Seminar on Geometric Invariant Theory

Richard Gonzales

Session 1

31 de mayo de 2021

Recordar:

G grupo.

X cjto.

una acción de G en X es un homomorfismo de grupos

$$\mu : G \longrightarrow \mathrm{Bij}(X).$$

Denotamos $\mu(g)(x) := g \cdot x \quad \forall g \in G,\ x \in X.$

e: elem. neutro de G

Así $e \cdot x = x \quad \forall x \in X.$

- órbita de $x \in X$: $G \cdot x = \{ g \cdot x \mid g \in G \}.$

(" $\mathcal{O}(x)$ ")

grupo de isotropía de x:

$$G_x = \mathrm{Stab}_G(x) = \{ g \in G \mid g \cdot x = x \}.$$

$$\Big(G_x \underset{\text{subg.}}{\subseteq} G \Big)$$

El espacio de órbitas se denota $X/_G$.

La proyección al cociente $\pi : X \to X/_G$.

Sean X, Y G-espacios (X, Y admiten acción de G)

$f : X \to Y$ es G-equiv. si $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$ $\forall\, g \in G,\ x \in X$.

En particular, f es invariante si $f(g \cdot x) = f(x)$
$$\forall g \in G, \ \forall x \in X.$$

(i.e f es constante en órbitas).

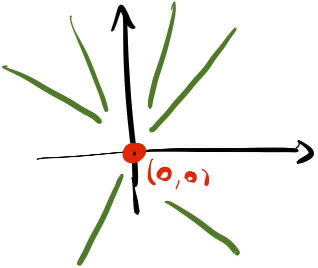
Obs: Toda función invariante desciende al cociente (ó se factoriza a través de $\pi : X \to X/G$).

Ejm: Sea $G = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$.

$$X = \mathbb{C}^2$$

Definimos la acción $t \cdot (x, y) = (tx, ty)$
$$t \in \mathbb{C}^*, \ (x, y) \in \mathbb{C}^2.$$

En este caso: las órbitas son $\{(0,0)\}$ y las rectas "huecas" $\underbrace{\mathcal{L}_{(x,y)}}_{\text{recta gen. por } (x,y).} - \{(0,0)\}$, $(x,y) \neq (0,0)$.



Notar (i) $(0,0) \in \overline{\mathcal{O}(x)}$ (clausura).

(ii) X/G no es Hausdorff.

$\{(0,0)\}$ no se puede separar de las otras órbitas.

$\pi : X \to X/G$.

Por otro lado, el cociente $\left(X - \{(0,0)\}\right)/G$

es $\mathbb{P}^1$ (recta proy. compleja).

(2) $G = \mathbb{C}^*$

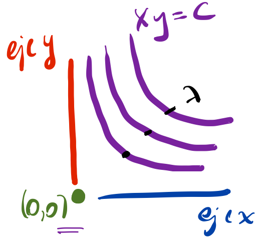
$X = \mathbb{C}^2$

Acción de G en X dada por

$$t(x,y) = (tx,\ t^{-1}y).$$

En este caso las órbitas son:

- hipérbolas $xy = c$, $c \neq 0$
- $\{(0,0)\}$
- $\{(x,0),\ x \neq 0\}$, $\{(0,y),\ y \neq 0\}$



Nuevam. no es posible separar órbitas en X/G.

$$\pi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(x,y) \longrightarrow x \cdot y$$

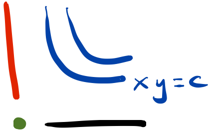
- $\lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda \neq 0$

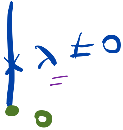
✓ $\pi^{-1}(\lambda) = \{ (x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid xy = \lambda \}$

- $\pi^{-1}(0)$ = union de tres órbitas

$= \{(0,0)\} \cup \{(x,0), x \neq 0\} \cup \{(0,y), \underset{y \neq 0}{}\}$

$\mathbb{C}^2 \xrightarrow{\ \pi\ } \mathbb{C} \longleftarrow$ param. órbitas cerradas.





Ejm:

S_n : grupo simétrico.

$S_n \circlearrowright \mathbb{C}^n$

acción por perm. de variables.

$\mathbb{C}^n \rightsquigarrow \mathbb{C}^n / S^n$.

$G = S_n$ ↻ actúa en

$Z = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ ← anillo de pol.

$x_i \xrightarrow{\sigma} x_{\sigma(i)}$. (perm. de variables)

En este caso

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^G = \{ f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \mid \sigma f = f \ \forall \sigma \in G \}$$

$$= \mathbb{C}[c_1, \dots, c_n]$$

donde c_i son pol. simétricos elem.

$G = S_3$

$$\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]^G = \overbrace{\mathbb{C}[c_1, c_2, c_3]}^{\text{anillo de pol. simétricos.}}$$

$$c_1 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$c_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$$

$$c_3 = x_1 x_2 x_3 .$$

Teo.

