XÁC SUẤT THỐNG KÊ

Chương I. Biến cố và xác suất của biến cố

GIẢNG VIÊN: NGUYỄN HUY HOÀNG
Bộ môn Đại số và Xác suất thống kê
Khoa Khoa học cơ bản
Đại học Giao thông Vận tải
Email: huyhoang@utc.edu.vn

Hà Nội - 4/2020

BIẾN CỐ VÀ XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

PHẦN II. CÔNG THỨC TÍNH TOÁN XÁC SUẤT

① Công thức cộng xác suất.

② Xác suất có điều kiện.

③ Công thức nhân xác suất.

④ Công thức xác suất đầy đủ.

⑤ Dãy phép thử lặp và công thức Bernoulli.

Các công thức cơ bản

① $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$ với mọi biến cố A.

② Nếu $A \subset B$ thì $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

③ $\mathbb{P}(\Omega) = 1, \quad \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

④ $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ với mọi biến cố A.

Các công thức cơ bản

① $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$ với mọi biến cố A.

② Nếu $A \subset B$ thì $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

③ $\mathbb{P}(\Omega) = 1, \quad \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

④ $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ với mọi biến cố A.

✍ Hệ quả của ②:

$$A = B \ \text{ thì } \ \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B).$$

Công thức xác suất cơ bản

Các công thức cơ bản

① $0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$ với mọi biến cố A.

② Nếu $A \subset B$ thì $\mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$.

③ $\mathbb{P}(\Omega) = 1, \quad \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

④ $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ với mọi biến cố A.

✍ Hệ quả của ②:

$$A = B \quad \text{thì} \quad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B).$$

Ví dụ 1.

Cho biến cố A với $\mathbb{P}(A) = 0,6$. Ta có $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 0,4$.

Hai biến cố xung khắc

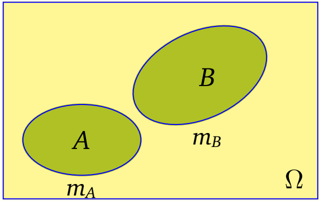
Cho A, B là hai biến cố xung khắc. Ta có công thức:

$$\mathbb{P}(A+B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Hai biến cố xung khắc

Cho A, B là hai biến cố xung khắc. Ta có công thức:

$$\mathbb{P}(A+B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$



① $m_{A+B} = m_A + m_B$

② $\mathbb{P}(A+B) = \dfrac{m_{A+B}}{n} = \dfrac{m_A + m_B}{n}$

$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Ví dụ 2.

a) Cho A, B là hai biến cố xung khắc với $\mathbb{P}(A) = 0,4$; $\mathbb{P}(B) = 0,2$. Ta tính được

$$\mathbb{P}(A + B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 0,4 + 0,2 = 0,6.$$

Ví dụ 2.

a) Cho A, B là hai biến cố xung khắc với $\mathbb{P}(A) = 0,4$; $\mathbb{P}(B) = 0,2$. Ta tính được

$$\mathbb{P}(A+B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 0,4 + 0,2 = 0,6.$$

b) Cho A, B là hai biến cố với $\mathbb{P}(A) = 0,7$; $\mathbb{P}(B) = 0,8$. Ta thấy rằng

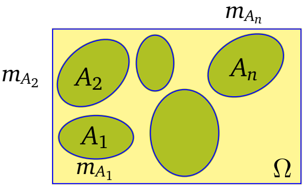
$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 0,7 + 0,8 = 1,5 > 1 \geqslant P(A+B).$$

Từ đó ta suy ra A, B không xung khắc.

1.3 Công thức cộng xác suất

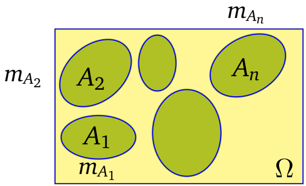
Trường hợp xung khắc

Cho n biến cố đôi một xung khắc:



$$m_{A_1+\ldots+A_n} = m_{A_1} + \ldots + m_{A_n}$$

Cho n biến cố đôi một xung khắc:



$$m_{A_1+\ldots+A_n} = m_{A_1} + \ldots + m_{A_n}$$

n biến cố xung khắc

Cho $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các biến cố xung khắc đôi một. Ta có công thức:

$$\mathbb{P}(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots + \mathbb{P}(A_n).$$

Ví dụ 3

Cho A, B, C là ba biến cố đôi một xung khắc với $A + B + C = \Omega$ và $\mathbb{P}(A) = 0,3$; $\mathbb{P}(B) = 0,4$. Hãy tính $\mathbb{P}(C)$.

Giải: Do A, B, C đôi một xung khắc nên $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$. Từ đó, ta tính được $\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) = 1 - 0,3 - 0,4 = 0,3$.

Ví dụ 3

Cho A, B, C là ba biến cố đôi một xung khắc với $A + B + C = \Omega$ và $\mathbb{P}(A) = 0,3;\ \mathbb{P}(B) = 0,4$. Hãy tính $\mathbb{P}(C)$.

Giải: Do A, B, C đôi một xung khắc nên $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$. Từ đó, ta tính được $\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) = 1 - 0,3 - 0,4 = 0,3$.

Ví dụ 4

Cho biết xác suất để 1 camera (thuộc một loại nào đấy) có thời gian sử dụng dưới 3 năm là 0,15. Xác suất để 1 camera (cũng thuộc loại đó) sử dụng được từ 3 đến 6 năm là 0,65. Hãy cho biết xác suất để một camera (thuộc loại đó) có thời gian sử dụng trên 6 năm.

Ví dụ 3

Cho A, B, C là ba biến cố đôi một xung khắc với $A + B + C = \Omega$ và $\mathbb{P}(A) = 0,3;\ \mathbb{P}(B) = 0,4$. Hãy tính $\mathbb{P}(C)$.

Giải: Do A, B, C đôi một xung khắc nên $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$. Từ đó, ta tính được $\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) = 1 - 0,3 - 0,4 = 0,3$.

Ví dụ 4

Cho biết xác suất để 1 camera (thuộc một loại nào đấy) có thời gian sử dụng dưới 3 năm là 0,15. Xác suất để 1 camera (cũng thuộc loại đó) sử dụng được từ 3 đến 6 năm là 0,65. Hãy cho biết xác suất để một camera (thuộc loại đó) có thời gian sử dụng trên 6 năm.

Đáp số: $0,2$.

1.3 Công thức cộng xác suất

Trường hợp xung khắc

Ví dụ 4

Có ba xạ thủ, mỗi người bắn một viên đạn vào cùng một bia. Cho biết rằng:

1) Xác suất để cả ba cùng bắn trúng đích là $0,21$.
2) Xác suất để cả ba cùng bắn trượt là $0,06$.
3) Xác suất để có đúng một người bắn trúng đích là $0,29$.

Ví dụ 4

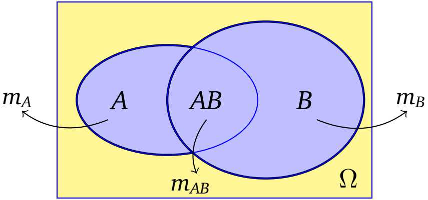
Có ba xạ thủ, mỗi người bắn một viên đạn vào cùng một bia. Cho biết rằng:

1) Xác suất để cả ba cùng bắn trúng đích là $0,21$.
2) Xác suất để cả ba cùng bắn trượt là $0,06$.
3) Xác suất để có đúng một người bắn trúng đích là $0,29$.

