

1 Εύρεση ρίζας της $f(x)$

Οι μέθοδοι παράγουν μια ακολουθία προσεγγίσεων x_0, x_1, \dots

1.1 Κριτήρια Σύγκλισης

Ένα από τα ακόλουθα αρκεί:

- Το μέγιστο σφάλμα της μεθόδου, ε_i , είναι μικρότερο από το επιθυμητό, $|\varepsilon_i| < \varepsilon$.
- Η απόλυτη τιμή της συνάρτησης είναι “μικρή”: $|f(x_i)| < \varepsilon$.
- Η *σχετική* ή *απόλυτη* βελτίωση στην προσεγγιστική τιμή είναι “μικρή”:

$$\left| \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i} \right| < \varepsilon \text{ αν } x_i \neq 0$$

ή

$$|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon \text{ αν } x_i \approx 0.$$

Σε αυτή την περίπτωση πρέπει να ελέγχουμε αν τελικά η τιμή x_i ικανοποιεί την $f(x_i) \approx 0$.

1.2 Μέθοδος Müller

1. Επιλέγουμε τρεις διαφορετικές τιμές x_0, x_1, x_2 στην περιοχή της αναζητούμενης ρίζας. Τα σημεία $(x_i, f(x_i))$ δεν πρέπει να ανήκουν στην ίδια ευθεία.
2. Ορίζουμε τις ποσότητες

$$w_0 = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \quad w_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$
$$a = \frac{w_1 - w_0}{x_1 - x_0}, \quad b = w_0 + a(x_2 - x_0), \quad c = f(x_2).$$

3. Η επόμενη προσέγγιση της ρίζας δίνεται από τη σχέση

$$x_3 = x_2 - \frac{2c}{d},$$

όπου d ο, εν γένει *μιγαδικός*, αριθμός που έχει το μεγαλύτερο μέτρο μεταξύ των $b + \sqrt{b^2 - 4ac}$, $b - \sqrt{b^2 - 4ac}$.

4. Αν η νέα προσέγγιση είναι ικανοποιητική, πηγαίνουμε στο βήμα 6.
5. Θέτουμε $x_0 \leftarrow x_1$, $x_1 \leftarrow x_2$, $x_2 \leftarrow x_3$. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία από το βήμα 2.
6. Τέλος.

Προσέξτε ότι όλες οι μεταβλητές είναι μιγαδικές.

1.3 Μέθοδος σταθερού σημείου, $x = g(x)$

Μετασχηματίζουμε την εξίσωση $f(x) = 0$ σε $x = g(x)$. Κατόπιν,

1. Θέτουμε στο x την αρχική προσέγγιση του σταθερού σημείου.
2. Ελέγχουμε αν η προσέγγιση είναι ικανοποιητική με τουλάχιστον ένα από τα κριτήρια (με ε κατάλληλα μικρή τιμή)

$$\begin{aligned} |x - g(x)| &< \varepsilon, \\ \left| \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i} \right| &< \varepsilon, \\ |x_i - x_{i-1}| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Αν ναι, πηγαίνουμε στο βήμα 4.

3. Θέτουμε $x \leftarrow g(x)$ και επαναλαμβάνουμε από το βήμα 2.
4. Τέλος.

1.4 Μέθοδος Newton–Raphson

Υπολογίζουμε αναλυτικά την $f'(x)$ σε ξεχωριστή συνάρτηση στο πρόγραμμα. Κατόπιν

1. Θέτουμε στο x την αρχική προσέγγισή μας για τη ρίζα.
2. Ελέγχουμε τα κριτήρια σύγκλισης. Αν το x είναι ικανοποιητική προσέγγιση της ρίζας πηγαίνουμε στο βήμα 4.
3. Θέτουμε

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

και επαναλαμβάνουμε από το βήμα 3.

4. Τέλος.