XÁC SUẤT THỐNG KÊ

Chương I. Biến cố và xác suất của biến cố

GIẢNG VIÊN: NGUYỄN HUY HOÀNG
Bộ môn Đại số và Xác suất thống kê

Khoa Khoa học cơ bản
Đại học Giao thông Vận tải
Email: huyhoang@utc.edu.vn

Hà Nội - 3/2021

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

PHẦN I

① Không gian mẫu và biến cố.

② Các định nghĩa về xác suất.

Hiện tượng ngẫu nhiên

Có nhiều hiện tượng, sự việc được hình thành và tiến triển trong những điều kiện không thay đổi nhưng lại cho kết quả cuối cùng không tất định. Ta thấy rằng có thể xuất hiện một vài kết quả khác nhau hoặc vô số kết quả khác nhau đối với những hiện tượng, sự việc như thế. Với đặc điểm này chúng được gọi là các hiện tượng ngẫu nhiên.

Hiện tượng ngẫu nhiên

Có nhiều hiện tượng, sự việc được hình thành và tiến triển trong những điều kiện không thay đổi nhưng lại cho kết quả cuối cùng không tất định. Ta thấy rằng có thể xuất hiện một vài kết quả khác nhau hoặc vô số kết quả khác nhau đối với những hiện tượng, sự việc như thế. Với đặc điểm này chúng được gọi là các hiện tượng ngẫu nhiên.

Phép thử ngẫu nhiên được nhìn nhận là không có định nghĩa chính xác giống những khái niệm điểm, đường thẳng, mặt phẳng trong hình học. Ta đưa ra đây một cách hiểu đơn giản về khái niệm này.

Hiện tượng ngẫu nhiên

Có nhiều hiện tượng, sự việc được hình thành và tiến triển trong những điều kiện không thay đổi nhưng lại cho kết quả cuối cùng không tất định. Ta thấy rằng có thể xuất hiện một vài kết quả khác nhau hoặc vô số kết quả khác nhau đối với những hiện tượng, sự việc như thế. Với đặc điểm này chúng được gọi là các hiện tượng ngẫu nhiên.

Phép thử ngẫu nhiên được nhìn nhận là không có định nghĩa chính xác giống những khái niệm điểm, đường thẳng, mặt phẳng trong hình học. Ta đưa ra đây một cách hiểu đơn giản về khái niệm này.

Khái niệm phép thử ngẫu nhiên

Những quá trình, hiện tượng v. v. mà có kết quả khác nhau cho dù sự hình thành và tiến triển của nó được lặp lại nhiều lần với các điều kiện như nhau được gọi là các phép thử ngẫu nhiên.

Các ví dụ về phép thử

- Gieo một con xúc xắc.
- Gieo một đồng xu.
- Chọn ngẫu nhiên một sinh viên trong một lớp.

Định nghĩa 1.2

Không gian mẫu là tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của một phép thử. Ký hiệu tập không gian mẫu là Ω.

Định nghĩa 1.2

Không gian mẫu là tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của một phép thử. Ký hiệu tập không gian mẫu là Ω.

Chúng ta có thể nhìn nhận kết quả của một phép thử theo các chiều hướng khác nhau. Tương ứng với mỗi cách nhìn ta thiết lập được một không gian mẫu. Như vậy ứng với mỗi phép thử ta có thể xây những không gian mẫu khác nhau.

Định nghĩa 1.2

Không gian mẫu là tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của một phép thử. Ký hiệu tập không gian mẫu là Ω.

Chúng ta có thể nhìn nhận kết quả của một phép thử theo các chiều hướng khác nhau. Tương ứng với mỗi cách nhìn ta thiết lập được một không gian mẫu. Như vậy ứng với mỗi phép thử ta có thể xây những không gian mẫu khác nhau.

Ví dụ 1.

Gieo đồng thời hai đồng xu.

Ta có thể xây dựng không gian mẫu là

$$\Omega = \{SS, SN, NS, NN\}.$$

Một phương án khác là

$$\Omega = \{2S, 2N, 1S1N\}.$$

Cách mô tả một không gian mẫu

Liệt kê các phần tử

Cách mô tả một không gian mẫu

Liệt kê các phần tử

Ví dụ 2.

Gieo một con xúc xắc. Tương ứng không gian mẫu là

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Cách mô tả một không gian mẫu

Liệt kê các phần tử

Ví dụ 2.

Gieo một con xúc xắc. Tương ứng không gian mẫu là

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Ví dụ 3.

Chọn ngẫu nhiên một số từ 1 đến 20. Tương ứng không gian mẫu là

$$\Omega = \{1, 2, \ldots, 20\}.$$

Mô tả không gian mẫu theo tính chất đặc trưng

Mô tả không gian mẫu theo tính chất đặc trưng

Ví dụ 4.

Một vận động viên ném bóng vào rổ, anh ta ném liên tiếp cho đến khi nào có bóng trúng rổ thì dừng. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử.

Mô tả không gian mẫu theo tính chất đặc trưng

Ví dụ 4.

Một vận động viên ném bóng vào rổ, anh ta ném liên tiếp cho đến khi nào có bóng trúng rổ thì dừng. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử.

Ta ký hiệu T tương ứng với việc anh ta ném bóng trúng rổ, ký hiệu K tương ứng với việc anh ta ném bóng không trúng rổ trong một lần ném. Do không khống chế số lần ném và điều kiện là khi nào bóng trúng rổ thì mới dừng nên không gian mẫu có dạng

Mô tả không gian mẫu theo tính chất đặc trưng

Ví dụ 4.

Một vận động viên ném bóng vào rổ, anh ta ném liên tiếp cho đến khi nào có bóng trúng rổ thì dừng. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử.

Ta ký hiệu T tương ứng với việc anh ta ném bóng trúng rổ, ký hiệu K tương ứng với việc anh ta ném bóng không trúng rổ trong một lần ném. Do không khống chế số lần ném và điều kiện là khi nào bóng trúng rổ thì mới dừng nên không gian mẫu có dạng

$$\Omega = \{T, KT, KKT, KKKT, \ldots, \underbrace{KK\ldots K}_{n-1 \text{ lần}} T, \ldots\}.$$

Mỗi phần tử của không gian mẫu chỉ xuất hiện T ở cuối và số lượng phần tử không gian mẫu trên được gọi là vô hạn đếm được.

