Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση

Σταμάτης Σταματιάδης
stamatis@materials.uoc.gr

Τμήμα Επιστήμης και Τεχνολογίας Υλικών,
Πανεπιστήμιο Κρήτης

ΔΕΥΤΕΡΗ ΔΙΑΛΕΞΗ

Υπολογισμός ρίζας συνάρτησης: Εισαγωγή

Επιθυμούμε να βρούμε μία ή περισσότερες λύσεις, τα σημεία $x = \bar{x}$, που ικανοποιούν τη σχέση

$$f(x) = 0 \; , \qquad x \in \mathcal{R} \; .$$

Σε αυτό το πρόβλημα ανάγονται παρόμοια προβλήματα:

- εύρεση σημείου στο οποίο μια συνάρτηση έχει συγκεκριμένη τιμή (ή, ισοδύναμα, ο υπολογισμός αντίστροφης συνάρτησης):

$$g(x) = c \; , \; \text{με } c \neq 0 \; .$$

  Αν θέσουμε $f(x) = g(x) - c$ τότε έχουμε να λύσουμε το $f(x) = 0$ ώστε να βρούμε το $\bar{x} = g^{-1}(c)$.

- εύρεση σημείου τομής δύο συναρτήσεων:

$$g(x) = h(x) \; .$$

  Αν θέσουμε $f(x) = g(x) - h(x)$ τότε έχουμε να λύσουμε το $f(x) = 0$.

Γενικά χαρακτηριστικά αριθμητικών μεθόδων

Αναλυτικοί τύποι για την εύρεση ρίζας, αν και όχι πάντα εύχρηστοι, υπάρχουν για διάφορες συναρτήσεις, π.χ. τριγωνομετρικές, πολυώνυμα έως και 4^{ου} βαθμού, κ.α. Γενικά όμως *η εύρεση ριζών, του πλήθους τους ή και η απόδειξη της ύπαρξής τους* δεν είναι δυνατόν να γίνει με αναλυτικούς τύπους.

Αναλυτικοί τύποι για την εύρεση ρίζας, αν και όχι πάντα εύχρηστοι, υπάρχουν για διάφορες συναρτήσεις, π.χ. τριγωνομετρικές, πολυώνυμα έως και $4^{ου}$ βαθμού, κ.α. Γενικά όμως *η εύρεση ριζών, του πλήθους τους ή και η απόδειξη της ύπαρξής τους* δεν είναι δυνατόν να γίνει με αναλυτικούς τύπους.

Η αριθμητική επίλυση της εξίσωσης $f(x) = 0$,

- παράγει μια ακολουθία τιμών $x_0, x_1, \dots, x_n$, που (αν υπάρχει ρίζα) συγκλίνει για $n \to \infty$ σε μία ρίζα $\bar{x}$.
- δίνει μια εκτίμηση του εύρους της περιοχής γύρω από το x_i στην οποία βρίσκεται η ρίζα. Παράγεται μια ακολουθία ε_1, ε_2,..., ε_n για την οποία ισχύει

$$x_i - \varepsilon_i \leq \bar{x} \leq x_i + \varepsilon_i \Leftrightarrow |x_i - \bar{x}| \leq \varepsilon_i \ , \ \text{με} \ \varepsilon_i < \varepsilon_{i-1} \ , \qquad i = 0, 1, 2, \dots .$$

Στην πράξη, η διαδικασία επίλυσης δεν επαναλαμβάνεται επ' άπειρον αλλά διακόπτεται όταν η προσεγγιστική τιμή ή/και το εύρος είναι «ικανοποιητικά».

Κριτήρια σύγκλισης

Η διαδικασία που παράγει τις διαδοχικές προσεγγίσεις x_i και τα πλάτη ε_i διακόπτεται όταν ικανοποιούνται μία ή περισσότερες από τις ακόλουθες γενικές συνθήκες (με ε συμβολίζουμε την επιθυμητή ακρίβεια):

- Το μέγιστο σφάλμα της μεθόδου, ε_i, είναι μικρότερο από το επιθυμητό, $|\varepsilon_i| < \varepsilon$.
- Η απόλυτη τιμή της συνάρτησης είναι «μικρή»: $|f(x_i)| < \varepsilon$.
- Η *σχετική* ή *απόλυτη* βελτίωση στην προσεγγιστική τιμή είναι «μικρή»:

  $$\left|\frac{x_i - x_{i-1}}{x_i}\right| < \varepsilon \text{ αν } x_i \neq 0$$

  ή

  $$|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon \text{ αν } x_i \approx 0 \ .$$

  Σε αυτή την περίπτωση πρέπει να ελέγχουμε αν τελικά η τιμή x_i ικανοποιεί την $f(x_i) \approx 0$.

