

BÀI TẬP XÁC SUẤT THỐNG KÊ

CHƯƠNG IV. BIẾN NGẪU NHIÊN NHIỀU CHIỀU

PHẦN I. BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC HAI CHIỀU

1. Hàm khối xác suất và bảng phân phối xác suất đồng thời

Bài 1.1. Cho $\mathcal{S} = \{(1, 1); (1, 3); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 1); (3, 4)\}$ là tập giá trị của biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) . Hàm khối xác suất của (X, Y) là

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, 2 & \text{nếu } (x, y) \in \mathcal{S}, 2x + y = 5 \\ 0, 1 & \text{nếu } (x, y) \in \mathcal{S}, 2x + y \neq 5 \end{cases}$$

- a) Hãy lập bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) .
- b) Tính $\mathbb{P}(2X + Y \leq 5)$.

Bài 1.2. Cho $\mathcal{S} = \{(2, 1); (2, 2); (2, 4); (3, 1); (3, 2); (3, 4); (4, 4); (4, 5)\}$ là tập giá trị của biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) . Hàm khối xác suất của (X, Y) là

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, 2 & \text{nếu } (x, y) \in \mathcal{S}, 3x + y = 10 \\ 0, 1 & \text{nếu } (x, y) \in \mathcal{S}, 3x + y \neq 10 \end{cases}$$

- a) Hãy lập bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) .
- b) Tính $\mathbb{P}(X + 3Y > 13)$.

Bài 1.3. Cho $\mathcal{S} = \{(x, y) \mid x, y = 1, 2, 3, 4\}$ là tập giá trị của biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) . Hàm khối xác suất của (X, Y) là

$$f(x, y) = \begin{cases} k & \text{nếu } (x, y) \in \mathcal{S}, x \geq y \\ 0, 1 & \text{nếu } (x, y) \in \mathcal{S}, x < y \end{cases}$$

- a) Tính giá trị của k .
- b) Hãy lập bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) .

Bài 1.4. Cho $\mathcal{S} = \{(x, y) \mid x, y = 1, 2, 3, 4\}$ là tập giá trị của biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) . Hàm khối xác suất của (X, Y) là

$$f(x, y) = \begin{cases} 2k & \text{nếu } (x, y) \in \mathcal{S}, x = y \\ k & \text{nếu } (x, y) \in \mathcal{S}, x \neq y \end{cases}$$

- a) Tính giá trị của k .
- b) Hãy lập bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) .

Bài 1.5. Cho $\mathcal{S} = \{(x, y) \mid x, y = 0, 1, 2, 3\}$ là tập giá trị của biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) . Hàm khối xác suất của (X, Y) là

$$f(x, y) = \begin{cases} 2k & \text{nếu } (x, y) \in \mathcal{S}, x + y = 3 \\ k & \text{nếu } (x, y) \in \mathcal{S}, x + y \neq 3 \end{cases}$$

- Tính giá trị của k .
- Hãy lập bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) .

Bài 1.6. Cho $\mathcal{S} = \{(x, y) \mid x, y = 0, 1, 2, 3\}$ là tập giá trị của biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) . Hàm khối xác suất của (X, Y) là

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, 1 & \text{nếu } (x, y) \in \mathcal{S}, |x - y| = 1 \\ k & \text{nếu } (x, y) \in \mathcal{S}, |x - y| \neq 1 \end{cases}$$

- Tính giá trị của k .
- Hãy lập bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) .

Bài 1.7. Cho $\mathcal{S} = \{(x, y) \mid x, y = -2, -1, 1, 2\}$ là tập giá trị của biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) . Hàm khối xác suất của (X, Y) là

$$f(x, y) = \begin{cases} k & \text{nếu } (x, y) \in \mathcal{S}, x^2 + y^2 = 5 \\ 0 & \text{nếu } (x, y) \in \mathcal{S}, x^2 + y^2 \neq 5 \end{cases}$$

- Tính giá trị của k .
- Hãy lập bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) .

Bài 1.8. Cho $\mathcal{S} = \{(x, y) \mid x, y = -2, -1, 1, 2\}$ là tập giá trị của biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) . Hàm khối xác suất của (X, Y) là

$$f(x, y) = \begin{cases} 3k & \text{nếu } (x, y) \in \mathcal{S}, x^2 + y^2 = 5 \\ k & \text{nếu } (x, y) \in \mathcal{S}, x^2 + y^2 \neq 5 \end{cases}$$

- Tính giá trị của k .
- Hãy lập bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) .

Bài 1.9. Một gia đình có 2 xe ô tô và 3 xe máy. Gọi X, Y lần lượt là biến ngẫu nhiên chỉ số xe ô tô và xe máy được đưa ra sử dụng trong một ngày. Hàm khối xác suất của (X, Y) là

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } (x, y) \in \mathcal{S}, x + y < 2 \\ k(4 + 3y) & \text{nếu } (x, y) \in \mathcal{S}, x + y = 2 \\ k & \text{nếu } (x, y) \in \mathcal{S}, x + y > 2 \end{cases}$$

- Tính giá trị của k .
- Hãy lập bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) .