Biến cố cũng được nhìn nhận như một khái niệm không có định nghĩa chính xác. Ta đưa ra ở đây hai cách nhìn nhận đơn giản về khái niệm biến cố:

I. Không gian mẫu và biến cố

3. Khái niệm biến cố

Biến cố cũng được nhìn nhận như một khái niệm không có định nghĩa chính xác. Ta đưa ra ở đây hai cách nhìn nhận đơn giản về khái niệm biến cố:

- Mỗi biến cố là một sự kiện mà sự xuất hiện của hay không xuất hiện của nó phụ thuộc vào kết quả phép thử.

I. Không gian mẫu và biến cố

3. Khái niệm biến cố

Biến cố cũng được nhìn nhận như một khái niệm không có định nghĩa chính xác. Ta đưa ra ở đây hai cách nhìn nhận đơn giản về khái niệm biến cố:

- Mỗi biến cố là một sự kiện mà sự xuất hiện của hay không xuất hiện của nó phụ thuộc vào kết quả phép thử.
- Mỗi biến cố là một tập con của không gian mẫu.

Biến cố cũng được nhìn nhận như một khái niệm không có định nghĩa chính xác. Ta đưa ra ở đây hai cách nhìn nhận đơn giản về khái niệm biến cố:

- Mỗi biến cố là một sự kiện mà sự xuất hiện của hay không xuất hiện của nó phụ thuộc vào kết quả phép thử.
- Mỗi biến cố là một tập con của không gian mẫu.

Xét phép thử trong Ví dụ 4. Theo cách nhìn thứ hai ta xét một biến cố là

$$A = \{T, KT, KKT, KKKT\}$$

thì biến cố này theo cách nhìn thứ nhất là sự kiện "số lần ném bóng của vận động viên không vượt quá 4".

Biến cố cũng được nhìn nhận như một khái niệm không có định nghĩa chính xác. Ta đưa ra ở đây hai cách nhìn nhận đơn giản về khái niệm biến cố:

- Mỗi biến cố là một sự kiện mà sự xuất hiện của hay không xuất hiện của nó phụ thuộc vào kết quả phép thử.
- Mỗi biến cố là một tập con của không gian mẫu.

Xét phép thử trong Ví dụ 4. Theo cách nhìn thứ hai ta xét một biến cố là

$$A = \{T, KT, KKT, KKKT\}$$

thì biến cố này theo cách nhìn thứ nhất là sự kiện "số lần ném bóng của vận động viên không vượt quá 4".

Ví dụ 5.

Cho một không gian mẫu $\Omega = \{t \mid t \geqslant 0\}$, trong đó t là tuổi thọ (tính theo năm) của một loại thiết bị điện. Khi đó với biến cố A chỉ tình huống thiết bị đó hỏng trước 5 năm, ta viết $A = \{t \mid 0 \leqslant t < 5\}$.

Biến cố chắc chắn, biến cố rỗng, biến cố ngẫu nhiên

Biến cố chắc chắn, biến cố rỗng, biến cố ngẫu nhiên

- **Biến cố chắc chắn**: Là biến cố chắc chắn xảy mỗi khi thực hiện phép thử, ký hiệu là Ω.

Biến cố chắc chắn, biến cố rỗng, biến cố ngẫu nhiên

- **Biến cố chắc chắn**: Là biến cố chắc chắn xảy mỗi khi thực hiện phép thử, ký hiệu là Ω.
- **Biến cố rỗng**: Là biến cố không thể xảy ra mỗi khi thực hiện phép thử, ký hiệu là $\varnothing$.

Biến cố chắc chắn, biến cố rỗng, biến cố ngẫu nhiên

- Biến cố chắc chắn: Là biến cố chắc chắn xảy mỗi khi thực hiện phép thử, ký hiệu là Ω.
- Biến cố rỗng: Là biến cố không thể xảy ra mỗi khi thực hiện phép thử, ký hiệu là $\varnothing$.
- Biến cố ngẫu nhiên: Các biến cố khác với Ω và $\varnothing$ được gọi là biến cố ngẫu nhiên.

Biến cố chắc chắn, biến cố rỗng, biến cố ngẫu nhiên

- **Biến cố chắc chắn**: Là biến cố chắc chắn xảy mỗi khi thực hiện phép thử, ký hiệu là Ω.
- **Biến cố rỗng**: Là biến cố không thể xảy ra mỗi khi thực hiện phép thử, ký hiệu là $\varnothing$.
- **Biến cố ngẫu nhiên**: Các biến cố khác với Ω và $\varnothing$ được gọi là biến cố ngẫu nhiên.

Ví dụ 6.

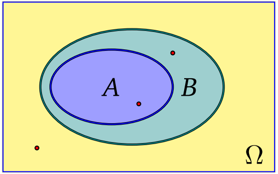
Xét phép thử "chọn ngẫu nhiên một người". Tương ứng ta nhìn nhận biến cố "người được chọn có chiều cao trên 300cm" là biến cố rỗng. Tiếp theo, biến cố "người được chọn có chiều cao dưới 300cm" là biến cố chắc chắn.

Quan hệ kéo theo

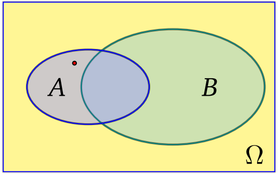
Nếu sự xuất hiện của biến cố A chắc chắn kéo theo sự xuất hiện của biến cố B thì ta nói A kéo theo B và ký hiệu $A \subset B$.

Quan hệ kéo theo

Nếu sự xuất hiện của biến cố A chắc chắn kéo theo sự xuất hiện của biến cố B thì ta nói A kéo theo B và ký hiệu $A \subset B$.



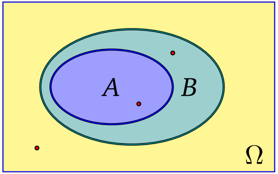
$A \subset B$



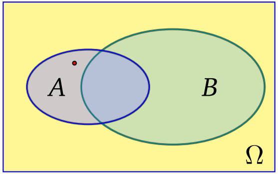
$A \not\subset B$

Quan hệ kéo theo

Nếu sự xuất hiện của biến cố A chắc chắn kéo theo sự xuất hiện của biến cố B thì ta nói A kéo theo B và ký hiệu $A \subset B$.



