ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΨΗΦΙΑΚΗ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΣΗΜΑΤΟΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ 1

Ομάδα Χρηστών 25

-

Κωσνταντίνος Μυλωνάς – 2018030151

-

Θωμάς Χατζής – 2018030134

-

Μιχάλης Κρατημένος - 2018030104

Μ. Ζερβάκης

26/10/2021

Χανιά

Άσκηση 1

Α ερώτημα:

Στο πρώτο ερώτημα σκοπός ήταν να γίνει η συνέλιξη δυο σημάτων χωρίς να χρησιμοποιηθεί η έτοιμη συνάρτηση conv. Η conv χρησιμοποιείται απλά στο τέλος προκειμένου να επαληθεύσουμε το αποτέλεσμα μας.

Τα σήματα που επιλέχθηκαν είναι:

$$\mathrm{x[n]} = \mathrm{u}[n-2]$$

$$\mathrm{y[n]} = \frac{1}{2}^{|n|}$$

Η συνέλιξη τους:

$$z[n] = x[n] * y[n]$$

Τα σήματα είναι διακριτού χρόνου και ορίστικαν στα διαστήματα:

$$x: [-15{,}15]$$

$$y: [-10{,}10]$$

Γνωρίζουμε οτι η συνέλιξη των δυο σημάτων θα οδηγήσει στο σήμα z το οποίο θα έχει για αριστερό άκρο το άθροισμα των αριστερών άκρων των x, y και αντίστοιχα για το δεξιό άκρο.

Δηλαδη το z θα ξεκινάει στο -25 και θα τελειώνει στο +25.

Έτσι και στον κώδικα ορίζουμε τον «χρόνο» του z στο διάνυσμα nz, το οποίο χρησιμοποιούμε για τη δημιουργία της κυματομορφής (μέσω stem).

Προκειμένου να μπορέσει να γίνει ο πολλαπλασιασμός που κρύβει μέσα η συνέλιξη, πρέπει τα δύο διανύσματα μας να έχουν τις ιδιες διαστάσεις. Επίσης πρέπει να καλυφθούν όλες οι περιπτώσεις προκειμένου να λάβουμε ολόκληρο το τελικό σήμα. Ετσι λοιπόν κρατάμε το σήμα x σταθερά στη θέση του και το συμπληρώνουμε με μηδενικά αριστερά και δεξιά, τόσα ωστε να χωράει ολόκληρο το σήμα y είτε αριστερά του είτε δεξιά του.

Ετσι δημιουργούμε το σήμα

$$X0 = [zeros(1, length(y) - 1)\ X\ zeros(1, length(y) - 1)]$$

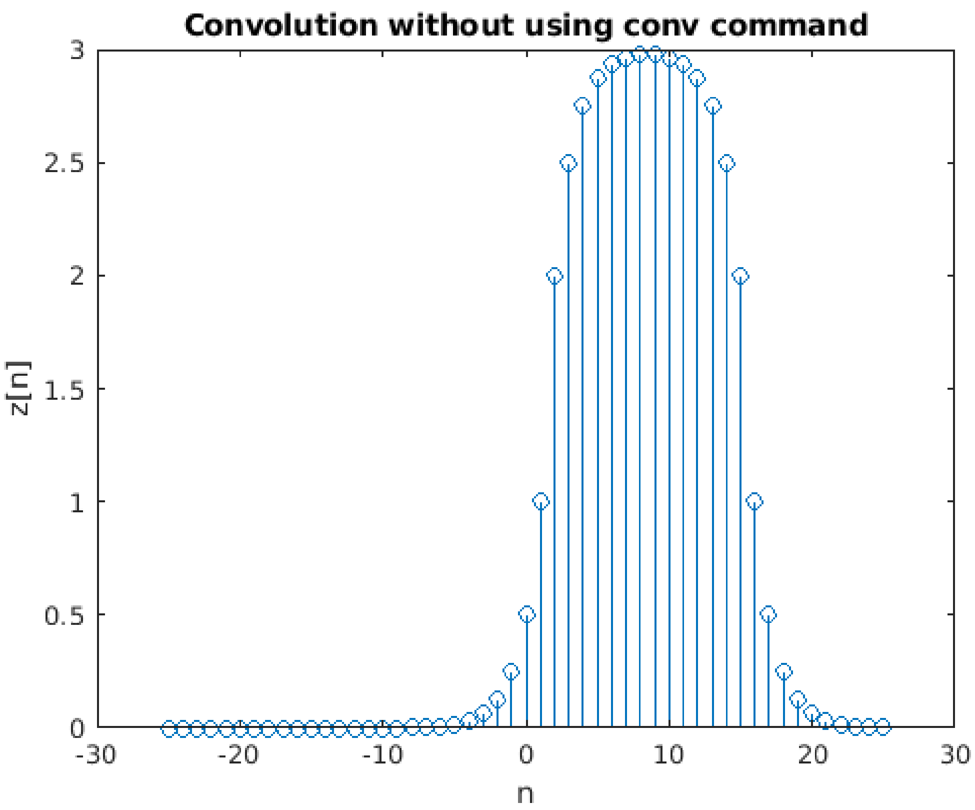
Το σήμα αυτό ορίζεται στο διάστημα -35 έως 35 λόγω του ότι θέλουμε το διάστημα του x συν το μέγεθος του y (που είναι 20) προς τα αριστερά και προς τα δεξιά.