Hãy xác định các giá trị sau:

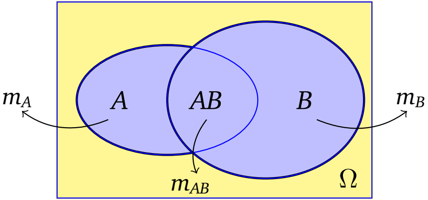
a) Xác suất để có đúng hai người bắn trúng đích.
b) Xác suất để có ít nhất hai người bắn trúng đích.
c) Xác suất để có nhiều nhất hai người bắn trúng đích.
d) Xác suất để có ít nhất một người bắn trúng đích.

Cho A, B là hai biến cố tùy ý



$$m_{A+B} = m_A + m_B - m_{AB}$$

Cho A, B là hai biến cố tùy ý



$$m_{A+B} = m_A + m_B - m_{AB}$$

Hai biến cố tùy ý

Cho A, B là hai biến cố tùy ý. Ta có công thức:

$$\mathbb{P}(A+B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB).$$

Ví dụ 5

Cho A, B là hai biến cố sao cho $\mathbb{P}(A) = 0,6$, $\mathbb{P}(B) = 0,7$ và $\mathbb{P}(AB) = 0,42$. Ta tính được

$$\mathbb{P}(A + B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB) = 0,6 + 0,7 - 0,42 = 0,88.$$

Ví dụ 5

Cho A, B là hai biến cố sao cho $\mathbb{P}(A) = 0,6,\quad \mathbb{P}(B) = 0,7$ và $\mathbb{P}(AB) = 0,42$. Ta tính được

$$\mathbb{P}(A+B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB) = 0,6 + 0,7 - 0,42 = 0,88.$$

Ví dụ 6

Có hai xạ thủ, mỗi người bắn một viên đạn vào cùng một bia. Cho biết rằng:

1) Xác suất để người thứ nhất bắn trúng đích là $0,7$.
2) Xác suất để người thứ hai bắn trúng đích là $0,8$.
3) Xác suất để có đúng một người bắn trúng đích là $0,3$.

Hãy tính xác suất để cả hai người đều bắn trúng đích.

Ví dụ 5

Cho A, B là hai biến cố sao cho $\mathbb{P}(A) = 0,6,\quad \mathbb{P}(B) = 0,7$ và $\mathbb{P}(AB) = 0,42$. Ta tính được

$$\mathbb{P}(A+B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB) = 0,6 + 0,7 - 0,42 = 0,88.$$

Ví dụ 6

Có hai xạ thủ, mỗi người bắn một viên đạn vào cùng một bia. Cho biết rằng:

1) Xác suất để người thứ nhất bắn trúng đích là $0,7$.
2) Xác suất để người thứ hai bắn trúng đích là $0,8$.
3) Xác suất để có đúng một người bắn trúng đích là $0,3$.

Hãy tính xác suất để cả hai người đều bắn trúng đích.

Đáp số: $0,6$

Công thức cộng cho 3 biến cố tùy ý

Cho A, B, C là ba biến cố tùy ý. Ta có công thức:

$$\mathbb{P}(A+B+C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(AB) - \mathbb{P}(BC) - \mathbb{P}(CA) + \mathbb{P}(ABC).$$

Xét phép thử "chọn ngẫu nhiên một người". Ta quan tâm đến các biến cố

Xét phép thử "chọn ngẫu nhiên một người". Ta quan tâm đến các biến cố

☞ Biến cố A chỉ sự kiện "người được chọn cao trên 170 cm".

Xét phép thử "chọn ngẫu nhiên một người". Ta quan tâm đến các biến cố

- Biến cố A chỉ sự kiện "người được chọn cao trên 170 cm".
- Biến cố B chỉ sự kiện "người được chọn nặng trên 70 kg".

Xét phép thử "chọn ngẫu nhiên một người". Ta quan tâm đến các biến cố

- Biến cố A chỉ sự kiện "người được chọn cao trên 170 cm".
- Biến cố B chỉ sự kiện "người được chọn nặng trên 70 kg".

Ta biết rằng:

- Khả năng chọn được một người nặng trên 70 kg trong mỗi lần chọn ngẫu nhiên một người chính là $\mathbb{P}(B)$.

Xét phép thử "chọn ngẫu nhiên một người". Ta quan tâm đến các biến cố

- Biến cố A chỉ sự kiện "người được chọn cao trên 170 cm".
- Biến cố B chỉ sự kiện "người được chọn nặng trên 70 kg".

Ta biết rằng:

- Khả năng chọn được một người nặng trên 70 kg trong mỗi lần chọn ngẫu nhiên một người chính là $\mathbb{P}(B)$.
- Nếu việc chọn ngẫu nhiên 1 người được thực hiện trong phạm vi hẹp hơn là chọn 1 trong những người cao trên 170 cm thì khả năng xuất hiện của B theo điều kiện này không thể bằng $\mathbb{P}(B)$ nữa. Điều kiện đặt ra chính là A xuất hiện.

Xét phép thử "chọn ngẫu nhiên một người". Ta quan tâm đến các biến cố

- Biến cố A chỉ sự kiện "người được chọn cao trên 170 cm".
- Biến cố B chỉ sự kiện "người được chọn nặng trên 70 kg".

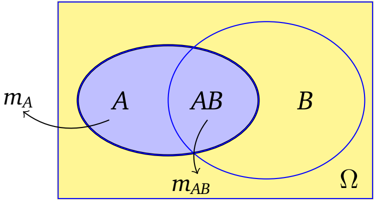
Ta biết rằng:

- Khả năng chọn được một người nặng trên 70 kg trong mỗi lần chọn ngẫu nhiên một người chính là $\mathbb{P}(B)$.
- Nếu việc chọn ngẫu nhiên 1 người được thực hiện trong phạm vi hẹp hơn là chọn 1 trong những người cao trên 170 cm thì khả năng xuất hiện của B theo điều kiện này không thể bằng $\mathbb{P}(B)$ nữa. Điều kiện đặt ra chính là A xuất hiện.

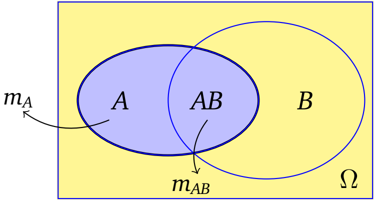
Giống như ví dụ trên, trong trường hợp tổng quát, nhìn chung là sự xuất hiện của biến cố A gây ảnh hưởng tới khả năng xuất hiện của biến cố B.

Giá trị mô tả khả năng xuất hiện của biến cố B trong điều kiện biến cố A đã xuất hiện được ký hiệu là $\mathbb{P}(B|A)$ (đọc là "Xác suất của B với điều kiện A").

Giá trị mô tả khả năng xuất hiện của biến cố B trong điều kiện biến cố A đã xuất hiện được ký hiệu là $\mathbb{P}(B|A)$ (đọc là "Xác suất của B với điều kiện A").



Giá trị mô tả khả năng xuất hiện của biến cố B trong điều kiện biến cố A đã xuất hiện được ký hiệu là $\mathbb{P}(B|A)$ (đọc là "Xác suất của B với điều kiện A").



