ΤΗΛ 301 ΑΣΚΗΣΗ 2

Μιχαήλ Κρατημένος ΑΜ: 2018030104
Ιωάννης Λαμπρινίδης ΑΜ: 2018030075

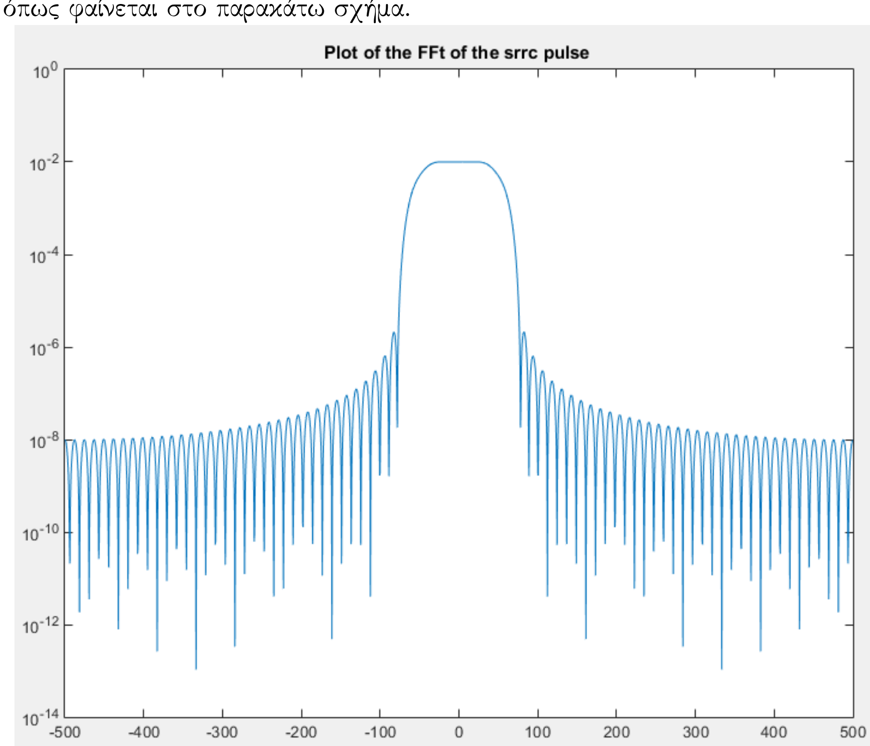
25 Νοεμβρίου 2020

Χρόνος εργασίας: περίπου 14 ώρες ο καθένας μας

A

A1

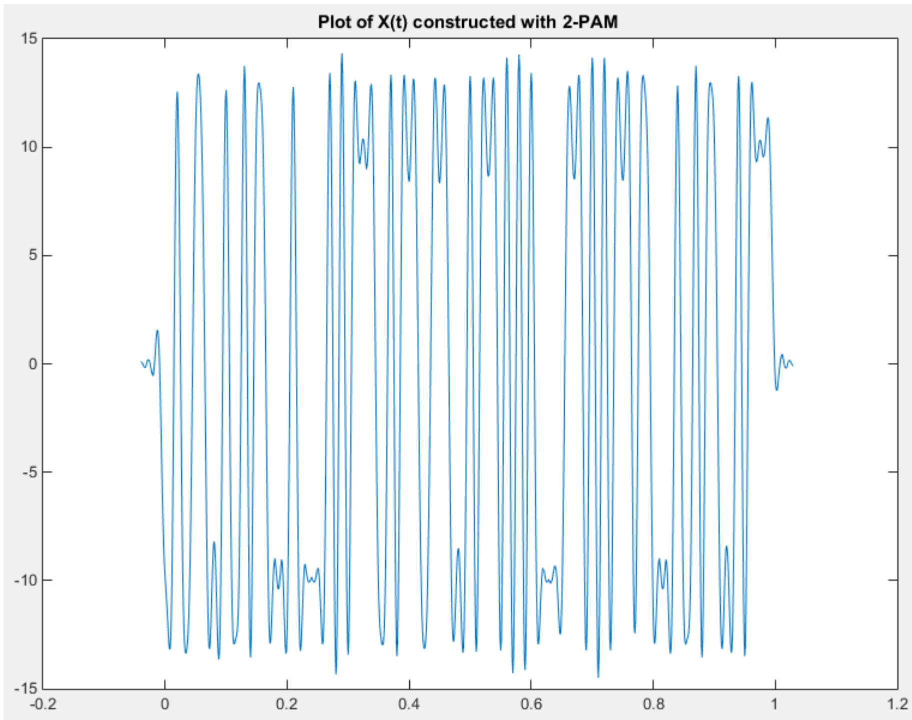
Δημιουργήθηκε ο παλμός srrc με τις τιμές που δίνονται, υπολογίστηκε το μέτρο του μετασχηματισμού fourier του παλμού (με τη χρήση των συναρτήσεων fft, fftshift) και μέσω του μετασχηματισμού υπολογίστηκε η φασματική πυκνότητα ενέργειας, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



```
clear all;
close all;
%% A
%value initialization
T=1/100;
over=10;
Ts=T/over;
A=4;
a=0.5;
Nf=2048;
Fs=1/Ts;
N=100;

%% A.1
%creating an srrc pulse and calculating it's power sprectral density
[f1,t1]=srrc_pulse(T,over,A,a);
Faxis=-Fs/2:Fs/Nf:Fs/2-Fs/Nf;
F1=abs(fftshift(fft(f1,Nf))*Ts);
figure()
semilogy(Faxis,F1.^2)
```

