HW1 – ΤΗΛ 311

Μιχαήλ Κρατημένος

ΑΜ: 2018030104

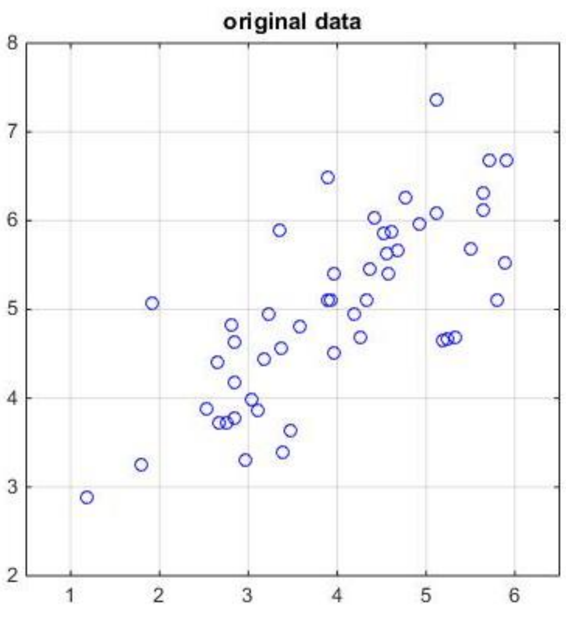
Θέμα 1.

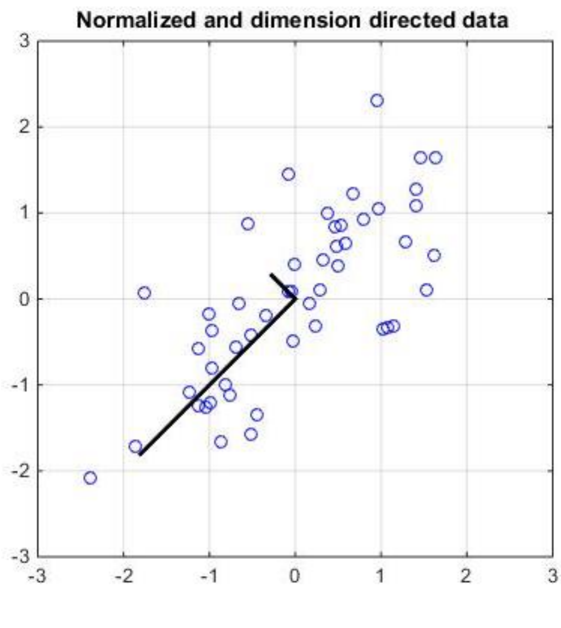
Στο ερώτημα αυτό χρησιμοποιείται η μέθοδος PCA έτσι ώστε να μειωθούν οι διαστάσεις των δεδομένων που δίνονται.

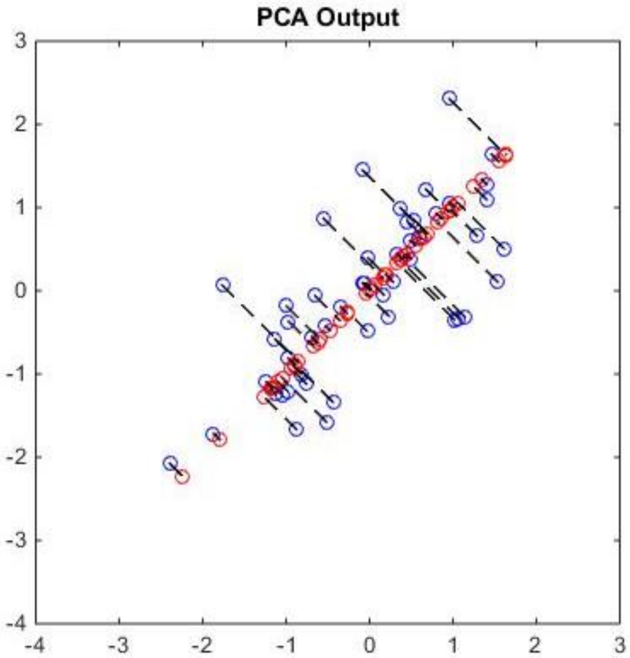
Αρχικά, στο πρώτο μέρος του ερωτήματος η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται για ένα σύνολο δεδομένων 2 διαστάσεων και στο δεύτερο μέρος για 5000 εικόνες προσώπων. Και στα 2 μέρη ακολουθείται η εξής διαδικασία για την εξαγωγή των δεδομένων που θέλουμε να αναπαραστήσουμε:

- Γίνεται φόρτωση του dataset.
- Γίνεται **standardization** του dataset με τη χρήση της συνάρτησης **featureNormalize**, που επιστρέφει μια κανονικοποιημένη μορφή του X με μέση τιμή 0 και διασπορά 1.
- Υπολογίζονται ο **πίνακας συνδιασποράς** καθώς και τα ιδιοδιανύσματα και οι ιδιοτιμές του, μέσω της συνάρτησης myPCA.
- Επιλέγονται οι πρώτες Κ ιδιοτιμές, με Κ τον επιθυμητό αριθμό διαστάσεων.
- Γίνεται **projection** των δεδομένων στις Κ διαστάσεις, μέσω της συνάρτησης **projectData** και για να απεικονιστούν τα δεδομένα αυτά γίνεται **reconstruction** μέσω των ιδιοτιμών που επιλέχθηκαν, με τη χρήση της συνάρτησης **recoverData**.

