問題 18. (i) ⇒ (ii) (3.6) より, すぐに従う.

(ii) ⇒ (iii) 任意の $\mathfrak{m}$ に対して, ある $\mathfrak{n} \in \operatorname{Spec} B$ が存在して, $f^* : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ とすれば, $f^*(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$ となる. また, f が全射であることから,

$$\mathfrak{m}^e = f(\mathfrak{m})B = f(f^*(\mathfrak{m}))B = f(f^{-1}(\mathfrak{m}))B = \mathfrak{n}B = \mathfrak{n}$$

となるので, $\mathfrak{m} \neq (1)$ が成り立つ.

(iii) ⇒ (iv) $x \in M \setminus \{0\}$ とする. $M' = Ax$ とすれば,

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M$$

が完全列であって, B が平坦であることから,

$$0 \longrightarrow M' \otimes_A B \longrightarrow M \otimes_A B$$

も完全となる. ゆえに, $M' \otimes_A B \neq 0$ を示せば十分である. $f : A \to Ax$ を自然なものとすれば, $A/\ker f \cong M'$ となる. ここで, $\ker f \neq A$ より, ある $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ が存在して, $A \to B$ から $A/\mathfrak{m} \to B/\mathfrak{m}^e$ が導かれる. このとき,

$$M' \otimes_A B = A/\mathfrak{m} \otimes_A B = B/\mathfrak{m}B = B/\mathfrak{m}^e$$

となる. (iii) より, $\mathfrak{m}^c \neq (1)$ なので, $M'_B = M' \otimes_A B \neq 0$ が成り立つ.

(iv) ⇒ (v) $f : M \ni x \to 1 \otimes x \in M_B$ として, $M' := \ker f$ とすれば,

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M_B$$

が完全になる. B が平坦であることから,

$$0 \longrightarrow M' \otimes_A B \longrightarrow M \otimes_A B \longrightarrow M_B \otimes_A B$$

は完全列である. さらに, $M \otimes_A B$ は B-加群であって, 射による元の対応も 2.13 の条件を満たすので, $M_B \to M_B \otimes_A B$ は単射である. ゆえに, $M' \otimes_A B = 0$ となるが, (iv) より, $M' = \ker f = 0$ となるので, f は単射である.

(v) ⇒ (i) $\mathfrak{a}$ を A の任意のイデアルとする. $M = A/\mathfrak{a}$ とすれば, (v) より, $A/\mathfrak{a} = M \to M \otimes_A B = B/\mathfrak{a}^e$ は単射なので, $\mathfrak{a}^{ec} \subseteq \mathfrak{a}$ が成り立つ. 逆は (1.17) より, 自明に成り立つ.

問題 19. $M \to N$ を単射とする. g は忠実平坦なので,

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M_B & \longrightarrow & M_B \otimes_B C & \longrightarrow & \operatorname{coker}(M_B \to M_B \otimes_B C) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & N_B & \longrightarrow & N_B \otimes_B C & \longrightarrow & \operatorname{coker}(N_B \to N_B \otimes_B C) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

は各行が完全な可換図式である. また, $M_B \otimes_B C = M \otimes_A C$ であることと, $g \circ f$ が平坦であることから, $M_B \otimes_B C \to N_B \otimes_B C$ は単射である. ゆえに, 上の図式に対して蛇の補題を使えば, $0 \to M_B \to N_B$ は完全になり, これは f が平坦であることを示している.

問題 20. (3.10) より, $B_{\mathfrak{p}}$ は平坦 $A_{\mathfrak{p}}$ 加群であって, f から自然に環の射 $A_{\mathfrak{p}} \ni a/s \mapsto f(a)/s \in B_{\mathfrak{p}}$ が得られる. また, $B_{\mathfrak{q}}$ は $B_{\mathfrak{p}}$ の局所化なので, 3.3 より, 平坦 $A_{\mathfrak{p}}$ 加群であり, 自然な射 $B_{\mathfrak{p}} \ni b/s \mapsto b/s \in B_{\mathfrak{q}}$ が存在するので, 環の射 $A_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{q}}$ が得られる. この射により, 次の図式は可換図式になる.

$$\begin{array}{ccc} A_{\mathfrak{p}} & \longrightarrow & B_{\mathfrak{q}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & B \end{array}$$

したがって,

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} A_{\mathfrak{p}} & \longleftarrow & \operatorname{Spec} B_{\mathfrak{q}} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \operatorname{Spec} A & \longleftarrow & \operatorname{Spec} B \end{array}$$

も可換であり, これより, $\operatorname{Spec} A_{\mathfrak{p}} \to \operatorname{Spec} B_{\mathfrak{q}}$ が f^* の制限として得られる. あとは, $g : A_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{q}}$ が忠実平坦であることを示せば十分である. $A_{\mathfrak{p}}$ の極大イデアルは $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ であって, $\mathfrak{p} = f^{-1}(\mathfrak{q})$ なので, $g(\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}) \subseteq \mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}$ が成り立つ. したがって, g は忠実平坦であり,3.16 より, $\operatorname{Spec} B_{\mathfrak{q}} \to \operatorname{Spec} A_{\mathfrak{p}}$ は全射になる.