A2

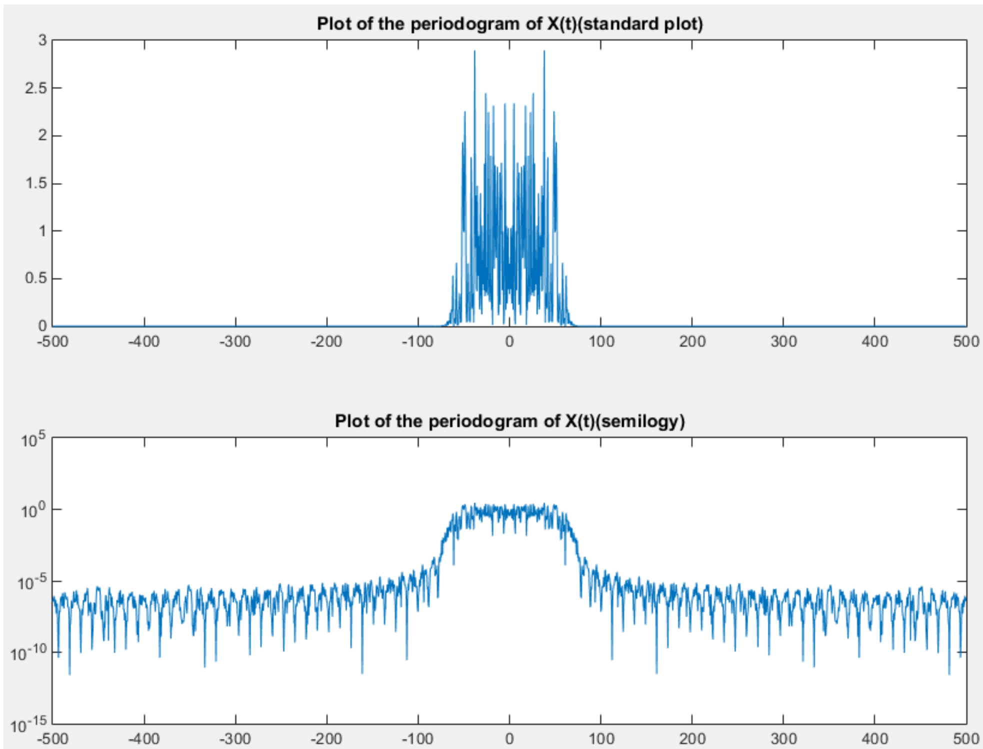
Δημιουργήθηκε μια ακολουθία 100 ανεξάρτητων ισοπίθανων bits και αντικαταστάθηκε το κάθε bit με το αντίστοιχο 2-PAM. Στη συνέχεια δημιουργήθηκαν οι μετατοπίσεις του παλμού srrc, πολλαπλασιάστηκαν με το αντίστοιχο 2-PAM σύμβολο και μέσω αυτών κατασκευάστηκε η κυματομορφή $X(t)$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

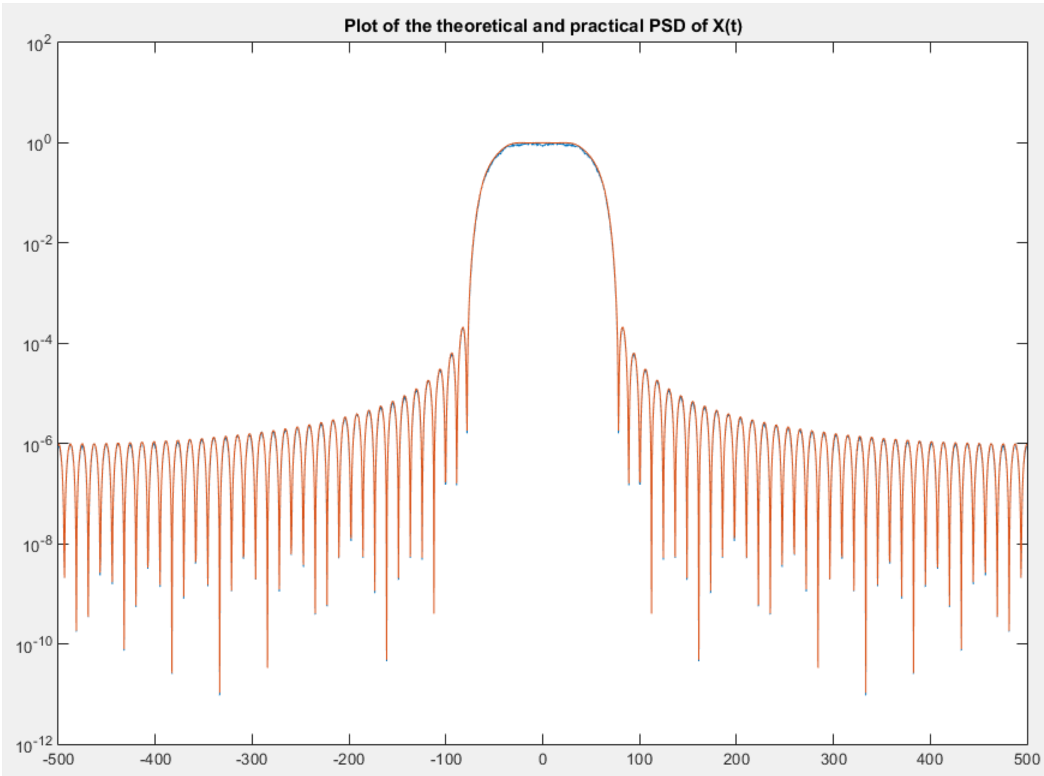



```
%% A.2
%creating an array of 100 random bits
b = (sign(randn(N, 1)) + 1)/2;
X = bits_to_2PAM(b);
%creating an empty vector to store the numbers
 f_all_temp=zeros(length(b),length(t1)+(length(b)-1)*over);
 %creating the time moved signals
 for i=0:length(b)-1
     for j=1:length(t1)
         f_all_temp(i+1,j+i*over)=X(i+1)*f1(j);
     end
 end
 %calculating the time of the signal
 t=t1(end)+Ts:Ts:t1(end)+T*(length(b)-1);
 t=[t1 t];
 X_t=sum(f_all_temp, 1);

 figure()
 plot(t,X_t)
```