Κριτήρια σύγκλισης

Η διαδικασία που παράγει τις διαδοχικές προσεγγίσεις x_i και τα πλάτη ε_i διακόπτεται όταν ικανοποιούνται μία ή περισσότερες από τις ακόλουθες γενικές συνθήκες (με ε συμβολίζουμε την επιθυμητή ακρίβεια):

- Το μέγιστο σφάλμα της μεθόδου, ε_i, είναι μικρότερο από το επιθυμητό, $|\varepsilon_i| < \varepsilon$.
- Η απόλυτη τιμή της συνάρτησης είναι «μικρή»: $|f(x_i)| < \varepsilon$.
- Η *σχετική* ή *απόλυτη* βελτίωση στην προσεγγιστική τιμή είναι «μικρή»:

  $$\left|\frac{x_i - x_{i-1}}{x_i}\right| < \varepsilon \text{ αν } x_i \neq 0$$

  ή

  $$|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon \text{ αν } x_i \approx 0\ .$$

  Σε αυτή την περίπτωση πρέπει να ελέγχουμε αν τελικά η τιμή x_i ικανοποιεί την $f(x_i) \approx 0$.

Δεν πρέπει ποτέ να ελέγχουμε αν $f(x_i) = 0$.

Ταχύτητα και τάξη σύγκλισης

Μια μέθοδος επίλυσης της εξίσωσης $f(x) = 0$ χαρακτηρίζεται ως τάξης α όσον αφορά στη σύγκλιση, αν υπάρχουν $\alpha, \lambda > 0$ ώστε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \bar{x}|}{|x_n - \bar{x}|^\alpha} \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{\varepsilon_{n+1}}{{\varepsilon_n}^\alpha} = \lambda \, .$$

Ο αριθμός λ αποτελεί την *ταχύτητα σύγκλισης*.

Στην πράξη, επιδιώκουμε να γράψουμε το ε_{n+1} για «μεγάλα» n στη μορφή

$$\varepsilon_{n+1} = \lambda \varepsilon_n^\alpha \, .$$

Αν τα λ, α είναι σταθερές, προσδιορίζουν την ταχύτητα και την τάξη σύγκλισης.

Εύρεση περισσότερων της μίας ριζών (1/2)

Αν επιθυμούμε να εντοπίσουμε πολλές ρίζες μιας συνάρτησης $f(x)$ μπορούμε να ακολουθήσουμε δύο διαδικασίες:

“Απλοϊκή” προσέγγιση

Μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο της επιλογής μας με διαφορετικές αρχικές προσεγγίσεις, ελπίζοντας ότι θα καταλήξουμε σε διαφορετικές ρίζες.
Δουλεύει πολύ καλά για εύρεση ριζών πολυωνύμου.

Συστηματική προσέγγιση

Γνωρίζουμε ότι αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει ρίζα το $\bar{x}$ με πολλαπλότητα m (δηλαδή, ισχύει ότι $f'(\bar{x}) = f''(\bar{x}) = \cdots = f^{(m-1)}(\bar{x}) = 0$), τότε γράφεται στη μορφή $f(x) = g(x)(x-\bar{x})^m$. Η συνάρτηση $g(x)$ έχει ως ρίζες της όλες τις ρίζες της $f(x)$ εκτός από το $\bar{x}$.

Επομένως, επιλέγουμε μια μέθοδο εύρεσης ρίζας και

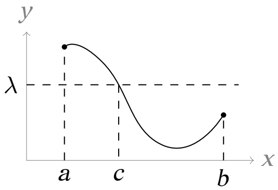
- βρίσκουμε μια ρίζα της $f(x)$, έστω x_1. Αν και μπορούμε να ελέγξουμε αν είναι ρίζα και των παραγώγων της $f(x)$ (ώστε να βρούμε την πολλαπλότητά της), είναι πιο εύκολο να τη θεωρήσουμε απλή ρίζα και να αφήσουμε τον αλγόριθμο να βρει πολλές ίδιες ρίζες.
- Σχηματίζουμε την $g_1(x) = f(x)/(x-x_1)$ και αναζητούμε μια ρίζα της, έστω x_2.
- Σχηματίζουμε την $g_2(x) = f(x)/(x-x_1)/(x-x_2)$ και αναζητούμε μια ρίζα της, κλπ.

Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται έως ότου βρούμε όσες ρίζες αναζητούμε.

Η μέθοδος βασίζεται στα ακόλουθα θεωρήματα:

Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής

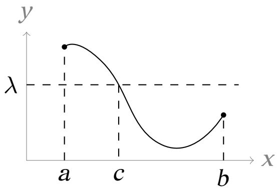
Έστω $f(x)$ συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[a, b]$. Αν λ είναι ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός μεταξύ των $f(a), f(b)$ (συμπεριλαμβανομένων και αυτών), τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $c \in [a, b]$ ώστε $f(c) = \lambda$.



Η μέθοδος βασίζεται στα ακόλουθα θεωρήματα:

Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής

Έστω $f(x)$ συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[a, b]$. Αν λ είναι ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός μεταξύ των $f(a), f(b)$ (συμπεριλαμβανομένων και αυτών), τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $c \in [a, b]$ ώστε $f(c) = \lambda$.



Θεώρημα Bolzano

Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και έχουμε $f(a)f(b) < 0$, τότε, από το θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\bar{x} \in (a, b)$ ώστε $f(\bar{x}) = 0$.

Μέθοδος Διχοτόμησης (2/5)

Διαδικασία

- Επιλέγουμε ένα διάστημα $[a, b]$ τέτοιο ώστε η $f(x)$ να είναι συνεχής σε αυτό και να ισχύει $f(a)f(b) < 0$. Σε αυτό υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα, $\bar{x}$.
- Η μέθοδος παράγει ως πρώτη προσέγγιση της ρίζας το μέσο του διαστήματος, $x_0 \equiv c = (a+b)/2$. Καθώς

$$a \leq \bar{x} \leq b \Rightarrow c - \frac{b-a}{2} \leq \bar{x} \leq c + \frac{b-a}{2} \Rightarrow |c - \bar{x}| \leq \frac{b-a}{2} ,$$

  η μέγιστη απόκλιση της $\bar{x}$ από το c είναι $\varepsilon_0 = (b-a)/2$.
- Αν τα $f(c)$ και $f(a)$ είναι ετερόσημα, η ρίζα περικλείεται στο $[a, c]$. Αλλιώς, τα $f(c)$ και $f(b)$ είναι ετερόσημα, οπότε περικλείεται στο $[c, b]$. Σε κάθε περίπτωση, στο μισό του αρχικού διαστήματος.
- Η επανάληψη της διαδικασίας στο νέο διάστημα παράγει νέα, καλύτερη προσέγγιση –το μέσο του νέου διαστήματος– και περιορίζει στο μισό τη μέγιστη απόκλιση.
- Η επανάληψη σταματά όταν ικανοποιηθεί ένα τουλάχιστον κριτήριο σύγκλισης.

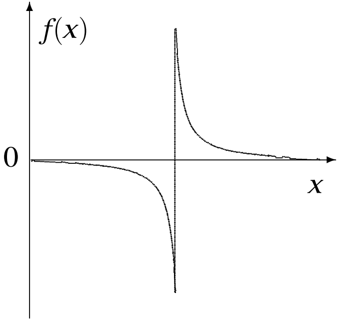
Αλγόριθμος επίλυσης της $f(x) = 0$ με τη μέθοδο διχοτόμησης

1. Επιλέγουμε δύο τιμές a, b, με $a < b$ έτσι ώστε η $f(x)$ να είναι συνεχής στο $[a, b]$ και να ισχύει $f(a)f(b) < 0$.
2. Θέτουμε $x \leftarrow \dfrac{a+b}{2}$.
3. Ελέγχουμε τα κριτήρια σύγκλισης. Αν το x είναι ικανοποιητική προσέγγιση της ρίζας πηγαίνουμε στο βήμα 6.
4. Αν ισχύει ότι $f(a)f(x) > 0$ τότε θέτουμε $a \leftarrow x$. Αλλιώς, θέτουμε $b \leftarrow x$.
5. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία από το βήμα 2.
6. Τέλος.

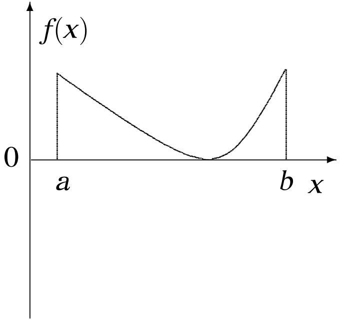
Παρατηρήστε ότι σε κάθε επανάληψη χρειαζόμαστε *ένα* νέο υπολογισμό της τιμής της συνάρτησης.

