**問題 1.** $S^{-1}A$ は Noetherian 整域であり,

$$\dim S^{-1}A \leq \dim A = 1$$

なので, $\dim S^{-1}A = 0$ または $\dim S^{-1}A = 1$ である.

(1) $\dim S^{-1}A = 0$ のとき, $S^{-1}A$ は体であって, $A \subseteq S^{-1}A \subseteq K$ なので, $K$ が $A$ を含む最小の体であることから, $S^{-1}A = K$ である.

(2) $\dim S^{-1}A = 1$ のとき, $S^{-1}A$ が整閉であることを示せば十分である. ここで, $A$ は整閉なので, (5.12) と $S^{-1}A$ の商体が $K$ であることから, $S^{-1}A$ は整閉である.

以上より, $S^{-1}A$ はデデキント整域または $A$ の商体である.

$H_A = H$, $H_{S^1A} = H'$ とする. まず, $I_A \to I_{S^{-1}A}$ が全射であることを示す. $M_{S^{-1}A} \in I_{S^{-1}A}$ について, $M_{S^1A}$ は $S^{-1}A$ であって, $A$ は特に Noetherian なので, $S^{-1}A$ も Noetherian であり, ゆえに, $M_{S^{-1}A}$ は有限生成である. したがって, ある $m_i/s_i \in M_{S^{-1}A}$ が存在して,

$$M_{S^{-1}A} = \sum_{i=1}^{n} (S^{-1}A)(m_i/s_i)$$

と表せる. ここで, $(S^{-1}A)(m_i/s_i) = (S^{-1}A)(m_i/1)$ であることに注意する. これは $Am_i \in I_A$ の拡大である. これより, $M = \sum_{i=1}^{n} Am_i \in I_A$ の拡大は $M_{S^{-1}A} \in I_{S^{-1}A}$ となる. したがって, イデアルの拡大によって, $I_A \to I_{S^{-1}A}$ は全射である. さらに, $N, M \in I_A$ に対して,

$$S^{-1}(NM) = (S^{-1}N)(S^{-1}M)$$

も成り立つ. 以上より, イデアルの拡大によって, 全射群準同型 $I_A \to I_{S^{-1}A}$ が存在する. また, $I_A$ における単項分数イデアルはイデアルの拡大によって, $I_{S^{-1}A}$ の単項分数イデアルに移るので, 全射群準同型 $H_A \to H_{S^{-1}A}$ が誘導される.

**問題 2.** $c(fg) \subseteq c(f)c(g)$ は常に成り立つので, 逆を示せばよい. つまり, 任意の $\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A$ について, $c(fg)_{\mathfrak{m}} = c(f)_{\mathfrak{m}} c(g)_{\mathfrak{m}}$ を示せばよい.

$$f(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \qquad g(X) = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i$$

とする. $A_{\mathfrak{m}}$ は次数 1 の Noetherian 局所整域かつ, DVR なので, (9.2) より, ある $x \in A_{\mathfrak{m}}$ が存在して, すべての $a_i, b_j$ について, ある $k_{f,i}, k_{g,j}$ が存在して, $(a_i)_{\mathfrak{m}} = (x^{k_{f,i}})$, $(b_j)_{\mathfrak{m}} = (x^{k_{g,j}})$ が成り立つ. ゆえに, $k_f = \min_i k_{f,i}$, $k_g = \min_j k_{g,j}$ とすれば,

$$c(f)_{\mathfrak{m}} = (a_0, \ldots, a_n)_{\mathfrak{m}} = (x^{k_f})$$
$$c(g)_{\mathfrak{m}} = (b_0, \ldots, b_m)_{\mathfrak{m}} = (x^{k_g})$$

が成り立つ. このとき,

$$(a_i b_j)_{\mathfrak{m}} = (a_i)_{\mathfrak{m}} (b_j)_{\mathfrak{m}} = (x^{k_{f,i}+k_{g,j}})$$

となるので,

$$c(fg)_{\mathfrak{f}} = (x^{\min_{i,j} k_{f,i}, k_{g,j}}) = (x^{k_f + k_g}) = c(f)_{\mathfrak{m}} c(g)_{\mathfrak{f}}$$

が従う. これより, $c(fg) = c(f)c(g)$ が示された.

**Note .**　$A=(k[X,Y])[Z]$ とし, $f=X$, $g=Y$ と定めれば, $c(fg)=(XY)\neq(X)(Y)=c(f)c(g)$ となる.

**問題 3.**　$A$ を体ではない付値環とする.

Noetherian ⇒ DVR　$A$ が Noetherian であると仮定する. 5.28 より, $A$ のイデアルは全順序であることと, Noetherian 環のイデアルは有限生成であることから, $A$ は PID である. 付値環が局所環であることに注意すれば, $A$ は Noetherian 局所整域なので, $\dim A=1$ を示せば, 9.2 より, $A$ が離散付値環であることが従う.