A3

Αρχικά υπολογίστηκε το περιοδόγραμμα της $X(t)$. Έπειτα υπολογίστηκε αριθμητικά η φασματική πυκνότητα ισχύος υπολογίζοντας αριθμητικές μέσες πάνω σε K=500 υλοποιήσεις περιοδογραμμάτων και σχεδιάστηκε μαζί με τη θεωρητική, όπως φαίνεται στο πρώτο σχήμα. Όσο αυξανόταν το K η προσέγγιση γινόταν όλο και καλύτερη. Δυστηχώς όμως όσο αυξανόταν το N η πρακτική εκτίμηση της φασματικής πυκνότητας ισχύος απέκλινε από τη θεωρητική, όπως φαίνεται στο δεύτερο σχήμα.



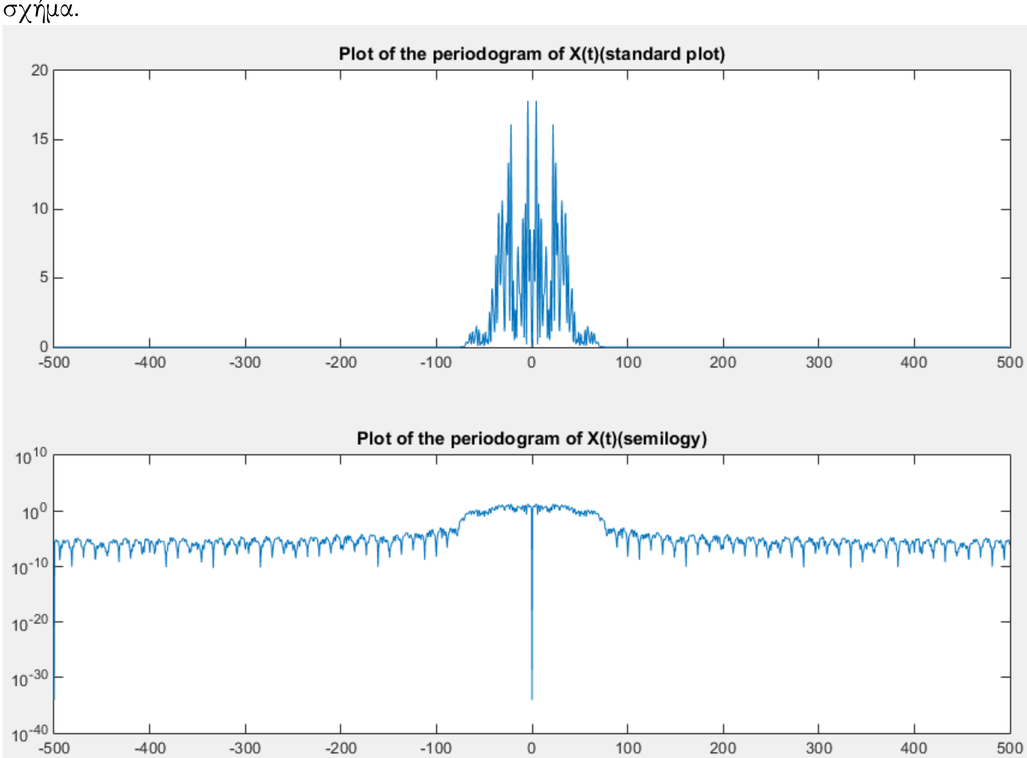



```
%% A.3
figure()
%creating the periodogram of X_t
Px=fftshift(abs(fft(X_t,Nf)).^2)*Ts./length(t);
subplot(2,1,1)
plot(Faxis,Px)
subplot(2,1,2)
semilogy(Faxis,Px)

%calculating the median of Px
rep=500;
Pmean=zeros(rep,length(Px));

for u=1:rep
%creating an array of 100 random bits
b = (sign(randn(N, 1)) + 1)/2;
X = bits_to_2PAM(b);
%creating an empty vector to store the numbers
 f_all_temp=zeros(length(b),length(t1)+(length(b)-1)*over);
 %creating the time moved signals
 for i=0:length(b)-1
     for j=1:length(t1)
         f_all_temp(i+1,j+i*over)=X(i+1)*f1(j);
     end
```

