# BÀI TẬP XÁC SUẤT THỐNG KÊ

# CHƯƠNG III. BIẾN NGẪU NHIÊN LIÊN TỤC

## I. Hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục

**Bài 1.1.** Cho biến ngẫu nhiên $X$ có hàm mật độ xác suất là

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 2 \\ \dfrac{8}{x^3} & \text{nếu } x \geqslant 2 \end{cases}$$

a) Tính $\mathbb{P}(X > 9)$.
b) Tính $\mathbb{P}(11 < X < 16)$.

**Bài 1.2.** Cho biến ngẫu nhiên $X$ có hàm mật độ xác suất là

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 2 \\ \dfrac{24}{x^4} & \text{nếu } x \geqslant 2 \end{cases}$$

a) Tính $\mathbb{P}(X > 7)$.
b) Tính $\mathbb{P}(3 < X < 12)$.

**Bài 1.3.** Cho hàm

$$f(x) = \begin{cases} a.x^2 & \text{nếu } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 0 & \text{trong trường hợp khác.} \end{cases}$$

a) Tìm a để $f(x)$ là hàm mật độ của đại lượng ngẫu nhiên $X$ nào đó.
b) Tính $\mathbb{E}X$.
c) Tính xác suất để trong 3 phép thử độc lập thì có ít nhất 1 lần $X$ nhận giá trị trong khoảng $(5; 8)$.

**Bài 1.4.** Hệ thống an ninh tại một trụ sở chính của một ngân hàng gồm 15 bộ cảm biến hồng ngoại mới và các thiết bị khác. Cho biết thời gian sử dụng $X$ của mỗi bộ cảm biến hồng ngoại là một đại lượng ngẫu nhiên có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 1 \quad \text{(năm),} \\ \dfrac{64}{(x+1)^5} & \text{nếu } x \geqslant 1 \quad \text{(năm).} \end{cases}$$

a) Tính xác suất để một bộ cảm biến có thời gian sử dụng trên 3 năm.
b) Sau 3 năm sử dụng số lượng cảm biến trong 15 bộ cảm biến đó đã phải thay thế có trung bình là bao nhiêu.

**Bài 1.5.** Một cây ATM được nạp tiền mỗi tuần một lần, mỗi lần nạp tiền người ta để trong cây ATM đó 85 triệu đồng. Lượng tiền rút trong một tuần của cây này là một biến ngẫu nhiên $X$ (đơn vị: trăm triệu đồng), có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4, & \text{nếu } x \in (0;1) \\ 0, & \text{nếu } x \notin (0;1). \end{cases}$$

a) Cho biết xác suất để trong một tuần cây ATM đó hết tiền là bao nhiêu.
b) Hãy tính xác suất của sự kiện: trong 4 tuần hoạt động liên tiếp có duy nhất một tuần cây ATM hết tiền.

**Bài 1.6.** Cho biết thời gian mua xăng của các xe ô tô tại một cây xăng được mô hình hóa bởi đại lượng ngẫu nhiên $X$ (tính theo phút) với hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \notin [2,8] \\ \dfrac{1}{324}(8x^2 - x^3) & \text{nếu } x \in [2,8] \end{cases}$$

a) Hãy tính thời gian trung bình để một xe ô tô mua xăng.
b) Một xe đến trụ bơm xăng và phải đợi 3 xe đến trước đó. Tính xác suất để cả ba xe đó đều thực hiện việc mua xăng không quá năm phút.

**Bài 1.7.** Cho biết thời gian giao dịch của một khách hàng tại một quầy thanh toán của siêu thị được mô hình hóa bởi đại lượng ngẫu nhiên $X$ (tính theo phút) với hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \notin [0,3], \\ \dfrac{20}{243}(3x^3 - x^4) & \text{nếu } x \in [0,3]. \end{cases}$$

a) Hãy tính thời gian trung bình để thực hiện một giao dịch.
b) Một khách hàng đến một quầy thanh toán và phải đợi 4 người đến trước đó. Tính xác suất để cả bốn người có mặt trước đều thực hiện giao dịch không quá hai phút.

**Bài 1.8.** Cho biết thời gian chuyển tiền giữa hai tài khoản của hai ngân hàng khác nhau được mô hình hóa bằng đại lượng ngẫu nhiên $X$ (tính theo giờ) có hàm mật độ xác suất là

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \notin [0,4] \\ \dfrac{3}{32}(4x - x^2) & \text{nếu } x \in [0,4] \end{cases}$$

a) Hãy tính kỳ vọng và phương sai của đại lượng ngẫu nhiên $X$
b) Hãy cho biết có bao nhiêu phần trăm giao dịch chuyển tiền được thực hiện với thời gian nhiều hơn ba giờ.

**Bài 1.9.** Cho biết thời gian gửi tiền thực tế $X$ của các sổ tiết kiệm không kỳ hạn là một đại lượng ngẫu nhiên có hàm mật độ như sau:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 0 \ \ (\text{tháng}), \\ \dfrac{50}{(x+5)^3} & \text{nếu } x \geqslant 0 \ \ (\text{tháng}). \end{cases}$$

a) Tính xác suất để một sổ tiết kiệm không kỳ hạn có thời gian gửi lớn hơn 1 tháng.
b) Trong một ngày một phòng giao dịch lập 10 sổ tiết kiệm không kỳ hạn mới. Tính xác suất của sự kiện trong 10 sổ tiết kiệm đó có 2 sổ có thời gian gửi lớn hơn 1 tháng.

**Bài 1.10.** Cho biết thời gian gửi tiền thực tế $X$ của các sổ tiết kiệm kỳ hạn 3 tháng là một đại lượng ngẫu nhiên có hàm mật độ như sau:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \notin [0,4] \\ \dfrac{1}{64}(16x - x^3) & \text{nếu } x \in [0,4] \end{cases}$$

a) Tính xác suất để một sổ tiết kiệm kỳ hạn 3 tháng bị rút ra trước khi đáo hạn.
b) Trong một ngày một phòng giao dịch lập 10 sổ tiết kiệm kỳ hạn 3 tháng mới. Tính xác suất của sự kiện trong 10 sổ tiết kiệm đó có 4 sổ bị rút ra trước khi đáo hạn.

**Bài 1.11.** Theo tiêu chuẩn kỹ thuật, một loại bê tông tươi đã để quá 3 giờ thì không được phép đổ vào vị trí thi công nữa. Thời gian để vận chuyển bằng xe từ trạm trộn đến một công trình và sắp xếp thiết bị để bơm hết bê tông từ xe vào vị trí thi công là đại lượng ngẫu nhiên $X$ có hàm mật độ là

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 1 \quad \text{(giờ)}, \\ \dfrac{384}{(x+1)^7} & \text{nếu } x \geqslant 1 \quad \text{(giờ)}. \end{cases}$$

a) Tính xác suất để một xe bê tông bị quá hạn không được phép đổ bê tông vào vị trí thi công nữa.
b) Trong 100 xe bê tông tươi được vận chuyển đến công trình đó, giá trị trung bình của số xe bị quá hạn là bao nhiêu?

**Bài 1.12.** Một loại thực phẩm có thời hạn sử dụng ba tháng. Giá thành sản xuất của mỗi gói sản phẩm là 20 nghìn đồng. Nhà sản xuất bán sỉ cho các đại lý phân phối với giá bán là 35 nghìn đồng trên một gói sản phẩm và không lấy tiền các sản phẩm bị trả về do hết hạn sử dụng. Cho biết thời gian phân phối sản phẩm $X$ tính từ ngày sản xuất cho đến ngày một gói sản phẩm đến tay người tiêu dùng (được sử dụng) là một đại lượng ngẫu nhiên có hàm mật độ như sau:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 0 \quad \text{(tháng)}, \\ \dfrac{648}{(x+6)^4} & \text{nếu } x \geqslant 0 \quad \text{(tháng)}. \end{cases}$$

a) Tính xác suất để một gói sản phẩm được người tiêu dùng sử dụng có thời gian phân phối dưới hai tháng.
b) Tính lợi nhuận trung bình của nhà sản xuất khi xuất xưởng một lô hàng gồm 80.000 gói sản phẩm.