Bài 1.10. Một hộp chứa 10 viên pin trong đó có 4 viên pin mới, 3 viên pin cũ và 3 viên pin đã hỏng. Chọn ngẫu nhiên 2 viên pin từ trong hộp. Gọi X, Y lần lượt là biến ngẫu nhiên chỉ số viên pin mới và cũ trong số 2 viên pin lấy ra. Hãy lập bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) .

Bài 1.11. Một tổ có 12 sinh viên trong đó có 3 sinh viên giỏi, 5 sinh viên khá, 4 sinh viên trung bình. Chọn ngẫu nhiên 2 sinh viên để giải bài tập trên bảng. Gọi X, Y lần lượt là biến ngẫu nhiên chỉ số sinh viên giỏi và khá được gọi lên bảng. Hãy lập bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) .

Bài 1.12. Trên mặt bàn có 12 lá thăm ứng với 12 câu hỏi thi kết thúc học phần. Trong các câu hỏi đó có 3 câu hỏi dễ, 7 câu hỏi ở mức thông thường chỉ cần biết vận dụng kiến thức là giải đáp được. 2 câu hỏi còn lại là ở mức nâng cao. Một sinh viên được yêu cầu bốc 2 lá thăm để lựa chọn câu hỏi. Gọi X, Y lần lượt là biến ngẫu nhiên chỉ số câu hỏi dễ và số câu hỏi thông thường mà sinh viên lựa chọn được. Hãy lập bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) .

2. Các phân phối biên và tính độc lập.

Bài 2.1. Cho $\mathcal{S} = \{(x, y) \mid x, y = -2, -1, 1, 2\}$ là tập giá trị của biến ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) . Hàm khối xác suất của (X, Y) là

$$f(x, y) = \begin{cases} 0,05 & \text{nếu } (x, y) \in \mathcal{S}, x = y \\ 0,1 & \text{nếu } (x, y) \in \mathcal{S}, x^2 + y^2 = 5 \\ 0 & \text{trong trường hợp còn lại} \end{cases}$$

- Hãy lập bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) .
- Hãy lập bảng phân phối xác suất của X, Y .
- Hỏi X và Y có độc lập không?

Bài 2.2. Một dịch vụ vận chuyển hàng từ Hà Nội vào TP. Hồ Chí Minh cho các trang bán hàng online quy chuẩn cho trọng lượng X của những gói hàng là 0, 2 kg, 0, 5 kg, 1 kg và mức giá vận chuyển Y (tính theo nghìn đồng) cho những gói hàng là 16, 25, 35. Hàm khối xác suất đồng thời của đại lượng ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) có dạng

$$f(x, y) = c(10x + y), \text{ với } x = 0, 2; 0, 5; 1 \text{ và } y = 16; 25; 35.$$

- Tìm hệ số c .
- Tính mức giá vận chuyển trung bình cho một gói hàng.
- Những gói hàng có giá vận chuyển 35 nghìn đồng có trung bình khối lượng quy chuẩn là bao nhiêu.

Bài 2.3. Một nhóm sinh viên tham gia câu lạc bộ bóng đá và câu lạc bộ bóng chuyền có lịch luyện tập cố định hàng tuần mỗi môn 3 buổi. Một sinh viên trong nhóm có thể không tham gia một vài buổi tập trong tuần của nhóm vì còn tham gia các hoạt động

khác. Chọn ngẫu nhiên một sinh viên, tương ứng ta gọi X là đại lượng ngẫu nhiên chỉ số buổi tập bóng đá trong tuần, Y là đại lượng ngẫu nhiên chỉ số buổi tập bóng chuyền trong tuần mà anh ta tham gia được. Hàm khối xác suất đồng thời của đại lượng ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) có dạng

$$f(x, y) = c(2 + xy), \text{ với } x, y = 1, 2, 3.$$

- Tìm hệ số c .
- Tính xác suất chọn được sinh viên có số buổi tham gia tập bóng đá nhiều hơn số buổi tham gia tập bóng chuyền.
- Các sinh viên tham gia tất cả các buổi tập bóng đá có trung bình bao nhiêu buổi tập bóng chuyền một tuần.

Bài 2.4. Một học viên học lái ô tô muốn hoàn thành bài thi sát hạch thì số lỗi lý thuyết mắc phải không vượt quá 3 và số lỗi thực hành mắc phải cũng không vượt quá 3. Đối với một học viên đã hoàn thành bài thi sát hạch ta gọi X là số lỗi lý thuyết và Y là số lỗi thực hành của người đó. Hàm khối xác suất đồng thời của đại lượng ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) có dạng

$$f(x, y) = c(1 + 3x + y), \text{ với } x, y = 0, 1, 2, 3.$$

- Tìm hệ số c .
- Tính $\mathbb{P}(X = 3|Y = 2)$ và $\mathbb{P}(Y = 2|X = 3)$. X và Y có độc lập hay không? Tại sao?
- Một học viên đã hoàn thành bài thi sát hạch có trung bình bao nhiêu lỗi lý thuyết, bao nhiêu lỗi thực hành khi thi.

Bài 2.5. Chương trình khuyến mãi của một nhãn hiệu thời trang cho phép mỗi khách hàng được mua tối đa 3 sản phẩm đồng giá. Các loại áo được bán khuyến mãi với giá chung là 250.000 đồng/chiếc. Các loại quần được bán khuyến mãi với giá chung là 200.000 đồng/chiếc. Đối với mỗi khách hàng ta ký hiệu X là số áo và Y là số quần được khuyến mãi mà người đó quyết định mua. Hàm khối xác suất đồng thời của đại lượng ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) có dạng

$$f(x, y) = \begin{cases} c \cdot 2^{-(x+y)} & \text{nếu } 1 \leq x + y \leq 3, \\ 0 & \text{trong trường hợp khác.} \end{cases}$$

- Tìm hệ số c .
- Mỗi khách hàng mua trung bình bao nhiêu sản phẩm khuyến mãi và mua hết trung bình bao nhiêu tiền.
- Chọn ngẫu nhiên một khách hàng và chọn được người mua một chiếc áo khuyến mãi. Hãy tính số tiền trung bình của người đó chi ra khi mua các sản phẩm khuyến mãi.

Bài 2.6. Chương trình khuyến mãi của một nhãn hiệu thời trang bán đồng giá các loại áo với giá chung là 250.000 đồng/chiếc, các loại quần với giá chung là 200.000 đồng/chiếc. Mỗi khách hàng được mua tối đa 2 chiếc áo và được mua tối đa 2 chiếc quần. Đối với mỗi khách hàng ta ký hiệu X là số áo và Y là số quần được khuyến mãi

mà người đó quyết định mua. Hàm khối xác suất đồng thời của đại lượng ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) có dạng

$$f(x, y) = c \cdot 2^{-|x-y|} \quad \text{với } x, y = 0, 1, 2.$$

- Tìm hệ số c .
- Giả sử mỗi ngày cửa hàng có 80 khách đến mua hàng. Tính giá trị trung bình của số lượng hàng khuyến mãi được tiêu thụ trong ngày và giá trị trung bình của số tiền bán hàng khuyến mãi.

Bài 2.7. Một công ty vận tải cho thuê xe ô tô để tổ chức các đoàn du lịch. Ký hiệu X là số xe được thuê và Y là số ngày muốn thuê. Bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) được cho như sau:

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	0,1	0,1	0,05	0,05
2	0,05	0,05	0,1	0,1
3	0	0	0,2	0,2

- Số xe trung bình được thuê cho một đoàn du lịch là bao nhiêu?
- Nhu cầu thuê xe của các đoàn có thời gian du lịch 4 ngày có trung bình là bao nhiêu?

Bài 2.8. Gian hàng điện máy của một siêu thị có hai quầy thu ngân, mỗi quầy thu ngân có hai nhân viên thu ngân. Gọi X, Y tương ứng là số nhân viên thu ngân bận ở mỗi quầy tại cùng một thời điểm. Biết bảng phân phối xác suất đồng thời của đại lượng ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) như sau:

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0,05	0,1	0,15
1	0,1	0,15	0,1
2	0,05	0,2	0,1

- Lập bảng phân phối xác suất của X và Y .
- Tính trung bình số thu ngân bận ở cả hai quầy thu ngân tại cùng một thời điểm $\mathbb{E}(X + Y)$.
- Hỏi X và Y có độc lập không?

Bài 2.9. Cho hàm khối xác suất đồng thời của (X, Y) xác định bởi:

$$f(x, y) = c|xy|, \quad x = 1, 2; \quad y = -1, 1, 2.$$

- Tìm hằng số c .
- Hỏi X và Y có độc lập không?
- Tính $\mathbb{P}(X + Y = 3)$; $\mathbb{P}(X \neq Y)$.

Bài 2.10. Khi truyền tín hiệu (mã hóa theo bit), do có nhiễu trên đường truyền nên các bit bị méo theo 3 mức cao, trung bình, thấp với xác suất tương ứng là 0,01; 0,04 và 0,95. Giả sử có 2 bit được truyền, các bit được truyền độc lập. Gọi X là số bit thay đổi ở mức cao, Y là số bit thay đổi ở mức trung bình.

- Tìm hàm khối xác suất đồng thời của (X, Y) .
- Lập bảng phân phối xác suất của X và Y .
- Tính $f_X(1|1)$ và $f_Y(1|1)$.