Công thức xác suất điều kiện

Cho A, B là hai biến cố tùy ý. Ta có công thức:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Chú ý

Đổi vai trò của A, B ta có công thức:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Chú ý

Đổi vai trò của A, B ta có công thức:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Ví dụ 7

Cho A, B là hai biến cố với $\mathbb{P}(A) = 0,8; \mathbb{P}(B) = 0,6$ và $\mathbb{P}(AB) = 0,5$. Ta có

+) $\mathbb{P}(B|A) = \dfrac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{0,5}{0,8} = 0,625.$

+) $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{0,5}{0,6} \approx 0,8333.$

Nhắc lại công thức xác suất có điều kiện:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(A)}$$

1.5 Công thức nhân xác suất

Công thức nhân xác suất

Nhắc lại công thức xác suất có điều kiện:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(A)}$$

Từ công thức trên ta có

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A).$$

Nhắc lại công thức xác suất có điều kiện:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(A)}$$

Từ công thức trên ta có

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A).$$

Trao đổi vai trò của A, B ta có

$$\mathbb{P}(BA) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B).$$

Nhắc lại công thức xác suất có điều kiện:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(A)}$$

Từ công thức trên ta có

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A).$$

Trao đổi vai trò của A, B ta có

$$\mathbb{P}(BA) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B).$$

Công thức nhân xác suất

Cho A, B là hai biến cố. Ta có công thức

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B).$$

Ví dụ 8

Một gian hàng có 30 gói sản phẩm trong đó có 5 gói sắp hết hạn sử dụng. Một khách hàng muốn mua 1 gói sản phẩm. Người đó chọn ngẫu nhiên từng gói sản phẩm và kiểm tra hạn sử dụng cho đến khi chọn được 1 gói mà hạn sử dụng còn dài thì dừng lại. Nếu chọn phải gói sắp hết hạn thì loại ra. Tính xác suất để khách hàng đó chọn được gói sản phẩm mình muốn sau 2 lần chọn.

Ví dụ 8

Một gian hàng có 30 gói sản phẩm trong đó có 5 gói sắp hết hạn sử dụng. Một khách hàng muốn mua 1 gói sản phẩm. Người đó chọn ngẫu nhiên từng gói sản phẩm và kiểm tra hạn sử dụng cho đến khi chọn được 1 gói mà hạn sử dụng còn dài thì dừng lại. Nếu chọn phải gói sắp hết hạn thì loại ra. Tính xác suất để khách hàng đó chọn được gói sản phẩm mình muốn sau 2 lần chọn.

Lời giải: Ký hiệu A_i là biến cố "ở lần lựa chọn thứ i, khách hàng chọn được sản phẩm mà hạn sử dụng còn dài" với $i = 1, 2, \ldots$. Xác suất để khách hàng đó chọn được gói sản phẩm mình muốn sau 2 lần chọn là $\mathbb{P}(\overline{A_1}A_2)$.

Ví dụ 8

Một gian hàng có 30 gói sản phẩm trong đó có 5 gói sắp hết hạn sử dụng. Một khách hàng muốn mua 1 gói sản phẩm. Người đó chọn ngẫu nhiên từng gói sản phẩm và kiểm tra hạn sử dụng cho đến khi chọn được 1 gói mà hạn sử dụng còn dài thì dừng lại. Nếu chọn phải gói sắp hết hạn thì loại ra. Tính xác suất để khách hàng đó chọn được gói sản phẩm mình muốn sau 2 lần chọn.

Lời giải: Ký hiệu A_i là biến cố "ở lần lựa chọn thứ i, khách hàng chọn được sản phẩm mà hạn sử dụng còn dài" với $i = 1, 2, \ldots$. Xác suất để khách hàng đó chọn được gói sản phẩm mình muốn sau 2 lần chọn là $\mathbb{P}(\overline{A_1}A_2)$. Từ giả thiết ta thấy rằng

$$\mathbb{P}(\overline{A_1}) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(A_2|\overline{A_1}) = \frac{25}{29}.$$

Ví dụ 8

Một gian hàng có 30 gói sản phẩm trong đó có 5 gói sắp hết hạn sử dụng. Một khách hàng muốn mua 1 gói sản phẩm. Người đó chọn ngẫu nhiên từng gói sản phẩm và kiểm tra hạn sử dụng cho đến khi chọn được 1 gói mà hạn sử dụng còn dài thì dừng lại. Nếu chọn phải gói sắp hết hạn thì loại ra. Tính xác suất để khách hàng đó chọn được gói sản phẩm mình muốn sau 2 lần chọn.

Lời giải: Ký hiệu A_i là biến cố "ở lần lựa chọn thứ i, khách hàng chọn được sản phẩm mà hạn sử dụng còn dài" với $i = 1, 2, \ldots$. Xác suất để khách hàng đó chọn được gói sản phẩm mình muốn sau 2 lần chọn là $\mathbb{P}(\overline{A_1}A_2)$. Từ giả thiết ta thấy rằng

$$\mathbb{P}(\overline{A_1}) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(A_2|\overline{A_1}) = \frac{25}{29}.$$

Sử dụng công thức nhân xác suất ta tính được

$$\mathbb{P}(\overline{A_1}A_2) = \mathbb{P}(\overline{A_1}).\mathbb{P}(A_2|\overline{A_1}) = \frac{1}{6}.\frac{25}{29} = \frac{25}{174} \approx 0,1437.$$

Xét phép thử "chọn ngẫu nhiên một người". Ta quan tâm đến các biến cố

Xét phép thử "chọn ngẫu nhiên một người". Ta quan tâm đến các biến cố

☞ Biến cố A chỉ sự kiện "người được chọn cao trên 170 cm".

Xét phép thử "chọn ngẫu nhiên một người". Ta quan tâm đến các biến cố

- Biến cố A chỉ sự kiện "người được chọn cao trên 170 cm".
- Biến cố B chỉ sự kiện "người được chọn có khả năng giao tiếp bằng tiếng Anh".

Xét phép thử "chọn ngẫu nhiên một người". Ta quan tâm đến các biến cố

- Biến cố A chỉ sự kiện "người được chọn cao trên 170 cm".
- Biến cố B chỉ sự kiện "người được chọn có khả năng giao tiếp bằng tiếng Anh".

Ta thấy rằng, trong tình huống đang xét, sự xuất hiện của A không làm thay đổi khả năng xuất hiện của B, hay là $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$.

Xét phép thử "chọn ngẫu nhiên một người". Ta quan tâm đến các biến cố

- Biến cố A chỉ sự kiện "người được chọn cao trên 170 cm".
- Biến cố B chỉ sự kiện "người được chọn có khả năng giao tiếp bằng tiếng Anh".

Ta thấy rằng, trong tình huống đang xét, sự xuất hiện của A không làm thay đổi khả năng xuất hiện của B, hay là $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$.

Định nghĩa

Cho A, B là hai biến cố. Ta nói biến cố B độc lập với sự xuất hiện của biến cố A nếu như

$$\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B).$$

Cho A, B là hai biến cố. Nếu B là biến cố độc lập với A thì

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Cho A, B là hai biến cố. Nếu B là biến cố độc lập với A thì

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Kế tiếp, ta có đẳng thức

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A),$$

và A cũng độc lập với B.

Cho A, B là hai biến cố. Nếu B là biến cố độc lập với A thì

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Kế tiếp, ta có đẳng thức

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A),$$

và A cũng độc lập với B.

☞ Ta nói A, B độc lập với nhau.

Cho A, B là hai biến cố. Nếu B là biến cố độc lập với A thì

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Kế tiếp, ta có đẳng thức

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A),$$

và A cũng độc lập với B.

☞ Ta nói A, B độc lập với nhau.

Công thức nhân xác suất - TH độc lập

Nếu A, B là 2 biến cố độc lập thì

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Kết luận

Hai biến cố A, B là 2 biến cố độc lập khi và và chỉ khi

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Kết luận

Hai biến cố A, B là 2 biến cố độc lập khi và và chỉ khi

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Ta có $B = B(A + \overline{A}) = AB + \overline{A}B$ nên $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(AB) + \mathbb{P}(\overline{A}B)$. Nếu A, B độc lập thì

$$\mathbb{P}(\overline{A}B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = (1 - \mathbb{P}(A))\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B).$$

Kết luận

Hai biến cố A, B là 2 biến cố độc lập khi và và chỉ khi

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Ta có $B = B(A + \overline{A}) = AB + \overline{A}B$ nên $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(AB) + \mathbb{P}(\overline{A}B)$. Nếu A, B độc lập thì

$$\mathbb{P}(\overline{A}B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = (1 - \mathbb{P}(A))\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B).$$

☞ Như vậy A, B độc lập với nhau thì $\overline{A}, B$ cũng độc lập với nhau.