**Bài 1.13.** Cho biến ngẫu nhiên $X$ có hàm mật độ là

$$f(x) = \begin{cases} a.x^2(4-x) & \text{nếu } 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ 0 & \text{trong trường hợp khác.} \end{cases}$$

a) Hãy xác định giá trị của $a$.
b) Tính $P(X > 2)$.

**Bài 1.14.** Cho biết thời gian sử dụng $X$ của mỗi máy in laser là một đại lượng ngẫu nhiên có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 3 \quad (\text{năm}), \\ \dfrac{375}{(x+2)^4} & \text{nếu } x \geqslant 3 \quad (\text{năm}). \end{cases}$$

Tính xác suất để một máy in laser có thời gian sử dụng dưới 7 năm.

**Bài 1.15.** Cho biết thời gian sử dụng $X$ của mỗi bộ cảm biến hồng ngoại là một đại lượng ngẫu nhiên có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 2 \quad (\text{năm}), \\ \dfrac{81}{(x+1)^4} & \text{nếu } x \geqslant 2 \quad (\text{năm}). \end{cases}$$

Tính xác suất để một bộ cảm biến có thời gian sử dụng trên 6 năm.

**Bài 1.16.** Một gói hàng được bán online có thời gian vận chuyển từ nhà cung cấp đến tay khách hàng là đại lượng ngẫu nhiên $X$ có hàm mật độ là

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 1 \quad (\text{ngày}), \\ \dfrac{192}{(x+3)^4} & \text{nếu } x \geqslant 1 \quad (\text{ngày}). \end{cases}$$

a) Tính xác suất để một gói hàng có thời gian vận chuyển trên 4,5 ngày.
b) Một ngày nhà cung cấp có 120 đơn hàng online và cần chuyển đi 120 gói hàng. Trong số 120 gói hàng đó, số gói hàng có thời gian vận chuyển nhiều hơn 4,5 ngày có trung bình là bao nhiêu?

**Bài 1.17.** Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} a\sin\dfrac{x}{4} & \text{nếu } x \in [0, 4\pi] \\ 0 & \text{nếu } x \notin [0, 4\pi] \end{cases}$$

Hãy xác định $a$ để $f(x)$ là hàm mật độ của một biến ngẫu nhiên $X$ nào đấy.

**Bài 1.18.** Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} a(x+2)e^{-2x} & \text{nếu } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Hãy xác định $a$ để $f(x)$ là hàm mật độ của một biến ngẫu nhiên $X$ nào đấy.

**Bài 1.19.** Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} a_2 x^2 e^{-x/2} & \text{nếu } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Hãy xác định $a_2$ để $f(x)$ là hàm mật độ của một biến ngẫu nhiên $X$ nào đấy.

**Bài 1.20.** Cho hàm số (với $n \geqslant 1$)

$$f(x) = \begin{cases} a_n x^n e^{-x/2} & \text{nếu } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Hãy xác định $a_n$ để $f(x)$ là hàm mật độ của một biến ngẫu nhiên $X$ nào đấy.

# II. Hàm phân phối tích lũy của biến ngẫu nhiên liên tục

**Bài 2.1.** Cho đại lượng ngẫu nhiên X có hàm mật độ xác suất là:

$$f(x) = \begin{cases} a\cos x & \text{nếu } |x| < \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{nếu } |x| \geqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

a) Tìm hệ số $a$ và vẽ đồ thị hàm số $f(x)$.
b) Tính $\mathbb{P}(0 < X < \pi/4)$.
c) Tìm hàm phân phối xác suất $F(x)$.

**Bài 2.2.** Cho hàm

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 1 \\ a(x-1)^2 & \text{nếu } 1 \leqslant x < 4 \\ 1 & \text{nếu } x \geqslant 4. \end{cases}$$

a) Tìm hệ số a để $F(x)$ là hàm phân phối xác suất của một đại lượng ngẫu nhiên liên tục $X$ nào đó.
b) Với a tìm được, hãy xác định hàm mật độ $f(x)$ và tính $\mathbb{P}\{1,5 < X < 2,5\}$.

**Bài 2.3.** Cho hàm

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x^2} & \text{nếu } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{nếu } x < 1. \end{cases}$$

a) Xác định hằng số a để $f(x)$ là hàm mật độ của đại lượng ngẫu nhiên X nào đó.
b) Tìm hàm phân phối $F(x)$ và tính $\mathbb{P}\{2 < X < 3\}$.
c) Tìm xác suất để trong 5 phép thử độc lập thì $X$ đều không lấy giá trị trong khoảng (2; 3).

**Bài 2.4.** Việc đo đạc các thông số vật lý của các hệ thống kỹ thuật thường có những sai số do chính quá trình đo đạc gây ra, gọi là sai số đo đạc. Các nhà khoa học thống kê đã mô hình hóa những sai số đo đạc này thành những phân bố xác suất. Giả sử sai số đo đạc $X$ của một hệ thống điện tử được mô hình hóa thành biến ngẫu nhiên có hàm mật độ dạng

$$f(x) = \begin{cases} k(3-x^2) & \text{nếu } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & \text{trong trường hợp khác.} \end{cases}$$

a) Hãy tìm số thực $k$ để $f(x)$ là hàm mật độ của đại lượng ngẫu nhiên $X$.
b) Hãy tìm hàm phân phối xác suất $F(x)$.
c) Hãy tính xác suất để sai số đo đạc của hệ thống có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 1/2.

**Bài 2.5.** Cho hàm số

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \cos x e^{-x} & \text{nếu } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Hàm $F(x)$ có là hàm phân phối tích lũy của một biến ngẫu nhiên $X$ nào đấy hay không? Giải thích rõ lý do đưa ra câu trả lời.

**Bài 2.6.** Cho hàm số

$$F(x) = \begin{cases} 1 + (\sin x - 1)e^{-x} & \text{nếu } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Hàm $F(x)$ có là hàm phân phối tích lũy của một biến ngẫu nhiên $X$ nào đấy hay không? Giải thích rõ lý do đưa ra câu trả lời.

**Bài 2.7.** Cho biến ngẫu nhiên $X$ có hàm phân phối tích lũy là

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 0 \\ \dfrac{x^3}{250} - \dfrac{3x^4}{10.000} & \text{nếu } 0 \leqslant x < 10 \\ 1 & \text{nếu } x \geqslant 10 \end{cases}$$

Tính xác suất để trong 5 lần thực hiện phép thử có 3 lần $X$ nhận giá trị lớn hơn 7.

**Bài 2.8.** Cho biến ngẫu nhiên $X$ có hàm phân phối tích lũy là

$$F(x) = \begin{cases} 1 - (x+1)e^{-x} & \text{nếu } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Hãy tính xác suất để trong 8 lần thực hiện phép thử có 4 lần $X$ nhận giá trị không lớn hơn 1.

**Bài 2.9.** Cho biến ngẫu nhiên $X$ có hàm phân phối tích lũy là

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 0 \\ \dfrac{5x^4}{81} - \dfrac{4x^5}{243} & \text{nếu } 0 \leqslant x < 3 \\ 1 & \text{nếu } x \geqslant 3 \end{cases}$$

Hãy xác định hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên $X$.

**Bài 2.10.** Cho biến ngẫu nhiên $X$ có hàm phân phối tích lũy là

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < -2 \\ \dfrac{3x}{8} - \dfrac{x^3}{32} & \text{nếu } -2 \leqslant x < 2 \\ 1 & \text{nếu } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Hãy xác định hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên $X$.