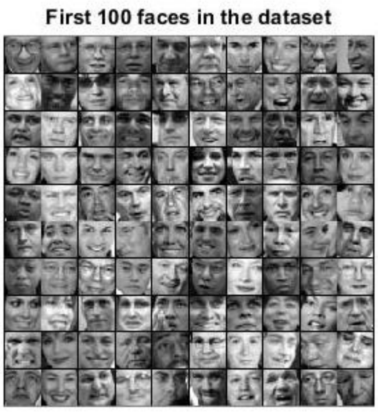
Μέρος 1ο

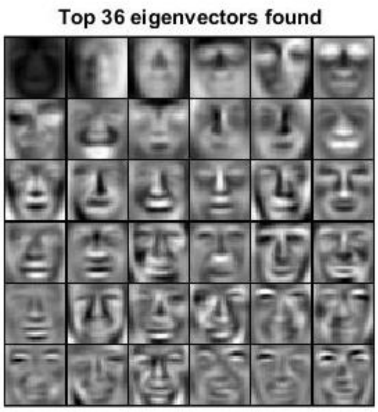






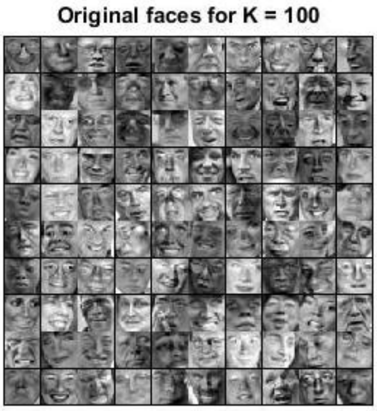
Μέρος 2ο





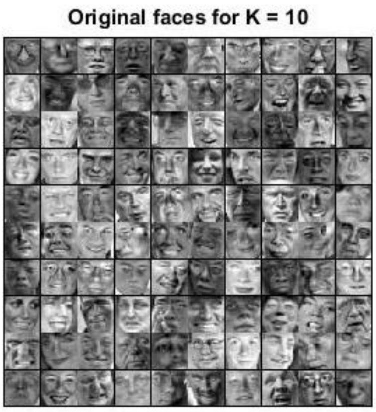
Παρατηρείται ότι οι πρώτες 36 κύριες συνιστώσες που βρέθηκαν με τη χρήση της συνάρτησης displayData() είναι πολύ θολές, άρα να μην μπορεί να γίνει σωστή ανάκτηση.

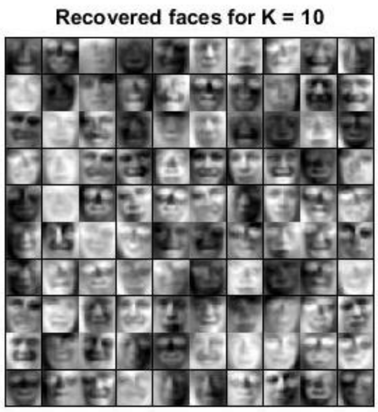
Αφού μειώθηκαν οι διαστάσεις των δειγμάτων χρησιμοποιώντας τις 100 πρώτες κύριες συνιστώσες με την projectData(), μετά σχεδιάστηκαν τα δείγματα μειωμένης διάστασης αφού προηγουμένως προβλήθηκαν στον αρχικό χώρο χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση recoverData() ως εξής:

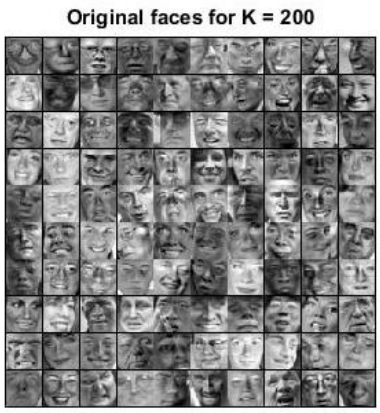


Παρατηρείται ότι ο αριθμός των κύριων συνιστωσών του αλγορίθμου μεταβάλλεται ανάλογα με την ποιότητα ανάκτησης των προσώπων, όπως θα περίμενε κανείς, αφού είναι πολύ σημαντικές οι κύριες συνιστώσες στην ανάκτηση του δείγματος των εικόνων.

Επαναλήφθηκε η διαδικασία για τα K που ζητήθηκαν (10, 50, 200):







Θέμα 2.

Πρέπει να σχεδιαστεί ένας ταξινομητής LDA. Ισχύει ότι τα ω_1, ω_2 είναι ισοπίθανες κατηγορίες, με Γκαουσιανές κατανομές. Από τα δεδομένα της άσκησης ισχύουν για τις μέσες τιμές και για τους πίνακες συνδιασποράς ότι:

$$\mu_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix}, \ \mu_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix}, \ \Sigma_1 = \begin{bmatrix} 11 & 9 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}, \ \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Αρχικά υπολογίζεται η εσωτερική διασπορά των κλάσεων ως εξής:

$$(**) S_{\mathrm{w}} = \sum_{i=1}^{c} P_i * \Sigma_i = \frac{1}{2} * (\Sigma_1 + \Sigma_2) \Rightarrow$$