Μέθοδος Διχοτόμησης (4/5)

Η μέθοδος διχοτόμησης αποτυγχάνει όταν δεν πληρούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιάμεσης Τιμής. Π.χ. όταν η συνάρτηση δεν είναι συνεχής, η μέθοδος εντοπίζει για ρίζα το σημείο ασυνέχειας, (α). Αντίστροφα, αν δεν μπορούμε να εντοπίσουμε δύο σημεία στα οποία η συνάρτηση έχει ετερόσημες τιμές, δε σημαίνει ότι δεν έχει ρίζα, (β).



(α)



(β)

Τάξη σύγκλισης

Αποδεικνύεται εύκολα ότι για το μέσο του εκάστοτε διαστήματος, δηλαδή, για την προσέγγιση x_n στη n-οστή επανάληψη, ισχύει

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{1}{2^{n+1}}(b-a)\ , \ \text{με}\ n = 0, 1, 2, \ldots\ .$$

για την απόκλιση από την πραγματική ρίζα $\bar{x}$. Επομένως,

$$\varepsilon_n \equiv \frac{1}{2^{n+1}}(b-a) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}(b-a) = \frac{1}{2}\varepsilon_{n-1}\ .$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι η τάξη σύγκλισης της μεθόδου διχοτόμησης είναι 1 και η ταχύτητα σύγκλισης 0.5.

Τάξη σύγκλισης

Αποδεικνύεται εύκολα ότι για το μέσο του εκάστοτε διαστήματος, δηλαδή, για την προσέγγιση x_n στη n-οστή επανάληψη, ισχύει

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{1}{2^{n+1}}(b-a) \ , \ \text{με } n = 0, 1, 2, \dots \ .$$

για την απόκλιση από την πραγματική ρίζα $\bar{x}$. Επομένως,

$$\varepsilon_n \equiv \frac{1}{2^{n+1}}(b-a) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}(b-a) = \frac{1}{2}\varepsilon_{n-1} \ .$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι η τάξη σύγκλισης της μεθόδου διχοτόμησης είναι 1 και η ταχύτητα σύγκλισης 0.5.

Δυνατότητα βελτίωσης της μεθόδου διχοτόμησης

Δε λαμβάνεται υπόψη η πληροφορία για το μέγεθος των $f(a)$ και $f(b)$. Αν π.χ. το $f(a)$ είναι αρκετά μικρό, αναμένουμε η ρίζα να είναι κοντά στο a. Έχει μεγάλο σφάλμα μια προσέγγιση που ισαπέχει από τα a, b.

Μέθοδος ψευδούς σημείου (1/2)

- Η μέθοδος ψευδούς σημείου βελτιώνει τη μέθοδο διχοτόμησης καθώς η νέα προσέγγιση της ρίζας εξαρτάται από τις τιμές των $f(a)$ και $f(b)$.
- Η επιλογή της προσέγγισης x_i γίνεται υπολογίζοντας την ευθεία που περνά από τα σημεία $(a, f(a))$ και $(b, f(b))$ σε κάθε επανάληψη. Το x_i είναι η τομή αυτής με τον άξονα των x. Καθώς η ευθεία είναι

  $$y = f(a) + \frac{f(a) - f(b)}{a - b}(x - a) \ ,$$

  το x_i είναι

  $$x_i = a - \frac{f(a)}{f(a) - f(b)}(a - b) = \frac{bf(a) - af(b)}{f(a) - f(b)} \ .$$

- Σε κάθε επανάληψη, μετακινούμε το ένα από τα δύο άκρα στο x_i ώστε η ρίζα να περικλείεται πάντα.

Παρατήρηση

Το μήκος των διαδοχικών διαστημάτων $[a, b]$ δεν είναι απαραίτητο να τείνει στο 0. Η απόκλιση της εκάστοτε προσέγγισης από την πραγματική τιμή δεν είναι ανάλογη της απόστασης των a, b.

Μέθοδος ψευδούς σημείου (2/2)

Παρατήρηση

Το μήκος των διαδοχικών διαστημάτων $[a, b]$ δεν είναι απαραίτητο να τείνει στο 0. Η απόκλιση της εκάστοτε προσέγγισης από την πραγματική τιμή δεν είναι ανάλογη της απόστασης των a, b.