$A \subset B$



$A \not\subset B$

Quan hệ tương đương

Nếu $A \subset B$ và $B \subset A$ thì ta nói A tương đương với B và ký hiệu $A = B$.

Xét phép thử trong Ví dụ 4. và hai biến cố sau đây:

- Biến cố A ứng với sự kiện "vận động viên dừng ném sau 4 lần ném bóng".
- Biến cố B ứng với sự kiện "ở lần ném bóng thứ nhất, vận động viên không ném trúng đích".

Xét phép thử trong Ví dụ 4. và hai biến cố sau đây:

- Biến cố A ứng với sự kiện "vận động viên dừng ném sau 4 lần ném bóng".
- Biến cố B ứng với sự kiện "ở lần ném bóng thứ nhất, vận động viên không ném trúng đích".

Tương ứng ta có quan hệ $A \subset B$. Ở chiều ngược lại ta có $B \not\subset A$.

Xét phép thử trong Ví dụ 4. và hai biến cố sau đây:

- Biến cố A ứng với sự kiện "vận động viên dừng ném sau 4 lần ném bóng".
- Biến cố B ứng với sự kiện "ở lần ném bóng thứ nhất, vận động viên không ném trúng đích".

Tương ứng ta có quan hệ $A \subset B$. Ở chiều ngược lại ta có $B \not\subset A$.

Quan hệ xung khắc

Hai biến cố A, B được gọi là xung khắc nếu chúng không thể cùng xuất hiện mỗi khi thực hiện phép thử.

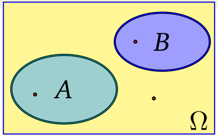
Xét phép thử trong Ví dụ 4. và hai biến cố sau đây:

- Biến cố A ứng với sự kiện "vận động viên dừng ném sau 4 lần ném bóng".
- Biến cố B ứng với sự kiện "ở lần ném bóng thứ nhất, vận động viên không ném trúng đích".

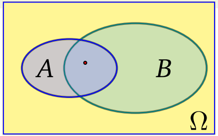
Tương ứng ta có quan hệ $A \subset B$. Ở chiều ngược lại ta có $B \not\subset A$.

Quan hệ xung khắc

Hai biến cố A, B được gọi là xung khắc nếu chúng không thể cùng xuất hiện mỗi khi thực hiện phép thử.



A, B xung khắc



A, B không xung khắc

Gieo hai con xúc xắc. Ta xét các biến cố

- Biến cố A ứng với sự kiện "tổng số chấm trên hai con xúc xắc bằng 7".
- Biến cố B ứng với sự kiện "tổng số chấm trên hai con xúc xắc chia hết cho 2".
- Biến cố C ứng với sự kiện "tổng số chấm trên hai con xúc xắc chia hết cho 3".

Gieo hai con xúc xắc. Ta xét các biến cố

- Biến cố A ứng với sự kiện "tổng số chấm trên hai con xúc xắc bằng 7".
- Biến cố B ứng với sự kiện "tổng số chấm trên hai con xúc xắc chia hết cho 2".
- Biến cố C ứng với sự kiện "tổng số chấm trên hai con xúc xắc chia hết cho 3".

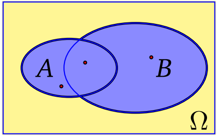
Tương ứng, biến cố A xung khắc với biến cố B, biến cố A xung khắc với biến cố C. Biến cố B và biến cố C không xung khắc với nhau.

Tổng 2 biến cố

Tổng của biến cố A và biến cố B được ký hiệu là $A + B$ (hoặc $A \cup B$). Biến cố $A + B$ là một biến cố mà nó xuất hiện khi và chỉ khi biến cố A hoặc biến cố B xuất hiện.

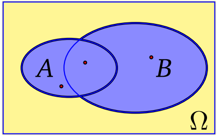
Tổng 2 biến cố

Tổng của biến cố A và biến cố B được ký hiệu là $A + B$ (hoặc $A \cup B$). Biến cố $A + B$ là một biến cố mà nó xuất hiện khi và chỉ khi biến cố A hoặc biến cố B xuất hiện.



Tổng 2 biến cố

Tổng của biến cố A và biến cố B được ký hiệu là $A + B$ (hoặc $A \cup B$). Biến cố $A + B$ là một biến cố mà nó xuất hiện khi và chỉ khi biến cố A hoặc biến cố B xuất hiện.

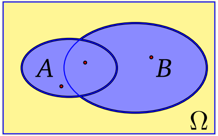


Tích 2 biến cố

Tích của biến cố A và biến cố B được ký hiệu là AB (hoặc $A \cap B$). Biến cố $A.B$ là một biến cố mà nó xuất hiện khi và chỉ khi cả hai biến cố A và B cùng xuất hiện.

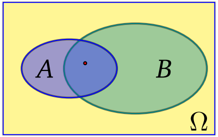
Tổng 2 biến cố

Tổng của biến cố A và biến cố B được ký hiệu là $A+B$ (hoặc $A \cup B$). Biến cố $A+B$ là một biến cố mà nó xuất hiện khi và chỉ khi biến cố A hoặc biến cố B xuất hiện.



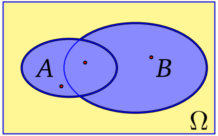
Tích 2 biến cố

Tích của biến cố A và biến cố B được ký hiệu là AB (hoặc $A \cap B$). Biến cố $A.B$ là một biến cố mà nó xuất hiện khi và chỉ khi cả hai biến cố A và B cùng xuất hiện.



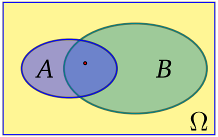
Tổng 2 biến cố

Tổng của biến cố A và biến cố B được ký hiệu là $A+B$ (hoặc $A \cup B$). Biến cố $A+B$ là một biến cố mà nó xuất hiện khi và chỉ khi biến cố A hoặc biến cố B xuất hiện.