$\mathfrak{m}$ を $A$ の極大イデアルとする. $\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}A$ を $\mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{m}$ となるようなものとしてとる. $A$ が PID であることから, $\mathfrak{p}=(p),\mathfrak{m}=(m)$ となり, したがって, ある $a\in A$ が存在して, $p=am$ と表せる. このとき, $am\in\mathfrak{p}$ なので, $a\in\mathfrak{p}$ または $m\in\mathfrak{p}$ が成り立つ. 後者の場合は $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}$ となる. 全射の場合, ある $b\in A$ が存在して, $a=pb$ となるので,

$$p=am=pbm$$

より, $p(1-bm)=0$ が成り立つ. しかし, $m$ は単元でないので, $p=0$. つまり, $\mathfrak{p}=0$ となるので, $\dim A=1$ となる. したがって, 9.2 より, $A$ は離散付値環である.

DVR ⇒ Noetherian　$\mathfrak{a}$ を $A$ の任意のイデアルとする. $v(0)=\infty$ としておくと, 任意の $x\in A$ に対して, $v(x)\leq 0$ となるので, $k=\min\{v(x)\mid x\in\mathfrak{a}\}$ が存在する. $v(x_k)=k$ として, $\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{a}_k$ と表す. このとき, 任意の $x\in\mathfrak{a}_k$ に対して, $v(x)-v(x_k)\leq 0$ なので, $xx_k^{-1}\in A$ が成り立つ. ゆえに, $x=xx_k^{-1}x_k\in(x_k)$ となるので, $\mathfrak{a}_k\subseteq(x_k)$. 逆は明らかに成り立つので, $A$ は PID であり, 特に $A$ は Noetherian である.

**Note .**　$k[X,Y]$ は次元が 2 なので, DVR ではないが, Notherian である.

**問題 4.**　$\mathfrak{a}$ を $A$ のイデアルとする. $a\in\mathfrak{a}$ に対して, ある $k$ が存在して, $\mathfrak{m}^k \not subseteq(a)$ かつ $\mathfrak{m}^{k+1}\subseteq(a)$ が成り立つ. $m^{k+1}=ra$ とする. $r$ が単元でないと仮定すると, $A$ が局所環であることから, $r\in\mathfrak{m}$ であり, ある $l\in A$ が存在して, $r=lm$ となる. このとき,

$$m^{k+1}=ra=lma$$

より, $m(m^k-la)=0$ となる. $A$ が整域であることから, $m^k=la$ が成り立つが, これは $\mathfrak{m}^k \not subseteq(a)$ に反する. したがって, $r$ は単元であり, $(a)=(m^{k+1})$ が成り立つ. これより, $A$ は Noetherian である.

次に, $\mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{m}$ とすれば, 任意の $p\in\mathfrak{p}$ に対して, ある $q$ が存在して, $qm=p\in\mathfrak{p}$ となる. ここで, $m\in\mathfrak{p}$ ならば, $\mathfrak{p}=\mathfrak{m}$ であり, $q\in\mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{m}$ ならば, ある $r$ が存在して, $rm=q$ となる. このとき,

$$p=qm=rm^2=\cdots$$

と続けることができるので, $q\in\bigcap_k\mathfrak{m}^k=0$ となる. したがって, $\dim A=1$ が成り立つ.

これらと (9.2) より, $A$ は DVR である.

**問題 5.**　3.13 と 7.17 より, 任意の極大イデアル $\mathfrak{A}$ に対して, $M_{\mathfrak{m}}$ が自由加群であることと, ねじれなしなことが同値であることを示せばよいが, $A$ がデデキント整域であることから, $A_{\mathfrak{m}}$ は DVR であり, 特に PID なので, これは成り立つ.

**Note .**　平坦ならばねじれなしは常に成り立つ．$k[X,Y]$ 上の加群 $(X,Y)$ はねじれなしであるが, 平坦ではない．実際, $\phi : k[X,Y]/(X) \to k[X,Y]/(X)$ を $Y$ をかける写像とすれば, これは明らかに単射であり, $k[X,Y]/(X) \otimes (X,Y) = (X,Y)/X(X,Y)$ 中で $1 \otimes X$ は非零であるが, $(\phi \otimes 1)(1 \otimes X) = Y \otimes X$ となり, これは $(X,Y)/X(X,Y)$ において, 零になる．つまり, 単射を保存しないので, 特に $(X,Y)$ は平坦ではない．

**問題 6.**　任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \setminus \{0\}$ について, $A_\mathfrak{p}$ は DVR なので, 特に PID である．さらに, $\dim A_\mathfrak{p} = 1$ であって, Notherian 局所整域なので, (9.2) より, すべての非自明なイデアルは $\mathfrak{p}$ のべきで表せる．ゆえに, $M_\mathfrak{p} \neq 0$ ならば, PID 上の有限生成加群の構造定理より, ある $k_i$ が存在して,

$$M_\mathfrak{p} = \bigoplus_{i=1}^{n} A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^{k_i} A_\mathfrak{p}$$

