Problem 1. $V(J) \subseteq B$ を閉集合として, $f^*(V(J)) = V(f^{-1}(J))$ を示す．$\mathfrak{p} \in f^*(V(J))$ とすれば, ある $\mathfrak{q} \in V(J)$ が存在して,

$$f^*(\mathfrak{q}) = f^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$$

となる．今, $J \subseteq \mathfrak{q}$ より, $f^{-1}(J) \subseteq f^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$ なので, $\mathfrak{p} \in V(f^{-1}(J))$ が成り立つ．あとは $V(f^{-1}(J)) \subseteq f^*(V(J))$ を示せばよいが, これは f^* の制限によって $\operatorname{Spec} B/J \to \operatorname{Spec} A/f^{-1}(J)$ が全射であることと同値である．

まず, f が integral であることと (5.6) より, $\iota : f(A) \to B$ を包含射とすれば, B/J は $f(A)/\iota^{-1}(J)$ 上整である．また, $f(A)/\iota^{-1}(J) \subseteq B/J$ とみれば, (5.10) より,

$$\operatorname{Spec} B/J \to \operatorname{Spec} f(A)/\iota^{-1}(J)$$

は全射である．ここで, $f(A) \cong A/\ker f$ と $f^{-1}(\iota^{-1}(J)) = f^{-1}(J)$ を考えれば,

$$f(A)/\iota^{-1}(J) \cong (A/\ker f)/(f^{-1}(J)/\ker f) \cong A/f^{-1}(J)$$

となるので,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A/f^{-1}(J) \arrow[r] & B/J \end{tikzcd}$$

が可換であることから,

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} B/J \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec} A/f^{-1}(J) \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} B \arrow[r] & \operatorname{Spec} A \end{tikzcd}$$

も可換であることに注意すれば, f^* の制限によって $\operatorname{Spec} B/J \to \operatorname{Spec} A/f^{-1}(J)$ が全射であることが従う．

Problem 2. $\mathfrak{p} = \ker f$ とする．(5.10) より, ある $\mathfrak{q}$ が存在して, $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$ が成り立つ．このとき,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A/\mathfrak{p} \arrow[r, "\iota_0"] & B/\mathfrak{q} \end{tikzcd}$$

が可換であり, ι_0 が単射なので, $A/\mathfrak{p} \subseteq B/\mathfrak{q}$ としてよい．(5.6) より, これは整拡大である．また, $A/\mathfrak{p}, B/\mathfrak{q}$ がともに整域であることから, $K(A/\mathfrak{p}) \subseteq K(B/\mathfrak{q})$ は代数的拡大になる．さらに, $f(A) \cong A/\ker f$ であることから, $K(f(A)) \subseteq K(B/\mathfrak{q})$ とみれば, $K(f(A)) \subseteq \Omega$ でもあるので, $K(B) \subseteq \Omega$ とみなせる．

Problem 3. $D \subseteq B' \otimes_A C$ を $(f \otimes_A 1)(B \otimes C)$ 上整な元の集合とすれば, (5.3) より, $B' \otimes_A C$ の部分環である．また, B, C が A-代数であることと, f が代数準同型であることから, $x \otimes y \in B' \otimes_A C$ が $(f \otimes_A 1)(B \otimes C)$ 上整であることを示せば, 十分である．ここで, x は $f(B)$ 上整なので, $b^n = 1$ とすれば, ある $b_i \in B'$ が存在して,

$$\sum_{i=0}^{n} b_i x^i = 0$$

となる．このとき，

$$\sum_{i=0}^{n}(b_i \otimes y^{n-i})(x \otimes y) = \sum_{i=0}^{n}((b_i x) \otimes y^n) = \left(\sum_{i=0}^{n} b_i x^i\right) \otimes y^n = 0$$

となるので, $x \otimes y \in B' \otimes_A C$ は $B \otimes_A C$ 上整である．

Problem 4. $A = k[x^2-1], B = k[x], \mathfrak{n} = (x-1)B$ とする．このとき，

$$\mathfrak{m} = A \cap (x-1)B = (x^2-1)A$$

となることに注意する．

$1/(x+1)$ が $A_{\mathfrak{m}}$ 上整と仮定する．このとき, $a_0 = 1$ となるようなある $a_i \in A$ と $s_i \in A \setminus \mathfrak{m}$ が存在して，

$$\sum_{i=0}^{n} a_i s_i (x-1)^i = 0$$

が成り立つ．このとき, $s_0 \in (x-1) \cap A = \mathfrak{m}$ となるが, これは矛盾．

Problem 5. (1) x の B における逆元を $y \in B$ とする．B は A 上整なので, $a_i \in A$ が存在して，

$$y^n + \cdots + a_{n-1}y + a_n = 0$$

となるが, $n = 1$ のときには $y = a_1 \in A$ なので, 成り立つ．次に, $n-1$ のときには, 主張が成り立つと仮定する．

$$-xa_n = y^{n-1} + \cdots + a_{n-1}$$

なので, a_{n-1} を $-xa_n$ でおきなおせば，

$$y^{n-1} + \cdots + a_{n_1} = 0$$

となる．帰納法の仮定より, $y \in A$ が成り立つ．ゆえに, x は A においても単元．

(2) (5.10) より, 縮約による全射 $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ が存在するが, 特に縮約による全射 $\operatorname{Max} B \to \operatorname{Max} A$ も存在するので, 共通部分の逆像が逆像の共通部分であることから, 主張が成り立つ．