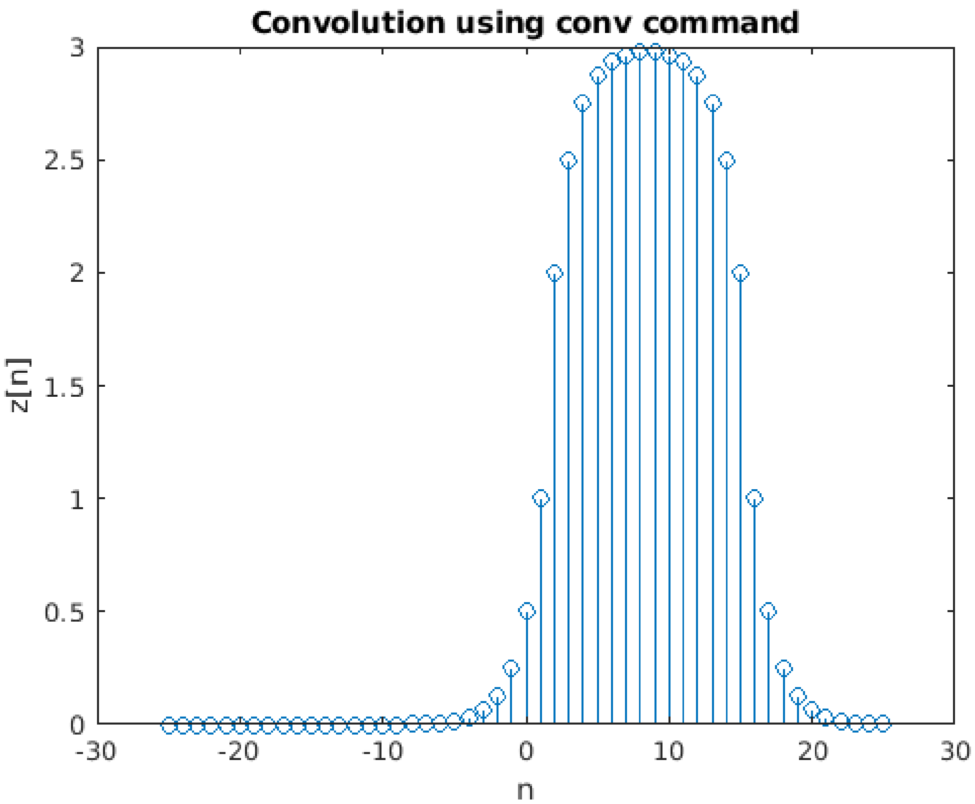
Στη συνέχεια πρέπει να ανακλαστεί το σήμα y, και ετσι δημιουργείται το σήμα y_rev.