**Bài 2.11.** Cho biến ngẫu nhiên $X$ có hàm phân phối tích lũy là

$$F(x) = \begin{cases} 1 - (x^2+1)e^{-x} & \text{nếu } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Hãy xác định hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên $X$.

**Bài 2.12.** Cho biến ngẫu nhiên $X$ có hàm phân phối tích lũy là

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} - xe^{-2x} & \text{nếu } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Hãy xác định hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên $X$.

# III. Kỳ vọng và phương sai của biến ngẫu nhiên liên tục

**Bài 3.1.** Cho biến ngẫu nhiên $X$ có hàm mật độ là

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{625}x^3(5-x) & \text{nếu } 0 \leqslant x \leqslant 5 \\ 0 & \text{trong trường hợp khác.} \end{cases}$$

Hãy tính $EX, VX$.

**Bài 3.2.** Cho $X$ là một đại lượng ngẫu nhiên có hàm mật độ như sau:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \notin [0,2], \\ \dfrac{5}{8}(2x^3 - x^4) & \text{nếu } x \in [0,2]. \end{cases}$$

Tính $\mathbb{E}(X)$ và $\mathbb{V}(X)$.

**Bài 3.3.** Cho $X$ là một đại lượng ngẫu nhiên có hàm mật độ như sau:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \notin [0,2], \\ \dfrac{15}{64}(4x^2 - x^4) & \text{nếu } x \in [0,2]. \end{cases}$$

Tính $\mathbb{E}(X)$ và $\mathbb{V}(X)$.

**Bài 3.4.** Cho $X$ là một đại lượng ngẫu nhiên có hàm mật độ như sau:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \notin [0,2], \\ \dfrac{3}{4}(2x - x^2) & \text{nếu } x \in [0,2]. \end{cases}$$

Tính $EX$ và $VX$.

**Bài 3.5.** Cho $X$ là một đại lượng ngẫu nhiên có hàm mật độ như sau:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \notin [0,2], \\ \dfrac{3}{16}(4 - x^2) & \text{nếu } x \in [0,2]. \end{cases}$$

Tính $EX$ và $VX$.

**Bài 3.6.** Cho $X$ là một đại lượng ngẫu nhiên có hàm mật độ như sau:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \notin [0,2], \\ \dfrac{1}{4}(4x - x^3) & \text{nếu } x \in [0,2]. \end{cases}$$

Tính $EX$ và $VX$.

**Bài 3.7.** Cho $X$ là một đại lượng ngẫu nhiên có hàm mật độ như sau:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \notin [0,3], \\ \dfrac{2}{9}(3x - x^2) & \text{nếu } x \in [0,3]. \end{cases}$$

Tính $EX$ và $VX$.

**Bài 3.8.** Cho biến ngẫu nhiên $X$ có hàm mật độ xác suất là

$$f(x) = \begin{cases} k\sin^2 x & \text{nếu } x \in [0, 10\pi] \\ 0 & \text{nếu } x \notin [0, 10\pi] \end{cases}$$

a) Hãy tính giá trị của hằng số $k$.
b) Hãy tính $EX$ và $VX$.

**Bài 3.9.** Cho $X$ là một đại lượng ngẫu nhiên có hàm mật độ như sau:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \notin [0, 4\pi], \\ kx\sin^2 x & \text{nếu } x \in [0, 4\pi]. \end{cases}$$

a) Hãy tính giá trị của hằng số $k$.
b) Hãy tính $EX$ và $VX$.

**Bài 3.10.** Cho biến ngẫu nhiên $X$ có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{nếu } x \in [-3, 3] \\ 0 & \text{nếu } x \notin [-3, 3] \end{cases}$$

a) Hãy tính giá trị của hằng số $k$.
b) Hãy tính kỳ vọng và phương sai của $X$.

**Bài 3.11.** Cho biến ngẫu nhiên $X$ có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} k(4-x^2)e^x & \text{nếu } x \in [-2,2] \\ 0 & \text{nếu } x \notin [-2,2] \end{cases}$$

a) Hãy tính giá trị của hằng số $k$.
b) Hãy tính kỳ vọng và phương sai của $X$.

**Bài 3.12.** Cho biến ngẫu nhiên $X$ có hàm mật độ xác suất là

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}xe^{-x/2} & \text{nếu } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Hãy tính $EX$ và $VX$.

**Bài 3.13.** Cho biến ngẫu nhiên $X$ có hàm mật độ xác suất là

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{96}x^3e^{-x/2} & \text{nếu } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Hãy tính $EX$ và $VX$.

**Bài 3.14.** Cho biến ngẫu nhiên $X$ có hàm mật độ xác suất là (với $n \geqslant 0$)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B_n}x^ne^{-x/2} & \text{nếu } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng $B_n = 2^{n+1}n!$.
b) Chứng minh rằng $EX = \dfrac{B_{n+1}}{B_n} = 2(n+1)$.
c) Chứng minh rằng $VX = 4(n+1)$.

**Bài 3.15.** Cho biến ngẫu nhiên $X$ có hàm mật độ xác suất là

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{C_0}\sqrt{x}e^{-x/2} & \text{nếu } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

a) Hãy chỉ ra rằng $C_0 = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}dt$.

b) Hãy so sánh $C_0^2$ với tích phân 2 lớp $\displaystyle\iint_D 4e^{-(s^2+t^2)/2}dsdt$, trong đó $D$ là góc phần tư thứ nhất

$$D = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid s \geqslant 0, t \geqslant 0\}.$$

Từ so sánh trên hãy chỉ ra $C_0 = \sqrt{2\pi}$.
c) Hãy tính $EX$ và $VX$.

**Bài 3.16.** Cho biến ngẫu nhiên $X$ có hàm mật độ xác suất là (với $n \geqslant 0$)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{C_n} x^n \sqrt{x} e^{-x/2} & \text{nếu } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng $C_n = (2n+1)!!\sqrt{2\pi}$ (cần áp dụng kết quả bài 15). Ở đây $(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)\dots 3.1$.
b) Chứng minh rằng $EX = \dfrac{C_{n+1}}{C_n} = (2n+3)$.
c) Chứng minh rằng $VX = 2(2n+3)$.

**Bài 3.17.** a) Cho biến ngẫu nhiên $Z$ có phân phối chuẩn tắc $N(0,1)$. Hãy chỉ ra rằng $EZ = 0$ và $VZ = 1$ (cần áp dụng kết quả bài 15).
b) Cho biến ngẫu nhiên $X$ có phân phối chuẩn $N(\mu, \sigma^2)$. Hãy sử dụng công thức $X = \sigma Z + \mu$ để tính $EX$ và $VX$.

**Bài 3.18.** Cho biến ngẫu nhiên $X$ có hàm mật độ xác suất là (với $n \geqslant 1$)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{n} D_n} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \text{(biến student có n bậc tự do)}.$$

a) Chứng minh rằng $D_n = 2 \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{\frac{n+1}{2}}}$. Tiếp theo sử dụng phép đổi biến $t = \tan u$ để chỉ ra rằng $D_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{n-1} u du$.
b) Hãy chỉ ra rằng $D_{n-2} - D_n = \dfrac{1}{n-2} D_n$. Sau đó hãy xác định giá trị của $D_n$ tùy theo sự chẵn lẻ của $n$.
c) Chứng minh rằng với $n > 1$ thì $EX = 0$.
d) Chứng minh rằng với $n > 2$ thì $VX = \dfrac{n}{n-2}$.

**Bài 3.19.** Phân phối Gamma là phân phối có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} & \text{nếu } x > 0 \\ 0 & \text{nếu } x \leqslant 0 \end{cases}$$

trong đó $\lambda, r$ là hai tham số dương.
a) Hãy chỉ ra rằng

$$\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-x} dx, \quad \text{(Hàm Gamma)}.$$

b) Tính $EX$ và $VX$.