Kết luận

Hai biến cố A, B là 2 biến cố độc lập khi và và chỉ khi

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Ta có $B = B(A + \overline{A}) = AB + \overline{A}B$ nên $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(AB) + \mathbb{P}(\overline{A}B)$. Nếu A, B độc lập thì

$$\mathbb{P}(\overline{A}B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = (1 - \mathbb{P}(A))\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B).$$

☞ Như vậy A, B độc lập với nhau thì $\overline{A}, B$ cũng độc lập với nhau.

☞ Thêm nữa, nếu A, B độc lập với nhau thì

+) $A, \overline{B}$ độc lập với nhau.

+) $\overline{A}, \overline{B}$ độc lập với nhau.

Định lý

Cho các biến cố $A_1, A_2, ..., A_n$. Ta có công thức
$$\mathbb{P}(A_1A_2...A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1A_2)...\mathbb{P}(A_n|A_1A_2...A_{n-1}). \tag{1.17}$$

Nếu các biến cố $A_1, A_2, ..., A_n$ là độc lập, thì ta có
$$\mathbb{P}(A_1A_2...A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)...\mathbb{P}(A_n). \tag{1.18}$$

Định lý

Cho các biến cố $A_1, A_2, ..., A_n$. Ta có công thức

$$\mathbb{P}(A_1A_2...A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1A_2)...\mathbb{P}(A_n|A_1A_2...A_{n-1}). \quad (1.17)$$

Nếu các biến cố $A_1, A_2, ..., A_n$ là độc lập, thì ta có

$$\mathbb{P}(A_1A_2...A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)...\mathbb{P}(A_n). \quad (1.18)$$

Ví dụ 9

Một gian hàng có 30 gói sản phẩm trong đó có 5 gói sắp hết hạn sử dụng. Một khách hàng muốn mua 1 gói sản phẩm. Người đó chọn ngẫu nhiên từng gói sản phẩm và kiểm tra hạn sử dụng cho đến khi chọn được 1 gói mà hạn sử dụng còn dài thì dừng lại. Nếu chọn phải gói sắp hết hạn thì loại ra. Tính xác suất để khách hàng đó chọn được gói sản phẩm mình muốn sau 4 lần chọn.

Lời giải: Ký hiệu A_i là biến cố "ở lần lựa chọn thứ i, khách hàng chọn được sản phẩm mà hạn sử dụng còn dài" với $i = 1, 2, \ldots$. Gọi A là biến cố "khách hàng chọn được gói sản phẩm mình muốn sau 4 lần chọn". Ta thấy rằng

$$A = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4.$$

Lời giải: Ký hiệu A_i là biến cố "ở lần lựa chọn thứ i, khách hàng chọn được sản phẩm mà hạn sử dụng còn dài" với $i = 1, 2, \ldots$. Gọi A là biến cố "khách hàng chọn được gói sản phẩm mình muốn sau 4 lần chọn". Ta thấy rằng

$$A = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4.$$

Từ giả thiết ta xác định được rằng

$$\mathbb{P}(\overline{A}_1) = \frac{1}{6},\ \mathbb{P}(\overline{A}_2|\overline{A}_1) = \frac{4}{29},\ \ \mathbb{P}(\overline{A}_3|\overline{A}_1\overline{A}_2) = \frac{3}{28},\ \mathbb{P}(A_4|\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = \frac{25}{27},$$

Lời giải: Ký hiệu A_i là biến cố "ở lần lựa chọn thứ i, khách hàng chọn được sản phẩm mà hạn sử dụng còn dài" với $i = 1, 2, \ldots$. Gọi A là biến cố "khách hàng chọn được gói sản phẩm mình muốn sau 4 lần chọn". Ta thấy rằng

$$A = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4.$$

Từ giả thiết ta xác định được rằng

$$\mathbb{P}(\overline{A}_1) = \frac{1}{6},\ \mathbb{P}(\overline{A}_2|\overline{A}_1) = \frac{4}{29},\ \ \mathbb{P}(\overline{A}_3|\overline{A}_1\overline{A}_2) = \frac{3}{28},\ \mathbb{P}(A_4|\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = \frac{25}{27},$$

Sử dụng công thức nhân xác suất ta tính được

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4) = \mathbb{P}(\overline{A}_1)\mathbb{P}(\overline{A}_2|\overline{A}_1)\mathbb{P}(\overline{A}_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)\mathbb{P}(A_4|\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)\\ &= \frac{1}{6}.\frac{4}{29}.\frac{3}{28}.\frac{25}{27} = \frac{25}{10962} \approx 0,0023.\end{aligned}$$

Ví dụ 10

Một máy tính của một chi nhánh ngân hàng có thể gửi tín hiệu đến máy chủ tại trụ sở chính của ngân hàng bởi 1 trong 3 đường truyền. Nếu đường truyền thứ nhất bị quá tải (nghẽn tín hiệu) thì máy tính sẽ chọn một trong hai đường truyền còn lại để kết nối. Xác suất để tại cùng một thời điểm các đường truyền quá tải là $0,3; 0,35; 0,4$. Các đường truyền hoạt động độc lập. Tính xác suất để ở một thời điểm nào đó xảy ra sự kiện

Ví dụ 10

Một máy tính của một chi nhánh ngân hàng có thể gửi tín hiệu đến máy chủ tại trụ sở chính của ngân hàng bởi 1 trong 3 đường truyền. Nếu đường truyền thứ nhất bị quá tải (nghẽn tín hiệu) thì máy tính sẽ chọn một trong hai đường truyền còn lại để kết nối. Xác suất để tại cùng một thời điểm các đường truyền quá tải là $0,3; 0,35; 0,4$. Các đường truyền hoạt động độc lập. Tính xác suất để ở một thời điểm nào đó xảy ra sự kiện

a) Cả 3 đường truyền đều bị quá tải.

b) Có đúng hai đường truyền bị quá tải.

Ví dụ 10

Một máy tính của một chi nhánh ngân hàng có thể gửi tín hiệu đến máy chủ tại trụ sở chính của ngân hàng bởi 1 trong 3 đường truyền. Nếu đường truyền thứ nhất bị quá tải (nghẽn tín hiệu) thì máy tính sẽ chọn một trong hai đường truyền còn lại để kết nối. Xác suất để tại cùng một thời điểm các đường truyền quá tải là $0,3; 0,35; 0,4$. Các đường truyền hoạt động độc lập. Tính xác suất để ở một thời điểm nào đó xảy ra sự kiện

a) Cả 3 đường truyền đều bị quá tải.

b) Có đúng hai đường truyền bị quá tải.

Hướng dẫn: Gọi A_i là biến cố "đường truyền thứ i bị quá tải" (i=1, 2, 3). Gọi A là biến cố "cả 3 đường truyền đều bị quá tải". Gọi B là biến có "có đúng hai đường truyền bị quá tải".