$$S_{\mathrm{w}} = \frac{1}{2} * \left(\begin{bmatrix} 11 & 9 \\ 9 & 11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow S_{\mathrm{w}} = \begin{bmatrix} 6.5 & 4.5 \\ 4.5 & 6.5 \end{bmatrix}$$

$$|w| = \frac{1}{6.5^2 - 4.5^2} = \frac{1}{42.25 - 20.25} = \frac{1}{22}$$

Για τον υπολογισμό του διανύσματος w χρησιμοποιείται η εξής σχέση:

$$(***) w = {S_{\mathrm{w}}}^{-1} * (\mu_1 - \mu_2) \Rightarrow$$

$$w = \frac{1}{22} * \begin{bmatrix} 6.5 & -4.5 \\ -4.5 & 6.5 \end{bmatrix} * \left(\begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow$$

$$w = \begin{bmatrix} \frac{13}{44} & -\frac{9}{44} \\ -\frac{9}{44} & \frac{13}{44} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -15 \\ -10 \end{bmatrix} \Rightarrow \ w = \begin{bmatrix} -\frac{105}{44} \\ \frac{5}{44} \end{bmatrix}$$

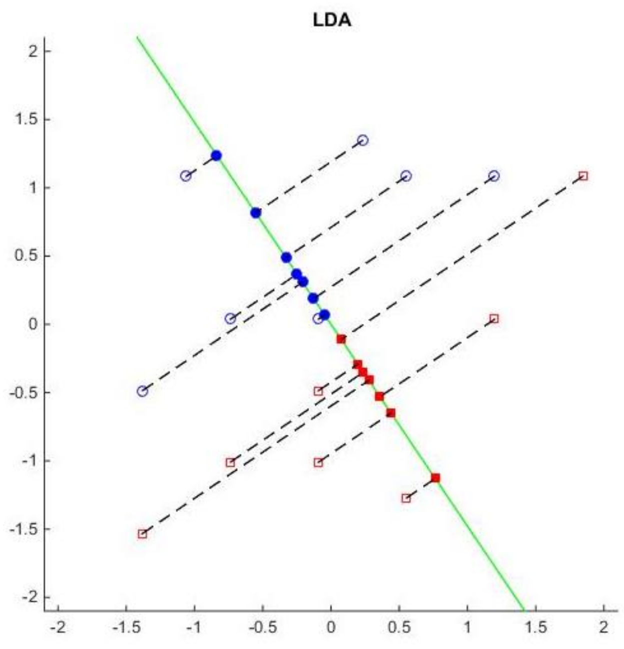
Θέμα 3.

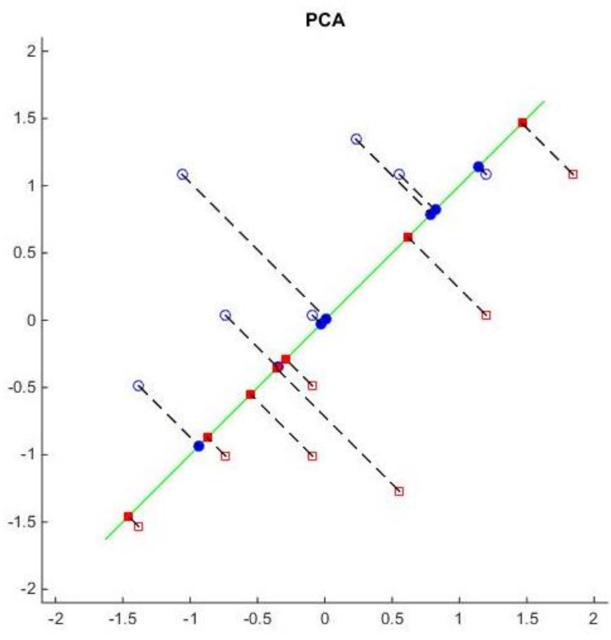
Μέρος 1ο

Για τα δεδομένα που δίνονται για τις 2 κλάσεις εφόσον γίνει φόρτωση του dataset ακολουθείται η εξής διαδικασία:

- Γίνεται **standardization** του dataset με τη χρήση της συνάρτησης **featureNormalize**.
- Υπολογίζονται το mean και ο πίνακας συνδιασποράς για τις 2 κλάσεις, με τη χρήση της συνάρτησης **fisherLinearDiscriminant**.
- Υπολογίζεται η εσωτερική διασπορά των κλάσεων (S_w) μέσω του τύπου που χρησιμοποιήθηκε στο θέμα 2 (**)
- Υπολογίζεται το διάνυσμα προβολής w μέσω του τύπου που χρησιμοποιήθηκε στο θέμα 2 (***), με τη χρήση της συνάρτησης **fisherLinearDiscriminant.**
- Γίνεται **projection** των δεδομένων σε μια διάσταση, μέσω της συνάρτησης **projectDataLDA** και για να απεικονιστούν τα δεδομένα αυτά γίνεται **reconstruction**, με τη χρήση της συνάρτησης **recoverDataLDA**.