**Bài 3.20.** Cho biến ngẫu nhiên $X$ có hàm phân phối tích lũy là

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right], \quad \text{(phân phối Weibull)}.$$

Ở đây $\alpha, \beta$ là các tham số dương.
a) Hãy xác định hàm mật độ xác suất của biến $X$.
b) Hãy tính kỳ vọng và phương sai của $X$ theo hàm Gamma.

# IV. Các luật phân phối liên tục thường gặp

### Biến đều liên tục $U([a, b])$

**Bài 4.1.** Giả sử X là đại lượng ngẫu nhiên liên tục có phân bố đều trên [1,5; 5,5].
a) Tính $\mathbb{E}X, \mathbb{V}X$.
b) Tính $\mathbb{P}\{X < 2,5\}$.

**Bài 4.2.** Độ dày của lớp cản quang được tráng lên một tấm bán dẫn tuân theo phân phối đều trên đoạn $[0,2050 - 0,2150]$ (đơn vị micromet).
a) Tìm hàm phân phối của biến ngẫu nhiên chỉ độ dày của lớp cản quang.
b) Tìm tỷ lệ số tấm cản quang có độ dày lớn hơn $0,2125$ micromet.
c) Tìm độ dày trung bình và độ lệch chuẩn của độ dày của lớp cản quang đó.

**Bài 4.3.** Kim là một sinh viên có ý định đi làm thêm bán thời gian. Cô dự định rời trường để đi phỏng vấn xin việc ngay sau khi kết thúc giờ học của lớp Xác suất thống kê. Nếu giờ học lớp Xác suất thống kê kéo dài hơn 46,5 phút thì Kim sẽ đến phỏng vấn muộn. Tính xác suất để Kim đến muộn biết rằng thời gian diễn ra các tiết học ở trường là biến ngẫu nhiên có phân phối đều trên đoạn $[42, 48]$.

**Bài 4.4.** Thời gian $X$ (tính theo phút) để một xe buýt hoàn thành một lộ trình (theo tuyến định sẵn) là biến ngẫu nhiên $X$ có phân phối đều trên đoạn $[48, 65]$.
a) Tính tỷ lệ xe có thời gian hoàn thành lộ trình trên 1 giờ.
b) Tính tỷ lệ xe có thời gian hoàn thành lộ trình ít hơn mức trung bình trên 5 phút.

**Bài 4.5.** Khoảng cách khoan thêm được trong một ngày của máy khoan hầm, tính bằng mét, có phân phối đều trên khoảng (30, 50).
a) Tìm khoảng cách trung bình mà máy khoan thêm được trong 1 ngày.
b) Tìm độ lệch chuẩn của các khoảng cách khoan thêm được trong 1 ngày.
c) Tìm xác suất để khoảng cách khoan thêm được trong 1 ngày ở giữa 35 và 42 mét.

**Bài 4.6.** Điện trở được dán nhãn 100 Ω. Trên thực tế, các điện trở thực tế được phân bố đồng đều trên khoảng (95, 103).
a) Tìm điện trở trung bình.
b) Tìm độ lệch chuẩn của các điện trở.
c) Tìm xác suất để điện trở có giá trị giữa 98 và 102 Ω.

**Bài 4.7.** Giả sử thời gian tạm ngừng sản xuất do xuất hiện sự cố máy móc là một biến ngẫu nhiên có phân phối đều trong khoảng từ 0 đến 30 phút. Hãy tính các xác suất:
a) Việc sản xuất sẽ bị trì hoãn ít hơn 10 phút.
b) Việc sản xuất sẽ bị trì hoãn hơn 20 phút.
c) Quá trình sản xuất sẽ bị trì hoãn từ 12–22 phút.

### Phân phối chuẩn $N(\mu, \sigma^2)$ và phân phối chuẩn tắc $N(0,1)$

**Bài 4.8.** Cho biết thời gian để hoàn thành một sản phẩm được chế tạo trên dây truyền tự động là một biến ngẫu nhiên $X$ (tính theo phút) có phân phối chuẩn với trung bình là $12,4$, độ lệch tiêu chuẩn là $1,54$.
a) Có bao nhiêu phần trăm sản phẩm có thời gian hoàn thành trên 15 phút.
b) Chọn ngẫu nhiên 5 sản phẩm được chế tạo từ dây chuyền. Tính xác suất để có đúng 2 sản phẩm trong đó có thời gian hoàn thành trên 15 phút.

**Bài 4.9.** Cân nặng trẻ sơ sinh ở Hoa Kỳ là một phân phối chuẩn với trung bình là 3420 g và độ lệch chuẩn là 495 g. Nếu một bệnh viện có kế hoạch thiết lập các điều kiện chăm sóc đặc biệt cho 2% trẻ sơ sinh nhẹ nhất, thì trọng lượng nào được sử dụng cho ngưỡng phân cách 2% nhẹ nhất so với các trẻ khác.

**Bài 4.10.** Độ sâu của các điểm rỗ trên bề mặt thép bị ăn mòn là một biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với trung bình 822 $\mu m$ và độ lệch chuẩn 29 $\mu m$.
a) Tìm phân vị 10% của độ sâu điểm rỗ.
b) Một điểm rỗ nào đấy sâu 780 $\mu m$. Nó nằm trên phân vị nào?
c) Tỷ lệ điểm rỗ có độ sâu từ 800 và 830 $\mu m$ có giá trị là bao nhiêu?

**Bài 4.11.** Theo kết quả nghiên cứu, huyết áp tâm trương (tính bằng mmHg) của phụ nữ trưởng thành ở Hoa Kỳ xấp xỉ phân phối chuẩn với giá trị trung bình 80,5 và độ lệch chuẩn 9,9.
a) Tính tỷ lệ phụ nữ có huyết áp tâm trương thấp hơn 70?
b) Phân vị 80% của huyết áp tâm trương là gì?
c) Một phụ nữ có huyết áp tâm trương là 84. Huyết áp tâm trương của cô ấy là phân vị nào?
d) Huyết áp tâm trương lớn hơn 90 được phân loại là tăng huyết áp (huyết áp cao). Xác định tỷ lệ phụ nữ bị tăng huyết áp?

**Bài 4.12.** Tốc độ của ô tô trên một đoạn đường cao tốc ở một địa phương tại thời điểm 11h00 tối là một phân phối chuẩn với mức trung bình 65 dặm/giờ. Hai mươi phần trăm số ô tô đang đi có tốc độ từ 55 đến 65 dặm/giờ. Tính tỷ lệ phần trăm của những chiếc xe đang đi nhanh hơn 75 dặm/giờ?

**Bài 4.13.** Một quy trình kéo sợi hiện thời tạo ra một loại sợi với độ bền kéo là một biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn có giá trị trung bình là 75 $N/mm^2$. Tiêu chuẩn kỹ thuật yêu cầu độ bền chấp nhận được tối thiểu là 65 $N/mm^2$.
a) Mười phần trăm sợi được tạo ra bởi quy trình này không đáp ứng được độ bền tối thiểu. Hãy xác định độ lệch chuẩn của độ bền trong quy trình hiện thời?

b) Nếu giá trị trung bình vẫn ở 75 $N/mm^2$, thì giá trị của độ lệch chuẩn phải là bao nhiêu để chỉ có 1% lượng sợi không đáp ứng được tiêu chuẩn?
c) Nếu độ lệch chuẩn là 5 $N/mm^2$, thì giá trị trung bình phải là bao nhiêu để chỉ có 1% lượng sợi không đáp ứng được tiêu chuẩn?

**Bài 4.14.** Diện tích bề mặt phủ lên được bằng 1 lít của một loại sơn nào đấy là một biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với trung bình 10 $m^2$ và độ lệch chuẩn 0,2 $m^2$.
a) Tính xác suất để dùng 1 lít sơn phủ được diện tích $10,3m^2$.
b) Tính xác suất để dùng 2 lít sơn phủ được diện tích $19,9m^2$.