Bài 2.11. Khi truyền tải thông tin kỹ thuật số, mỗi bit nhận được được đánh giá là chấp nhận được, nghi ngờ hay không thể chấp nhận được phụ thuộc vào chất lượng của tín hiệu nhận được với xác suất tương ứng là 0,9; 0,08; 0,02. Giả sử có 3 bit được truyền đi. Gọi X là số bit có thể chấp nhận được, Y là số bit nghi ngờ.

- Lập bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) .
- Tính trung bình số bit nhận được được đánh giá là có thể chấp nhận được khi truyền đi 3 bit.
- Hỏi X và Y có độc lập không?

Bài 2.12. Để kiểm soát chất lượng sản phẩm, một nhà máy chuyên sản xuất linh kiện điện tử lấy mẫu một phần sản phẩm sản xuất ra và sử dụng hai máy để kiểm tra và phân loại. Xác suất nhận biết chính xác linh kiện bị lỗi của hai máy lần lượt là 0,993 và 0,997. Biết rằng hai máy hoạt động độc lập nhau. Giả sử có 2 linh kiện bị lỗi được đưa qua hai máy để kiểm tra. Gọi X, Y là số linh kiện được xác định là bị lỗi bởi máy 1 và 2.

- Lập bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) .
- Lập bảng phân phối xác suất của X, Y .
- Tính $\mathbb{E}[X - Y]$, $\mathbb{V}[X - Y]$.

3. Hiệp phương sai, hệ số tương quan và kỳ vọng có điều kiện

Bài 3.1. Cho hàm khối xác suất đồng thời của (X, Y) như sau:

$$f(x, y) = c \cdot 3^{|x-2y|}, \quad x = 1, 3; \quad y = 0, 1, 2.$$

- Tìm hệ số c .
- Tính hiệp phương sai giữa X và Y .

Bài 3.2. Cho hàm khối xác suất đồng thời của (X, Y) như sau:

$$f(x, y) = c \cdot |xy|, \quad x = 1, 3, 4; \quad y = -1, 1, 2.$$

- Tìm hệ số c .
- Tính hiệp phương sai giữa X và Y .

Bài 3.3. Cho hàm khối xác suất đồng thời của (X, Y) như sau:

$$f(x, y) = c \cdot 2^{-|3x-2y|}, \quad x = 1, 2, 3; \quad y = 2, 3, 5.$$

- Tìm hệ số c .
- Tính hiệp phương sai giữa X và Y .

Bài 3.4. Đối với mỗi hộ gia đình ta gọi X là số lượng lao động và Y là số xe máy cá nhân. Bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) được cho như sau:

$X \backslash Y$	1	2	3	4
1	0,1	0,1	0,05	0
2	0,05	0,1	0,2	0,1
3	0	0,1	0,15	0,05

- Tính số xe máy trung bình của một gia đình và số lao động trung bình của một gia đình.
- Tính hiệp phương sai và hệ số tương quan của X và Y .

Bài 3.5. Một công ty kinh doanh việc cho thuê các xe ô tô tự lái. Ký hiệu X là số ngày được thuê và Y là mức giá thuê xe (tính theo trăm nghìn đồng/ngày). Bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) được cho như sau:

$X \backslash Y$	8	9	10	12
1	0,1	0,1	0,05	0,05
2	0,05	0,1	0,1	0,05
3	0,05	0,2	0,1	0,05

- Hãy lập bảng phân phối xác suất của X và Y .
- Tính số tiền trung bình công ty thu được khi cho thuê một xe.
- Tính hiệp phương sai và hệ số tương quan của X và Y .

Bài 3.6. Đối với mỗi hộ gia đình ta gọi X là số lượng lao động và Y là số xe ô tô cá nhân. Bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) được cho như sau:

$X \backslash Y$	0	1	2
1	0,1	0,05	0
2	0,3	0,25	0,05
3	0,1	0,1	0,05

- Tính số ô tô trung bình của một gia đình và số lao động trung bình của một gia đình.
- Tính hiệp phương sai và hệ số tương quan của X và Y .

Bài 3.7. Một loại thực phẩm có hạn sử dụng là ba ngày và được đóng sẵn trong các gói với trọng lượng là 0,2; 0,5; 1 (kg). Một nhóm khách hàng thường mua mỗi lần không quá ba gói và các gói đó có cùng khối lượng. Đối với mỗi khách hàng của nhóm này ta gọi X là trọng lượng của mỗi gói và Y là số lượng các gói. Bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) như sau

$X \backslash Y$	1	2	3
0,2	0,1	0,1	0,05
0,5	0,25	0,2	0,05
1	0,1	0,1	0,05

- a) Tính số tiền trung bình mà mỗi khách hàng của nhóm trên chi ra mỗi lần để mua loại thực phẩm này, biết rằng giá bán của nó là 180.000 đồng/kg.
- b) Tính hiệp phương sai và hệ số tương quan của X và Y .