<u>Obs</u>: $H^*(BG, \mathbb{C}) \cong \underbrace{\mathbb{C}[c_1, c_2, c_3]}_{\text{anillo de clases características.}}$

infinite Grassmannian

Obs: G grupo finito.

$$\underbrace{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^G}$$

anillo de invariantes

$\updownarrow$

anillo de pol. en el "cociente"

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

$$\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^G \longrightarrow \mathbb{C}^n /\!/ G .$$

Ejm: $\mathbb{Z}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda^2 = 1 \right\}.$

$\mathbb{Z}_2 \subseteq SL(2, \mathbb{C})$.

(En general $G = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda^{n+1} = 1 \right\} \simeq \mathbb{Z}_{n+1}$.

$G = \mathbb{Z}_2 \curvearrowright \mathbb{C}^2$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda^{-1} y \end{pmatrix}$$

$G \curvearrowright X$

$f : X \to \mathbb{C}$

$gf(x) = f(g^{-1}x)$ $\forall g \in G$.

Notar que $G \curvearrowright \mathbb{C}[x, y]$

esta acción es $x \longrightarrow -x$

$y \longrightarrow -y$.

En este caso:

$$\mathbb{C}[x,y]^G = \mathbb{C}[x^2, xy, y^2]$$

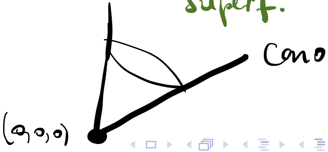
$$\cong \mathbb{C}[u,v,w] / (v^2 = uw)$$

$\mathbb{C}[x,y]^G$ corresponde a la variedad

($\mathbb{C}$-alg. finitam. generada)

$$\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2 = \{v^2 = uw\} \subseteq \mathbb{C}^3$$

superf.



$\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$.

En general:

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} : \lambda^{n+1} = 1 \right\} \subseteq SL(2,\mathbb{C})$$

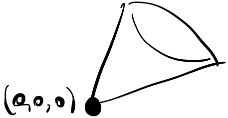
Γ actúa en $\mathbb{C}^2$ por mult. y en el anillo de pol. vía

$$x \longrightarrow \lambda x \quad (\lambda x)$$
$$y \longrightarrow \lambda^{-1} y \quad (\lambda^n y)$$

singularidad de tipo A_n

Ejercicio: $\mathbb{C}[x,y]^{\Gamma} = \mathbb{C}[x^{n+1}, xy, y^{n+1}]$

$$\cong \mathbb{C}[u,v,w] / (v^{n+1} = uw)$$



Variedades afines:

Sea K un cuerpo alg. cerrado (e.g. $K = \mathbb{C}$).

- Sea $S \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$

Definimos

$$V(S) = \{ (x_1, \ldots, x_n) \in K^n \mid f(x_1, \ldots, x_n) = 0 \ \ \forall f \in S \}$$

cjto de ceros comunes de S.

- Decimos que $X \subseteq K^n$ es una variedad alg. afín si $X = V(S)$ para cierta $S \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$.

Obs:

- $V(S) = V(\underbrace{\langle S \rangle}_{\text{ideal generado por } S})$.

- Como $K[x_1, \dots, x_n]$ es Noetheriano, dada una variedad alg $X \subseteq K^n$ existe un número finito de pol. $f_1, \dots, f_r$ en $x_1, \dots, x_n$ tales que

$$X = V(f_1, \dots, f_r). \leftarrow \text{intersecc. finita de hipersuperf.}$$

i.e. $X = V(f_1) \cap \dots \cap V(f_r)$

Así, dado

$$\underset{\text{ideal}}{I} \subseteq k[x_1, \dots, x_n] \underset{\text{asociar}}{\rightsquigarrow} \underset{\text{var. alg.}}{V(I)} \subseteq k^n$$

(alg) (geom.)

?

Por otro lado:

dado $Z \subseteq k^n$ subconjunto cualquiera podemos definir

ideal asociado a Z

$$I(Z) = \{ f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid f(z) = 0 \quad \forall z \in Z \}.$$

Obs:

(a) La topología de Zariski en $\mathbb{A}^n_k$: cerrados son las variedades alg.

(b) $X \subset \boxed{V(I(X))} = \overline{X}^{Zar}$

Es más

$X = V(I(X)) \iff X$ es cerrado. (X var. alg.)

(c) $J \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ ideal

$J \subseteq I(V(J))$; además $I(V(J)) = \sqrt{J}$

Hilbert's Nullstellensatz

En otras palabras

$$J = I(V(J)) \text{ si y sólo si } J \text{ es un ideal radical } (\text{i.e } J = \sqrt{J}).$$

Def: Sea $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$ una variedad alg.

Definimos el anillo de coord de X de la sgte. manera

$$\left(\underset{\text{not.}}{k[X] =} \right) \quad A(X) := k[x_1, \ldots, x_n] / I(X)$$

- $A(X)$ también se suele denominar anillo de funciones polinomiales en X.