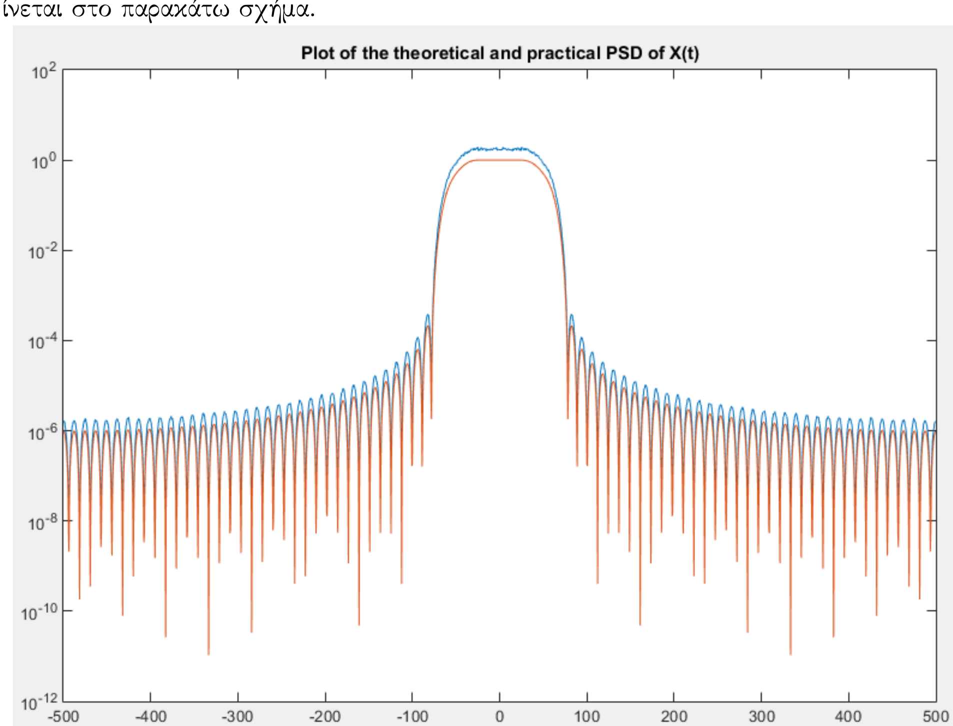
```
 end

 X_t=sum(f_all_temp, 1);
 Pmean(u,:)=fftshift(abs(fft(X_t,Nf)).^2)*Ts./length(t);

end
%summing all the calculated X_t and calculating the practical ...
    median of X_t
PSD_pract=sum(Pmean,1)/rep;
%Calculating the theoretical median of X_t
PSD_theor=(1/T).*(F1.^2);
figure()
semilogy(Faxis,PSD_pract);
 hold on;
 semilogy(Faxis,PSD_theor);
```

A4

Αρχικά, φτιάξαμε τη συνάρτηση bits-to-4PAM η οποία κατασκευάζει από μια σειρά από bits κατασκευάζει την αντίστοιχη ακολουθία 4-PAM. Η συνάρτηση $X(t)$ υπολογίστηκε με παρόμοιο τρόπο όπως στο A2 ερώτημα.
Παρατηρείται ότι υπάρχει μια μικρή απόκλιση μεταξύ της πρακτικής και της θεωρητικής τιμής της φασματικής πυκνότητας ισχύος, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Παρατηρείται ότι υπάρχει μια μικρή διαφορά ανάμεσα στα δύο μέγιστα πλάτη των φασματικών πυκνοτήτων ισχύος, ενώ το εύρος φάσματος μένει το ίδιο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