Bài 3.8. Một công ty kinh doanh việc cho thuê các xe ô tô tự lái. Ký hiệu X là số ngày được thuê và Y là mức giá thuê xe (tính theo trăm nghìn đồng/ngày). Bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) được cho như sau:

$X \backslash Y$	8	9	10	12
1	0,05	0,1	0,1	0,05
2	0,05	0,15	0,05	0,05
3	0,1	0,15	0,1	0,05

- a) Tính số tiền trung bình công ty thu được khi cho thuê một xe.
- b) Tính hiệp phương sai và hệ số tương quan của X và Y .

Bài 3.9. Một công ty tổ chức cho thuê các máy xúc theo tháng. Ký hiệu X là số tháng được thuê và Y là mức giá thuê máy (tính theo triệu đồng/tháng). Bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) được cho như sau:

$X \backslash Y$	25	32	40	50
1	0,1	0,15	0,15	0,05
2	0,05	0,1	0,1	0,1
3	0,05	0,05	0,1	0

- a) Tính số tiền trung bình công ty thu được khi cho thuê một máy xúc.
- b) Tính hiệp phương sai và hệ số tương quan của X và Y .

Bài 3.10. Một trung tâm phục hồi chức năng có các gói dịch vụ chăm sóc sức khỏe với các mức thời gian (tính theo tuần) là 10; 15; 20 các mức giá (tính theo triệu đồng) là 15, 20, 25, 30. Đối với mỗi khách hàng của trung tâm, ký hiệu X là thời gian và Y là mức giá của gói dịch vụ mà khách hàng đó mua. Bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) được cho như sau:

$X \backslash Y$	15	20	25	30
10	0,1	0,1	0,05	0,05
15	0,05	0,15	0,15	0,05
20	0	0,1	0,1	0,1

- a) Tính độ dài trung bình, mức giá trung bình của các gói dịch vụ.
- b) Tính hiệp phương sai và hệ số tương quan giữa thời gian và mức giá.
- c) Tính chi phí trung bình của những khách hàng mua một gói dịch vụ có độ dài 20 tuần.

Bài 3.11. Khách hàng có nhu cầu phát một clip quảng cáo trên một kênh truyền hình có thể lựa chọn một trong các độ dài (tính theo phút) là 0,5; 1; 2 và một trong mức giá (tính theo triệu đồng) là 15, 20, 25, 30. Ký hiệu X là độ dài và Y là mức giá của một clip được phát. Bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) được cho như sau:

$X \backslash Y$	15	20	25	30
0,5	0,1	0,05	0,03	0,02
1	0,05	0,1	0,2	0,15
2	0	0,1	0,1	0,1

- Tính độ dài trung bình và mức giá trung bình cho một lần phát sóng của các clip.
- Tính hiệp phương sai và hệ số tương quan giữa độ dài và mức giá.
- Tính $\mathbb{P}(Y = 25|X = 1)$.

Bài 3.12. Khách hàng của một nhà cung cấp truyền hình cáp có thể lựa chọn việc thanh toán mỗi tháng một lần hoặc 12 tháng/lần hay 24 tháng/lần. Các gói cước có giá (tính theo nghìn đồng/tháng) là 110, 250, 270, 290. Đối với mỗi hóa đơn được khách hàng thanh toán, ta ký hiệu X là số tháng được thanh toán và Y là mức cước thuê bao. Bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) được cho như sau:

$X \backslash Y$	110	250	270	290
1	0,1	0,2	0,2	0,1
12	0,05	0,07	0,08	0,1
24	0,04	0,02	0,03	0,01

- Tính giá trị trung bình của số tiền được thanh toán cho một hóa đơn.
- Tính $\mathbb{P}(X = 24|Y = 270)$.
- Tính hệ số tương quan giữa X và Y .

Bài 3.13. Một công ty kinh doanh các sản phẩm bảo hộ lao động có bán các loại bình chữa cháy cho các hộ gia đình. Đối với mỗi đơn hàng, ta ký hiệu X là số lượng bình chữa cháy được mua và Y là giá tiền mỗi bình (tính theo nghìn đồng). Mỗi gia đình chỉ mua duy nhất một loại bình. Bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) được cho như sau:

$X \backslash Y$	160	180	240
1	0,1	0,1	0,1
2	0,1	0,2	0,1
3	0	0,1	0,1
4	0	0,05	0,05

- Tính giá trị trung bình của mỗi đơn hàng.
- Tính hiệp phương sai của số bình và giá tiền.

Bài 3.14. Gọi X, Y lần lượt là tín hiệu đầu vào và tín hiệu đầu ra của một kênh thông tin. Biết bảng phân phối xác suất đồng thời của đại lượng ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) như sau:

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	1/4	1/8	1/8
1	1/4	1/8	1/8

- Tính $\mathbb{E}(XY)$, $\mathbb{V}(XY)$.
- Hỏi X và Y có độc lập không?
- Tìm kỳ vọng có điều kiện của Y đối với X .