**Bài 4.15.** Lượng sơn cần thiết để sơn một bề mặt với diện tích 50 $m^2$ là một biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với giá trị trung bình 6 lít và độ lệch chuẩn 0,3 lít.
a) Nếu có 6,2 lít sơn thì xác suất để sơn được toàn bộ bề mặt này là bao nhiêu?
b) Cần bao nhiêu sơn để xác suất là 0,9 bề mặt này được sơn kín toàn bộ?
c) Xác định lại độ lệch chuẩn sao cho với xác suất là 0,9 thì 6,2 lít sơn sẽ đủ để sơn toàn bộ bề mặt?

**Bài 4.16.** Các trục quay được sản xuất để sử dụng trong các ổ đĩa quang học có đường kính là một biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với trung bình $\mu=$ 0,652 cm và độ lệch chuẩn $\sigma =$ 0,003 cm. Giới hạn kỹ thuật cho đường kính trục quay là 0,650 $\pm$ 0,005 cm.
a) Tính tỷ lệ trục quay đáp ứng được giới hạn kỹ thuật.
b) Giá trị trung bình của đường kính trục quay có thể hiệu chỉnh lại được. Nếu giá trị trung bình được hiệu chỉnh thành 0,650 cm thì tỷ lệ trục quay đáp ứng được giới hạn kỹ thuật là bao nhiêu?
c) Nếu giá trị trung bình được hiệu chỉnh thành 0,650 cm, hãy xác định lại giá trị của độ lệch chuẩn để 99% trục quay đáp ứng được giới hạn kỹ thuật.

**Bài 4.17.** Thông số kỹ thuật cho bu lông máy bay yêu cầu độ bền kéo tối thiểu là 18 kN. Cho biết rằng 10% số bu lông có cường độ nhỏ hơn 18,3 kN và 5% số bu lông có cường độ lớn hơn 19,76 kN. Ta cũng biết rằng độ bền kéo của những bu lông là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn.
a) Tìm giá trị trung bình và độ lệch chuẩn của độ bền kéo của bu lông.
b) Tỷ lệ bu lông đáp ứng được tiêu chuẩn đã đưa ra.

**Bài 4.18.** Thời gian thay thế của các TV là một biến ngẫu nhiên chuẩn với giá trị trung bình là 8,2 năm và độ lệch chuẩn là 1,1 năm (dựa trên dữ liệu từ *Báo cáo người tiêu dùng*). Hãy ước lượng xác suất để trong 250 TV được chọn ngẫu nhiên, ít nhất 15 TV trong số đó có thời gian thay thế lớn hơn 10,0 năm.

**Bài 4.19.** Tốc độ truyền của một máy chủ ở một trường đại học đến máy tính của sinh viên trong một ngày tuân theo luật phân phối chuẩn với trung bình là 60 Kbps (60 kilobit/giây) và độ lệch chuẩn là 4 Kbps.
a) Tính xác suất để một file được chuyền từ máy chủ đến máy tính sinh viên với tốc độ tối thiểu là 65 Kbps.
b) Tính xác suất để một file được chuyền từ máy chủ đến máy tính sinh viên với tốc độ tối đa là 55 Kbps.

**Bài 4.20.** Tuổi thọ của một bóng đèn là đại lượng ngẫu nhiên X (tính theo năm), với X $\sim N(4,2;2,25)$. Khi bán ra mỗi bóng đèn được lãi 100 ngàn đồng, nhưng nếu bóng đèn bị bảo hành thì lỗ 300 ngàn đồng. Vậy để tiền lãi trung bình khi bán mỗi bóng đèn là 30 ngàn đồng thì cần phải quy định thời gian bảo hành là bao nhiêu?

**Bài 4.21.** Cho biết thời gian sử dụng Internet của một sinh viên ngành CNTT trong một ngày là đại lượng ngẫu nhiên (tính theo giờ) có phân phối chuẩn. Cho biết xác suất một sinh viên có thời gian sử dụng Internet trong một ngày lớn hơn 2 giờ là $0,7$ và xác suất để một sinh viên có thời gian sử dụng Internet nhỏ hơn 1 giờ là $0,0059$.
a) Tính thời gian sử dụng Internet trung bình trong một ngày của sinh viên CNTT.
b) Tính xác suất để một sinh viên ngành CNTT sử dụng Internet lớn hơn 3 giờ trong ngày.
c) Gặp ngẫu nhiên 3 sinh viên ngành CNTT, tính xác suất để trong ba sinh viên đó có đúng 2 sinh viên sử dụng Internet từ 2 đến 4 giờ.

**Bài 4.22.** Tuổi thọ của một laze bán dẫn trong một loại công tơ điện tuân theo luật phân phối chuẩn với trung bình là 1000 giờ và độ lệch chuẩn là 700 giờ.
a) Tính xác suất để laze bán dẫn đó bị hỏng trước khi sử dụng được 2000 giờ.
b) Giả sử có 3 laze bán dẫn hoạt động độc lập trong một công tơ điện. Hãy tính xác suất để sau 2400 giờ làm việc cả 3 laze vẫn còn hoạt động.

**Bài 4.23.** Thời gian sử dụng (tính theo tháng) của một loại máy in laser là một đại lượng ngẫu nhiên $X$ có phân phối chuẩn với trung bình là 45 tháng và độ lệch tiêu chuẩn là 5 tháng. Một công ty kinh doanh mua mới một lô 25 máy in mới thuộc loại đó để sử dụng.
a) Tính xác suất để một máy in có thời gian sử dụng không quá 48 tháng.
b) Tính giá trị trung bình của số máy in thuộc lô 25 máy in nói trên sử dụng được trên 4 năm.

**Bài 4.24.** Độ dài chi tiết máy được sản xuất tự động là một đại lượng ngẫu nhiên X có phân phối chuẩn với giá trị trung bình là $\mu$ (cm) và độ lệch tiêu chuẩn là 0,1 (cm). Cho biết xác suất để một chi tiết máy có độ dài trên $19,804$ cm là 0,975.
a) Tính giá trị của $\mu$.
b) Một chi tiết máy được gọi là đạt tiêu chuẩn nếu sai lệch giữa độ dài của nó và độ dài trung bình không vượt quá 0,15 (cm). Hãy tính tỉ lệ sản phẩm không đạt tiêu chuẩn.

**Bài 4.25.** Doanh thu hàng ngày của một gian hàng trong một siêu thị hàng điện tử là một đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với giá trị trung bình là 22 triệu đồng và độ lệch tiêu chuẩn là 4 triệu đồng. Nếu ngày nào gian hàng đạt doanh thu trên 25 triệu đồng thì các nhân viên bán hàng được nhận 1 điểm thưởng do có doanh thu cao.
a) Tính xác suất để sau một ngày bán hàng các nhân viên của gian hàng được nhận 1 điểm thưởng.
b) Tính xác suất để trong trong 1 tuần (gồm 7 ngày) các nhân viên bán hàng tích lũy được ít nhất 3 điểm thưởng.

**Bài 4.26.** Lượng điện năng tiêu thụ của một siêu thị trong một ngày là một đại lượng ngẫu nhiên $X$ có phân phối chuẩn với trung bình là 245 (Kwh), độ lệch chuẩn là 14 (Kwh).
a) Tính xác suất để một ngày nào đấy lượng điện năng tiêu thụ của siêu thị lớn hơn 270 (Kwh)
b) Trong một tháng (30 ngày) số ngày lượng điện năng tiêu thụ của siêu thị lớn hơn 270 (Kwh) có trung bình là bao nhiêu?