Ví dụ 10

Một máy tính của một chi nhánh ngân hàng có thể gửi tín hiệu đến máy chủ tại trụ sở chính của ngân hàng bởi 1 trong 3 đường truyền. Nếu đường truyền thứ nhất bị quá tải (nghẽn tín hiệu) thì máy tính sẽ chọn một trong hai đường truyền còn lại để kết nối. Xác suất để tại cùng một thời điểm các đường truyền quá tải là $0,3; 0,35; 0,4$. Các đường truyền hoạt động độc lập. Tính xác suất để ở một thời điểm nào đó xảy ra sự kiện

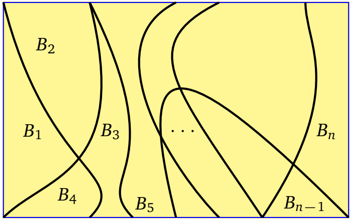
a) Cả 3 đường truyền đều bị quá tải.

b) Có đúng hai đường truyền bị quá tải.

Hướng dẫn: Gọi A_i là biến cố "đường truyền thứ i bị quá tải" (i=1, 2, 3). Gọi A là biến cố "cả 3 đường truyền đều bị quá tải". Gọi B là biến có "có đúng hai đường truyền bị quá tải". Ta có

+) $A = A_1A_2A_3$.

+) $B = A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$.



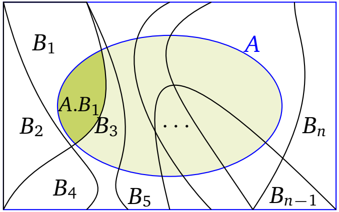
Định nghĩa

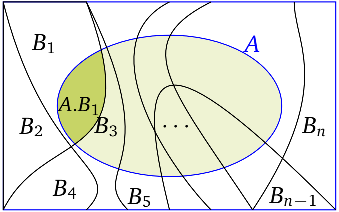
Cho một hệ các biến cố $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ của cùng một phép thử. Hệ các biến cố này là một hệ biến cố đầy đủ, nếu nó thỏa mãn hai điều kiện dưới đây:

i) $B_1 + B_2 + \ldots + B_n = \Omega$, với Ω là không gian mẫu.

ii) $B_i.B_j = \varnothing$, $\forall i \neq j$ và $i, j = \overline{1, n}$.

Công thức xác suất đầy đủ





Định lý (Công thức xác suất đầy đủ)

Giả sử $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ là một hệ biến cố đầy đủ của một phép thử nào đó. Giả sử A là một biến cố bất kỳ có liên quan đến phép thử. Khi đó, xác suất của A được tính theo công thức sau đây và gọi là công thức xác suất đầy đủ.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(A|B_1) + \mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(A|B_2) + ... + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}(A|B_n). \tag{1.19}$$

Chứng minh. Ta có $B_1 + B_2 + \ldots + B_n = \Omega$ nên
$$A = A\Omega = A(B_1 + B_2 + \ldots + B_n) = AB_1 + AB_2 + \ldots + AB_n.$$
Với $i \neq j$ ta có $(AB_i)(AB_j) = AB_iB_j = A\varnothing = \varnothing$ nên sử dụng công thức cộng, công thức nhân xác suất ta có
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(AB_1 + AB_2 + \ldots + AB_n)\\ &= \mathbb{P}(AB_1) + \mathbb{P}(AB_2) + \ldots + \mathbb{P}(AB_n)\\ &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(A|B_1) + \mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(A|B_2) + \ldots + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}(A|B_n).\end{aligned}$$

Ví dụ 11

Nghiên cứu của Bộ y tế cho thấy rằng tỷ lệ nam giới hút thuốc lá là 20%. Mỗi nam giới là người hút thuốc có xác suất mắc bệnh ung thư $0,78$. Mỗi nam giới là người không hút thuốc có xác suất bị ung thư là $0,06$. Chọn ngẫu nhiên một nam giới để kiểm tra. Tính xác suất để người đó mắc bệnh ung thư.

Ví dụ 11

Nghiên cứu của Bộ y tế cho thấy rằng tỷ lệ nam giới hút thuốc lá là 20%. Mỗi nam giới là người hút thuốc có xác suất mắc bệnh ung thư $0,78$. Mỗi nam giới là người không hút thuốc có xác suất bị ung thư là $0,06$. Chọn ngẫu nhiên một nam giới để kiểm tra. Tính xác suất để người đó mắc bệnh ung thư.

Giải. Gọi B là biến cố người nam giới được chọn là người hút thuốc lá. Gọi A là biến cố người được chọn là người mắc bệnh ung thư.

Ví dụ 11

Nghiên cứu của Bộ y tế cho thấy rằng tỷ lệ nam giới hút thuốc lá là 20%. Mỗi nam giới là người hút thuốc có xác suất mắc bệnh ung thư $0,78$. Mỗi nam giới là người không hút thuốc có xác suất bị ung thư là $0,06$. Chọn ngẫu nhiên một nam giới để kiểm tra. Tính xác suất để người đó mắc bệnh ung thư.

Giải. Gọi B là biến cố người nam giới được chọn là người hút thuốc lá. Gọi A là biến cố người được chọn là người mắc bệnh ung thư. Ta thấy rằng hệ $\{B, \overline{B}\}$ là một hệ đầy đủ, với
$\mathbb{P}(B) = 0,2,\ \mathbb{P}(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}(B) = 0,8.$

Ví dụ 11

Nghiên cứu của Bộ y tế cho thấy rằng tỷ lệ nam giới hút thuốc lá là 20%. Mỗi nam giới là người hút thuốc có xác suất mắc bệnh ung thư $0,78$. Mỗi nam giới là người không hút thuốc có xác suất bị ung thư là $0,06$. Chọn ngẫu nhiên một nam giới để kiểm tra. Tính xác suất để người đó mắc bệnh ung thư.

Giải. Gọi B là biến cố người nam giới được chọn là người hút thuốc lá. Gọi A là biến cố người được chọn là người mắc bệnh ung thư. Ta thấy rằng hệ $\{B, \overline{B}\}$ là một hệ đầy đủ, với $\mathbb{P}(B) = 0,2,\ \mathbb{P}(\overline{B}) = 1 - \mathbb{P}(B) = 0,8$. Tính $\mathbb{P}(A)$ theo công thức xác suất đầy đủ

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}(A|\overline{B}) = 0,2.0,78 + 0,8.0,06 = 0,204.$$

Định lý (Công thức Bayes)

Cho $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ là một hệ đầy đủ và A là một biến cố nào đấy của cùng một phép thử, sao cho $P(A) \neq 0$. Khi đó ta có công thức Bayes như sau:

$$\mathbb{P}(B_k|A) = \frac{\mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(A|B_k)}{\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(A|B_1) + ... + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}(A|B_n)}, \text{ với } k = 1, 2, ..., n. \quad (1.20)$$

Chứng minh. Công thức này được suy từ công thức xác suất có điều kiện $\mathbb{P}(B_k|A) = \frac{\mathbb{P}(B_k A)}{\mathbb{P}(A)}$. Ta thay $\mathbb{P}(B_k A)$ trên tử số bằng công thức nhân xác suất $\mathbb{P}(B_k A) = \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(A|B_k)$ và thay $\mathbb{P}(A)$ dưới mẫu số bởi công thức xác suất đầy đủ (1.19), sẽ nhận được công thức (1.20).

Ví dụ 1.12

Có ba cái hộp đựng sản phẩm, hộp thứ nhất chứa 6 chính phẩm và 2 phế phẩm, hộp thứ hai chứa 10 chính phẩm và 4 phế phẩm, hộp thứ ba chứa 15 chính phẩm và 5 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên một hộp, rồi từ đó lấy ngẫu nhiên một sản phẩm.

a) Tính xác suất để sản phẩm lấy ra là chính phẩm.

b) Giả sử sản phẩm lấy ra là chính phẩm, hãy tính xác suất để đó là sản phẩm của hộp thứ hai.