Bài 3.15. Một trang web cho phép gửi ảnh, mỗi ảnh có kích thước $X \times Y$ pixels. Biết bảng phân phối xác suất đồng thời của đại lượng ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) như sau:

$X \backslash Y$	1200	1600	2400
800	0,15	0,1	0,05
1200	0,2	0,1	0,2
1600	0,05	0,05	0,1

- Tính dung lượng trung bình của một ảnh $\mathbb{E}(XY)$.
- Tính hệ số tương quan.
- Tìm kỳ vọng có điều kiện của X đối với Y .

Bài 3.16. Một trang web cho phép gửi ảnh, mỗi ảnh có kích thước $X \times Y$ pixels. Mỗi pixels lưu trữ bởi 2 bytes và ảnh được nén với tỷ lệ 10:1. Biết bảng phân phối xác suất đồng thời của đại lượng ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) như sau:

$X \backslash Y$	800	1200	1600
400	1/12	1/4	1/12
800	1/6	1/12	1/8
1200	1/12	1/12	1/24

- Tính dung lượng trung bình của một ảnh sau khi nén $\mathbb{E}(0, 2XY)$.
- Tính hiệp phương sai.
- Tìm kỳ vọng có điều kiện của Y đối với X .

Bài 3.17. Ký hiệu X là đại lượng ngẫu nhiên chỉ số tài khoản mà một sinh viên đăng ký trên một dịch vụ lưu trữ dữ liệu và Y (tính theo GB) là dung lượng lưu trữ miễn phí mà dịch vụ đó cung cấp. Cho biết hàm khối xác suất đồng thời của (X, Y) được xác định bởi:

$$f(x, y) = c(x + y), \quad x = 0, 1, 2; \quad y = 1, 2.$$

- Tìm hằng số c .
- Tính giá trị trung bình $\mathbb{E}(XY)$ của lượng dữ liệu miễn phí mà sinh viên lưu trữ theo một dịch vụ.
- Tính hệ số tương quan giữa số lượng tài khoản X và dung lượng miễn phí Y .

Bài 3.18. Cho hàm khối xác suất đồng thời của (X, Y) xác định bởi:

$$f(x, y) = c|2x + y|, \quad x = -1, 1; \quad y = 0, 1, 2.$$

- Tìm hằng số c .
- Lập bảng phân phối của biến ngẫu nhiên tích XY .
- Tìm hiệp phương sai và hệ số tương quan giữa X và Y .

Bài 3.19. Cho bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) như sau:

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	0	1/4	0
0	1/4	0	1/4
1	0	1/4	0

Chứng minh rằng hệ số tương quan giữa X và Y bằng 0 nhưng X và Y không độc lập.

Bài 3.20. Một xe chở hàng trên đoạn đường từ A tới B cần phải đi qua hai hệ thống tín hiệu đèn giao thông. Gọi X là số lần gặp đèn đỏ khi xe đi từ A tới B. Gọi Y là số lần gặp đèn đỏ khi xe đi từ B tới A. Biết hàm khối xác suất đồng thời của đại lượng ngẫu nhiên hai chiều (X, Y) như sau:

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0,15	0,1	0,05
1	0,2	0,15	0,1
2	0,05	0,1	0,1

- Tính $E[X + Y]$.
- Hỏi X và Y có độc lập không?
- Tính hiệp phương sai và hệ số tương quan.

Bài 3.21. Một trang Web cung cấp cho khách hàng truy cập hai lựa chọn hoặc là xem trước một video quảng cáo hoặc là bỏ qua quảng cáo và tới trang web. Biết xác suất một khách hàng truy cập bỏ qua quảng cáo để đi tới trang web là 0,7. Giả sử trong 1 giây có 3 khách hàng truy cập vào trang web. Gọi X, Y tương ứng là số khách hàng có xem quảng cáo và bỏ qua quảng cáo khi truy cập vào trang web này trong thời gian 1 giây.

- Lập bảng phân phối xác suất của (X, Y) .
- Tính trung bình số khách hàng có xem quảng cáo khi truy cập vào trang web trong thời gian 1 giây.
- Tìm kỳ vọng có điều kiện của Y đối với X .

Bài 3.22. Một modem truyền một tín hiệu có điện áp là biến ngẫu nhiên X có giá trị -1 Vol hoặc 1 Vol với xác suất bằng nhau đến một kênh thông tin. Kênh thông tin cộng thêm vào tín hiệu này một nhiễu có giá trị điện áp thuộc tập $\{0, +1\}$ và với xác suất tương ứng là $\{0,7; 0,3\}$. Gọi Y là biến ngẫu nhiên chỉ giá trị điện áp truyền ra của kênh thông tin.

- Lập bảng phân phối xác suất của (X, Y) .
- Xác định trung bình điện áp truyền ra của kênh thông tin.
- Tính hiệp phương sai và hệ số tương quan.
- Tính kỳ vọng có điều kiện của Y đối với X .