が成り立つ．ここで, $T(M) = M$ より, $k_i \geq 1$ であることに注意する．素イデアル $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A$ を $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}^{k_i}$ を満たすものと仮定すれば, $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ となるので, $A$ がデデキント整域であることから, $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$ が成り立つ．したがって, $A/\mathfrak{p}^{k_i}$ は $\mathfrak{p}$ を極大イデアルとする局所環である．これより,

$$M_\mathfrak{p} = \bigoplus_{i=1}^{n} A/\mathfrak{p}^{k_i}$$

となる．

ここで, $\operatorname{Ann} M \not\subseteq \mathfrak{p}$ ならば, $M_\mathfrak{p} = 0$ であることに注意する．$\operatorname{Ann} M \subseteq \mathfrak{p}$ なる素イデアルが有限個であることを示す．$M$ が有限生成であることから, $M = \sum_{i=1}^{k} Am_i$ と表せるが, $T(M) = M$ より, $\operatorname{Ann}(m_i) \neq 0$ である．したがって, (9.4) より, $\operatorname{Ann}(m_i) = \prod_i \mathfrak{p}$ と表せる．ここで,

$$\operatorname{Ann} M = \sum \operatorname{Ann}(m_i) = \sum \prod \mathfrak{p}$$

であって, ここに現れる $\mathfrak{p}$ は零ではないので, $\operatorname{Ann} M \neq 0$ となる．したがって, $\dim A/\operatorname{Ann} M = 0$ である．$A/\operatorname{Ann} M$ は Notherian なので, (8.5) より, Artin 環である．ゆえに, (8.3) より, $A/\operatorname{Ann} M$ の極大イデアルは有限個となり, $\operatorname{Ann} M$ を含む素イデアルは有限個であることが示された．

最後に, $M \to \bigoplus_{\mathfrak{p} \neq 0} M_\mathfrak{p}$ が同型であることを示す．これは局所化によって, 各 $\mathfrak{p}$ について同型であることがわかるので, すぐに同型であることが従う．

**問題 7.**　$\mathfrak{a} \subseteq A$ をイデアルとする．$\mathfrak{a}$ が準素イデアルならば, $A$ がデデキント整域であることから, 素イデアルのべきで表せて, $A/\mathfrak{a} = A/\mathfrak{p}^n = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n A_\mathfrak{p}$ なので, この場合は DVR なので, 特に PID となる．

次に, $\mathfrak{a}$ が準素イデアルでない場合を考える．$A$ はデデキント整域なので, (9.4) より, $\mathfrak{a} = \prod_i \mathfrak{p}_i$ となり,

$$A/\mathfrak{a} = A/\prod_i \mathfrak{p}_i = \prod_i A/\mathfrak{p}_i$$

となる．ここで, PID の直積は PID なので, 主張は成り立つ．

最後に, $A$ のイデアルは高々二つの元によって生成されることを示す．$\mathfrak{b} \subseteq A$ が単項イデアルでないと仮定する．このとき, ある $x \in \mathfrak{b} \setminus \{0\}$ が存在して, $\mathfrak{b} \neq Ax$ となる．しかし, $(x)/\mathfrak{b}$ は $A/\mathfrak{b}$ のイデアルなので, 単項生成．したがって, その生成元の代表元と $x$ は $A$ において, $\mathfrak{b}$ を生成する．

**Note .** $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ はデデキント整域であり, $(2, 1+\sqrt{5})$ は単項イデアルではないので, PID ではない.

**問題 8.** 両方の式について, 証明は全く同じなので, 上の方について示す. $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ を任意にとる. このとき, $(\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}))_{\mathfrak{p}} = ((\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}))_{\mathfrak{p}}$ が成り立つことを示せば十分である. $A$ がデデキント整域であることから, $A_{\mathfrak{p}}$ は DVR である. ゆえに, ある $x \in A_{\mathfrak{p}}$ が存在して, 任意の $A_{\mathfrak{p}}$ のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して, ある $n$ が存在して, $\mathfrak{a} = (x^n)$ が成り立つ. また, 局所化と和, 局所化と共通部分はそれぞれ可換なので,

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}))_{\mathfrak{p}} &= (x^{\max(n_a, \min(n_b, n_c))}) \\
&= (x^{\min(\max(n_1, n_b), \min(n_a, n_c))}) \\
&= ((x^{n_a}) \cap (x^{n_b})) + ((x^{n_a}) \cap (x^{n_c})) \\
&= ((\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}))_{\mathfrak{p}}
\end{aligned}
$$

となり, 等式が従う.

**問題 9.** 任意の $\mathfrak{p}$ に対して,

$$
A_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{a}_i A_{\mathfrak{p}} \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} A_{\mathfrak{p}}/(\mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j) A_{\mathfrak{p}}
$$

が成り立つことを示せば十分である. ここで, $A_{\mathfrak{p}}$ は特に VR なので, $i < j$ ならば $\mathfrak{a}_i \supseteq \mathfrak{a}_j$ としてよい. このとき, $(x_1, \ldots, x_n)$ を $i < j$ のときに $x_i - x_j \in \mathfrak{a}_i + \mathfrak{a}_j = \mathfrak{a}_i$ なるものとすれば, $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{a}_i A_{\mathfrak{p}}$ において, $x_i = x_n$ なので,

$$
x_n \longmapsto (x_1, \ldots, x_n)
$$

が成り立つ.