問題 18. (i) \Rightarrow (ii) (3.6) より, すぐに従う.

(ii) \Rightarrow (iii) 任意の \mathfrak{m} に対して、ある $\mathfrak{n} \in \operatorname{Spec} B$ が存在して、 $f^* : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ とすれば、 $f^*(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$ となる。また、f が全射であることから、

$$\mathfrak{m}^e = f(\mathfrak{m})B = f(f^*(\mathfrak{m}))B = f(f^{-1}(\mathfrak{m}))B = \mathfrak{n}B = \mathfrak{n}$$

となるので、 $\mathfrak{m} \neq (1)$ が成り立つ.

(iii) \Rightarrow (iv) $x \in M \setminus \{0\} \$ とする. $M' = Ax \$ とすれば,

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M$$

が完全列であって、Bが平坦であることから、

$$0 \longrightarrow M' \otimes_A B \longrightarrow M \otimes_A B$$

も完全となる。 ゆえに、 $M'\otimes_A B\neq 0$ を示せば十分である。 $f:A\to Ax$ を自然なものとすれば、 $A/\ker f\cong M'$ となる。 ここで、 $\ker f\neq A$ より、ある $\mathfrak{m}\in \operatorname{Max} A$ が存在して、 $A\to B$ から $A/\mathfrak{m}\to B/\mathfrak{m}^e$ が導かれる。このとき、

$$M' \otimes_A B = A/\mathfrak{m} \otimes_A B = B/\mathfrak{m}B = B/\mathfrak{m}^e$$

となる. (iii) より、 $\mathfrak{m}^c \neq (1)$ なので、 $M_B' = M' \otimes_A B \neq 0$ が成り立つ.

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M_B$$

が完全になる. В が平坦であることから,

$$0 \longrightarrow M' \otimes_A B \longrightarrow M \otimes_A B \longrightarrow M_B \otimes_A B$$

は完全列である。さらに、 $M\otimes_A B$ は B-加群であって、射による元の対応も 2.13 の条件を満たすので、 $M_B\to M_B\otimes_A B$ は単射である。ゆえに、 $M'\otimes_A B=0$ となるが、(iv) より、 $M'=\ker f=0$ となるので、f は単射である。

(v) \Rightarrow (i) \mathfrak{a} を A の任意のイデアルとする. $M=A/\mathfrak{a}$ とすれば, (v) より, $A/\mathfrak{a}=M \to M \otimes_A B=B/\mathfrak{a}^e$ は単射なので, $\mathfrak{a}^{ec} \subseteq \mathfrak{a}$ が成り立つ. 逆は (1.17) より, 自明に成り立つ.

問題 19. $M \rightarrow N$ を単射とする. g は忠実平坦なので、

$$0 \longrightarrow M_B \longrightarrow M_B \otimes_B C \longrightarrow \operatorname{coker}(M_B \to M_B \otimes_B C) \longrightarrow 0$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

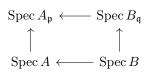
$$0 \longrightarrow N_B \longrightarrow N_B \otimes_B C \longrightarrow \operatorname{coker}(N_B \to N_B \otimes_B C) \longrightarrow 0$$

は各行が完全な可換図式である。また、 $M_B\otimes_B C=M\otimes_A C$ であることと、 $g\circ f$ が平坦であることから、 $M_B\otimes_B C\to N_B\otimes_B C$ は単射である。ゆえに、上の図式に対して蛇の補題を使えば、 $0\to M_B\to N_B$ は完全になり、これは f が平坦であることを示している。

問題 20. (3.10) より, $B_{\mathfrak{p}}$ は平坦 $A_{\mathfrak{p}}$ 加群であって, f から自然に環の射 $A_{\mathfrak{p}} \ni a/s \mapsto f(a)/s \in B_{\mathfrak{p}}$ が得られる. また, $B_{\mathfrak{q}}$ は $B_{\mathfrak{p}}$ の局所化なので, 3.3 より, 平坦 $A_{\mathfrak{p}}$ 加群であり, 自然な射 $B_{\mathfrak{p}} \ni b/s \mapsto b/s \in B_{\mathfrak{q}}$ が存在するので, 環の射 $A_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{q}}$ が得られる. この射により, 次の図式は可換図式になる.



したがって,



も可換であり、これより、 $\operatorname{Spec} A_{\mathfrak{p}} \to \operatorname{Spec} B_{\mathfrak{q}}$ が f^* の制限として得られる。あとは、 $g:A_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{q}}$ が忠実平坦であることを示せば十分である。 $A_{\mathfrak{p}}$ の極大イデアルは $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ であって、 $\mathfrak{p}=f^{-1}(\mathfrak{q})$ なので、 $g(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}})\subseteq\mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}$ が成り立つ。したがって、g は忠実平坦であり、3.16 より、 $\operatorname{Spec} B_{\mathfrak{q}} \to \operatorname{Spec} A_{\mathfrak{p}}$ は全射になる。