Τέλος στο loop που παράγει το σήμα z προφανώς πρέπει να γίνει zero padding και στο σήμα y για να αποκτήσει τις ίδιες διαστάσεις με το σήμα x, ωστε να πολλαπλασιαστούν. Για κάθε ένα απο τα στοιχεία του z κάνουμε διαφορετικό shift στο y_rev. Αυτο φαίνεται με το δυναμικό zero padding που πραγματοποιείται μέσα στο for-loop. Τη πρώτη φορά δεν θα υπάρχει κανένα μηδενικό αριστερά του y και θα είναι γεμάτο απο τη δεξιά πλευρά. Τη δεύτερη φορά θα έχει ενα μηδενικό αριστερά και ένα λιγότερο σε σχέση με τη πρώτη φορά στα δεξιά κ.ο.κ. Με αυτόν τον τρόπο κάνουμε shift το σήμα y σε όλο το πεδίο του χρόνου που επιθυμούμε.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε και τη συνέλιξη με χρήση της έτοιμης συνάρτησης conv και συγκρίνουμε τα αποτελέσματα. Παρατηρούμε οτι προκύπτει το ίδιο ακριβώς σήμα.

Ακολουθούν φωτογραφίες απο τα σήματα που προκύπτουν με χρήση stem:





Όπως φαίνεται στα διαγράμματα τα σήματα που προκύπτουν είναι ιδια.

Β ερώτημα:

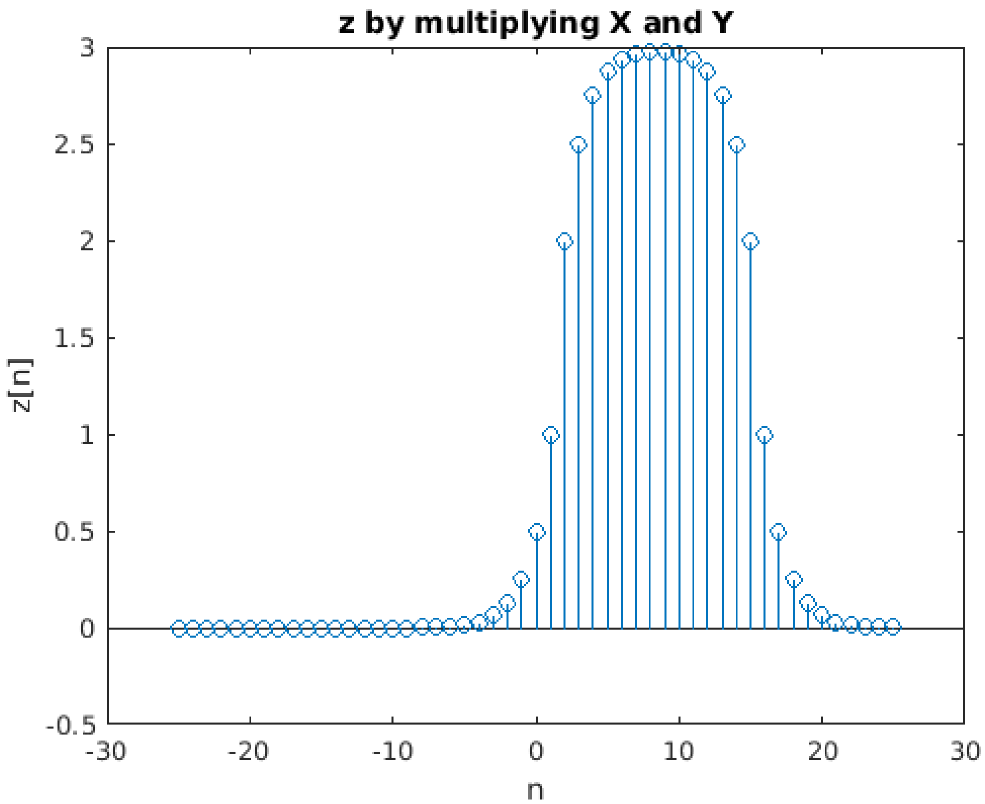
Σε αυτό το ερώτημα έπρεπε να αποδείξουμε τη γνωστή ιδιότητα:

$$\textit{συνελιξη στο χρόνο} \Leftrightarrow \textit{πολλαπλασιαμός στη συχνότητα}$$

Στη πράξη αυτό σημαίνει πως αν πάρουμε τα δύο σήματα που συνελίξαμε στο χρόνο, πάρουμε τα φάσματα τους μέσω του μετασχηματισμού Fourier, τα πολλαπλασιάσουμε και στο αποτέλεσμα εφαρμόσουμε αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier θα προκύψει το σήμα z που είχαμε απο τη προηγούμενη συνέλιξη.