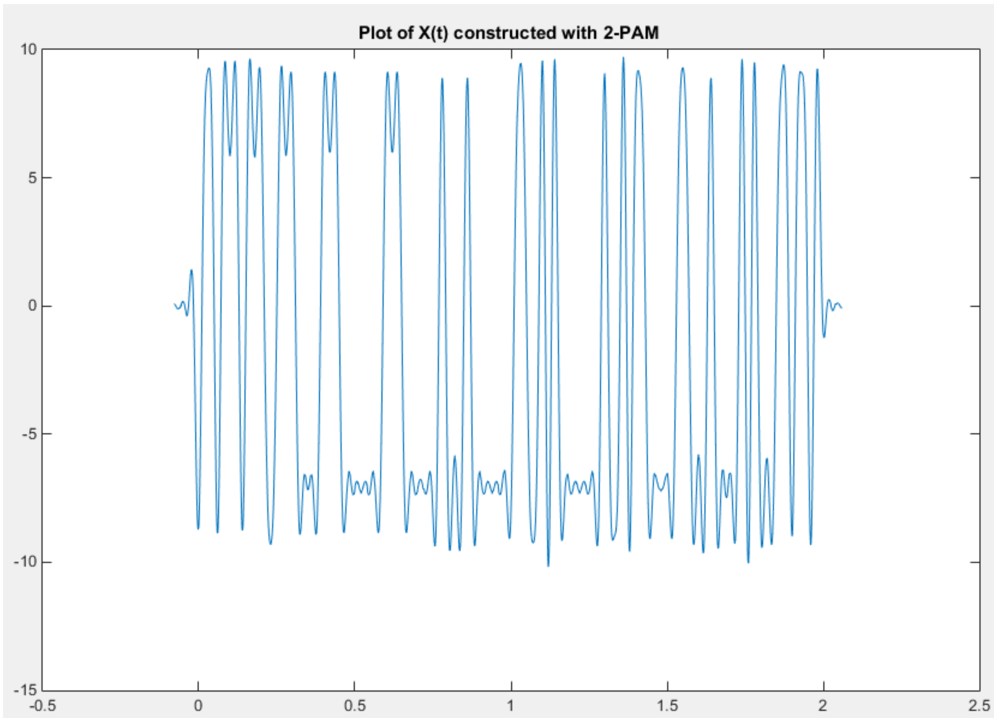


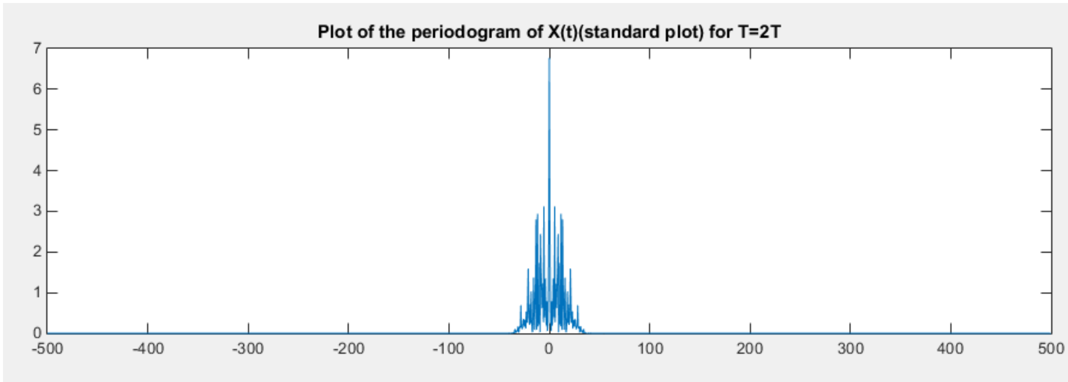

```
%% A.4
%creating an array of 100 random bits
b = (sign(randn(N, 1)) + 1)/2;
d = zeros(1,length(b)/2);
X = bits_to_4PAM(b,d);
 %creating an empty vector to store the numbers
 f_all_temp=zeros(length(X),length(t1)+(length(X)-1)*over);
 %creating the time moved signals
 for i=0:length(X)-1
     for j=1:length(t1)
         f_all_temp(i+1,j+i*over)=X(i+1)*f1(j);
     end
 end
  %calculating the time of the signal
t=t1(end)+Ts:Ts:t1(end)+T*(length(X)-1);
 t=[t1 t];
 X_t=sum(f_all_temp, 1);
figure()
Px=fftshift(abs(fft(X_t,Nf)).^2)*Ts./length(t);
subplot(2,1,1)
plot(Faxis,Px)
subplot(2,1,2)
semilogy(Faxis,Px)


```

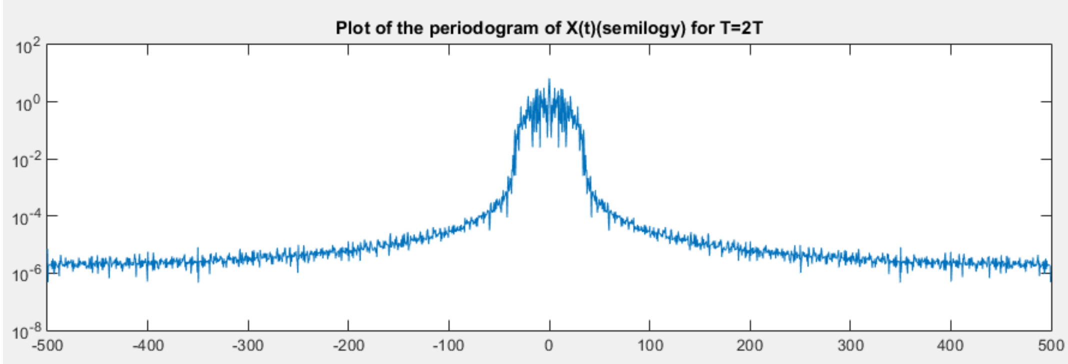
```
rep=500;
Pmean=zeros(rep,length(Px));

for u=1:rep
%creating an array of 100 random bits
b = (sign(randn(N, 1)) + 1)/2;
X = bits_to_2PAM(b);
 %creating an empty vector to store the numbers
 f_all_temp=zeros(length(X),length(t1)+(length(X)-1)*over);
 %creating the time moved signals
 for i=0:length(X)-1
     for j=1:length(t1)
         f_all_temp(i+1,j+i*over)=X(i+1)*f1(j);
     end
 end

 X_t=sum(f_all_temp, 1);
 Pmean(u,:)=fftshift(abs(fft(X_t,Nf)).^2)*Ts./length(t);

end
%summing all the calculated X_t and calculating the practical ...
    median of X_t
PSD_pract=sum(Pmean,1)/rep;
%Calculating the theoretical median of X_t
PSD_theor=(1/T).*(F1.^2);
figure()
semilogy(Faxis,PSD_pract);
hold on;
semilogy(Faxis,PSD_theor);
```

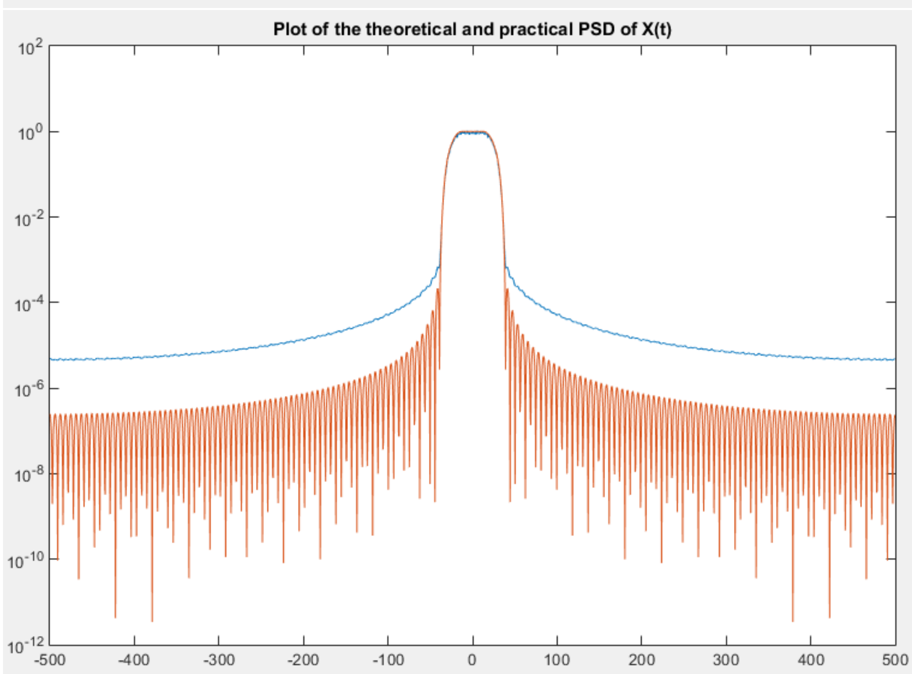
A5

Επαναλήφθηκε το βήμα A3 θέτοντας περίοδο συμβόλου $T' = 2T$ διατηρώντας την ίδια περίοδο δειγματοληψίας T_s με πριν και διπλασιάζοντας την παράμετρο $over$, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.
Παρατηρείται ότι το εύρος φάσματος μειώθηκε εμφανώς σε σχέση με το ερώτημα A3, διότι διπλασιάστηκε η περίοδος και όπως ξέρουμε από τη θεωρία το εύρος φάσματος είναι αντιστόφως ανάλογο με την περίοδο$(W = \frac{1+a}{2T})$


Plot of X(t) constructed with 2-PAM
10
5
0
-5
-10
-15
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5


Plot of the periodogram of X(t)(standard plot) for T=2T


Plot of the periodogram of X(t)(semilogy) for T=2T


Plot of the theoretical and practical PSD of X(t)

```
%% A.5

T=2*T;
over=20;
Ts=T/over;

figure()
%creating the periodogram of X_t
Px=fftshift(abs(fft(X_t,Nf)).^2)*Ts./length(t);
subplot(2,1,1)
plot(Faxis,Px)
subplot(2,1,2)
semilogy(Faxis,Px)

rep=500;
Pmean=zeros(rep,length(Px));

for u=1:rep
    %creating an array of 100 random bits
b = (sign(randn(N, 1)) + 1)/2;
X = bits_to_2PAM(b);
%creating an empty vector to store the numbers
 f_all_temp=zeros(length(b),length(t1)+(length(b)-1)*over);
  %creating the time moved signals
 for i=0:length(b)-1
     for j=1:length(t1)
         f_all_temp(i+1,j+i*over)=X(i+1)*f1(j);
     end
 end

 X_t=sum(f_all_temp, 1);
 Pmean(u,:)=fftshift(abs(fft(X_t,Nf)).^2)*Ts./length(t);

end
 %summing all the calculated X_t and calculating the practical median of X_t
PSD_pract=sum(Pmean,1)/rep;
%Calculating the theoretical median of X_t
PSD_theor=(1/T).*(F1.^2);

figure()
semilogy(Faxis,PSD_pract);
hold on;
semilogy(Faxis,PSD_theor);
```

A6

- Για να σταλούν δεδομένα όσο το δυνατό ταχύτερα έχοντας διαθέσιμο το ίδιο εύρος φάσματος, θα ήταν προτιμότερο να επιλεγόταν το 4-PAM για να μπορούν να σταλούν περισσότερα bits πληροφορίας σε λιγότερο χρόνο απότι θα σταλούνταν με 2-PAM

- Αν το διαθέσιμο εύρος φάσματος είναι πολύ ακριβό, τότε θα επιλεγόταν περίοδος συμβόλου T′=2T, με σκοπό να μειωθεί το απαιτούμενο εύρος φάσματος, γνωρίζοντας πως $W = \frac{1+a}{2T}$

B

Επειδή το latex δεν δεχόταν ελληνικούς χαρακτήρες στις εξισώσεις έχουν αντικατασταθεί το Θ με z, το τ με u, το φ(t) με $f(t)$ και το $\Phi(F+-f_0)$ με $F(F+-f_0)$. Για τον ίδιο λόγο δεν χρησιμοποιήθηκε το σ_X, αλλά συμβολίστηκε μόνο ως $E[X_n]$

B1

Ισχύει ότι:

- $E[X_n] = 0$, $E[{X_n}^2] = {s_x}^2$, $T > 0$.