Ví dụ 1.12

Có ba cái hộp đựng sản phẩm, hộp thứ nhất chứa 6 chính phẩm và 2 phế phẩm, hộp thứ hai chứa 10 chính phẩm và 4 phế phẩm, hộp thứ ba chứa 15 chính phẩm và 5 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên một hộp, rồi từ đó lấy ngẫu nhiên một sản phẩm.
a) Tính xác suất để sản phẩm lấy ra là chính phẩm.
b) Giả sử sản phẩm lấy ra là chính phẩm, hãy tính xác suất để đó là sản phẩm của hộp thứ hai.

Lời giải. Gọi B_i là biến cố *"hộp được lựa chọn là hộp thứ i"*, $i = 1, 2, 3$. Khi đó, $\{B_1, B_2, B_3\}$ là một hệ đầy đủ, với

$$\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_3) = \frac{1}{3}.$$

Ví dụ 1.12

Có ba cái hộp đựng sản phẩm, hộp thứ nhất chứa 6 chính phẩm và 2 phế phẩm, hộp thứ hai chứa 10 chính phẩm và 4 phế phẩm, hộp thứ ba chứa 15 chính phẩm và 5 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên một hộp, rồi từ đó lấy ngẫu nhiên một sản phẩm.
a) Tính xác suất để sản phẩm lấy ra là chính phẩm.
b) Giả sử sản phẩm lấy ra là chính phẩm, hãy tính xác suất để đó là sản phẩm của hộp thứ hai.

Lời giải. Gọi B_i là biến cố *"hộp được lựa chọn là hộp thứ i"*, $i = 1, 2, 3$. Khi đó, $\{B_1, B_2, B_3\}$ là một hệ đầy đủ, với

$$\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_3) = \frac{1}{3}.$$

Gọi A là biến cố *sản phẩm được lấy ra là một chính phẩm*.Từ giả thiết ta có

$$\mathbb{P}(A|B_1) = \frac{6}{8}, \quad \mathbb{P}(A|B_2) = \frac{10}{14}, \quad \mathbb{P}(A|B_3) = \frac{15}{20}.$$

a) Tính $\mathbb{P}(A)$ theo công thức xác suất đầy đủ

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(A|B_1) + \mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(A|B_2) + \mathbb{P}(B_3)\mathbb{P}(A|B_3)\\ &= \frac{1}{3}.\frac{6}{8} + \frac{1}{3}.\frac{10}{14} + \frac{1}{3}.\frac{15}{20} = \frac{31}{42} = 0,7381.\end{aligned}$$

a) Tính $\mathbb{P}(A)$ theo công thức xác suất đầy đủ

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(A|B_1) + \mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(A|B_2) + \mathbb{P}(B_3)\mathbb{P}(A|B_3)\\ &= \frac{1}{3}.\frac{6}{8} + \frac{1}{3}.\frac{10}{14} + \frac{1}{3}.\frac{15}{20} = \frac{31}{42} = 0,7381.\end{aligned}$$

b) Giả sử lấy được chính phẩm, tức là A đã xảy ra. Tính khả năng nó là sản phẩm của hộp thứ hai, nghĩa là tính $\mathbb{P}(B_2|A)$.

a) Tính $\mathbb{P}(A)$ theo công thức xác suất đầy đủ

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(A|B_1) + \mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(A|B_2) + \mathbb{P}(B_3)\mathbb{P}(A|B_3)\\ &= \frac{1}{3}.\frac{6}{8} + \frac{1}{3}.\frac{10}{14} + \frac{1}{3}.\frac{15}{20} = \frac{31}{42} = 0,7381.\end{aligned}$$

b) Giả sử lấy được chính phẩm, tức là A đã xảy ra. Tính khả năng nó là sản phẩm của hộp thứ hai, nghĩa là tính $\mathbb{P}(B_2|A)$. Dùng công thức Bayes ta thu được

$$\mathbb{P}(B_2|A) = \frac{\mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(A|B_2)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{3}.\frac{10}{14}}{\frac{31}{42}} = \frac{10}{31} = 0,3226.$$

Nhận xét

Nếu phép thử gồm hai giai đoạn, biến cố A liên quan đến giai đoạn sau, thì các kết quả có thể của giai đoạn đầu chính là một hệ đầy đủ.

Nhận xét

Nếu phép thử gồm hai giai đoạn, biến cố A liên quan đến giai đoạn sau, thì các kết quả có thể của giai đoạn đầu chính là một hệ đầy đủ.

Ví dụ 1.13

Một lô hàng gồm 50 sản phẩm tốt và 5 sản phẩm xấu được vận chuyển về kho, trong quá trình vận chuyển đã có 1 sản phẩm (không rõ chất lượng) bị mất. Khi lô hàng về đến kho, chọn ngẫu nhiên 1 sản phẩm:

a) Tính xác suất để sản phẩm này là sản phẩm tốt.

b) Biết rằng sản phẩm được chọn là tốt, tính xác suất để sản phẩm bị mất là sản phẩm tốt.

Nhận xét

Nếu phép thử gồm hai giai đoạn, biến cố A liên quan đến giai đoạn sau, thì các kết quả có thể của giai đoạn đầu chính là một hệ đầy đủ.

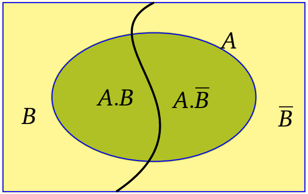
Ví dụ 1.13

Một lô hàng gồm 50 sản phẩm tốt và 5 sản phẩm xấu được vận chuyển về kho, trong quá trình vận chuyển đã có 1 sản phẩm (không rõ chất lượng) bị mất. Khi lô hàng về đến kho, chọn ngẫu nhiên 1 sản phẩm:

a) Tính xác suất để sản phẩm này là sản phẩm tốt.

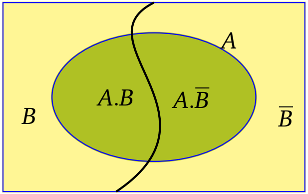
b) Biết rằng sản phẩm được chọn là tốt, tính xác suất để sản phẩm bị mất là sản phẩm tốt.

Lời giải. Gọi B là biến cố sản phẩm bị mất là sản phẩm tốt. Khi đó $\{B, \overline{B}\}$ là một hệ đầy đủ, với $\mathbb{P}(B) = \dfrac{50}{55}$ và $\mathbb{P}(\overline{B}) = \dfrac{5}{55}$.



a) Gọi A là biến cố sản phẩm lấy ra là sản phẩm tốt. Từ giả thiết ta có các xác suất điều kiện $\mathbb{P}(A|B) = \frac{49}{54}$ và $\mathbb{P}(A|\overline{B}) = \frac{50}{54}$. Sử dụng công thức xác suất đầy đủ ta có

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}(A|\overline{B}) = \frac{50}{55} \cdot \frac{49}{54} + \frac{5}{55} \cdot \frac{50}{54} = \frac{50}{55} = 0,9091.$$



a) Gọi A là biến cố sản phẩm lấy ra là sản phẩm tốt. Từ giả thiết ta có các xác suất điều kiện $\mathbb{P}(A|B) = \frac{49}{54}$ và $\mathbb{P}(A|\overline{B}) = \frac{50}{54}$. Sử dụng công thức xác suất đầy đủ ta có

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}(A|\overline{B}) = \frac{50}{55} \cdot \frac{49}{54} + \frac{5}{55} \cdot \frac{50}{54} = \frac{50}{55} = 0,9091.$$

b) Xác suất cần tính là $\mathbb{P}(B|A)$. Kiểu tính này ta gọi là dùng hậu nghiệm để tính tiền nghiệm. Dùng công thức Bayes, ta có:

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B)P(A|B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{50}{55} \cdot \frac{49}{54}}{\frac{50}{55}} = \frac{49}{54} = 0,9074.$$

Trong một số tình huống ta cần tính toán xác suất liên quan đến việc thực hiện liên tiếp một phép thử n lần độc lập. Chẳng hạn

Trong một số tình huống ta cần tính toán xác suất liên quan đến việc thực hiện liên tiếp một phép thử n lần độc lập. Chẳng hạn

- Ta coi việc sử dụng một máy điều hòa là thực hiện một phép thử. Tương ứng việc một công ty lắp đặt và sử dụng một lô 25 máy điều hòa chính là thực hiện $n = 25$ phép thử.