Έτσι λοιπόν με χρήση της έτοιμης συνάρτησης fft όπως φαίνεται στον κώδικα παίρνουμε τα δύο φάσματα, τα πολλαπλασιάζουμε και στη συνέχεια μέσω της ifft (αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier), παίρνουμε το τελικό σήμα.

Μέσω stem το προβάλουμε και βλέπουμε πως είναι ακριβώς ιδιο με το σήμα z.



Το σήμα που προκύπτει όπως βλέπουμε είναι ίδιο με αυτά της πρώτης άσκησης.

Άσκηση 2

Αρχικά έχουμε το σήμα

$$x(t) = 5cos(24\pi t) - 2sin(1.5\pi t)$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Euler για τις συναρτήσεις cosine και sine το σήμα μπορεί να γραφτεί και ως:

$$x(t) = 5cos(2\pi 12t) - 2sin(2\pi 0.75t)$$

$$\mathrm{x}(t) = 5 \cdot \frac{e^{j2\pi 12t} + e^{-j2\pi 12t}}{2} + 2 \cdot \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi 0.75\mathrm{t}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi 0.75\mathrm{t}}}{2\mathrm{j}}, 0 < t < 500ms$$

$$\mathrm{x}(t) = \frac{5}{2} \cdot e^{j2\pi 12t} + \frac{5}{2} \cdot e^{-j2\pi 12t} - \mathrm{j} \cdot e^{j2\pi 0.75t} + \mathrm{j} \cdot e^{-j2\pi 0.75t}$$

Τύπος του Euler για cosine και sine

$$cos(t) = \frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2}$$

$$\sin(t) = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j}$$

Στο παραπάνω σχήμα έγινε μετασχηματισμός Fourier μετασχηματίζοντας κάθε ορο χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του FT και προέκυψε το σήμα X(F)

$$\mathrm{X}(F) = \frac{5}{2} \cdot \delta(F - 12) + \frac{5}{2} \cdot \delta(F + 12) - j \cdot \delta(F - 0.75) + j \cdot \delta(F + 0.75)$$

Ιδιότητες του FT:

$$\mathcal{F}\left\{\boldsymbol{e^{j2\pi f_0 t}}\right\} = \boldsymbol{\delta(f - fo)}$$

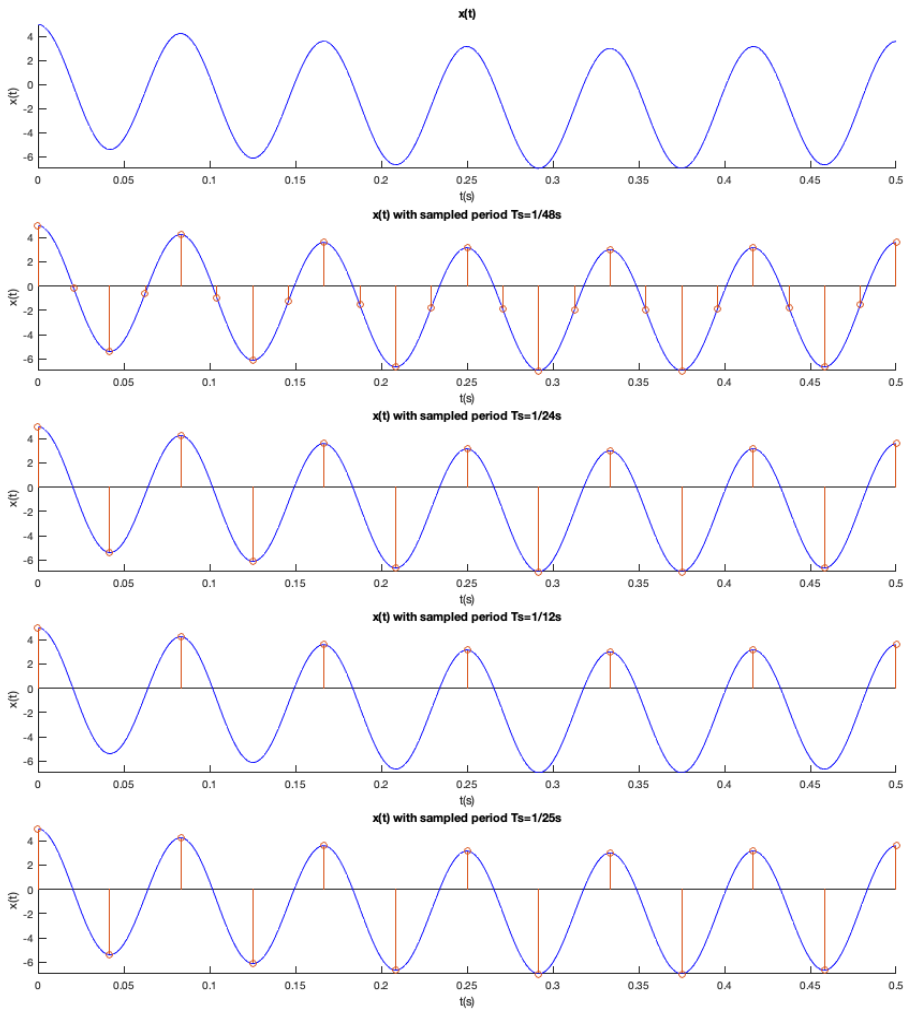
Απο το θεώρημα Shannon έχουμε οτι αν η συχνότητα δειγματοληψίας είναι διπλάσια απο την μεγαλύτερη συχνότητα του σήματος $f_s \geq 2f_c$, τότε το σήμα μπορεί να ανακατασκευαστεί πλήρως από την δειγματοληπτημένη πληροφορία. Στο σήμα μας η μεγαλύτερη συχνότητα f_{max} είναι τα $12Hz$. Έτσι, για την συχνότητα Nyquist θα έχουμε οτι:

$$F_{NYQ} = 2 * f_{max} = 24Hz$$

Στη συνέχεια έγινε δειγματοληψία του σήματος με περιόδους δειγματοληψίας:

1. $T_s = \frac{1}{48}s$
2. $T_s = \frac{1}{24}s$
3. $T_s = \frac{1}{12}s$
4. $T_s = \frac{1}{25}s$

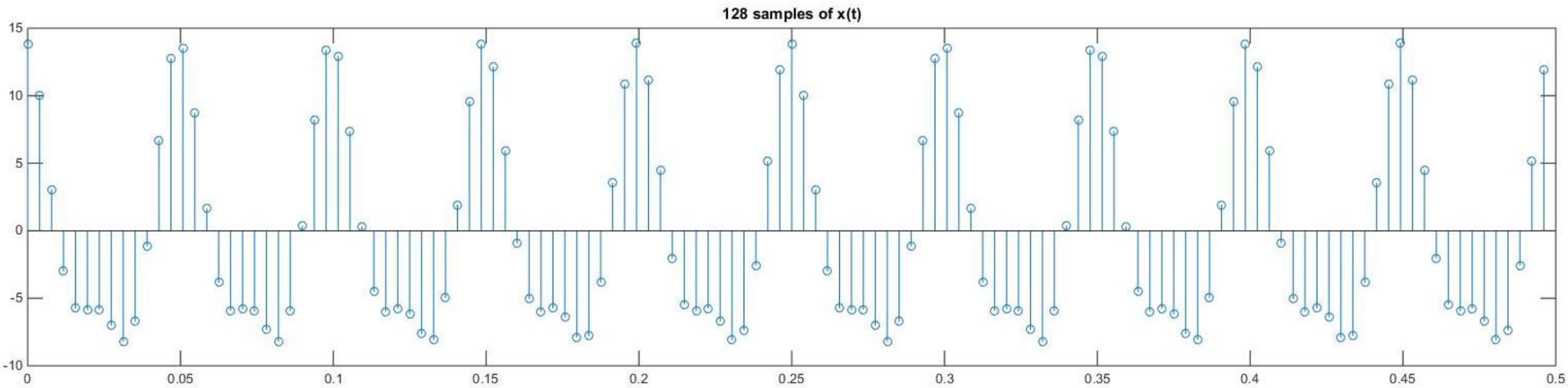
Παρακάτω (Εικόνα 1.2) απεικονίζεται το σήμα $x(t)$ και η δειγματοληψία του σε διαφορετικές περιόδους δειγματοληψίας. Παρατηρείται οτι όταν η συχνότητα δειγματοληψίας είναι ιση με την f_{max} (περίπτωση γ) δεν παράγεται αρκετή πληροφορία, ωστε να γίνει ανακατασκευή του σήματος. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις και στην περίπτωσή μας, το σήμα μπορεί να ανακατασκευαστεί καθώς η συχνότητα είναι $f_s \geq 2f_c$. Τέλος, είναι αντιληπτό οτι όσο μεγαλύτερη είναι η συχνότητα δειγματοληψίας f_s τόσο λιγότερες θα είναι οι απώλειες πληροφορίας και καλύτερη η ανάλυση του δειγματοληπτημένου σήματος.

