問題 2. (i) ⇒(ii) (8.1) と (8.3) より, A の素イデアルは有限個であり, すべて極大イデアルである．ゆえに, $\operatorname{Spec} A$ はすべての点が閉集合な有限集合なので, 離散空間である．

(ii) ⇒ (iii) 明らか.

(iii) ⇒ (i) $\operatorname{Spec} A$ の任意の一点集合は閉なので, A の任意の素イデアルは極大イデアルである．ゆえに, $\dim A = 0$ であり, A は Noetherian なので, (8.5) より, (i) が成り立つ.

Note . $\dim A = 0$ かつ Notherian でない例は $\mathbb{Q}[X_1, \ldots,]/(X_i X_j)$.

問題 3. (i) ⇒ (ii) (8.7) より, Artin 環は有限個の Artin 局所環 RA_i の直積で表せる．A が有限生成 k 代数であることから, A_i も有限生成 k 代数である．A_i の極大イデアルを $\mathfrak{m}_i$ とすれば, $A_i/\mathfrak{m}_i$ は有限生成 k 代数であって, さらに体なので, (5.24) より, $A_i/\mathfrak{m}_i$ は k の有限次拡大である．このとき, 準同型 $k \to A_i \to \operatorname{End}(A_i/\mathfrak{m}_i)$ が存在するので, k 線形空間であり, $A_i/\mathfrak{m}_i$ は有限次元 k 線形空間となる．さらに, A_i は特に Artin 環なので, 7.18 より, A_i 加群として有限の長さをもつ．つまり, 次のようなイデアル $I_{i,j} \subseteq A_i$ イデアルの列

$$0 = I_{i,0} \subseteq I_{i,1} \subseteq \cdots \subseteq I_{i,n_i} = A$$

であって, $I_{i,j+1}/I_{i,j} \cong A_i/\mathfrak{p}$ を満たすものが存在する．ただし, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A_i$ である．ここで, A_i が Artin 局所環であることから, $\operatorname{Spec} A_i = \{\mathfrak{m}_i\}$ となるので, $I_{i,j+1}/I_{i,j} = A_i/\mathfrak{m}_i$ である．また, $I_{i,j}$ は k 線形空間なので, 上の列は k 線形空間としての組成列である．したがって, A_i は k 線形空間としての組成列をもつ．これと, 6.10 より, A_i は有限次元 k 線形空間である．最後に, 有限次元 k 線形空間の直積は有限次元 k 線形空間なので, A も有限次元 k 線形空間である．

(ii) ⇒ (i) A は特に有限次元 k 線形空間なので, 特に k 線形空間として有限の長さをもつ．さらに, A のイデアルが特に k 線形空間であることに注意すれば, A は降鎖条件を満たすので, A は Artin 環である．

問題 4. (i) ⇒ (iii) B が有限生成 A 加群なので, $B = \sum_{i=1}^n A b_i$ と表せる．任意の $k \otimes b \in k(\mathfrak{p}) \otimes_A B$ に対して, ある $a_i \in A$ が存在して,

$$k \otimes b = k \otimes \sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{i=1}^n k \otimes a_i b_i = \sum_{i=1}^n a_i k \otimes b_i = \sum_{i=1}^n a_i k (1 \otimes b_i)$$

となるので, $k \otimes_A B$ は $k(\mathfrak{p})$ 加群として, $1 \otimes b_i$ で生成される．したがって, $k \otimes_A B$ は有限 $k(\mathfrak{p})$ 代数である．

(iii) ⇒ (ii) 8.3 より, $k(\mathfrak{p}) \otimes_A B$ は Artin 環である．また, 8.2 より, $\operatorname{Spec}(k(\mathfrak{p}) \otimes_A B)$ は離散空間であり, 3.21 より, ${f^*}^{-1}(\mathfrak{p}) = \operatorname{Spec}(k(\mathfrak{p}) \otimes_A B)$ となるので, 任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ に対して, f^* の $\mathfrak{p}$ 上のファイバーは $\operatorname{Spec} B$ の離散部分空間である．

(iii) ⇒ (iv) (iii) ⇒ (ii) と全く同様に成り立つ.

(ii) ⇒ (iii) $k(\mathfrak{p}) \otimes_A B$ は有限生成 $k(\mathfrak{p})$ 代数である．実際, B が有限生成 A 代数であることから, 全射 $A[X_1, \ldots, X_n] \to B$ が存在し, テンソル積は全射を保存するので,

$$k(\mathfrak{p})[X_1, \ldots, X_n] = k(\mathfrak{p}) \otimes_A (A[X_1, \ldots, X_n]) \longrightarrow k(\mathfrak{p}) \otimes_A B$$

なる全射が存在する．また, $k(\mathfrak{p})$ が Notherian なので, (7.7) より, $B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ も Notherian になり, 8.2 より, $k(\mathfrak{p}) \otimes_A B$ は Artin 環である．さらに, 8.3 より, $k(\mathfrak{p}) \otimes_A B$ は有限 $k(\mathfrak{p})$ は有限 $k(\mathfrak{p})$ 代数である．
$A = \mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}[x_1, \ldots]$ (x_i は代数的数) とすれば, 反例になる．

問題 5.　有界の定義が謎ですねえ。

問題 6.　局所化と剰余について, Noether 性は保存され, イデアルの対応関係が存在することと, 準素イデアルの準同型による逆像は準素イデアルなので, $B = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{q}A_\mathfrak{p}$ について考える．$\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec} B$ とすれば, A において,

$$\mathfrak{p}' = \sqrt{\mathfrak{p}'} \supseteq \sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}$$

が成り立つ．これを B において考えれば, $\operatorname{Spec} B = \{\mathfrak{p}\}$ が成り立つ．ゆえに, $\dim B = 0$ であり, 特に B は Artin 環である．さらに, 一般の真なるイデアル $I \subsetneq B$ についても, 同様にして, $\sqrt{I} = \mathfrak{p}$ が成り立つ．つまり, B の任意のイデアルは $\mathfrak{p}$-準素イデアルである．B が Artin であることから, B の組成列は有限である．これと, 準素イデアルの対応関係が存在することから, $\mathfrak{q}$ から $\mathfrak{p}$ への準素イデアルの鎖は有限かつ有界である．

Note .　$A = k[X_1, \ldots,]$ とすれば,

$$0 \subsetneq (X_1) \subsetneq (X_1, X_2) \subsetneq \cdots$$

となるので, 長さが無限の素イデアルの列をもつ．