Tích 2 biến cố

Tích của biến cố A và biến cố B được ký hiệu là AB (hoặc $A \cap B$). Biến cố $A.B$ là một biến cố mà nó xuất hiện khi và chỉ khi cả hai biến cố A và B cùng xuất hiện.

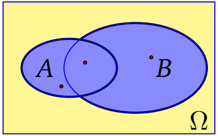


Biến cố đối

Biến cố đối của biến cố A được ký hiệu là $\overline{A}$. Biến cố $\overline{A}$ là một biến cố mà nó xuất hiện khi và chỉ khi A không xuất hiện.

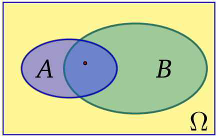

Tổng 2 biến cố

Tổng của biến cố A và biến cố B được ký hiệu là $A + B$ (hoặc $A \cup B$). Biến cố $A + B$ là một biến cố mà nó xuất hiện khi và chỉ khi biến cố A hoặc biến cố B xuất hiện.



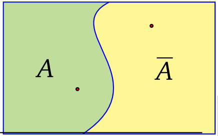
Tích 2 biến cố

Tích của biến cố A và biến cố B được ký hiệu là AB (hoặc $A \cap B$). Biến cố $A.B$ là một biến cố mà nó xuất hiện khi và chỉ khi cả hai biến cố A và B cùng xuất hiện.



Biến cố đối

Biến cố đối của biến cố A được ký hiệu là $\overline{A}$. Biến cố $\overline{A}$ là một biến cố mà nó xuất hiện khi và chỉ khi A không xuất hiện.



Các tính chất

1. $A+B=B+A, \qquad AB=BA.$
2. $(A+B)+C=A+(B+C), \qquad (AB)C=A(BC).$
3. $A(B+C)=AB+AC.$
4. $A+\Omega=\Omega, \qquad A\Omega=A.$
   $A+\varnothing=A, \qquad A\varnothing=\varnothing.$
   $A+\overline{A}=\Omega, \qquad A\overline{A}=\varnothing.$
   $A+A=A, \qquad AA=A.$
5. A,B xung khắc nếu và chỉ nếu $AB=\varnothing$.
6. Quy tắc De Morgan

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$$
$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

☞ Xác suất là thước đo lý thuyết dùng để đánh giá cơ hội xuất hiện của một sự kiện mỗi khi thực hiện phép thử.

- Xác suất là thước đo lý thuyết dùng để đánh giá cơ hội xuất hiện của một sự kiện mỗi khi thực hiện phép thử.
- Xác suất của một biến cố A được ký hiệu là $\mathbb{P}(A)$. Giá trị của $\mathbb{P}(A)$ được xác định tùy theo mô hình xác suất được sử dụng cho không gian mẫu Ω.

II. Định nghĩa về xác suất

Khái niệm xác suất

- Xác suất là thước đo lý thuyết dùng để đánh giá cơ hội xuất hiện của một sự kiện mỗi khi thực hiện phép thử.
- Xác suất của một biến cố A được ký hiệu là $\mathbb{P}(A)$. Giá trị của $\mathbb{P}(A)$ được xác định tùy theo mô hình xác suất được sử dụng cho không gian mẫu Ω.
- Việc tiếp cận một định nghĩa chung đòi hỏi sự chuẩn bị phức tạp về toán học. Để đơn giản chúng ta sẽ tiếp cận định nghĩa xác suất theo từng cách cụ thể:
  - Định nghĩa theo mô hình xác suất cổ điển.
  - Định nghĩa xác suất theo tần suất.
  - Định nghĩa xác suất theo số đo hình học.

II. Định nghĩa về xác suất

1. Mô hình cổ điển

Trong mô hình cổ điển không gian mẫu Ω có n phần tử và n phần tử này được nhìn nhận là đồng khả năng xuất hiện. Để thuận tiện ta gọi các phần tử của không gian mẫu Ω là các biến cố sơ cấp.

Trong mô hình cổ điển không gian mẫu Ω có n phần tử và n phần tử này được nhìn nhận là đồng khả năng xuất hiện. Để thuận tiện ta gọi các phần tử của không gian mẫu Ω là các biến cố sơ cấp.

☞ Các ví dụ

1. Gieo một con xúc xắc, Ω chứa 6 biến cố sơ cấp.

Trong mô hình cổ điển không gian mẫu Ω có n phần tử và n phần tử này được nhìn nhận là đồng khả năng xuất hiện. Để thuận tiện ta gọi các phần tử của không gian mẫu Ω là các biến cố sơ cấp.

☞ Các ví dụ

1. Gieo một con xúc xắc, Ω chứa 6 biến cố sơ cấp.
2. Chọn ngẫu nhiên một số từ 1-20, Ω chứa 20 biến cố sơ cấp.

Trong mô hình cổ điển không gian mẫu Ω có n phần tử và n phần tử này được nhìn nhận là đồng khả năng xuất hiện. Để thuận tiện ta gọi các phần tử của không gian mẫu Ω là các biến cố sơ cấp.

☞ Các ví dụ

1. Gieo một con xúc xắc, Ω chứa 6 biến cố sơ cấp.
2. Chọn ngẫu nhiên một số từ 1-20, Ω chứa 20 biến cố sơ cấp.
3. Chọn ngẫu nhiên ba quân bài từ một cỗ bài 52 quân, Ω chứa $n = C_{52}^3 = 22100$ phần tử.

Trong mô hình cổ điển không gian mẫu Ω có n phần tử và n phần tử này được nhìn nhận là đồng khả năng xuất hiện. Để thuận tiện ta gọi các phần tử của không gian mẫu Ω là các biến cố sơ cấp.

☞ Các ví dụ

1. Gieo một con xúc xắc, Ω chứa 6 biến cố sơ cấp.
2. Chọn ngẫu nhiên một số từ 1-20, Ω chứa 20 biến cố sơ cấp.
3. Chọn ngẫu nhiên ba quân bài từ một cỗ bài 52 quân, Ω chứa $n = C_{52}^3 = 22100$ phần tử.