**Bài 4.27.** Tỷ giá hối đoái giữa USD và VND có biến động trong mỗi ngày và được mô hình hóa là một đại lượng ngẫu nhiên tuân theo luật phân phối chuẩn với kỳ vọng $\mu = 21.600$ và độ lệch tiêu chuẩn $\sigma = 125$.
a) Tính xác suất trong một ngày tỷ giá hối đoái giữa hai đồng tiền trên không dưới 21.400.
b) Tính xác suất để trong một tuần lễ (7 ngày) có đúng ba ngày tỷ giá hối đoái giữa hai đồng tiền trên dao động từ 21.400 đến 21.800.

**Bài 4.28.** Tuổi thọ của một loại bóng đèn là biến ngẫu nhiên có phân phối (xấp xỉ) chuẩn, với trung bình 960 giờ, độ lệch tiêu chuẩn 80 giờ. Thời gian bảo hành là 920 giờ. Nếu bóng đèn không phải bảo hành thì công ty lãi 200 nghìn đồng, còn bóng đèn phải bảo hành thì công ty lỗ 100 nghìn đồng.
a) Tìm tỉ lệ bóng đèn loại này phải bảo hành.
b) Tìm số tiền lãi trung bình khi công ty bán 5 bóng đèn.

**Bài 4.29.** Thời gian đi từ nhà đến trường của một sinh viên A là một biến ngẫu nhiên (đơn vị: phút) có phân phối chuẩn, với thời gian trung bình là 20 phút, độ lệch tiêu chuẩn là 8 phút. Thời điểm vào học là 7 giờ.
a) Biết một hôm sinh viên A xuất phát lúc 6 giờ 45 phút, tính xác suất để A bị muộn buổi học ngày hôm đó.
b) Nếu tỉ lệ ngày bị muộn học của A là 17% thì A thường xuất phát lúc mấy giờ?
c) Với thời gian xuất phát ở câu b, tính xác suất để trong 30 buổi học thì sinh A bị muộn ít nhất 2 lần.

**Bài 4.30.** Số kwh điện năng sử dụng trong một tháng của mỗi hộ gia đình là một đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với trung bình 130kwh và độ lệch chuẩn là 20kwh. Mỗi hộ gia đình được trợ giá 100 kwh một tháng.
a) Tính xác suất để một hộ gia đình sử dụng lượng điện năng trong một tháng không vượt quá mức trợ giá.
b) Khu phố có 50 hộ gia đình. Tính xác suất để một tháng nào đấy có đúng 5 gia đình có lượng điện năng tiêu thụ trong một tháng không vượt quá mức trợ giá.

**Bài 4.31.** Tuổi thọ của một loại bóng đèn là biến ngẫu nhiên có phân phối (xấp xỉ) chuẩn, với trung bình 2425 giờ, độ lệch tiêu chuẩn 235 giờ. Thời gian bảo hành là 1800 giờ. Nếu bóng đèn không phải bảo hành thì công ty lãi 700 nghìn đồng, còn bóng đèn phải bảo hành thì công ty lỗ 100 nghìn đồng.
a) Tìm tỉ lệ bóng đèn loại này phải bảo hành.
b) Tìm số tiền lãi trung bình khi công ty bán 60.000 bóng đèn.

### Phân phối chuẩn mũ $Exp(\lambda)$

**Bài 4.32.** Cho biết tổng thời gian thực hiện công tác giao nhận hàng hóa từ nhà cung cấp tới khách hàng là một biến ngẫu nhiên $X$ (tính theo giờ) có phân phối mũ với trung bình là 46.
a) Có bao nhiêu phần trăm kiện hàng có thời gian vận chuyển trên 2 ngày.
b) Một shop nhận được 5 đơn đặt hàng. Tính xác suất để có đúng 3 đơn hàng trong đó có thời gian vận chuyển trên 2 ngày.

**Bài 4.33.** Tuổi thọ (tính bằng giờ) tính từ lúc bắt đầu sử dụng của bộ phận đọc đĩa trong đầu DVD là biến ngẫu nhiên có hàm mật độ xác suất như sau

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2000}e^{-\frac{x}{2000}} & \text{nếu } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

a) Hãy tìm hàm phân phối $F(x)$.
b) Hãy tính xác suất để bộ phận đọc đĩa của một đầu DVD có tuổi thọ lớn hơn 1000 giờ.
c) Tính xác suất để bộ phận đọc đĩa của một đầu DVD hỏng trước 1500 giờ.
d) Tính tuổi thọ trung bình và độ lệch chuẩn của tuổi thọ của bộ phận đọc đĩa.

**Bài 4.34.** Giả sử tuổi thọ (tính bằng năm) của một mạch điện tử trong máy tính là một đại lượng ngẫu nhiên có phân bố mũ với kỳ vọng là 6,5. Thời gian bảo hành của mạch điện tử này là 5 năm.
Hãy tính xác suất mạch điện tử bán ra phải thay thế trong thời gian bảo hành.

**Bài 4.35.** Giả sử thời gian gọi một cuộc điện thoại, tính theo phút là một đại lượng ngẫu nhiên tuân theo phân bố mũ với tham số $\lambda = \frac{1}{8}$ . Một người đến trạm điện thoại trước bạn. Tính xác suất để bạn phải đợi:
a) Hơn 10 phút.
b) Từ 5 đến 12 phút.

**Bài 4.36.** Thời gian thực hiện thủ tục nhập cảng của mỗi con tàu là một đại lượng ngẫu nhiên X có luật phân bố mũ với giá trị trung bình là 3 giờ.
a) Hãy xác định hàm mật độ và hàm phân phối xác suất của X.
b) Tính xác suất để một con tàu nào đó có thời gian làm thủ tục nhập cảng lớn hơn 3 giờ.

**Bài 4.37.** Tuổi thọ tính theo năm sử dụng (thời gian sử dụng liên tục) của một loại Rơle điện tử tuân theo luật phân phối mũ với tuổi thọ trung bình là $\lambda = 2$ năm. Sử dụng 100 Rơle trong các hệ thống điện khác nhau, tính xác suất có nhiều nhất 3 Rơle bị hỏng ngay trong năm đầu tiên.

**Bài 4.38.** Tuổi thọ của một loại máy chiếu là đại lượng ngẫu nhiên $X$ có phân phối mũ (tính theo năm) với trung bình là 5 năm.
a) Tính xác suất để một chiếc máy chiếu loại đó sử dụng được trên 6 năm.
b) Một công ty sử dụng 3 máy chiếu loại đó. Tính xác suất để trong 3 chiếc máy chiếu đó có 2 chiếc sử dụng được trên 6 năm và một chiếc sử dụng được trong khoảng thời gian từ 4 đến 6 năm.

**Bài 4.39.** Tuổi thọ (tính theo giờ sử dụng) của một đầu đọc quang học trong ổ đĩa DVD là một biến ngẫu nhiên $X$ có phân phối mũ với trung bình là 1800 giờ.
a) Tính xác suất để một đầu đọc quang học sử dụng được trên 1200 giờ.
b) Một nhóm sinh viên được giao hai ổ DVD cũ đã sử dụng 1200 giờ và một ổ DVD mới. Tính xác suất của sự kiện cả ba ổ DVD được giao, đầu đọc quang học tiếp tục sử dụng được trên 1000 giờ.

**Bài 4.40.** Cho biết thời gian bốc dỡ hàng hóa của mỗi tàu vận tải biển tại một hải cảng là một đại lượng ngẫu nhiên $X$ có phân phối mũ với trung bình là 4 ngày.
a) Tính xác suất để một tàu biển có thời gian bốc dỡ hàng hóa trên 3 ngày.
b) Hãy cho biết 5% số tàu biển có thời gian bốc dỡ hàng lâu nhất ứng với thời gian bốc dỡ hàng là bao nhiêu.