Trong một số tình huống ta cần tính toán xác suất liên quan đến việc thực hiện liên tiếp một phép thử n lần độc lập. Chẳng hạn

- ✍ Ta coi việc sử dụng một máy điều hòa là thực hiện một phép thử. Tương ứng việc một công ty lắp đặt và sử dụng một lô 25 máy điều hòa chính là thực hiện $n = 25$ phép thử.
- ✍ Ta coi việc chạy một chuyến xe buýt trên một tuyến nào đó là thực hiện một phép thử. Tương ứng, việc chạy 50 chuyến xe buýt trong một ngày trên tuyến đó chính là thực hiện $n = 50$ phép thử.

Trong một số tình huống ta cần tính toán xác suất liên quan đến việc thực hiện liên tiếp một phép thử n lần độc lập. Chẳng hạn

- ✍ Ta coi việc sử dụng một máy điều hòa là thực hiện một phép thử. Tương ứng việc một công ty lắp đặt và sử dụng một lô 25 máy điều hòa chính là thực hiện $n = 25$ phép thử.
- ✍ Ta coi việc chạy một chuyến xe buýt trên một tuyến nào đó là thực hiện một phép thử. Tương ứng, việc chạy 50 chuyến xe buýt trong một ngày trên tuyến đó chính là thực hiện $n = 50$ phép thử.
- ✍ Ta coi việc theo dõi khả năng mắc bệnh truyền nhiễm ở một người dân trong một năm là thực hiện một phép thử. Tương ứng việc cơ quan y tế dự phòng theo dõi khả năng mắc bệnh truyền nhiễm trong một năm đối với một thành phố có 500.000 dân là thực hiện $n = 500.000$ phép thử.

Định lý

Cho A là biến cố của một phép thử với $\mathbb{P}(A) = p$ (không đổi). Thực hiện phép thử đó n lần độc lập. Khi đó:

a) Xác suất để trong n lần thử, biến cố A xuất hiện đúng k lần $(0 \leqslant k \leqslant n)$:

$$P_n(k;p) = C_n^k\, p^k(1-p)^{n-k}. \tag{1.21}$$

b) Xác suất để trong n lần thử, biến cố A xuất hiện từ k_1 đến k_2 lần:

$$P_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2;p) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k\, p^k(1-p)^{n-k}. \tag{1.22}$$

Định lý

Cho A là biến cố của một phép thử với $\mathbb{P}(A) = p$ (không đổi). Thực hiện phép thử đó n lần độc lập. Khi đó:

a) Xác suất để trong n lần thử, biến cố A xuất hiện đúng k lần $(0 \leqslant k \leqslant n)$:

$$P_n(k;p) = C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}. \tag{1.21}$$

b) Xác suất để trong n lần thử, biến cố A xuất hiện từ k_1 đến k_2 lần:

$$P_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2; p) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k}. \tag{1.22}$$

Chứng minh. Ta gọi A_i là biến cố chỉ *"lần thử thứ i xuất hiện A"*, $i = 1, 2, .., n$. Do dãy phép thử độc lập, nên các biến cố A_i độc lập, với $\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A) = p, \forall i = 1, 2, ..., n$.

Công thức (1.21): Gọi B là biến cố *trong n lần thử thì biến cố A xuất hiện k lần*. Tương ứng, trong n lần thử có $(n-k)$ lần không xuất hiện A, hay $(n-k)$ lần xuất hiện $\overline{A}$. Chẳng hạn

$$\underbrace{A_1A_2...A_k}_{k \text{ lần}}\ \underbrace{\overline{A}_{k+1}...\overline{A}_n}_{n-k \text{ lần}}.$$

Ta tách B thành một tổng của các biến cố xung khắc

$$B = \sum B_1B_2\dots B_n \tag{1.21a}$$

trong đó ứng với mỗi số hạng của vế phải $B_1B_2\dots B_n$ ta lấy

$$B_i = \begin{cases} A_i & \text{nếu lần thử thứ } i \text{ xuất hiện } A, \\ \overline{A_i} & \text{nếu lần thử thứ } i \text{ không xuất hiện } A. \end{cases}.$$

Do các lần thử độc lập nên mỗi số hạng trong vế phải của $(1.21a)$ có xác suất là

$$\mathbb{P}(B_1B_2\dots B_n) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2)\dots\mathbb{P}(B_n) = [\mathbb{P}(A)]^k[\mathbb{P}(\overline{A})]^{n-k} = p^k(1-p)^{n-k}.$$

Mỗi số hạng trong vế phải của $(1.21a)$ ứng với một cách chọn k vị trí trong dãy $B_1B_2\ldots B_n$ để gán $B_i = A_i$ (các vị trí khác được gán $B_i = \overline{A}_i$). Như vậy số lượng số hạng trong vế phải $(1.21a)$ chính là số tổ hợp chập k của n, hay là C_n^k. Từ đó ta có

$$\mathbb{P}(B) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Người ta thường ký hiệu công thức Bernoulli theo các chỉ số có liên quan, nên $\mathbb{P}(B)$ còn được ký hiệu là $P_n(k;p)$.

Công thức (1.22): Ta gọi C là biến cố *trong n lần thử thì biến cố A xuất hiện từ k_1 đến k_2 lần*, gọi C_k là biến cố *trong n lần thử thì biến cố A xuất hiện k lần*. Như vậy biểu diễn được $C = C_{k_1} \cup C_{k_1+1} \cup \ldots \cup C_{k_2}$. Do các biến cố trong tổng là xung khắc nên

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C_{k_1}) + \mathbb{P}(C_{k_1+1}) + \ldots + \mathbb{P}(C_{k_2}).$$

Mà mỗi xác suất $\mathbb{P}(C_k)$ lại được tính như công thức (1.21). Từ đó ta nhận được công thức (1.22).

Nhận xét

Trong bài toán Bernoulli, các thông tin quan trọng cần được phân tích theo trật tự:

- Phép thử là gì?
- Phép thử đó lặp bao nhiêu lần? (tìm n)
- Mỗi lần thử ta quan tâm đến biến cố A chỉ cái gì?
- Xác suất xảy ra A là bao nhiêu? (tìm p-không đổi)
- Cần tính xác suất để trong n lần thử thì A xuất hiện mấy lần? (tìm k)

Ví dụ 1.14

Người ta kiểm tra chất lượng một thùng hàng bằng cách lấy ngẫu nhiên 5 lần, mỗi lần 1 sản phẩm, có hoàn lại. Nếu trong 5 lần lấy, có không quá 1 lần xuất hiện phế phẩm thì thùng hàng sẽ được chấp nhận. Biết rằng thùng hàng có 150 sản phẩm, trong đó có 10 phế phẩm. Tính xác suất để thùng hàng được chấp nhận.