Ύστερα, γίνεται σύγκριση με τη μέθοδο PCA ως εξής:



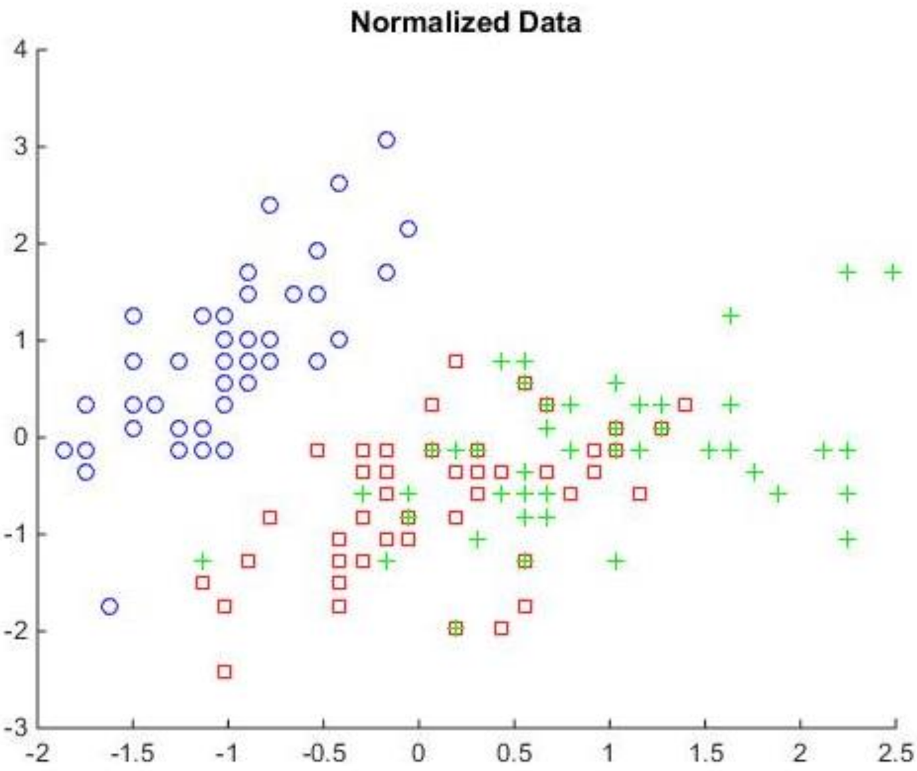


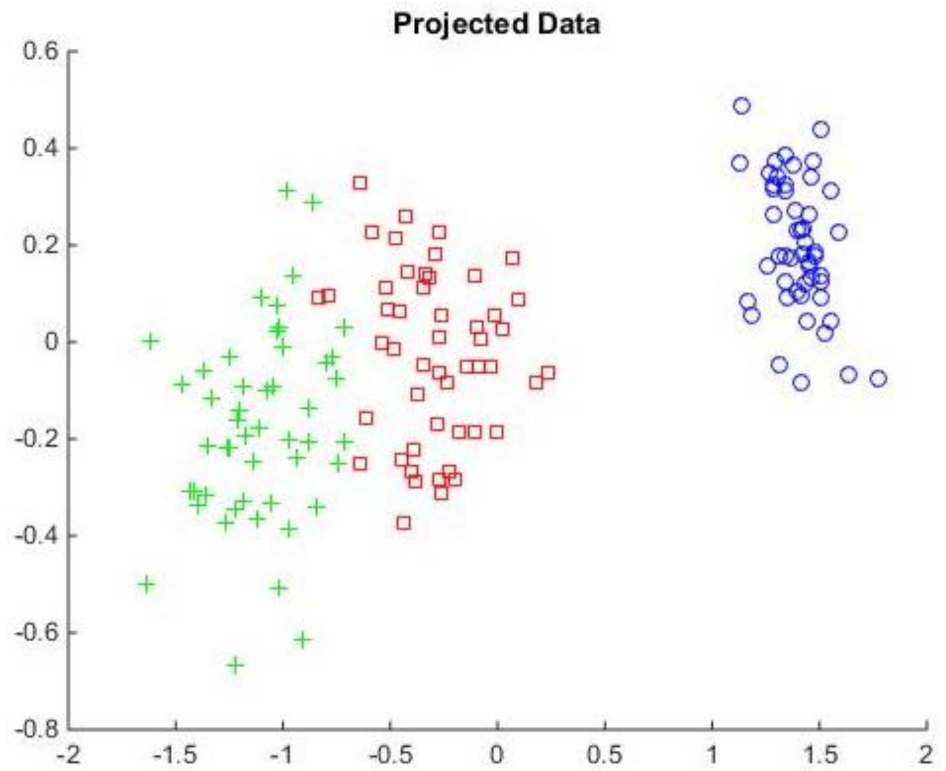
Παρατηρείται ότι η μέθοδος LDA είναι πιο αποδοτική στο συγκεκριμένο πρόβλημα, διότι αν μειωθεί η διάσταση τα δεδομένα των κλάσεων διαχωρίζονται πιο καθαρά σε σχέση με τη μέθοδο PCA.