- Αφού $z - U[0, 2\pi]$ ανεξάρτητη της X_n:

$$\begin{aligned} f_z(z) &= \frac{1}{2\pi} && 0 <= z < 2\pi \\ &= 0 && \text{αλλιώς} \end{aligned}$$

- $E[X(t)] = E[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n cos(2\pi * f_0 t + z)] =$ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} E[X_n] cos(2\pi * f_0 t + z) => E[X(t)] = 0$

- Ισχύει επίσης ότι: $E[g(x)] = \int g(x) f_x(x)$, άρα:
  $E[Y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) cos(2\pi f_0 * t + z) f_z(z) dz =$
  $X(t) \int_0^{2\pi} cos(2\pi f_0 * t + z) \frac{1}{2\pi} dz = \frac{1}{2\pi} X(t) [sin(2\pi f_0 t + z)]_0^{2\pi} =>$
  $E[Y(t)] = 0$

- Ξέρω ότι $R_{YY}(t+u, t) = E[Y(t+u)Y(t)]$, άρα:
  $E[Y(t+u)Y(t)] = E[X(t+u) cos(2\pi * f_0(t+u) + z) X(t) cos(2\pi * f_0 t + z)] =$
  $E[X(t+u)X(t)] * \frac{1}{2} E[cos(4\pi * f_0 t + 2\pi * f_0 u + 2z) + cos(2\pi * f_0 u)]$

- $cos(4\pi * f_0 t + 2\pi * f_0 u + 2z) = 0$, αφού γίνεται ολοκλήρωση ως προς u στο [0,2π).

- άρα $E[Y(t+u)Y(t)] = \frac{1}{2} * R_{XX}(t+u, t) * cos(2\pi * f_0 u)$, αφού
  $R_{XX}(t+u, t) = E[X(t+u)X(t)]$

B2

- Ισχύει ότι $E[Y(t)] = 0$, άρα η Y είναι σταθερή, οπότε αρκεί η $R_{YY}(t+u, t)$ να είναι περιοδική:
  $R_{YY}(t+u, t) = \frac{1}{2} R_{XX}(t+u, t) cos(2\pi * f_0 u)$

- Άρα αρκεί η $R_{XX}(t+u, t)$ να είναι περιοδική:
  $R_{XX}(t+T+u, t+T) = E[X(t+T+u)X(t+T)] =$
  $E[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n f(t+T+u-nT) \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m f(t+T-nT)]$

- Ισχύει ότι οι X_n, X_m είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές μηδενικής μέσης τιμής, οπότε:
  $R_{XX}(t+T+u, t+T) = E[X_n^2] \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+u+(n+1)T)f(t+(n+1)T) = E[X_n^2] \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+u+nT)f(t+nT) = R_{XX}(t+u,t)$

- άρα η R_{XX} είναι περιοδική, άρα και η R_{YY}, άρα η $Y(t)$ είναι κυκλοστάσιμη υπό την ευρεία έννοια

B3

- Αφού η $Y(t)$ είναι κυκλοστάσιμη, υπό την ευρεία έννοια, με περίοδο T, η φασματική πυκνότητα ισχύος της είναι $S_Y(F) = F[R_Y^-(u)](1)$,

- Ισχύει ότι: $R_Y^-(u) = \frac{1}{T} \int_T R_{YY}(t+u,t)dt = \frac{1}{T} \int_T R_{XX}(t+u,t) \frac{1}{2} cos(2\pi * f_0 u)dt = \frac{1}{2} cos(2\pi * f_0 u) R_X^-(u)(2)$,

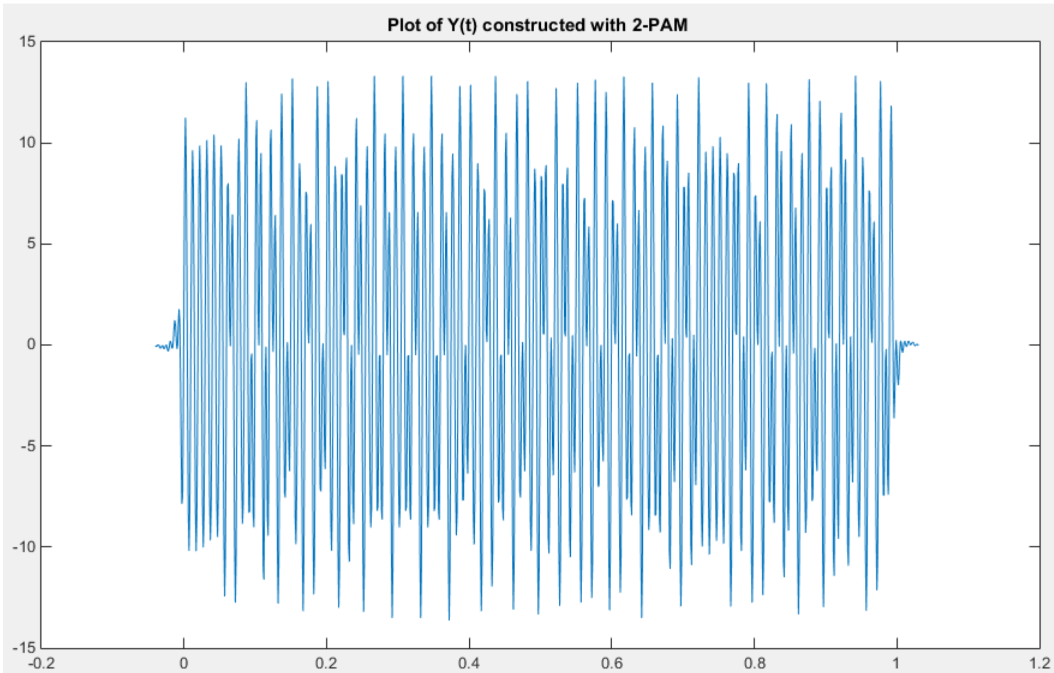
- Αφού $R_X^-(u) = \frac{1}{T} \int_T R_{XX}(t+u,t)$