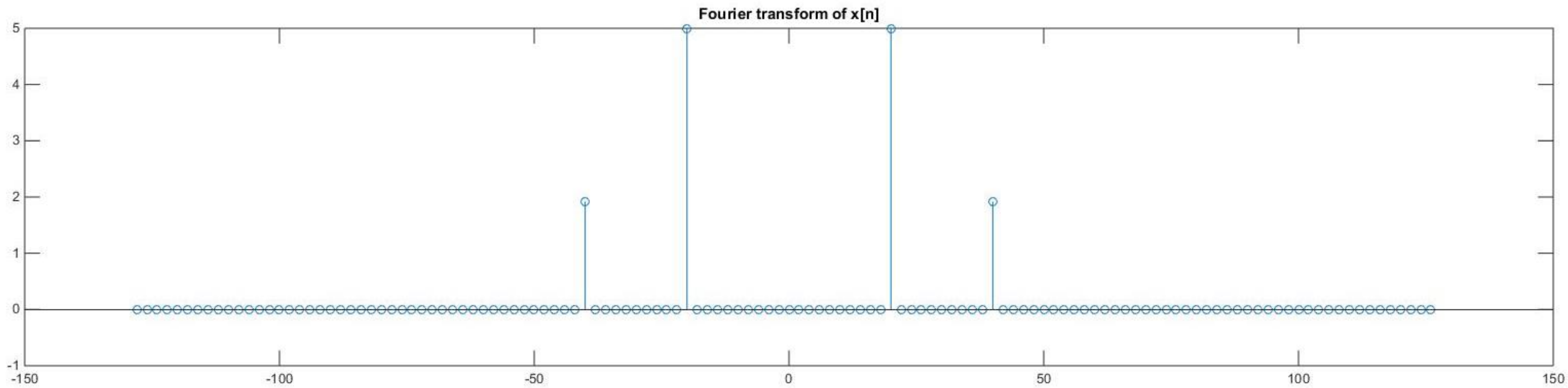

x(t)
x(t) with sampled period Ts=1/48s
x(t) with sampled period Ts=1/24s
x(t) with sampled period Ts=1/12s
x(t) with sampled period Ts=1/25s
x(t)
t(s)