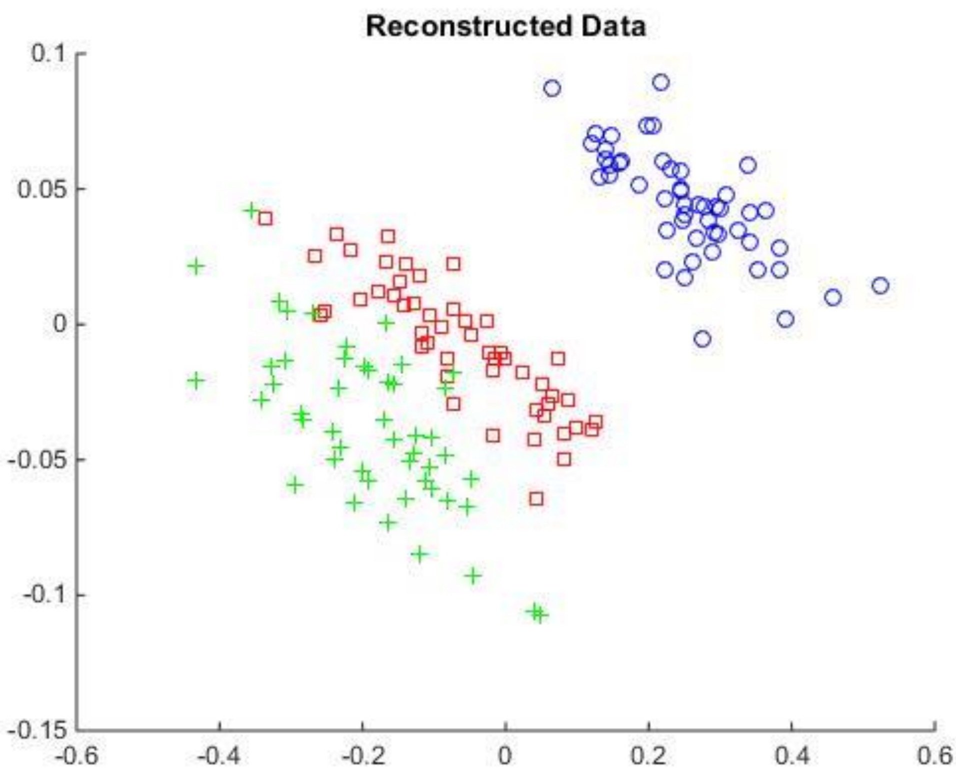
Μέρος 2ο

Αντίστοιχα με το προηγούμενο μέρος, η διαδικασία που ακολουθείται για τα δεδομένα που δίνονται για τις 3 κλάσεις, εφόσον γίνει φόρτωση του νέου dataset, είναι η εξής:

- Όπως και στο προηγούμενο μέρος, γίνεται **standardization** του dataset με τη χρήση της συνάρτησης **featureNormalize.**
- Μέσω της συνάρτησης myLDA υπολογίζονται για κάθε κλάση το mean, ο πίνακας συνδιασποράς, η εσωτερική διασπορά των κλάσεων (S_w), το global mean και το Between Class Scatter Matrix (S_b). Τέλος στην myLDA υπολογίζονται οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ταξινομημένα σε φθίνουσα σειρά, ενώ επιλέγονται οι πρώτες K ιδιοτιμές, με K να είναι ο επιθυμητός αριθμός μειωμένων διαστάσεων.
- Γίνεται **projection** των δεδομένων σε K διαστάσεις, μέσω της συνάρτησης **projectDataLDA** και για να απεικονιστούν τα δεδομένα αυτά γίνεται **reconstruction**, με τη χρήση της συνάρτησης **recoverDataLDA.**




Projected Data
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2


Reconstructed Data
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
-0.15
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
0.6

Θέμα 4.

Για την κατηγοριοποίηση ισχύει ότι:

$$x = \omega_1\ , \alpha\nu\ p(\omega_1|x) > p(\omega_2|x)$$

$$x = \omega_2\ , \alpha\nu\ p(\omega_2|x) > p(\omega_1|x)$$

Μια έκφραση για το σύνορο απόφασης μπορεί να βρεθεί μέσω της παρακάτω εξίσωσης:

$$p(\omega_1|x) = p(\omega_2|x) \Rightarrow p(\omega_1) * p(x|\omega_1) = p(\omega_2) * p(x|\omega_2) \ (1)$$

Για κάθε κλάση ω_j ισχύει ότι:

$$p(x|\omega_j) = \frac{e^{-\frac{1}{2}*(x-\mu_j)^T * {\Sigma_j}^{-1} * (x-\mu_j)}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} * |\Sigma_j|^{\frac{1}{2}}}$$

Εφόσον έχουμε 2 διαστάσεις ισχύει ότι d=2, άρα:

$$p(x|\omega_1) = \frac{e^{-\frac{1}{2}*(x-\mu_1)^T * {\Sigma_1}^{-1} * (x-\mu_1)}}{2\pi * |\Sigma_1|^{\frac{1}{2}}} \ (2)$$

$$p(x|\omega_2) = \frac{e^{-\frac{1}{2}*(x-\mu_2)^T * {\Sigma_2}^{-1} * (x-\mu_2)}}{2\pi * |\Sigma_2|^{\frac{1}{2}}} \ (3)$$

$$|\Sigma_1| = 1.2^2 - (-0.4)^2 = 1.44 - 0.16 = 1.28$$

$$|\Sigma_2| = 1.2^2 - 0.4^2 = 1.44 - 0.16 = 1.28$$

Άρα $|\Sigma_1| = |\Sigma_2|$.