Ví dụ 1.14

Người ta kiểm tra chất lượng một thùng hàng bằng cách lấy ngẫu nhiên 5 lần, mỗi lần 1 sản phẩm, có hoàn lại. Nếu trong 5 lần lấy, có không quá 1 lần xuất hiện phế phẩm thì thùng hàng sẽ được chấp nhận. Biết rằng thùng hàng có 150 sản phẩm, trong đó có 10 phế phẩm. Tính xác suất để thùng hàng được chấp nhận.

Lời giải. Mỗi lần lấy một sản phẩm từ thùng hàng là một phép thử. Vì lấy có hoàn lại nên khi thực hiện 5 lần, ta nhận được một dãy phép thử độc lập với $n = 5$.

Ví dụ 1.14

Người ta kiểm tra chất lượng một thùng hàng bằng cách lấy ngẫu nhiên 5 lần, mỗi lần 1 sản phẩm, có hoàn lại. Nếu trong 5 lần lấy, có không quá 1 lần xuất hiện phế phẩm thì thùng hàng sẽ được chấp nhận. Biết rằng thùng hàng có 150 sản phẩm, trong đó có 10 phế phẩm. Tính xác suất để thùng hàng được chấp nhận.

Lời giải. Mỗi lần lấy một sản phẩm từ thùng hàng là một phép thử. Vì lấy có hoàn lại nên khi thực hiện 5 lần, ta nhận được một dãy phép thử độc lập với $n = 5$.
Mỗi lần thử, ta quan tâm biến cố A chỉ thông tin *sản phẩm lấy được là phế phẩm*. Ta có

$$\mathbb{P}(A) = \frac{10}{150} = \frac{1}{15}.$$

Ta thấy $\mathbb{P}(A)$ không thay đổi ở mỗi lần thử, nên $p = \dfrac{1}{15}$.

Gọi B là biến cố *thùng hàng được chấp nhận*. Theo đề bài, thùng hàng được chấp nhận là khi có không quá 1 phế phẩm xuất hiện trong 5 lần kiểm tra ngẫu nhiên. Vậy số lần xuất hiện phế phẩm là $0 \leqslant k \leqslant 1$.

Gọi B là biến cố *thùng hàng được chấp nhận*. Theo đề bài, thùng hàng được chấp nhận là khi có không quá 1 phế phẩm xuất hiện trong 5 lần kiểm tra ngẫu nhiên. Vậy số lần xuất hiện phế phẩm là $0 \leqslant k \leqslant 1$. Dùng công thức Bernoulli (1.22), ta có

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B) &= \sum_{k=0}^{1} C_5^k p^k (1-p)^{5-k} \\
&= C_5^0 \left(\frac{1}{15}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{15}\right)^5 + C_5^1 \left(\frac{1}{15}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{15}\right)^4 \\
&= 0,7082 + 0,2529 = 0,9611.
\end{aligned}$$

Ví dụ 1.15

Xác suất để mỗi chiếc camera (thuộc 1 loại camera nào đấy) có thời gian sử dụng dưới 3 năm là $0,2$, có thời gian sử dụng từ 3 đến 6 năm là $0,5$.

a) Một chi nhánh ngân hàng lắp đặt 12 camera. Tính xác suất để có 6 camera sử dụng được trên 6 năm.

b) Một gia đình lắp đặt 3 camera. Tính xác suất để trong 3 camera đó có 2 chiếc có thời gian sử dụng từ 3 đến 6 năm và 1 chiếc sử dụng được trên 6 năm.

Ví dụ 1.15

Xác suất để mỗi chiếc camera (thuộc 1 loại camera nào đấy) có thời gian sử dụng dưới 3 năm là $0,2$, có thời gian sử dụng từ 3 đến 6 năm là $0,5$.

a) Một chi nhánh ngân hàng lắp đặt 12 camera. Tính xác suất để có 6 camera sử dụng được trên 6 năm.

b) Một gia đình lắp đặt 3 camera. Tính xác suất để trong 3 camera đó có 2 chiếc có thời gian sử dụng từ 3 đến 6 năm và 1 chiếc sử dụng được trên 6 năm.

Lời giải: Ta coi việc sử dụng 1 camera là việc thực hiện phép thử. Ký hiệu:

- A là biến cố "camera có thời gian sử dụng dưới 3 năm".
- B là biến cố "camera có thời gian sử dụng từ 3 đến 6 năm".
- C là biến cố "camera có thời gian sử dụng trên 6 năm".

Theo giả thiết $\mathbb{P}(A) = 0,2,\ \mathbb{P}(B) = 0,5$. Ta có $A + B + C = \Omega$. Do A, B, C đôi một xung khắc nên

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C).$$

Suy ra $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(\Omega) - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) = 1 - 0,2 - 0,5 = 0,3.$

Theo giả thiết $\mathbb{P}(A) = 0,2$, $\mathbb{P}(B) = 0,5$. Ta có $A + B + C = \Omega$. Do A, B, C đôi một xung khắc nên

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C).$$

Suy ra $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(\Omega) - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) = 1 - 0,2 - 0,5 = 0,3$.

a) Việc lắp đặt 12 camera chính là thực hiện $n = 12$ phép thử. Sự kiện trong 12 camera được lắp đặt có 6 camera sử dụng được trên 6 năm chính là trong 12 lần thử có 6 lần xuất hiện biến cố C. Theo công thức Bernoulli, xác suất cần tính là

$$P_{12}(6; 0,3) = C_{12}^{3}(0,3)^{6}(1-0,3)^{12-6} \approx 0,0792$$

Theo giả thiết $\mathbb{P}(A) = 0,2,\ \mathbb{P}(B) = 0,5$. Ta có $A + B + C = \Omega$. Do A, B, C đôi một xung khắc nên

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C).$$

Suy ra $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(\Omega) - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) = 1 - 0,2 - 0,5 = 0,3$.

a) Việc lắp đặt 12 camera chính là thực hiện $n = 12$ phép thử. Sự kiện trong 12 camera được lắp đặt có 6 camera sử dụng được trên 6 năm chính là trong 12 lần thử có 6 lần xuất hiện biến cố C. Theo công thức Bernoulli, xác suất cần tính là

$$P_{12}(6; 0,3) = C_{12}^{3}(0,3)^6(1 - 0,3)^{12-6} \approx 0,0792$$

b) Ký hiệu D là biến cố "trong 3 camera của gia đình có 2 chiếc có thời gian sử dụng từ 3 đến 6 năm và 1 chiếc sử dụng được trên 6 năm"

Ký hiệu B_i là biến cố "camera thứ i sử dụng được từ 3 đến 6 năm ".

Ký hiệu C_i là biến cố "camera thứ i sử dụng được trên 6 năm ".

Ta có $\mathbb{P}(B_i) = 0,5$ và $\mathbb{P}(C_i) = 0,3$.

Ta thấy rằng

$$D = B_1 B_2 C_3 + B_1 C_2 B_3 + C_1 B_2 B_3.$$

Ta thấy rằng

$$D = B_1B_2C_3 + B_1C_2B_3 + C_1B_2B_3.$$

Do D là tổng của ba biến cố xung khắc, nên ta có

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(B_1B_2C_3) + \mathbb{P}(B_1C_2B_3) + \mathbb{P}(C_1B_2B_3)$$

Ta thấy rằng

$$D = B_1B_2C_3 + B_1C_2B_3 + C_1B_2B_3.$$

Do D là tổng của ba biến cố xung khắc, nên ta có

$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(B_1B_2C_3) + \mathbb{P}(B_1C_2B_3) + \mathbb{P}(C_1B_2B_3)$$

Do các camera hoạt động độc lập nên ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(C_3) + \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(C_2)\mathbb{P}(B_3) + \mathbb{P}(C_1)\mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(B_3)\\ &= 3.0, 5.0, 5.0, 3 = 0, 225.\end{aligned}$$