問題 1.

$$\begin{aligned} P \text{ は非特異点} &\iff f \notin \mathfrak{m}^2 \\ &\iff \dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = n-1 \\ &\iff A \text{ は正則局所環} \end{aligned}$$

となる. 実際, ある極大イデアル $\mathfrak{m}_0 \in \operatorname{Max} k[X_1,\dots,X_n]$ が存在して, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0/(f)$ と表せるが, このとき,

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = (\mathfrak{m}_0/(f))/(\mathfrak{m}_0/(f))^2 = (\mathfrak{m}_0/(f))/(\mathfrak{m}_0^2/\mathfrak{m}_0^2 \cap (f)) = \mathfrak{m}_0^2/\mathfrak{m}_0^2 + (f)$$

となる. Hilbert の零点定理より, $\mathfrak{m}_0 = (X_1,\dots,X_n)$ と仮定しても一般性は失わない. このとき, $P=0$ となるので, $f(0)=0$ であり, $f \in \mathfrak{m}_0$ であることに注意する. $A = k[X_1,\dots,X_n]/(f)$ とおく. (10.18) より,

$$n-1 = \dim k[X_1,\dots,X_n] - 1 = \dim A_{\mathfrak{m}} \leq \dim_k(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \dim_k \mathfrak{m}_0/\mathfrak{m}_0^2 + (f)$$

であって, $f \notin \mathfrak{m}_0^2$ ならば, $\dim_k \mathfrak{m}_0/\mathfrak{m}_0^2 + (f) < \dim_k \mathfrak{m}_0/\mathfrak{m}_0^2 = n$ となるので, $\dim_k \mathfrak{m}_0/\mathfrak{m}_0^2 + (f) \leq n-1$ が成り立つ. これより, $\dim_{\mathfrak{m}} A_{\mathfrak{m}} = \dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ となって, A は正則局所環となる.

逆に, $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = n-1$ とすれば, 同様にして, $f \notin \mathfrak{m}_0^2$ となるので, 従う.

問題 2. $\mathfrak{m}$ を $k[\![T_1,\dots,T_n]\!]$ の極大イデアルとする. このとき, $k[\![T_1,\dots,T_n]\!]/\mathfrak{m}^n \to A/(x_1,\dots,x_n)^n$ は単射であって, 7.16 より, ある m が存在して,

$$\mathfrak{m}^m \subseteq (x_1,\dots,x_n) \subseteq \mathfrak{m}$$

が成り立つ. これより, $\mathfrak{m}$ 進完備化と $(x_1,\dots,x_n)$ 進完備化は等しい. これと 10.2 より, $k[\![T_1,\dots,T_n]\!] \to A$ は単射である.

$\phi : k[\![T_1,\dots,T_n]\!] \to A$ とする.

$$\bigcap_i (x_1,\dots,x_n)^i = \phi^{-1}\left(\bigcap_n \mathfrak{m}\right) = 0$$

なので, A は $k[\![T_1,\dots,T_n]\!]$ の $\mathfrak{m}$ フィルター位相によってハウスドルフである. また, $G(A)$ は有限生成 $G(k[\![T_1,\dots,T_n]\!])$ 加群である. 実際, $k[\![T_1,\dots,T_n]\!]$ がネーターであることと, (10.22) より, $G_{\mathfrak{m}}(k[\![T_1,\dots,T_n]\!])$ は Notherian である. したがって, $G(A)$ は Notherian 加群なので, 特に有限生成 $G(k[\![T_1,\dots,T_n]\!])$ 加群である. これらと, 10.24 より, A は有限生成 $k[\![T_1,\dots,T_n]\!]$ 加群である.

問題 3.

問題 5. λ を加法関数とし, $\gamma(M)$ で (M) の $K(A)$ での像を表和すことにすれば, 7.26 より, ある $\lambda_0 : K(A) \to \mathbb{Z}$ が存在して, $\lambda(M) = \lambda_0(\gamma(M))$ が成り立つので, Poincare 級数は

$$P(M,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_0(\gamma(M_n))t^n$$

と表せる. これによって, (11.1) を書き換えればよい.

問題 6. $\mathfrak{p}$ を A における素イデアル鎖において最大の素イデアルとすれば, $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p} + (x)$ であって, $\mathfrak{p} + (x)$ は素イデアルである. 実際, 包含関係は明らかで, $A[X] \to A \to A/\mathfrak{p}$ を考えれば, $\mathfrak{p} + (x)$ は素イデアルなので, $1 + \dim A \leq \dim A[X]$ が成り立つ.

次に, $A \to A[X]$ を埋め込みとして, $\operatorname{Spec} A[X] \to SpecA$ を考える. $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ に対して, $f^{*-1}(\mathfrak{p}) \cong \operatorname{Spec} k(\mathfrak{p}) \otimes_A A[X] = \operatorname{Spec} k(\mathfrak{p})[X]$ であって, $k(\mathfrak{p})[X]$ は PID なので, $\dim k(\mathfrak{p})[X] = 1$ となる. したがって, $\dim A \leq 2 \dim A + 1$ が成り立つ.

問題 7. 11.7 より, $1 + \dim A \leq \dim A[X]$ が成り立つので, 逆を示せばよい. こんどやる