Οπότε (1) $\xRightarrow{(2),(3)} p(\omega_1) * e^{-\frac{1}{2}*(x-\mu_1)^T * {\Sigma_1}^{-1} * (x-\mu_1)} = p(\omega_2) * e^{-\frac{1}{2}*(x-\mu_2)^T * {\Sigma_2}^{-1} * (x-\mu_2)}$
$\xRightarrow{lnx} \ln\left(p(\omega_1) * e^{-\frac{1}{2}*(x-\mu_1)^T * {\Sigma_1}^{-1} * (x-\mu_1)}\right) = \ln\left(p(\omega_2) * e^{-\frac{1}{2}*(x-\mu_2)^T * {\Sigma_2}^{-1} * (x-\mu_2)}\right) \Rightarrow$

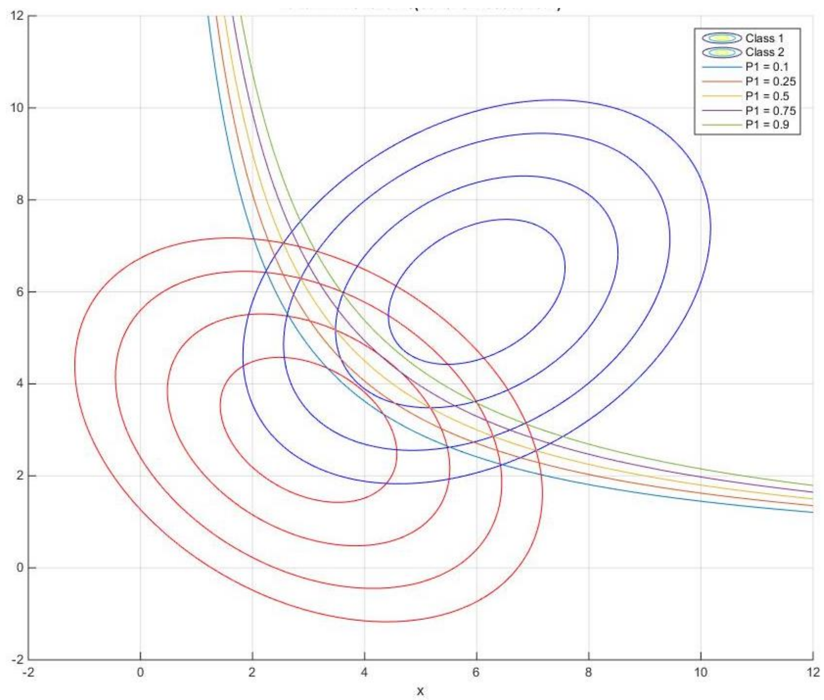
$$\ln(p(\omega_1)) - \frac{1}{2} * (x-\mu_1)^T * {\Sigma_1}^{-1} * (x-\mu_1) = \ln(p(\omega_2)) - \frac{1}{2} * (x-\mu_2)^T * {\Sigma_2}^{-1} * (x-\mu_2) \Rightarrow$$

$$-2 * \ln(p(\omega_1)) + (x-\mu_1)^T * {\Sigma_1}^{-1} * (x-\mu_1) = -2 * \ln(p(\omega_2)) + (x-\mu_2)^T * {\Sigma_2}^{-1} * (x-\mu_2) \Rightarrow$$

$$2 * \ln\left(\frac{p(\omega_2)}{p(\omega_1)}\right) + \frac{1}{1.28} * [x_1 - 3 \quad x_2 - 3] * \begin{bmatrix} 1.2 & -0.4 \\ -0.4 & 1.2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 - 3 \\ x_2 - 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{1.28} * [x_1 - 6 \quad x_2 - 6] * \begin{bmatrix} 1.2 & 0.4 \\ 0.4 & 1.2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 - 6 \\ x_2 - 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow$$

$$2 * \ln\left(\frac{p(\omega_2)}{p(\omega_1)}\right) + 1.25 x_1 x_2 = 22.5 \Rightarrow x_2 = \frac{22.5 - 2 * \ln\left(\frac{p(\omega_2)}{p(\omega_1)}\right)}{1.25 x_1}$$

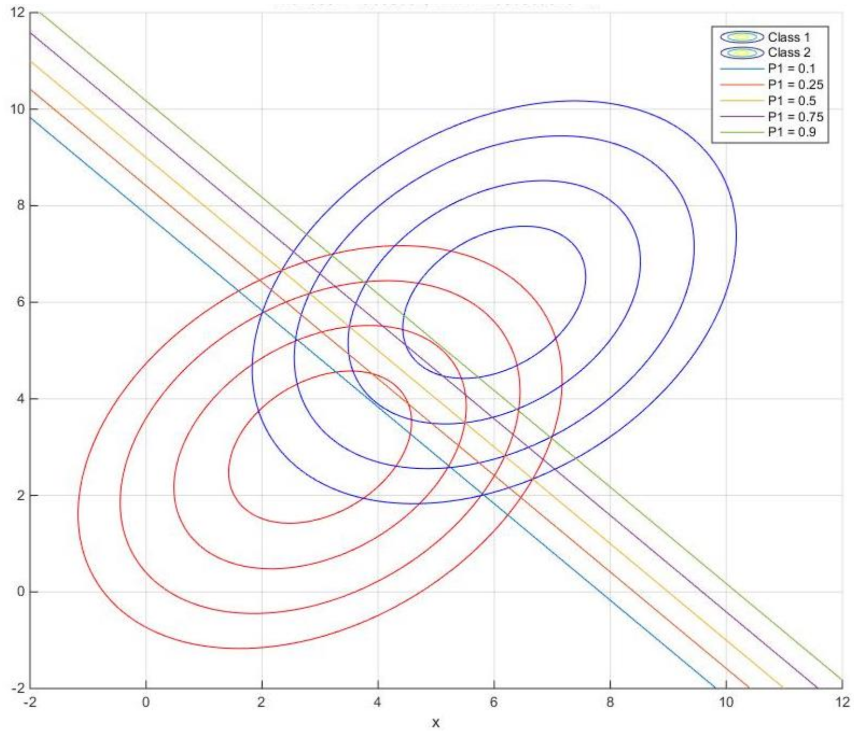
Εφόσον σχεδιαστούν οι καμπύλες των δεσμευμένων πιθανοτήτων $p(x|\omega_j)$ κάθε κλάσης με τα χαρακτηριστικά που έχουν οριστεί, ύστερα σχεδιάζονται τα σύνορα απόφασης για τις τιμές που μας δόθηκαν για την $p(\omega_1)$, κρατώντας και ως δεδομένο ότι $p(\omega_2) = 1 - p(\omega_1)$. Οπότε καταλήγουμε στην ακόλουθη γραφική:



Επαναλαμβάνουμε θεωρώντας ότι $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.4 \\ 0.4 & 1.2 \end{bmatrix}$. Μια έκφραση για το σύνορο απόφασης μπορεί να βρεθεί και πάλι μέσω της παρακάτω εξίσωσης: $p(\omega_1|x) = p(\omega_2|x) \Rightarrow \dots \Rightarrow$

$$x_2 = -x_1 + \frac{33.75 - 2 * \ln\left(\frac{p(\omega_2)}{p(\omega_1)}\right)}{3.75}$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με πριν καταλήγουμε στην παρακάτω γραφική, στην οποία το σύνορο απόφασης είναι μια ευθεία γραμμή:



Στις
γραφικές η κλάση 1 είναι αυτή που αναπαρίσταται με κόκκινο χρώμα ενώ η κλάση 2 αυτή που αναπαρίσταται με μπλε χρώμα.

Παρατηρείται και στις 2 γραφικές ότι όσο μεγαλώνει το $p(\omega_1)$, τόσο το σύνορο απόφασης πλησιάζει την κλάση ω_2.

Θέμα 6.

Αφού τα δείγματα χ ακολουθούν κατανομή Rayleigh με σ=1, σ=2 και με τα $p(x|\omega_1), L$ γνωστά, μέσω του κριτηρίου ελαχιστοποίησης μέσου ρίσκου, η ταξινόμηση γίνεται μέσω των παρακάτω ποσοτήτων:

$$l_1 = \lambda_{11} * p(\omega_1) * p(x|\omega_1) + \lambda_{21} * p(\omega_2) * p(x|\omega_2)$$

$$l_2 = \lambda_{12} * p(\omega_1) * p(x|\omega_1) + \lambda_{22} * p(\omega_2) * p(x|\omega_2)$$

Παρατηρείται ότι επιτυγχάνεται ελαχιστοποίηση του ρίσκου όταν:

$$l_1 = l_2 \;\; => \;\; \lambda_{11} * p(\omega_1) * p(x|\omega_1) + \lambda_{21} * p(\omega_2) * p(x|\omega_2)$$
$$= \lambda_{12} * p(\omega_1) * p(x|\omega_1) + \lambda_{22} * p(\omega_2) * p(x|\omega_2) \xRightarrow{\lambda_{11} = \lambda_{22} = 0}$$

$$\lambda_{21} * p(\omega_2) * p(x|\omega_2) = \lambda_{12} * p(\omega_1) * p(x|\omega_1) \xRightarrow{p(\omega_1) = p(\omega_2)}$$

$$\lambda_{21} * p(x|\omega_2) = \lambda_{12} * p(x|\omega_1) \Rightarrow$$

$$\frac{p(x|\omega_1)}{p(x|\omega_2)} = \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{12}} \Rightarrow \frac{\frac{x}{\sigma_1^2} * e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}}}{\frac{x}{\sigma_2^2} * e^{-\frac{x^2}{2\sigma_2^2}}} = \frac{1}{0.5} \Rightarrow 4e^{\frac{x^2}{8}-\frac{x^2}{2}} = 2 \Rightarrow e^{\frac{-3x^2}{8}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{-3x^2}{8} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{8\ln(2)}{3}} = \pm 1.36$$

Επειδή ισχύει ότι x > 0, προκύπτει ότι x = 1.36.