**Bài 4.41.** Cho biết thời gian sử dụng của một thiết bị giám sát hành trình của phương tiện vận tải hành khách là đại lượng ngẫu nhiên $X$ (tính theo năm) có hàm mật độ như sau

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x < 0 \\ \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x} & \text{nếu } x \geqslant 0 \end{cases}$$

a) Tính xác suất để một thiết bị mới có thời gian sử dụng không quá 3 năm.

b) Một đội xe được nhận 3 thiết bị trên gồm hai thiết bị mới và một thiết bị cũ đã sử dụng 1 năm. Tính xác suất để cả ba thiết bị đó đều có thời gian sử dụng tiếp theo không quá 3 năm.

**Bài 4.42.** Một công ty mua một lô gồm 20 máy tính để bàn và trang bị cho các nhân viên. Cho biết tuổi thọ của các máy tính là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối mũ với giá trị trung bình là 4,5 năm.
a) Tính xác suất để một chiếc máy tính có tuổi thọ trên 4 năm.
b) Sau 4 năm sử dụng giá trị trung bình của số máy tính (trong 20 máy trên) đã phải thay thế là bao nhiêu?

**Bài 4.43.** Thời gian sử dụng ổn định (không phải sửa chữa) của một loại máy giặt có phân phối mũ với giá trị trung bình là 5,5 (năm).
a) Tính xác suất để máy giặt phải sửa chữa trước 7 (năm).
b) Giả sử thời gian bảo hành của máy giặt là 3 năm. Tính xác suất để trong 10 máy giặt được bán có không quá 1 chiếc máy giặt phải bảo hành.

**Bài 4.44.** Một khách sạn lắp đặt 25 chiếc điều hòa. Biết tuổi thọ của mỗi chiếc điều hòa tuân theo luật phân phối mũ với giá trị trung bình là 6,5 (năm).
a) Tính xác suất để một chiếc điều hòa có tuổi thọ trên 8 năm.
b) Sau 8 năm sử dụng giá trị trung bình số điều hòa (trong 25 máy trên) đã phải thay thế là bao nhiêu?

### Một số luật phân phối liên tục khác

## V. Các bài toán mở

**Bài 5.1.** Cho $X$ là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn $N(\mu, \sigma^2)$. Chứng minh rằng biến ngẫu nhiên $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ có phân phối chuẩn tắc $N(0,1)$.

**Bài 5.2.** Cho biến ngẫu nhiên $X$ có hàm mật độ xác suất

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{32}(4-x^2) & \text{nếu } x \in [-2,2] \\ 0 & \text{nếu } x \notin [-2,2] \end{cases}$$

Hãy xác định hàm mật độ của biến $Z = 2X^2 + 1$.

**Bài 5.3.** Cho $X$ là biến ngẫu nhiên có phân phối đều trên đoạn $[-2,2]$. Hãy xác định hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên $Y = 2^{|X|+1}$.

**Bài 5.4.** Thời gian sử dụng của một trạm thu phát tín hiệu viễn thông được mô hình hóa bởi một đại lượng ngẫu nhiên $X$ (tính theo năm) có phân phối mũ với trung bình là 6 năm. Chi phí lắp đặt và vận hành của trạm là đại lượng ngẫu nhiên $Y$ (tính theo chục triệu đồng) được xác định bằng công thức $Y = 6 + 8X$. Hãy xác định hàm mật độ xác suất của đại lượng ngẫu nhiên $Y$.

**Bài 5.5.** Trọng lượng (tính theo kg) của mỗi con cá của một giống cá lớn được khai thác từ một lòng hồ thủy điện là một biến ngẫu nhiên $X$ có hàm mật độ là

$$f(x) = \begin{cases} ax^2(25-x) & \text{nếu } x \in [2,20] \\ 0 & \text{nếu } x \notin [2,20] \end{cases}$$

Đối với những con cá thuộc loại này và được đánh bắt từ lòng hồ, công ty khai thác thủy sản bán ra với giá bán như sau: 70.000 đồng/1 kg đối với những con có trọng lượng không quá 5kg; 100.000 đồng/1kg đối với những con có trọng lượng từ trên 5kg đến không quá 10 kg; 150.000 đồng/1kg đối với những con có trọng lượng từ trên 10kg đến không quá 15 kg và 200.000 đồng/1kg đối với những con có trọng lượng trên 15 kg.

a) Cho biết rằng, một nhà hàng mua 1 con cá được công ty khai thác đánh bắt từ lòng hồ. Tính xác suất để nhà hàng phải bỏ ra không dưới 1,5 triệu đồng để mua con cá đó.

b) Một nhà hàng thường xuyên mua cá từ công ty khai thác để chế biến và bán cho thực khách. Tính số tiền trung bình mà nhà hàng bỏ ra để mua 1 con cá.

c) (tiếp câu b) Lợi nhuận mà nhà hàng thu được khi chế biến món ăn để bán 1kg cá cho thực khách là $80.000\left(1 + \dfrac{3}{25-X}\right)$ đồng, trong đó $X$ là trọng lượng con cá được sử dụng. Tính lợi nhuận trung bình mà nhà hàng thu được khi chế biến và bán hết 1 con cá.

**Bài 5.6.** Thời gian $X$ (tính theo phút) phải nhận những cuộc điện thoại quảng cáo ngoài ý muốn của một cá nhân (có dữ liệu bản thân bị người khác thu thập mua bán trái phép) là một biến ngẫu nhiên có phân phối đều trên đoạn $[80, 1080]$.

a) Tính tỷ lệ cá nhân mà dữ liệu bản thân bị người khác thu thập mua bán trái phép, có tổng thời gian nhận điện thoại quảng cáo không dưới 10 giờ.

b) Do có những quảng cáo của kẻ lừa đảo nên xác suất để một cá nhân mắc phải sự lừa gạt ít nhất 1 lần tương ứng là: $0,5$ nếu người đó có tổng thời gian nhận điện thoại quảng cáo không dưới 15 giờ; 0.4 nếu người đó có tổng thời gian nhận điện thoại quảng cáo từ 10 giờ đến 15 giờ; 0.3 nếu người đó có tổng thời gian nhận điện thoại quảng cáo từ 5 giờ đến 10 giờ; 0.2 trong tính huống còn lại. Tính xác suất để một cá nhân mà dữ liệu bản thân bị người khác thu thập mua bán trái phép mắc phải sự lừa gạt ít nhất 1 lần.

**Bài 5.7.** Cho biết thời gian sử dụng pin $X$ (tính theo giờ) của người dùng đối với một mã điện thoại di động trong mỗi lần sạc là một biến ngẫu nhiên có phân phối đều với trung bình là 25 giờ. Xác suất để có một lần thời gian sử dụng pin trên 27 giờ trong 2 lần sạc liên tiếp là $0,42$. Hãy tính xác suất để trong 7 lần sạc liên tiếp có đúng một lần thời gian sử dụng pin trên 27 giờ đồng thời có ít nhất 1 lần thời gian sử dụng pin dưới 24 giờ.

**Bài 5.8.** Cho biết thời gian sử dụng pin $X$ (tính theo giờ) của người dùng đối với một mã điện thoại di động trong mỗi lần sạc là một biến ngẫu nhiên có phân phối đều với trung bình là 30 giờ. Xác suất để có 2 lần thời gian sử dụng pin dưới 27 giờ trong 3 lần sạc liên tiếp là $0,096$. Hãy tính xác suất để trong 5 lần sạc liên tiếp có không quá 4 lần thời gian sử dụng pin dưới 32 giờ đồng thời có đúng 1 lần thời gian sử dụng pin dưới 30 giờ.

**Bài 5.9.** Cho biết thời gian sử dụng pin $X$ (tính theo giờ) của người dùng đối với một mã điện thoại di động trong mỗi lần sạc là một biến ngẫu nhiên có phân phối đều với trung bình là 30 giờ. Xác suất để có 2 lần thời gian sử dụng pin trên 33 giờ trong 3 lần sạc liên tiếp là $0,096$. Hãy tính xác suất để trong 5 lần sạc liên tiếp có không quá 4 lần thời gian sử dụng pin dưới 33 giờ đồng thời có đúng 2 lần thời gian sử dụng pin dưới 30 giờ.