Εικόνα 1.2

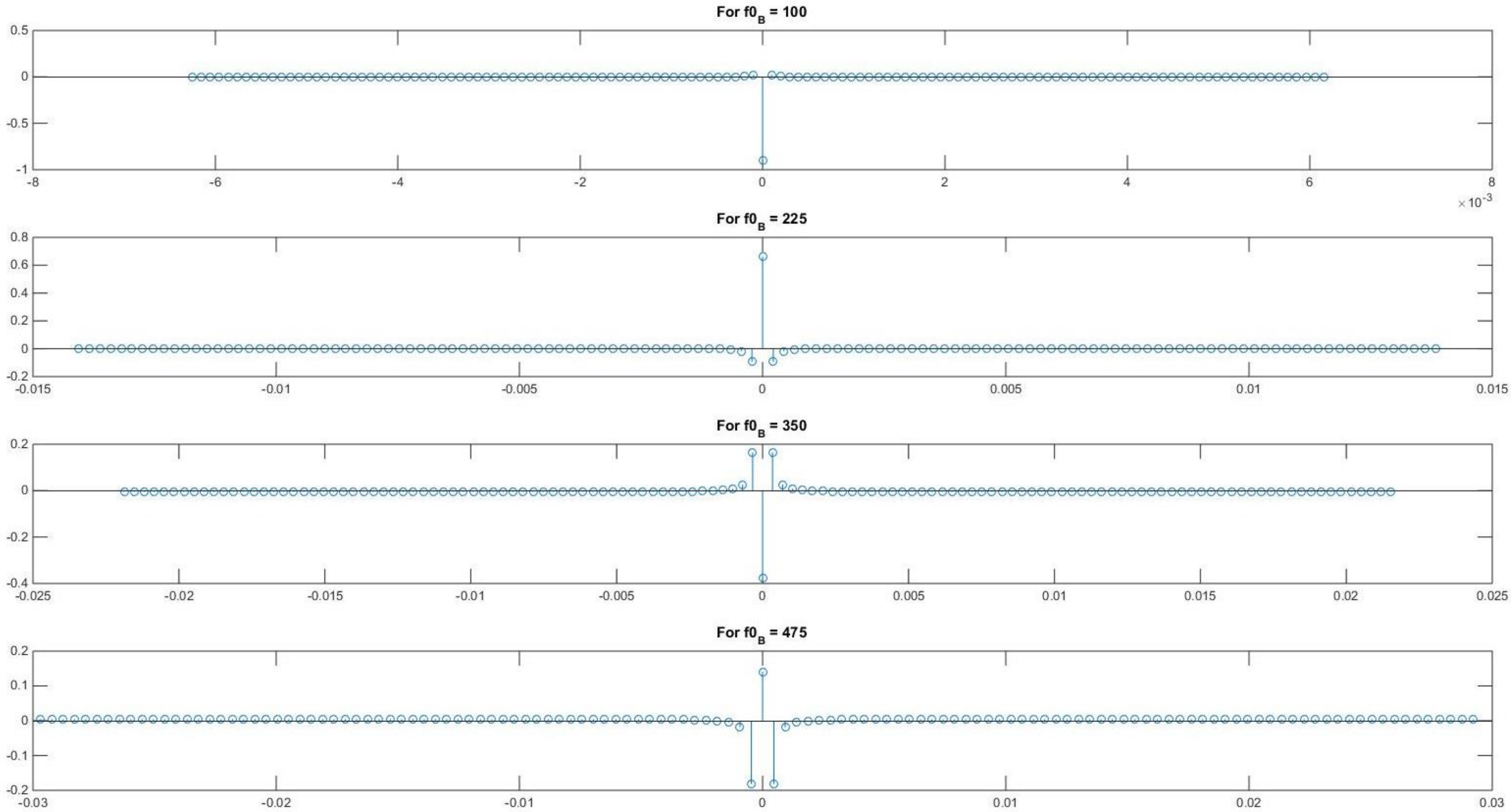
Άσκηση 3

A) Στο πρώτο ερώτημα πήραμε 128 δείγματα του σήματος x(t)=10cos(2π*20t)-4sin(2π*40t+5) με συχνότητα δειγματοληψίας 256 Hz, η οποία δεν εμφανίζει το φαινόμενο aliasing αφού $256 \geq 2f_{max} = 80$. Ύστερα υπολογίσαμε το φάσμα του σήματος όπως φαίνεται παρακάτω:

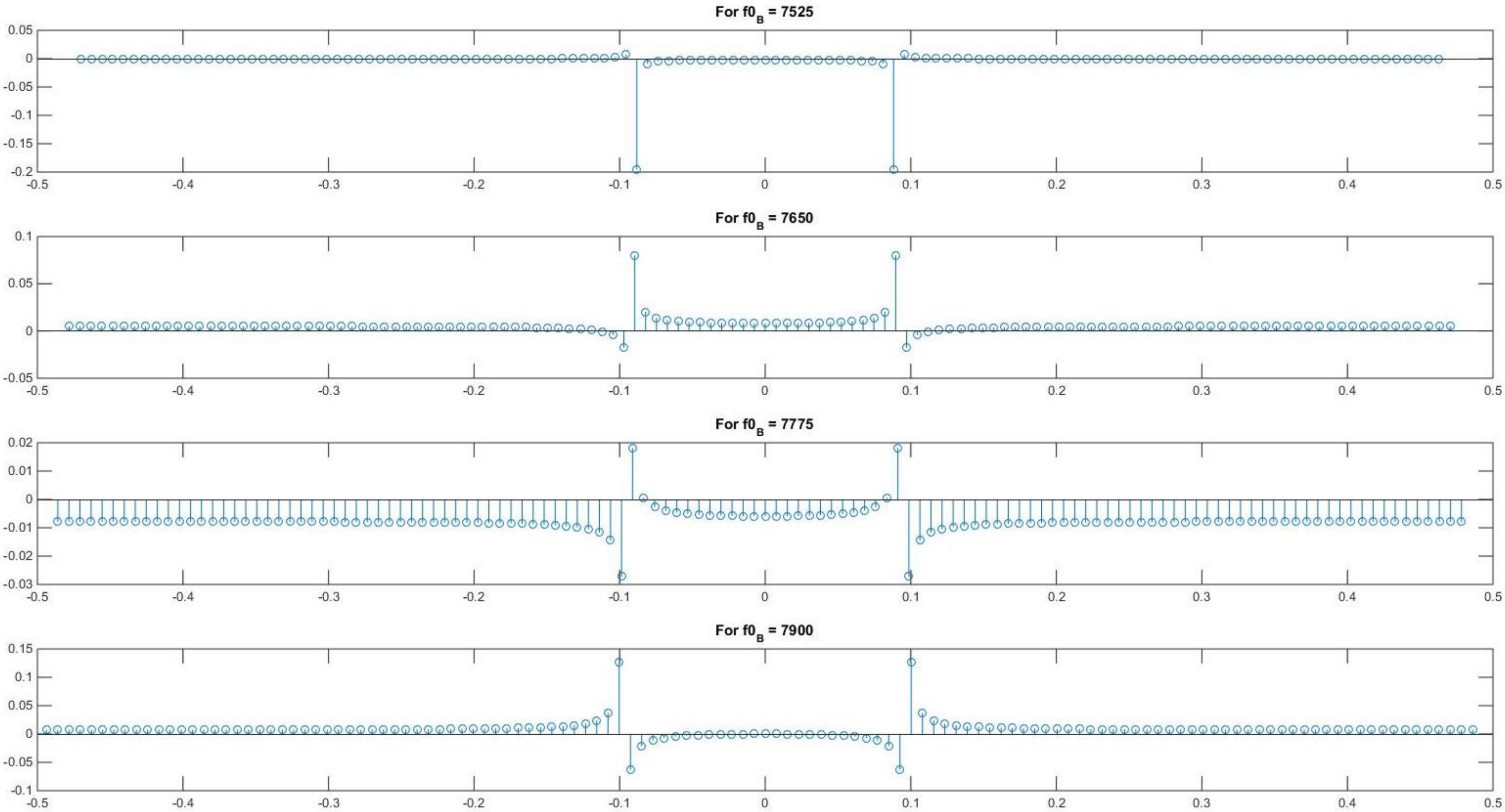




B) Αφού δειγματοληπτήσαμε το σήμα x(t)=sin(2π*f0t+φ) με συχνότητα δειγματοληψίας fs=8 kHz, προέκυψε το διακριτό σήμα x[n] = sin(2π*(f0/fs)*n+φ), όπου φ ο κωδικός της ομάδας μας στο eclass, άρα το 25.



Στα πρώτα δείγματα που φαίνονται παραπάνω, όπου $100 \leq f_0 \leq 475\ Hz$, ισχύει ότι $f_{Nyquist} = 2f_0 \leq f_s = 8\ kHz$, άρα όσο μεγαλώνει η f_0, τόσο αυξάνονται και τα δείγματα που λαμβάνουμε για το αρχικό σήμα.



Ωστόσο, στα επόμενα δείγματα που φαίνονται παραπάνω, όπου $7525 \leq f_0 \leq 7900\ Hz$, ισχύει ότι $f_{Nyquist} = 2f_0 \geq f_s = 8\ kHz$, οπότε αφού εδώ εμφανίζεται το φαινόμενο aliasing, όσο μεγαλώνει η f_0, τόσο μειώνονται και τα δείγματα που λαμβάνουμε για το αρχικό σήμα.

Τέλος, η επιλογή του κωδικού αριθμού φ δεν μετατοπίζει το σήμα, αλλάζει όμως το το μέτρο του, άρα το πρόσημο και το μέτρο του φάσματός του. Για να επιτευχθεί μετατόπιση του σήματος πρέπει το φάσμα του να πολλαπλασιαστεί με κάποιο μιγαδικό εκθετικό.