Định nghĩa cổ điển

Xét phép thử có không gian mẫu Ω gồm n phần tử đồng khả năng xuất hiện. Nếu A là một biến cố và trong Ω có m_A phần tử ứng với sự xuất hiện của A thì xác suất của A là

$$\mathbb{P}(A) = \frac{m_A}{n}. \tag{1.4}$$

Ví dụ 7.

Một lớp học môn Xác suất thống kê có 25 sinh viên ngành công trình, 10 sinh viên ngành cơ khí, 10 sinh viên ngành điện tử, và 8 sinh viên ngành xây dựng. Chọn ngẫu nhiên một người để trả lời câu hỏi.

Ví dụ 7.

Một lớp học môn Xác suất thống kê có 25 sinh viên ngành công trình, 10 sinh viên ngành cơ khí, 10 sinh viên ngành điện tử, và 8 sinh viên ngành xây dựng. Chọn ngẫu nhiên một người để trả lời câu hỏi. Hãy tính xác suất để sinh viên được chọn là:

a) Sinh viên ngành công trình.

b) Sinh viên ngành xây dựng hoặc sinh viên ngành điện tử.

Ví dụ 7.

Một lớp học môn Xác suất thống kê có 25 sinh viên ngành công trình, 10 sinh viên ngành cơ khí, 10 sinh viên ngành điện tử, và 8 sinh viên ngành xây dựng. Chọn ngẫu nhiên một người để trả lời câu hỏi. Hãy tính xác suất để sinh viên được chọn là:

a) Sinh viên ngành công trình.

b) Sinh viên ngành xây dựng hoặc sinh viên ngành điện tử.

Giải. Tổng số các sinh viên trong lớp là 53 nên số khả năng xảy ra là $n = 53$ và mọi người đều có cơ hội được chọn như nhau.

Ví dụ 7.

Một lớp học môn Xác suất thống kê có 25 sinh viên ngành công trình, 10 sinh viên ngành cơ khí, 10 sinh viên ngành điện tử, và 8 sinh viên ngành xây dựng. Chọn ngẫu nhiên một người để trả lời câu hỏi. Hãy tính xác suất để sinh viên được chọn là:

a) Sinh viên ngành công trình.

b) Sinh viên ngành xây dựng hoặc sinh viên ngành điện tử.

Giải. Tổng số các sinh viên trong lớp là 53 nên số khả năng xảy ra là $n = 53$ và mọi người đều có cơ hội được chọn như nhau.

a) Gọi A là biến cố sinh viên được chọn thuộc ngành công trình. Vì có 25 sinh viên ngành công trình nên số khả năng thuận lợi cho A là $m = 25$.

Ví dụ 7.

Một lớp học môn Xác suất thống kê có 25 sinh viên ngành công trình, 10 sinh viên ngành cơ khí, 10 sinh viên ngành điện tử, và 8 sinh viên ngành xây dựng. Chọn ngẫu nhiên một người để trả lời câu hỏi. Hãy tính xác suất để sinh viên được chọn là:
a) Sinh viên ngành công trình.
b) Sinh viên ngành xây dựng hoặc sinh viên ngành điện tử.

Giải. Tổng số các sinh viên trong lớp là 53 nên số khả năng xảy ra là $n = 53$ và mọi người đều có cơ hội được chọn như nhau.

a) Gọi A là biến cố sinh viên được chọn thuộc ngành công trình. Vì có 25 sinh viên ngành công trình nên số khả năng thuận lợi cho A là $m = 25$. Do đó xác suất của biến cố A là

$$\mathbb{P}(A) = \frac{m}{n} = \frac{25}{53} = 0,4717.$$

b) Gọi B là biến cố sinh viên được chọn thuộc ngành xây dựng hoặc điện tử.

b) Gọi B là biến cố sinh viên được chọn thuộc ngành xây dựng hoặc điện tử. Vì có 18 sinh viên ngành xây dựng hoặc điện tử, nên xác suất của B là

$$\mathbb{P}(B) = \frac{18}{53} = 0,3396.$$

b) Gọi B là biến cố sinh viên được chọn thuộc ngành xây dựng hoặc điện tử. Vì có 18 sinh viên ngành xây dựng hoặc điện tử, nên xác suất của B là

$$\mathbb{P}(B) = \frac{18}{53} = 0,3396.$$

Ví dụ 8.

Một hộp chứa 15 sản phẩm, trong đó có 4 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm cùng một lúc.

b) Gọi B là biến cố sinh viên được chọn thuộc ngành xây dựng hoặc điện tử. Vì có 18 sinh viên ngành xây dựng hoặc điện tử, nên xác suất của B là

$$\mathbb{P}(B) = \frac{18}{53} = 0,3396.$$

Ví dụ 8.

Một hộp chứa 15 sản phẩm, trong đó có 4 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm cùng một lúc. Tính xác suất để trong 3 sản phẩm lấy ra thì:
a) Có 2 sản phẩm tốt.
b) Cả 3 sản phẩm đều tốt.
c) Có nhiều nhất 1 sản phẩm phế phẩm.

b) Gọi B là biến cố sinh viên được chọn thuộc ngành xây dựng hoặc điện tử. Vì có 18 sinh viên ngành xây dựng hoặc điện tử, nên xác suất của B là

$$\mathbb{P}(B) = \frac{18}{53} = 0,3396.$$

Ví dụ 8.

Một hộp chứa 15 sản phẩm, trong đó có 4 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm cùng một lúc. Tính xác suất để trong 3 sản phẩm lấy ra thì:
a) Có 2 sản phẩm tốt.
b) Cả 3 sản phẩm đều tốt.
c) Có nhiều nhất 1 sản phẩm phế phẩm.

Giải. Mỗi khả năng có thể có của phép thử là một cách lấy 3 sản phẩm từ tổng số 15 sản phẩm. Vậy tổng số cách lấy là

$$n = C_{15}^{3} = \frac{15!}{(15-3)!3!} = 455.$$

a) Gọi A là biến cố *"trong 3 sản phẩm lấy ra có 2 sản phẩm tốt."*.

- Mỗi trường hợp thuận lợi cho biến cố A chính là một cách lấy ra 2 sản phẩm tốt và 1 sản phẩm xấu (phế phẩm).

a) Gọi A là biến cố *"trong 3 sản phẩm lấy ra có 2 sản phẩm tốt."*.