Notar $f, g \in K[x_1, \dots, x_n]$ definen la misma función polinomial en X si y sólo si $(f-g)(x)=0 \quad \forall x \in X$.

$$\Updownarrow$$

$$(f-g \in I(X)).$$

- $A(X)$ es una K-alg. finitamente generada y reducida (sin nilpotentes)

Tenemos así:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ideales} \\ \text{radicales} \\ \text{de } \underbrace{k[x_1,\dots,x_n]} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{l} \text{variedades} \\ \text{alg. en } \mathbb{A}^n_k \end{array} \right\}$$

$$J \xmapsto{\ V\ } V(J)$$

$$I(X) \xleftarrow{\ I\ } X$$

Asimismo:

- $\{\text{ideales primos}\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{l} \text{variedades irreduc.} \\ \text{en } \mathbb{A}^n_k \end{array} \right\}$

- $\{\text{ideales } \overset{(x_1-a_1,\dots,x_n-a_n)}{\text{maximales}}\} \longleftrightarrow \{\text{puntos } \overset{(a_1,\dots,a_n)}{\text{en}}\ \mathbb{A}^n_k\}$

Más aún: existe una biyección

$$X \subseteq \mathbb{A}^n_k \longleftrightarrow \underbrace{\mathrm{SpecMax}(A(X))}_{\{\text{cjto de ideales máx de } A(X)\}}$$

$$\mu: \quad x \longmapsto \mathfrak{m}_x = \{ f \in A(X) \mid f(x) = 0 \}.$$

Sean $f_1, \ldots, f_m \in K[x_1, \ldots, x_n]$

Ellos determinan una función pol.

$$\begin{aligned} \phi : K^n &\longrightarrow K^m \\ x &\longmapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x)). \end{aligned}$$

Sean $X \subseteq \mathbb{A}^n_K$ y $Y \subseteq \mathbb{A}^m_K$ var. alg.

Una función $\phi : X \to Y$ se denomina <u>regular</u> si ϕ es la restricción a X de una función polinomial $\mathbb{A}^n_K \longrightarrow \mathbb{A}^m_K$.

Sea $\phi: X \to Y$ morfismo regular.

Si $\eta \in A(Y)$ entonces $\eta \circ \phi \in A(X)$.

De este modo se tiene ϕ induce un homomorfismo de k-alg.

$$\begin{aligned} \phi^{*}: A(Y) &\longrightarrow A(X) \\ \eta &\longmapsto \eta \circ \phi \end{aligned}$$

Es más: existe una corresp. 1:1 entre funciones regulares $X \to Y$ y hom. de k-alg $A(Y) \to A(X)$.

ES más
Cat.

geo. alg.

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{variedades} \\ \text{alg} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} k\text{-alg. finitam.} \\ \text{gen. y reducida} \end{array} \right\}$$

$$X \longrightarrow A(X)$$

$$\left\{ X \xrightarrow{\phi} Y \right\} \longmapsto \phi^*: A(Y) \to A(X)$$

Obs:

$$k^n /\!/ G \longleftarrow\!\!\sim\!\!\rightarrow k[x_1, \ldots, x_n]^G$$

$d = \|(x,y)\| = \sqrt{x\cdot\bar{x} + y\cdot\bar{y}}$

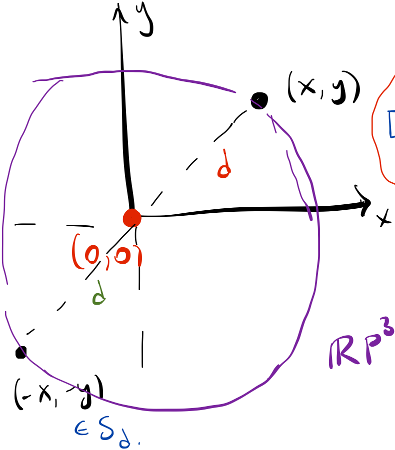
Obs: idea:

$(x,y) \qquad \mathbb{C}^2 \longrightarrow (\mathbb{RP}^3 \times \mathbb{R}_+) \cup \{(0,0)\}$

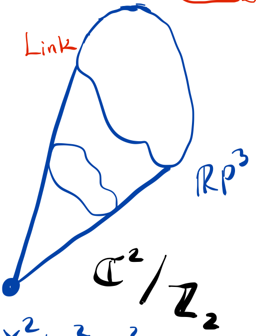
$$\mathbb{C}^2 \downarrow \qquad \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2 \xrightarrow[\text{iso}]{\sim} \Big(\underbrace{\Big\{ \pm \frac{(x,y)}{\|(x,y)\|} \Big\}}_{\text{clase en } S^3/\{\pm 1\}} , \|(x,y)\| \Big)$$

$[x,y] = \{(x,y), (-x,-y)\}$

$+ \; [0,0]$



$\mathbb{RP}^3 = S^3/\{\pm 1\}$



$V \cap S^5 = \text{Link}$; $V: z^2 = xy$ (ó $x^2 + y^2 + z^2 = 0$)

Para A_n: