(i) $b=1$ より, 内部自己同型を考えれば, G は abel 群である. ゆえに, 有限 abel 群の構造定理より,

$$G=\prod_i \mathbb{Z}/p_i^{n_i}\mathbb{Z}$$

と表せる. このとき, 任意の i について,

$$|\operatorname{Aut}(G)|=\left|\operatorname{Aut}\left(\prod_i \mathbb{Z}/p_i^{n_i}\mathbb{Z}\right)\right|\geq |\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/p_i^{n_i}\mathbb{Z})|$$

となる. ここで, $\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}$ は $\mathbb{Z}/p_i^{n_i}\mathbb{Z}$ の部分群とみなせるので, 任意の n について, $|\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})|=\left|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\right|$ であることに注意すれば,

$$1\leq|\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z})|=\left|(\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z})^\times\right|\leq\left|(\mathbb{Z}/p_i^{n_i}\mathbb{Z})^\times\right|=|\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/p_i^{n_i}\mathbb{Z})|\leq|\operatorname{Aut}(G)|=1$$

となる. したがって, $p_i^{n_i}=1,2$ である.

ある i が存在して, $p_i^{n_i}=2$ とする. このとき, ある m が存在して, $G=(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m$ となるが, $m\geq 2$ のときには位置を入れ替えるような自己同型が存在してしまうので, $m=1$. したがって, $G=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である.

また, 任意の i について, $p_i^{n_i}=1$ のときは, G は自明群である.

(ii) $\phi: G\to\operatorname{Aut}G$ を内部自己同型を与える射とすれば,

$$|G/\ker\phi|\cong|\operatorname{Im}\phi|\leq|\operatorname{Aut}(G)|=2$$

となるので, $|G/\ker\phi|=1,2$ である. ここで, $|G|/|\phi|=|G/\ker\phi|$ であって, $|G|$ が奇数なので, $|G/\ker\phi|=1$ であり, $\ker\phi=Z(G)$ なので, G は abel 群である.

有限アーベル群の構造定理より,

$$G=\prod_i \mathbb{Z}/p_i^{n_i}\mathbb{Z}$$

と表せるが,

$$2=|\operatorname{Aut}(G)|=\left|\operatorname{Aut}\left(\prod_i \mathbb{Z}/p_i^{n_i}\mathbb{Z}\right)\right|\geq\prod_i|\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/p_i^{n_i}\mathbb{Z})|$$

なので, ただ一つの j を除いて, $|\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/p_i^{n_i}\mathbb{Z})|=1$ となる. ここで, $|G|$ が奇数であることと, (i) より, $p_i^{n_i}=1$ となる. ゆえに, $G=\mathbb{Z}/p_j^{n_j}\mathbb{Z}$ が従う. さらに,

$$\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/p_j\mathbb{Z})\subseteq\operatorname{Aut}\left(\mathbb{Z}/p_j^{n_j}\mathbb{Z}\right)=\operatorname{Aut}(G)$$

であって, $|\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/p_j\mathbb{Z})|=p_j-1$ なので, $p_j-1\leq|\operatorname{Aut}(G)|=2$ が成り立つ. 今, p_j は素数なので, $p_j=3$ であり,

$$2=|\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}/p_j\mathbb{Z})|\leq\left|\operatorname{Aut}\left(\mathbb{Z}/p_j^{n_j}\mathbb{Z}\right)\right|=|\operatorname{Aut}(G)|=2$$

なので, $G=\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ である.