \in A[X]$ が存在して,

$$p(\alpha_i)p(g_k) + p(\beta_i)p(h_k) = p(x)^i \in A/\mathfrak{m}[X]$$

が成り立つ. ゆえに,

$$r_i := \alpha_i g_k + \beta_i h_k - x^i \in \mathfrak{m}[X]$$

が成り立つ. これより, $m_i \in \mathfrak{m}^k$ として, $g_k h_k - f = \sum_i m_i x^i$ とおけば,

$$g_k h_k - f = \sum_i m_i x^i = \sum_i m_i(\alpha_i g_k + \beta_i h_k - r_i)$$

となる. ここで, $g_{k+1} = g_k - \sum_i m_i \beta_i$, $h_{k+1} = h_k - \sum_i m_i \alpha_i$ とすれば,

$$\begin{aligned} g_{k+1}h_{k+1} - f &= g_k h_k - \sum_i m_i(\alpha_i g_k + \beta_i h_k) + \left(\sum_i m_i \alpha_i\right)\left(\sum_i m_i \beta_i\right) - f \\ &= -\sum_i m_i r_i + \left(\sum_i m_i \alpha_i\right)\left(\sum_i m_i \beta_i\right) \in \mathfrak{m}^{k+1}[X] \end{aligned}$$

であって, $\sum_i m_i \alpha_i, \sum_i m_i \beta_i \in \mathfrak{m}^k[X]$ なので, g_{k+1}, h_{k+1} はそれぞれ g_k, h_k の原像である. 以上より, 任意の k に対して, $g_k h_k - f \in \mathfrak{m}^k[X]$ を満たす $g_k, h_k \in A[X]$ は存在する.

g_k, h_k の係数からなる列を考えれば, それらは $\mathfrak{m}^k$ の元なので, A での Cauchy 列である. したがって, $\widehat{A} = A$ に収束先をもつ. それらを係数として, $g, h \in A[X]$ を定義する. このとき, g, h はモニック多項式であって,

$$gh - f = 0$$

も成り立つ.

問題 10. (1) $\overline{g}(X) = X - \alpha, \overline{h}(X) = \overline{f}/\overline{g}$ とすれば, Hensel の補題より, ある $g, h \in A[X]$ が存在して, $f = gh$ となるので, 主張は成り立つ.

(2) (10.4) より, $\mathbb{Z}_7/7\mathbb{Z}_7 \cong \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ であり, $X^2 - 2 \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}[X]$ が単根をもてば, (1) から主張が従うが, これは $4, 3 \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ を根に持つので, これは満たされる.

(3) $A = k[\![X]\!], \mathfrak{m} = xA$ とする. のとき, $\overline{f} \in A/\mathfrak{m}[Y]$ は a_0 を単根としてもつので, (1) より, ある $y \in A$ が存在して, $f(X, y) = 0$ が成り立つ.

問題 11.

問題 12. $A \to A[X_1, \ldots, X_n] \to A[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ は前者が平坦であって, 後者は 1.5 を繰り返し使うことにより, 忠実平坦なので, 3.17 より, $A \to A[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$ は平坦射である.