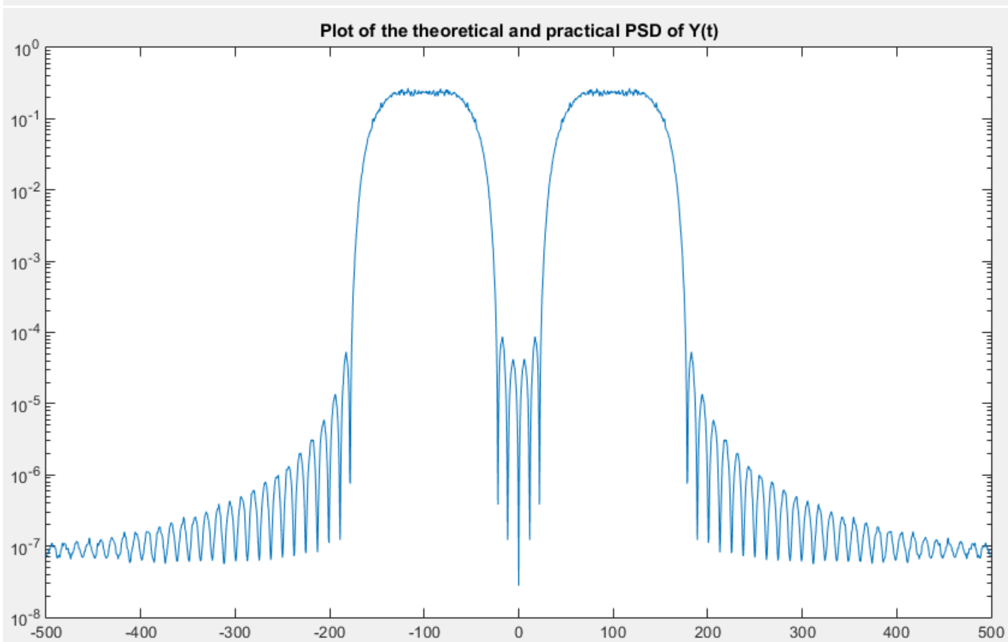
- Από τις (1),(2) προκύπτει ότι: $S_Y(F) = F[R_X^-(u) \frac{1}{2} cos(2\pi * f_0 u)]$

- Από θεωρία ισχύει ότι: $R_X^-(u) = \frac{E[X_n^2]}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t+u)f(t)dt = \frac{E[X_n^2]}{T} f(u) * f(-u)$

- Άρα $S_Y(F) = F[\frac{E[X_n^2]}{2T} f(u) * f(-u) cos(2\pi * f_0 u)] = \frac{E[X_n^2]}{4T} [F(F+f_0)F^*(F+f_0) + F(F-f_0)F^*(F-f_0)] = \frac{E[X_n^2]}{4T} [|F(F+f_0)|^2 + |F(F-f_0)|^2]$

B4


Plot of Y(t) constructed with 2-PAM
15
10
5
0
-5
-10
-15
-0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2


Plot of the theoretical and practical PSD of Y(t)
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
10^{-8}
-500
-400
-300
-200
-100
0
100
200
300
400
500

```
clear all;
```

```
close all;
T=1/100;
over=10;
Ts=T/over;
A=4;
a=0.5;
Nf=2048;
Fs=1/Ts;
N=100;
fo=1/T;

[f1,t1]=srrc_pulse(T,over,A,a);
Faxis=-Fs/2:Fs/Nf:Fs/2-Fs/Nf;
F1=abs(fftshift(fft(f1,Nf))*Ts);
theta=0+(2*pi)*rand(1,1);

b = (sign(randn(N, 1)) + 1)/2;
X = bits_to_2PAM(b);
%creating an empty vector to store the numbers
 f_all_temp=zeros(length(b),length(t1)+(length(b)-1)*over);
 %creating the time moved signals
 for i=0:length(b)-1
     for j=1:length(t1)
         f_all_temp(i+1,j+i*over)=X(i+1)*f1(j);
     end
 end
 %calculating the time of the signal
 t=t1(end)+Ts:Ts:t1(end)+T*(length(b)-1);
 t=[t1 t];
 X_t=sum(f_all_temp, 1);
 temp=cos(2*pi*fo*t+theta);
 Y_t=X_t.*temp;
 figure()
 plot(t,Y_t)
title('Plot of Y(t) constructed with 2-PAM ')
%creating the periodogram of Y_t
Px=fftshift(abs(fft(Y_t,Nf)).^2)*Ts./length(t);
rep=500;
Pmean=zeros(rep,length(Px));

for u=1:rep
%creating an array of 100 random bits
b = (sign(randn(N, 1)) + 1)/2;
X = bits_to_2PAM(b);
%creating an empty vector to store the numbers
 f_all_temp=zeros(length(b),length(t1)+(length(b)-1)*over);
 %creating the time moved signals
 for i=0:length(b)-1
     for j=1:length(t1)
         f_all_temp(i+1,j+i*over)=X(i+1)*f1(j);
     end
 end

 X_t=sum(f_all_temp, 1);
 temp=cos(2*pi*fo*t+theta);
 Y_t=X_t.*temp;
 Pmean(u,:)=fftshift(abs(fft(Y_t,Nf)).^2)*Ts./length(t);
```

```
end
%summing all the calculated Y_t and calculating the practical PSD ...
    of Y_t
PSD_pract=sum(Pmean,1)/rep;
%Calculating the theoretical PSD of Y_t
PSD_theor=(1/T).*(F1.^2);
figure()
semilogy(Faxis,PSD_pract);

title('Plot of the theoretical and practical PSD of Y(t)')
```