- Mỗi trường hợp thuận lợi cho biến cố A chính là một cách lấy ra 2 sản phẩm tốt và 1 sản phẩm xấu (phế phẩm).
- Để thực hiện một trường hợp thuận lợi cho A ta thực hiện 2 bước. Bước 1 lấy 2 sản phẩm tốt trong $15 - 4 = 11$ sản phẩm tốt. Bước 2, lấy 1 sản phẩm xấu trong 4 sản phẩm xấu của cả hộp.

a) Gọi A là biến cố *"trong 3 sản phẩm lấy ra có 2 sản phẩm tốt."*.

- Mỗi trường hợp thuận lợi cho biến cố A chính là một cách lấy ra 2 sản phẩm tốt và 1 sản phẩm xấu (phế phẩm).
- Để thực hiện một trường hợp thuận lợi cho A ta thực hiện 2 bước. Bước 1 lấy 2 sản phẩm tốt trong $15 - 4 = 11$ sản phẩm tốt. Bước 2, lấy 1 sản phẩm xấu trong 4 sản phẩm xấu của cả hộp.
- Số khả năng thuận lợi cho A là $m_A = C_{11}^2 C_4^1 = 55 \cdot 4 = 220$.

a) Gọi A là biến cố *"trong 3 sản phẩm lấy ra có 2 sản phẩm tốt."*.

- Mỗi trường hợp thuận lợi cho biến cố A chính là một cách lấy ra 2 sản phẩm tốt và 1 sản phẩm xấu (phế phẩm).
- Để thực hiện một trường hợp thuận lợi cho A ta thực hiện 2 bước. Bước 1 lấy 2 sản phẩm tốt trong $15 - 4 = 11$ sản phẩm tốt. Bước 2, lấy 1 sản phẩm xấu trong 4 sản phẩm xấu của cả hộp.
- Số khả năng thuận lợi cho A là $m_A = C_{11}^2 C_4^1 = 55 \cdot 4 = 220$.

Vậy xác suất của A là:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{220}{455} = 0,4835.$$

a) Gọi A là biến cố *"trong 3 sản phẩm lấy ra có 2 sản phẩm tốt."*.

- Mỗi trường hợp thuận lợi cho biến cố A chính là một cách lấy ra 2 sản phẩm tốt và 1 sản phẩm xấu (phế phẩm).
- Để thực hiện một trường hợp thuận lợi cho A ta thực hiện 2 bước. Bước 1 lấy 2 sản phẩm tốt trong $15 - 4 = 11$ sản phẩm tốt. Bước 2, lấy 1 sản phẩm xấu trong 4 sản phẩm xấu của cả hộp.
- Số khả năng thuận lợi cho A là $m_A = C_{11}^2 C_4^1 = 55 \cdot 4 = 220$.

Vậy xác suất của A là:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{220}{455} = 0,4835.$$

b) Tương tự, gọi B là biến cố *"cả 3 sản phẩm đều tốt"*. Ta có

$$\mathbb{P}(B) = \frac{C_{11}^3}{C_{15}^3} = \frac{165}{455} = 0,3626.$$

c) Gọi C là biến cố *"có nhiều nhất một sản phẩm phế phẩm"*. Ở đây chúng ta phân tích việc có nhiều nhất một phế phẩm tương đương với tình huống trong 3 sản phẩm lấy ra có 0 hoặc 1 phế phẩm.

c) Gọi C là biến cố *"có nhiều nhất một sản phẩm phế phẩm"*. Ở đây chúng ta phân tích việc có nhiều nhất một phế phẩm tương đương với tình huống trong 3 sản phẩm lấy ra có 0 hoặc 1 phế phẩm. Như vậy công việc C có thể thực hiện bằng 2 phương án khác nhau.
Phương án I là lấy 3 sản phẩm mà không có phế phẩm nào, số khả năng thuận lợi là $C_{11}^3 = 165$.
Phương án II là lấy 3 sản phẩm thì có 1 phế phẩm và 2 chính phẩm, số khả năng thuận lợi là $C_4^1.C_{11}^2 = 220$.

c) Gọi C là biến cố *"có nhiều nhất một sản phẩm phế phẩm"*. Ở đây chúng ta phân tích việc có nhiều nhất một phế phẩm tương đương với tình huống trong 3 sản phẩm lấy ra có 0 hoặc 1 phế phẩm. Như vậy công việc C có thể thực hiện bằng 2 phương án khác nhau.
Phương án I là lấy 3 sản phẩm mà không có phế phẩm nào, số khả năng thuận lợi là $C_{11}^{3} = 165$.
Phương án II là lấy 3 sản phẩm thì có 1 phế phẩm và 2 chính phẩm, số khả năng thuận lợi là $C_4^1.C_{11}^2 = 220$.
Suy ra, số khả năng thuận lợi cho biến cố C là

$$m = 165 + 220 = 385.$$

c) Gọi C là biến cố *"có nhiều nhất một sản phẩm phế phẩm"*. Ở đây chúng ta phân tích việc có nhiều nhất một phế phẩm tương đương với tình huống trong 3 sản phẩm lấy ra có 0 hoặc 1 phế phẩm. Như vậy công việc C có thể thực hiện bằng 2 phương án khác nhau.
Phương án I là lấy 3 sản phẩm mà không có phế phẩm nào, số khả năng thuận lợi là
$C_{11}^3 = 165$.
Phương án II là lấy 3 sản phẩm thì có 1 phế phẩm và 2 chính phẩm, số khả năng thuận lợi là
$C_4^1.C_{11}^2 = 220$.
Suy ra, số khả năng thuận lợi cho biến cố C là

$$m = 165 + 220 = 385.$$

Vậy xác suất của C là:

$$\mathbb{P}(C) = \frac{m}{n} = \frac{385}{455} = 0,8462.$$

☞ Có nhiều phép thử không thuộc về mô hình cổ điển. Chẳng hạn ta chọn ngẫu nhiên một sinh viên và quan tâm đến chiều cao của sinh viên được chọn. Tương ứng không gian mẫu là tập số thực $\mathbb{R}$. Vì $\mathbb{R}$ có vô hạn phần tử nên phép thử này không thuộc về mô hình cổ điển.