Bài 3.23. Một modem truyền một tín hiệu có điện áp là biến ngẫu nhiên X có giá trị -1 Vol hoặc 1 Vol với xác suất tương ứng là $1/4, 3/4$ đến một kênh thông tin. Giá trị điện áp truyền ra của kênh thông tin là biến ngẫu nhiên Y nhận giá trị bằng giá trị của X với xác suất bằng $1/2$, bằng giá trị của $-X$ với xác suất bằng $1/4$, bằng 0 với xác suất bằng $1/4$.

- Lập bảng phân phối xác suất của (X, Y) .
- Xác định trung bình điện áp truyền ra của kênh thông tin.
- Tính hiệp phương sai và hệ số tương quan.

Bài 3.24. Gọi X, Y lần lượt là biến ngẫu nhiên chỉ số trang web được yêu cầu tới một máy chủ trong 1 micro giây (1 ms) và 1 micro giây tiếp theo. Biết rằng trong khoảng thời gian 1 micro giây có 0 hoặc 1 trang web được yêu cầu với xác suất tương ứng là $0,95$ và $0,05$ và các yêu cầu trong các khoảng thời gian 1 ms khác nhau là độc lập với nhau.

- Lập bảng phân phối xác suất của (X, Y) .
- Tính $E[XY]$.

Bài 3.25. Biết rằng trong khoảng thời gian 1 micro giây có 0 hoặc 1 trang web được yêu cầu tới một máy chủ với xác suất tương ứng là $0,95$ và $0,05$ và các yêu cầu trong các khoảng thời gian 1 ms khác nhau là độc lập với nhau. Gọi X, Y lần lượt là biến ngẫu nhiên chỉ số trang web được yêu cầu tới một máy chủ trong khoảng thời gian $(0, 1)$ micro giây và $(0, 2)$ micro giây.

- Lập bảng phân phối xác suất của (X, Y) .
- Tính trung bình số trang web được yêu cầu tới máy chủ trong khoảng thời gian $(0, 2)$ micro giây.
- Tính kỳ vọng có điều kiện của Y đối với X .

Bài 3.26. Cho (X, Y) là một biến ngẫu nhiên hai chiều có bảng phân phối xác suất đồng thời là

$X \backslash Y$	6	9	11	14
3	0,2	0,05	0,05	0,1
5	0,1	0,1	0	0,1
8	0,05	0,05	0,1	0,1

- Tính $E(X + Y)$ và $E(XY)$
- Tính hiệp phương sai và hệ số tương quan của X, Y .

Bài 3.27. Cho (X, Y) là một biến ngẫu nhiên hai chiều có bảng phân phối xác suất đồng thời là

$X \backslash Y$	35	40	43	48
8	0,15	0,05	0,05	0
12	0,1	0,1	0,1	0,1
15	0,1	0,05	0,1	0,1

- Tính $E(X + Y)$ và $E(XY)$
- Tính hiệp phương sai và hệ số tương quan của X, Y .

4. Các bài toán mở

Bài 4.1. Cho (X, Y) là một biến ngẫu nhiên hai chiều có hàm khối xác định bởi

$$f(x, y) = k|x|,$$

với x, y nguyên và thỏa mãn $|x - y| \leq 2, |x + y| \leq 2$.

- Tìm hằng số k và hãy lập bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) .
- Tính hiệp phương sai giữa X và Y .

Bài 4.2. Cho biến ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều (X, Y) với tập giá trị \mathcal{S} gồm tất cả các điểm (x, y) với x, y nguyên và $0 \leq y \leq 3 - |x|$. Hàm khối xác suất của (X, Y) là $f(x, y) = k(3 - |x|)$ với mọi $(x, y) \in \mathcal{S}$.

- Tìm hằng số k và hãy lập bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) .
- Hãy tính hiệp phương sai và hệ số tương quan của X và Y .

Bài 4.3. Cho biến ngẫu nhiên rời rạc 2 chiều (X, Y) với tập giá trị \mathcal{S} gồm tất cả các điểm (x, y) với x, y nguyên và $|x| \leq y \leq 4 - |x|$. Hàm khối xác suất của (X, Y) là $f(x, y) = k|x|$ với mọi $(x, y) \in \mathcal{S}$.

- Tìm hằng số k và hãy lập bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) .
- Hãy tính hiệp phương sai và hệ số tương quan của X và Y .

Bài 4.4. Một lớp có 30 sinh viên trong đó 12 sinh viên nữ. Trong một ngày hội người ta muốn chọn ra 2 đội sinh viên từ các sinh viên của lớp để thi đấu với nhau trong một gameshow, mỗi đội có 3 sinh viên. Ban tổ chức cho bốc thăm lần đầu để chọn đội thứ nhất. Sau đó cho bốc thăm tiếp lần 2 để chọn đội thứ 2 từ những sinh viên còn lại. Gọi X, Y tương ứng là số sinh viên nữ trong đội thứ nhất và thứ 2.