Τάξη σύγκλισης

- Η μέθοδος ψευδούς σημείου είναι γενικά πιο γρήγορη από τη μέθοδο διχοτόμησης.
- Αν κάποιο από τα άκρα του διαστήματος $[a, b]$ δεν μετακινείται σε διαδοχικές επαναλήψεις της μεθόδου ψευδούς σημείου, έχουμε αργή σύγκλιση. Αυτό συμβαίνει σχεδόν πάντα μετά από πολλές επαναλήψεις της.

Η τάξη σύγκλισης της μεθόδου ψευδούς σημείου βελτιώνεται αν κάνουμε την ακόλουθη τροποποίηση στην επιλογή της ρίζας, όποτε συμβαίνει να μην αλλάζει ένα άκρο σε δύο διαδοχικές επαναλήψεις:

- αν άλλαξε δύο συνεχόμενες φορές το όριο a

$$x_i = \frac{2bf(a) - af(b)}{2f(a) - f(b)} \ .$$

- αν άλλαξε δύο συνεχόμενες φορές το όριο b

$$x_i = \frac{bf(a) - 2af(b)}{f(a) - 2f(b)} \ .$$

Η επιλογή του x_i επηρεάζεται μεγαλώνοντας τεχνητά την τιμή της συνάρτησης στο άκρο που έχει μετακινηθεί δύο διαδοχικές φορές.

Η παραπάνω τροποποίηση δίνει τάξη σύγκλισης $\sqrt[3]{3} \approx 1.442$ και είναι γνωστή ως ο αλγόριθμος Illinois.

Επιλέγουμε δύο διαφορετικές προσεγγιστικές τιμές για τη ρίζα, x_0 και x_1. Η μέθοδος τέμνουσας παράγει την προσέγγιση ως εξής:

- Προσεγγίζουμε τη συνάρτηση $f(x)$ με ευθεία που περνά από τα σημεία $(x_0, f(x_0))$ και $(x_1, f(x_1))$. Η ευθεία είναι η

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_1) \ .$$

- Βρίσκουμε το σημείο τομής τής ευθείας με τον άξονα των x. Αυτή είναι η νέα προσέγγιση:

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} \ .$$

- Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία ξεκινώντας από τα σημεία x_1, x_2.

Παρατηρήστε ότι σε κάθε επανάληψη χρειαζόμαστε *ένα* νέο υπολογισμό της τιμής της συνάρτησης.

Μέθοδος τέμνουσας (2/3)

Αλγόριθμος επίλυσης της $f(x) = 0$ με τη μέθοδο της τέμνουσας

1. Επιλέγουμε δύο τιμές a, b.
2. Ορίζουμε ως c το
$$c = \frac{bf(a) - af(b)}{f(a) - f(b)} \, .$$
3. Ελέγχουμε τα κριτήρια σύγκλισης. Αν το c είναι ικανοποιητική προσέγγιση της ρίζας πηγαίνουμε στο βήμα 6.
4. Θέτουμε $a \leftarrow b$, $b \leftarrow c$.
5. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία από το βήμα 2.
6. Τέλος.

Μέθοδος τέμνουσας (3/3)

Παρατηρήσεις

- Η μέθοδος τέμνουσας μοιάζει πολύ με τη μέθοδο ψευδούς σημείου. Όμως, στη μέθοδο τέμνουσας η ρίζα δεν είναι απαραίτητα περιορισμένη μεταξύ δύο σημείων. Μπορεί να οδηγήσει σε μεγάλη απομάκρυνση από τη ρίζα.
- Η μέθοδος προσεγγίζει τη συνάρτηση με ευθεία (πολυώνυμο α' βαθμού). Βρίσκει ρίζα της ευθείας η οποία τελικά προσεγγίζει τη ρίζα της συνάρτησης.

Παρατηρήσεις

- Η μέθοδος τέμνουσας μοιάζει πολύ με τη μέθοδο ψευδούς σημείου. Όμως, στη μέθοδο τέμνουσας η ρίζα δεν είναι απαραίτητα περιορισμένη μεταξύ δύο σημείων. Μπορεί να οδηγήσει σε μεγάλη απομάκρυνση από τη ρίζα.
- Η μέθοδος προσεγγίζει τη συνάρτηση με ευθεία (πολυώνυμο α' βαθμού). Βρίσκει ρίζα της ευθείας η οποία τελικά προσεγγίζει τη ρίζα της συνάρτησης.

Τάξη σύγκλισης

Μπορεί να δειχθεί ότι η τάξη της σύγκλισης της μεθόδου τέμνουσας σε απλή ρίζα είναι $(1+\sqrt{5})/2 \approx 1.618$.