**Bài 5.10.** Cho biết thời gian một xe ô tô được khách hàng gửi tại một điểm giữ xe là một biến ngẫu nhiên $X$ (tính theo giờ) có phân phối đều với trung bình là 5 giờ. Mức phí mà các chủ xe phải trả là 20 nghìn đồng cho những xe chỉ gửi trong vòng 2 giờ đầu và tăng thêm 10 nghìn mỗi lần khi thời gian gửi xe chuyển sang giờ kế tiếp, nhưng mức phí chỉ tăng đến tối đa 60.000 đồng thì không tăng nữa. Cho biết giá trị trung bình của mức phí cho một lần gửi là 47.500 đồng. Tính xác suất để trong 6 xe liên tiếp tới gửi thì có ít nhất 1 xe trả mức phí trông giữ 20.000 đồng, đồng thời có hai xe trả mức phí 60.000 đồng.

**Bài 5.11.** Trọng lượng (tính theo gram) của mỗi quả ổi được sản suất ở một vùng chuyên canh cây ăn quả là một biến ngẫu nhiên $X$ có phân phối đều. Một công ty nông sản thu mua mỗi 1kg ổi loại 1 (gồm những quả có trọng lượng không dưới 250g) với giá 30.000 đồng; 1 kg ổi loại 2 (gồm những quả có trọng lượng trong khoảng 170g tới 250g) với giá 27.000 đồng và 1 kg ổi loại 3 (gồm những quả có trọng lượng không cao hơn 170g) với giá 21.300 đồng. Tỷ lệ ổi loại 1 và loại 3 là như nhau và các chủ vườn nhận được trung bình 26.250 đồng cho mỗi kg ổi được thu hoạch từ vườn. Chọn ngẫu nhiên 5 quả ổi trong vườn. Tính xác suất để trong 5 quả ổi đó có ít nhất 1 quả loại 1 đồng thời có ít nhất 1 quả loại 3.

**Bài 5.12.** Thời gian chờ xe (tính theo phút) của một hành khách đi xe buýt là một biến ngẫu nhiên $X$ có phân phối đều với thời gian chờ tối thiểu là 3 phút. Xác suất để trong 2 lần chờ xe có một lần thời gian chờ rơi vào khoảng từ 9 phút đến 12 phút là 48%. Tính xác suất để trong 5 lần chờ xe có ít nhất một lần thời gian chờ trên 15 phút đồng thời có 2 lần chờ xe dưới 8 phút.

**Bài 5.13.** Thời gian chờ xe (tính theo phút) của một hành khách đi xe buýt là một biến ngẫu nhiên $X$ có phân phối đều với thời gian chờ tối đa là 24 phút. Xác suất để trong 4 lần chờ xe có 2 lần thời gian chờ không quá 10 phút là $26,46\%$. Tính xác suất để trong 6 lần chờ xe có ít nhất một lần thời gian chờ trên 15 phút đồng thời có 3 lần chờ xe dưới 10 phút.

**Bài 5.14.** Giá bán nước sạch tại thành phố Hà Nội (tính theo nghìn đồng/$m^3$ và đã quy tròn) là như sau

| Mức tiêu thụ-$m^3$ | $0-10$ | $10-20$ | $20-30$ | $>30$ |
|---|---|---|---|---|
| Giá bán | 6 | 7 | 8,5 | 16 |

Giả thiết rằng lượng nước sạch được tiêu thụ $X$ trong một tháng của một hộ gia đình là một biến ngẫu nhiên có phân phối đều trên đoạn [13, 64].
a) Hãy tính tỷ lệ hộ dân có chi phí tiêu thụ nước sạch trên 285 (nghìn đồng).
b) Tính giá trị trung bình của chi phí nước sạch mỗi tháng của một hộ gia đình.

**Bài 5.15.** Giá bán điện sinh hoạt của công ty Điện lực (tính theo nghìn đồng/1 kWh và đã quy tròn) là như sau

| Mức tiêu thụ-kWh | $0-100$ | $100-200$ | $200-300$ | $>300$ |
|---|---|---|---|---|
| Giá bán | 1,7 | 2 | 2,5 | 3 |

a) Giả thiết rằng lượng điện được tiêu thụ $X$ trong tháng 3 hàng năm (tháng không có ngày nắng nóng) là một biến ngẫu nhiên có phân phối đều trên đoạn [60, 520]. Tính giá trị trung bình của tiền mua điện sinh hoạt tháng 3 của các hộ dân.
b) Giả thiết rằng lượng điện được tiêu thụ $X$ trong tháng 6 hàng năm (tháng có nhiều ngày nắng nóng) là một biến ngẫu nhiên có phân phối đều trên đoạn [150, 950]. Tính giá trị trung bình của tiền mua điện sinh hoạt tháng 6 của các hộ dân.

**Bài 5.16.** Thời gian sử dụng (tính theo năm) của một loại thiết bị điện tử là một biến ngẫu nhiên $X$ có phân phối mũ. Xác suất để thiết bị đó có thời gian sử dụng thuộc vào khoảng 2 đến 4 năm là $0,21$. Tính xác suất để trong 5 thiết bị loại đó được sử dụng có đúng một thiết bị có thời gian sử dụng trên 3 năm đồng thời có đúng một thiết bị có thời gian sử dụng dưới 2 năm.

**Bài 5.17.** Tuổi thọ (tính theo năm) của một loại pin điện thoại là một biến ngẫu nhiên $X$ có phân phối mũ. Xác suất để trong 2 điện thoại (sử dụng loại pin này) có một điện thoại mà có tuổi thọ viên pin thuộc khoảng từ 3 đến 6 năm là $26,88\%$. Hãy tính xác suất để trong 6 viên pin thuộc loại đó có 2 viên có tuổi thọ dưới 4 năm đồng thời có ít nhất một viên tuổi thọ dưới 2 năm.

**Bài 5.18.** Tuổi thọ (tính theo năm) của một loại pin điện thoại là một biến ngẫu nhiên $X$ có phân phối mũ. Xác suất để trong 3 điện thoại (sử dụng loại pin này) có một điện thoại mà có tuổi thọ viên pin thuộc khoảng từ 3 đến 6 năm là $6,4512\%$. Hãy tính xác suất để trong 6 viên pin thuộc loại đó có 2 viên có tuổi thọ trên 2 năm đồng thời có ít nhất một viên tuổi thọ trên 4 năm.

**Bài 5.19.** Điện năng tiêu thụ trong 1 ngày của 1 siêu thị là một biến ngẫu nhiên $X$ có phân phối chuẩn. Cho biết xác suất để trong 2 ngày liên tiếp có 1 ngày điện năng tiêu thụ nhiều hơn 200 kWh là 32%. Xác suất để trong 2 ngày liên tiếp có 1 ngày điện năng tiêu thụ nhiều hơn 300 kWh cũng là 32%. Tính xác suất để trong 1 tuần (7 ngày) có đúng hai ngày điện năng tiêu thụ dưới 300 kWh đồng thời có ít nhất một ngày điện năng tiêu thụ dưới 240 kWh.

**Bài 5.20.** Điện năng tiêu thụ trong 1 ngày của 1 siêu thị là một biến ngẫu nhiên $X$ có phân phối chuẩn. Cho biết xác suất để trong 4 ngày liên tiếp có 2 ngày điện năng tiêu thụ nhiều hơn 200 kWh là $15,36\%$. Xác suất để trong 4 ngày liên tiếp có 2 ngày điện năng tiêu thụ nhiều hơn 300 kWh cũng là $15,36\%$. Tính xác suất để trong 1 tuần (7 ngày) có đúng ba ngày điện năng tiêu thụ dưới 300 kWh đồng thời có ít nhất một ngày điện năng tiêu thụ dưới 220 kWh.

*** HẾT ***