Θέμα 7.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, X^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

7.1) $X^T * X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 14 \end{bmatrix}$

Ιδιοτιμές: $|\lambda I - X^T * X| = \left|\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 14 \end{bmatrix}\right| = \begin{bmatrix} \lambda - 6 & -7 \\ -7 & \lambda - 14 \end{bmatrix} =$

$$(\lambda - 6) * (\lambda - 14) - 49 = \lambda^2 - 14\lambda - 6\lambda + 84 - 49 = \lambda^2 - 20\lambda + 35 \; (*) \Rightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 4 * 35}}{2} = \frac{20 \pm \sqrt{260}}{2} \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = \frac{20 + 16.12}{2} = 18.062\, , \lambda_2 = \frac{20 - 16.12}{2} = 1.938$$

Ιδιοδιανύσματα:

Για λ_1: $X^T * X * \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 * u_1 \\ \lambda_1 * u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 14 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18.062 * u_1 \\ 18.062 * u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 6u_1 + 7u_2 \\ 7u_1 + 14u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18.062 * u_1 \\ 18.062 * u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6u_1 + 7u_2 = 18.062 * u_1 \\ 7u_1 + 14u_2 = 18.062 * u_2 \end{cases} \Rightarrow \ldots \Rightarrow u_1 = 0.58u_2.$$

Οπότε για το λ_1 έχουμε ότι το ιδιοδιάνυσμά του είναι το $s\begin{bmatrix} 0.58 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Για λ_2: $X^T * X * \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2 * u_1 \\ \lambda_2 * u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 7 & 14 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.938 * u_1 \\ 1.938 * u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 6u_1 + 7u_2 \\ 7u_1 + 14u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.938 * u_1 \\ 1.938 * u_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6u_1 + 7u_2 = 1.938 * u_1 \\ 7u_1 + 14u_2 = 1.938 * u_2 \end{cases} \Rightarrow \ldots \Rightarrow u_2 = -0.58u_1$$

Οπότε για το λ_2 έχουμε ότι το ιδιοδιάνυσμά του είναι το $s\begin{bmatrix} -1 \\ 0.58 \end{bmatrix}$.

7.2) Singular values:

Για λ_1: $s_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{18.062} = 4.25$

Για λ_2: $s_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{1.938} = 1.392$

7.3) $X * X^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 5 \\ 7 & 5 & 10 \end{bmatrix}$

Ιδιοτιμές: $|\lambda I - X * X^T| = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 5 \\ 7 & 5 & 10 \end{bmatrix} \right| =$

$\begin{vmatrix} \lambda - 5 & -4 & -7 \\ -4 & \lambda - 5 & -5 \\ -7 & -5 & \lambda - 10 \end{vmatrix} =$

$$(\lambda - 5) * \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -5 \\ -5 & \lambda - 10 \end{vmatrix} + 4 * \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ -7 & \lambda - 10 \end{vmatrix} - 7 * \begin{vmatrix} -4 & \lambda - 5 \\ -7 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$(\lambda - 5) * [(\lambda - 5) * (\lambda - 10) - 25] + 4 * [-4 * (\lambda - 10) - 35] -$$

$$-7 * [20 + 7 * (\lambda - 5)] =$$

$$(\lambda - 5) * (\lambda^2 - 15\lambda + 50 - 25) + 4 * (-4\lambda + 40 - 35) - 7 * (7\lambda - 35 + 20) =$$

$$(\lambda - 5) * (\lambda^2 - 15\lambda + 25) - 16\lambda + 20 - 49\lambda + 105 =$$

$$\lambda^3 - 15\lambda^2 + 25\lambda - 5\lambda^2 + 75\lambda - 125 - 65\lambda + 125 =$$

$$\lambda^3 - 20\lambda^2 + 35\lambda = \lambda(\lambda^2 - 20\lambda + 35) \ \ (1)$$

Εφόσον ψάχνουμε μη μηδενικά ιδιοδιανύσματα ισχύει ότι $\lambda \neq 0$ οπότε από τη σχέση (1) μπορούν να προκύψουν ιδιοτιμές μόνο από το πολυώνυμο, το οποίο ταυτίζεται με αυτό του ερωτήματος 7.1 (*), άρα οι ιδιοτιμές είναι ίδιες:

$$\lambda_1 = 18.062\,, \lambda_2 = 1.938$$

Ιδιοδιανύσματα: Για λ_1: $X * X^T * \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 * u_1 \\ \lambda_1 * u_2 \\ \lambda_1 * u_3 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 5 \\ 7 & 5 & 10 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18.062 * u_1 \\ 18.062 * u_2 \\ 18.062 * u_3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 5u_1 + 4u_2 + 7u_3 \\ 4u_1 + 5u_2 + 5u_3 \\ 7u_1 + 5u_2 + 10u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18.062 * u_1 \\ 18.062 * u_2 \\ 18.062 * u_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0.721u_3 \\ u_2 = 0.603u_3 \end{cases}$$

Οπότε για το λ_1 έχουμε ότι το ιδιοδιάνυσμά του είναι το $s \begin{bmatrix} 0.721 \\ 0.603 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\text{Για } \lambda_2\text{:}\ X * X^T * \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2 * u_1 \\ \lambda_2 * u_2 \\ \lambda_2 * u_3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 5 \\ 7 & 5 & 10 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.938 \ * u_1 \\ 1.938 \ * u_2 \\ 1.938 \ * u_3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 5u_1 + 4u_2 + 7u_3 \\ 4u_1 + 5u_2 + 5u_3 \\ 7u_1 + 5u_2 + 10u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.938 \ * u_1 \\ 1.938 \ * u_2 \\ 1.938 \ * u_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} u_1 = -0.738u_3 \\ u_2 = -0.58u_3 \end{cases}$$

Οπότε για το λ_1 έχουμε ότι το ιδιοδιάνυσμά του είναι το $s\begin{bmatrix} -0.738 \\ -0.58 \\ 1 \end{bmatrix}$.