- Có nhiều phép thử không thuộc về mô hình cổ điển. Chẳng hạn ta chọn ngẫu nhiên một sinh viên và quan tâm đến chiều cao của sinh viên được chọn. Tương ứng không gian mẫu là tập số thực $\mathbb{R}$. Vì $\mathbb{R}$ có vô hạn phần tử nên phép thử này không thuộc về mô hình cổ điển.
- Chúng ta có thể xác định giá trị xác suất của một biến cố A thông qua việc theo dõi tần suất xuất hiện của biến cố đó. Cụ thể hơn ta theo dõi số lần xuất hiện của A trong một số lớn lần xuất hiện phép thử.

II. Định nghĩa về xác suất

2. Định nghĩa theo tần suất

- Có nhiều phép thử không thuộc về mô hình cổ điển. Chẳng hạn ta chọn ngẫu nhiên một sinh viên và quan tâm đến chiều cao của sinh viên được chọn. Tương ứng không gian mẫu là tập số thực $\mathbb{R}$. Vì $\mathbb{R}$ có vô hạn phần tử nên phép thử này không thuộc về mô hình cổ điển.
- Chúng ta có thể xác định giá trị xác suất của một biến cố A thông qua việc theo dõi tần suất xuất hiện của biến cố đó. Cụ thể hơn ta theo dõi số lần xuất hiện của A trong một số lớn lần xuất hiện phép thử.
- Ký hiệu n là số lần thử và m là số lần xuất hiện A trong n lần thử đó. Ta gọi $f = \dfrac{m}{n}$ là tần suất xuất hiện của A.

- Có nhiều phép thử không thuộc về mô hình cổ điển. Chẳng hạn ta chọn ngẫu nhiên một sinh viên và quan tâm đến chiều cao của sinh viên được chọn. Tương ứng không gian mẫu là tập số thực $\mathbb{R}$. Vì $\mathbb{R}$ có vô hạn phần tử nên phép thử này không thuộc về mô hình cổ điển.
- Chúng ta có thể xác định giá trị xác suất của một biến cố A thông qua việc theo dõi tần suất xuất hiện của biến cố đó. Cụ thể hơn ta theo dõi số lần xuất hiện của A trong một số lớn lần xuất hiện phép thử.
- Ký hiệu n là số lần thử và m là số lần xuất hiện A trong n lần thử đó. Ta gọi $f = \dfrac{m}{n}$ là tần suất xuất hiện của A.
- Quan sát thực tế người ta nhận thấy rằng nếu n tăng thì giá trị của f thay đổi không nhiều. Có thể nói giá trị của f dần ổn định và ta nhìn nhận về việc tồn tại một giới hạn của f và gọi giới hạn này là xác suất của A.

Định nghĩa 1.8

Giả sử khi thực hiện một phép thử n lần một cách độc lập, thì có m_A lần xuất hiện biến cố A. Khi đó tỷ số

$$f_n(A) = \frac{m_A}{n}$$

được gọi là tần suất xuất hiện biến cố A trong n lần thử.

Định nghĩa 1.8

Giả sử khi thực hiện một phép thử n lần một cách độc lập, thì có m_A lần xuất hiện biến cố A. Khi đó tỷ số

$$f_n(A) = \frac{m_A}{n}$$

được gọi là tần suất xuất hiện biến cố A trong n lần thử. Xác suất của biến cố A được xác định là giới hạn của tần suất khi số phép thử tăng lên vô hạn, tức là

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} f_n(A). \tag{1.5}$$

Ví dụ 9.

Để xác định xác suất bắn trúng đích của một xạ thủ chúng ta yêu cầu anh ta bắn kiểm tra nhiều lần mỗi lần bắn $n = 150$ viên.

Ví dụ 9.

Để xác định xác suất bắn trúng đích của một xạ thủ chúng ta yêu cầu anh ta bắn kiểm tra nhiều lần mỗi lần bắn $n = 150$ viên. Nếu số đạn trúng đích ổn định ở cỡ $m = 125$ viên mỗi lần thì ta có thể coi tỷ số $\frac{125}{150}$ là giới hạn của tần suất.

Ví dụ 9.

Để xác định xác suất bắn trúng đích của một xạ thủ chúng ta yêu cầu anh ta bắn kiểm tra nhiều lần mỗi lần bắn $n = 150$ viên. Nếu số đạn trúng đích ổn định ở cỡ $m = 125$ viên mỗi lần thì ta có thể coi tỷ số $\frac{125}{150}$ là giới hạn của tần suất. Tương ứng, ta nói rằng "xác suất bắn trúng đích của xạ thủ là $\frac{125}{150} = 0,8333 = 83,33\%$.".

Ví dụ 10.

Một hãng hàng không tuyên bố với công chúng là "qua thống kê cho thấy, xác suất rơi máy bay của hãng bằng 0%". Lời tuyên bố này là chấp nhận được vì có thể qua khảo sát thực tế, các chuyến bay đã diễn ra của hãng thì chưa thấy chuyến nào có sự cố bị rơi, tần suất của việc rơi máy bay đến thời điểm quan sát bằng 0. Tuy nhiên, người dùng không thể hiểu xác suất đó là tuyệt đối vì đây chỉ là cách coi tần suất là xác suất khi số phép thử khá lớn, và số phép thử khá lớn bao nhiêu cũng chưa phải là tất cả, các chuyến bay vẫn tiếp tục.

II. Định nghĩa về xác suất

3. Định nghĩa hình học

Đối với một số phép thử ta có thể mô tả không gian mẫu Ω như một tập hợp trong mặt phẳng hoặc trong không gian. Tương ứng một biến cố A của phép thử là một tập con của Ω. Ta sử dụng một số đo hình học nào đấy $m(\Omega), m(A)$ cho Ω và A và định nghĩa $\mathbb{P}(A)$ là

$$\mathbb{P}(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

Đối với một số phép thử ta có thể mô tả không gian mẫu Ω như một tập hợp trong mặt phẳng hoặc trong không gian. Tương ứng một biến cố A của phép thử là một tập con của Ω. Ta sử dụng một số đo hình học nào đấy $m(\Omega), m(A)$ cho Ω và A và định nghĩa $\mathbb{P}(A)$ là

$$\mathbb{P}(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

Ví dụ 11.