- Hãy lập bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) . Cho biết X, Y có độc lập hay không? Giải thích tại sao.
- Tính hiệp phương sai và hệ số tương quan của X và Y .

Bài 4.5. Một lớp có 80 sinh viên trong đó có 3 sinh viên nữ. Trong một lần đi dã ngoại, ban tổ chức chọn ngẫu nhiên 30 sinh viên của lớp để xếp lên xe thứ nhất. Sau đó ban tổ chức tiếp tục chọn ngẫu nhiên 30 sinh viên của lớp trong số còn lại để xếp lên xe thứ hai. Vì thế, có 20 sinh viên được tách ra để đi chung xe với lớp khác. Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số sinh viên nam đi trên xe thứ nhất. Gọi Y là biến ngẫu nhiên chỉ số sinh viên nam được tách ra để đi chung xe với lớp khác.

- Hãy lập bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) . Cho biết X, Y có độc lập hay không? Giải thích tại sao.
- Tính hiệp phương sai và hệ số tương quan của X và Y .

Bài 4.6. Có hai xạ thủ, mỗi người có 3 viên đạn. Xác suất bắn trúng đích của người thứ nhất là 0,3, xác suất bắn trúng đích của người thứ hai là 0,4. Hai người lần lượt bắn từng viên đạn vào một mục tiêu cho đến khi mục tiêu trúng đạn hoặc cả hai hết đạn thì dừng lại. Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số đạn người thứ nhất bắn ra và Y là biến ngẫu nhiên chỉ số đạn người thứ hai bắn ra.

- Hãy lập bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) .
- Tính hiệp phương sai và hệ số tương quan của X và Y .

Bài 4.7. Có hai xạ thủ, người thứ nhất có 3 viên đạn, người thứ hai có 2 viên đạn. Xác suất bắn trúng đích của người thứ nhất là 0,2, xác suất bắn trúng đích của người thứ hai là 0,5. Hai người lần lượt bắn từng viên đạn vào một mục tiêu cho đến khi mục tiêu trúng đạn hoặc cả hai hết đạn thì dừng lại. Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số đạn người thứ nhất bắn ra và Y là biến ngẫu nhiên chỉ số đạn người thứ hai bắn ra.

- a) Hãy lập bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) .
- b) Tính hiệp phương sai và hệ số tương quan của X và Y .

Bài 4.8. Có 4 người trong 1 phòng. Mỗi người được yêu cầu viết tên một người khác trong phòng này lên giấy. Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số giấy ghi tên người thứ nhất và Y là biến ngẫu nhiên chỉ số tên người khác nhau được viết tên lên giấy.

- a) Hãy lập bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) .
- b) Tính hiệp phương sai và hệ số tương quan của X và Y .

Bài 4.9. Một nhóm hành khách gồm 3 người đứng đợi tàu ở nhà ga. Khi tàu đến mỗi người trong số họ lựa chọn ngẫu nhiên một toa để đi lên. Cho biết rằng đoàn tàu có 4 toa. Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số hành khách lên toa thứ nhất và Y là biến ngẫu nhiên chỉ số hành khách lên toa thứ 2.

- a) Hãy lập bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) .
- b) Tính hiệp phương sai và hệ số tương quan của X và Y .

Bài 4.10. Một nhóm hành khách gồm 3 người đứng đợi tàu ở nhà ga. Khi tàu đến mỗi người trong số họ lựa chọn ngẫu nhiên một toa để đi lên. Cho biết rằng đoàn tàu có 4 toa. Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số hành khách lên toa thứ nhất và Y là biến ngẫu nhiên chỉ số toa mà không có hành khách nào trong số họ đi lên.

- a) Hãy lập bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) .
- b) Tính hiệp phương sai và hệ số tương quan của X và Y .

Bài 4.11. Một nhóm hành khách gồm 3 người đứng đợi tàu ở nhà ga. Khi tàu đến mỗi người trong số họ lựa chọn ngẫu nhiên một toa để đi lên. Cho biết rằng đoàn tàu có 6 toa. Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số hành khách lên các toa có số thứ tự chẵn và Y là biến ngẫu nhiên chỉ số toa mà không có hành khách nào trong số họ đi lên.

- a) Hãy lập bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) .
- b) Tính hiệp phương sai và hệ số tương quan của X và Y .

Bài 4.12. Một cửa hàng ăn có 8 bàn ăn để khách sử dụng, mỗi bàn có 2 chỗ ngồi và ban đầu các bàn đều trống. Có 6 khách hàng vào cửa hàng và chọn chỗ ngồi một cách ngẫu nhiên. Gọi X là biến ngẫu nhiên chỉ số lượng khách chọn bàn ăn đầu tiên và Y là biến ngẫu nhiên chỉ số bàn ăn vẫn còn trống hoàn toàn.

- a) Hãy lập bảng phân phối xác suất đồng thời của (X, Y) .
- b) Tính hiệp phương sai và hệ số tương quan của X và Y .

*** HẾT ***