Có 2 điệp viên hẹn gặp nhau tại một địa điểm trong công viên. Họ giao ước rằng mỗi người trong số họ phải đến điểm gặp mặt trong khoảng thời gian từ 7h đến 8h. Khi đến điểm hẹn thì chỉ chờ người còn lại không quá 10 phút. Hãy tính xác suất để cuộc hẹn thành công.

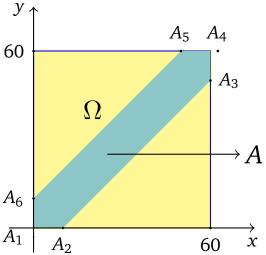
Giải. Để thuận tiện, khoảng thời gian từ 7h đến 8h được đồng nhất với khoảng $[0,60]$ (tính theo phút). Ta ký hiệu một kết quả của phép thử là (x,y) trong đó x,y tương ứng là thời điểm người thứ nhất và người thứ 2 tới điểm hẹn.

Giải. Để thuận tiện, khoảng thời gian từ 7h đến 8h được đồng nhất với khoảng $[0,60]$ (tính theo phút). Ta ký hiệu một kết quả của phép thử là (x,y) trong đó x,y tương ứng là thời điểm người thứ nhất và người thứ 2 tới điểm hẹn. Như vậy ta nhìn nhận Ω là hình vuông

$$\Omega = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x,y \leqslant 60\}.$$

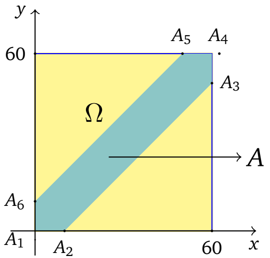
Giải. Để thuận tiện, khoảng thời gian từ 7h đến 8h được đồng nhất với khoảng $[0,60]$ (tính theo phút). Ta ký hiệu một kết quả của phép thử là (x,y) trong đó x,y tương ứng là thời điểm người thứ nhất và người thứ 2 tới điểm hẹn. Như vậy ta nhìn nhận Ω là hình vuông

$$\Omega = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x,y \leqslant 60\}.$$



Giải. Để thuận tiện, khoảng thời gian từ 7h đến 8h được đồng nhất với khoảng $[0, 60]$ (tính theo phút). Ta ký hiệu một kết quả của phép thử là (x,y) trong đó x,y tương ứng là thời điểm người thứ nhất và người thứ 2 tới điểm hẹn. Như vậy ta nhìn nhận Ω là hình vuông

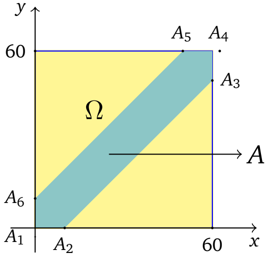
$$\Omega = \{(x,y) \,|\, 0 \leqslant x,y \leqslant 60\}.$$



Gọi A là biến cố chỉ sự kiện "cuộc hẹn thành công". Biến cố A được biểu diễn bằng hình lục giác $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ (hình vẽ).

Giải. Để thuận tiện, khoảng thời gian từ 7h đến 8h được đồng nhất với khoảng $[0,60]$ (tính theo phút). Ta ký hiệu một kết quả của phép thử là (x,y) trong đó x,y tương ứng là thời điểm người thứ nhất và người thứ 2 tới điểm hẹn. Như vậy ta nhìn nhận Ω là hình vuông

$$\Omega = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x,y \leqslant 60\}.$$



Gọi A là biến cố chỉ sự kiện "cuộc hẹn thành công". Biến cố A được biểu diễn bằng hình lục giác $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ (hình vẽ). Vì thế, ta xác định được $\mathbb{P}(A)$ bằng tỷ số của số đo diện tích

$$\mathbb{P}(A) = \frac{s(A)}{s(\Omega)} = \frac{3600-2500}{3600} = \frac{11}{36} \approx 0,3056.$$

Các định nghĩa khác nhau của xác suất giúp cho chúng ta tiếp cận thuận lợi việc tính toán xác suất trong các tình huống thực tế. Điểm chung các định nghĩa này là chúng đảm bảo các tiên đề sau đây về xác suất.

1. Nếu A là một biến cố thì $\mathbb{P}(A) \geqslant 0$.
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
3. Nếu $A_1, A_2, \ldots$ là các biến cố đôi một xung khắc thì

$$\mathbb{P}(A_1 + A_2 + \ldots) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots$$

Các định nghĩa khác nhau của xác suất giúp cho chúng ta tiếp cận thuận lợi việc tính toán xác suất trong các tình huống thực tế. Điểm chung các định nghĩa này là chúng đảm bảo các tiên đề sau đây về xác suất.

1. Nếu A là một biến cố thì $\mathbb{P}(A) \geqslant 0$.
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
3. Nếu $A_1, A_2, \ldots$ là các biến cố đôi một xung khắc thì

$$\mathbb{P}(A_1 + A_2 + \ldots) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots$$

Từ các tiên đề trên ta chứng minh được các công thức

1. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
2. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
3. Nếu A là một biến cố thì $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$.

Chứng minh:

1. Sử dụng tiên đề 3 với $A_k = \varnothing, k = 1, 2, \ldots$ ta thu được

$$\mathbb{P}(\varnothing) = \mathbb{P}(\varnothing) + \mathbb{P}(\varnothing) + \ldots$$

Đẳng thức trên không thể xảy ra với $\mathbb{P}(\varnothing) > 0$. Như vậy $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

2. Sử dụng tiên đề 3 với $A_1 = A$, $A_2 = \overline{A}$, $A_k = \varnothing, k = 3, 4, \ldots$ ta thu được

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\overline{A}) + \mathbb{P}(A)$$

Do $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ nên ta có $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

3. Do $\mathbb{P}(\overline{A}) \geqslant 0$ nên từ 2. ta suy ra $\mathbb{P}(A) \leqslant 1$. Kết hợp với tiên đề 1 ta có $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$.