

ΤΗΛ 301 ΑΣΚΗΣΗ 2

Μιχαήλ Κρατημένος AM: 2018030104

Ιωάννης Λαμπρινίδης AM: 2018030075

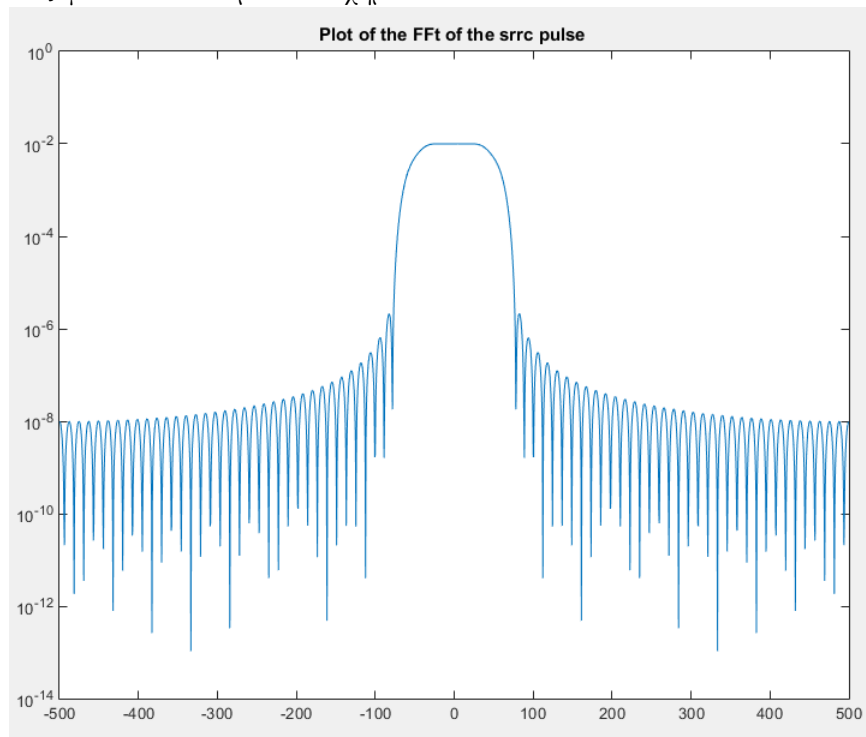
25 Νοεμβρίου 2020

Χρόνος εργασίας: περίπου 14 ώρες ο καθένας μας

A

A1

Δημιουργήθηκε ο παλμός `srrc` με τις τιμές που δίνονται, υπολογίστηκε το μέτρο του μετασχηματισμού fourier του παλμού (με τη χρήση των συναρτήσεων `fft`, `fftshift`) και μέσω του μετασχηματισμού υπολογίστηκε η φασματική πυκνότητα ενέργειας, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



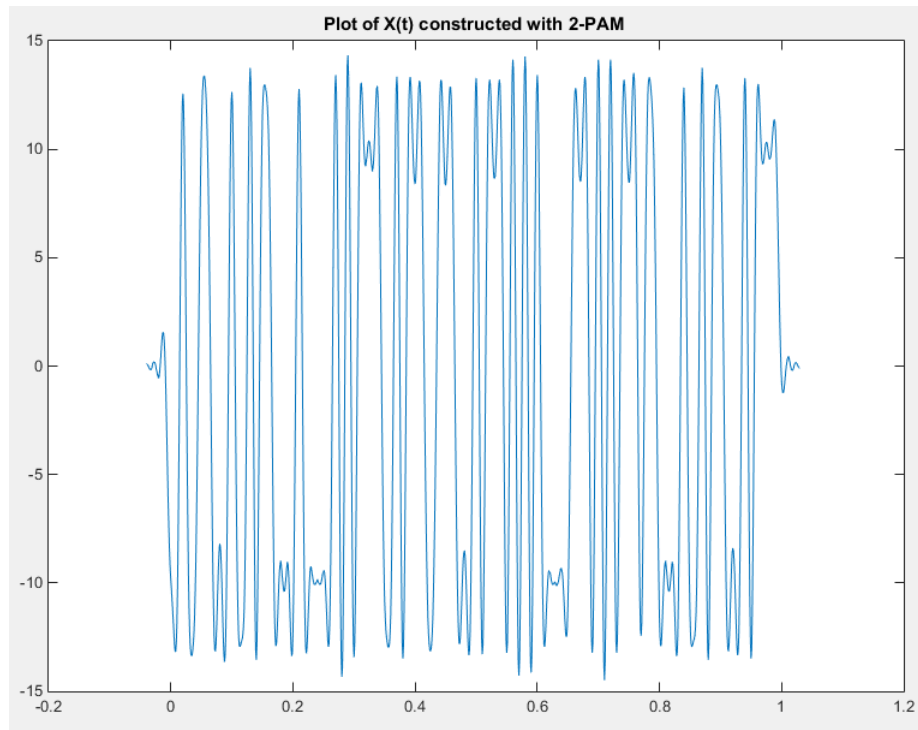
```

1 clear all;
2 close all;
3 %% A
4 %value initialization
5 T=1/100;
6 over=10;
7 Ts=T/over;
8 A=4;
9 a=0.5;
10 Nf=2048;
11 Fs=1/Ts;
12 N=100;
13
14 %% A.1
15 %creating an srrc pulse and calculating it's power sprectral density
16 [f1,t1]=srrc_pulse(T,over,A,a);
17 Faxis=-Fs/2:Fs/Nf:Fs/2-Fs/Nf;
18 F1=abs(fftshift(fft(f1,Nf))*Ts);
19 figure()
20 semilogy(Faxis,F1.^2)

```

A2

Δημιουργήθηκε μια ακολουθία 100 ανεξάρτητων ισοπίθανων bits και αντικαταστάθηκε το κάθε bit με το αντίστοιχο 2-PAM. Στη συνέχεια δημιουργήθηκαν οι μετατοπίσεις του παλμού srrc, πολλαπλασιάστηκαν με το αντίστοιχο 2-PAM σύμβολο και μέσω αυτών κατασκευάστηκε η κυματομορφή $X(t)$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



```

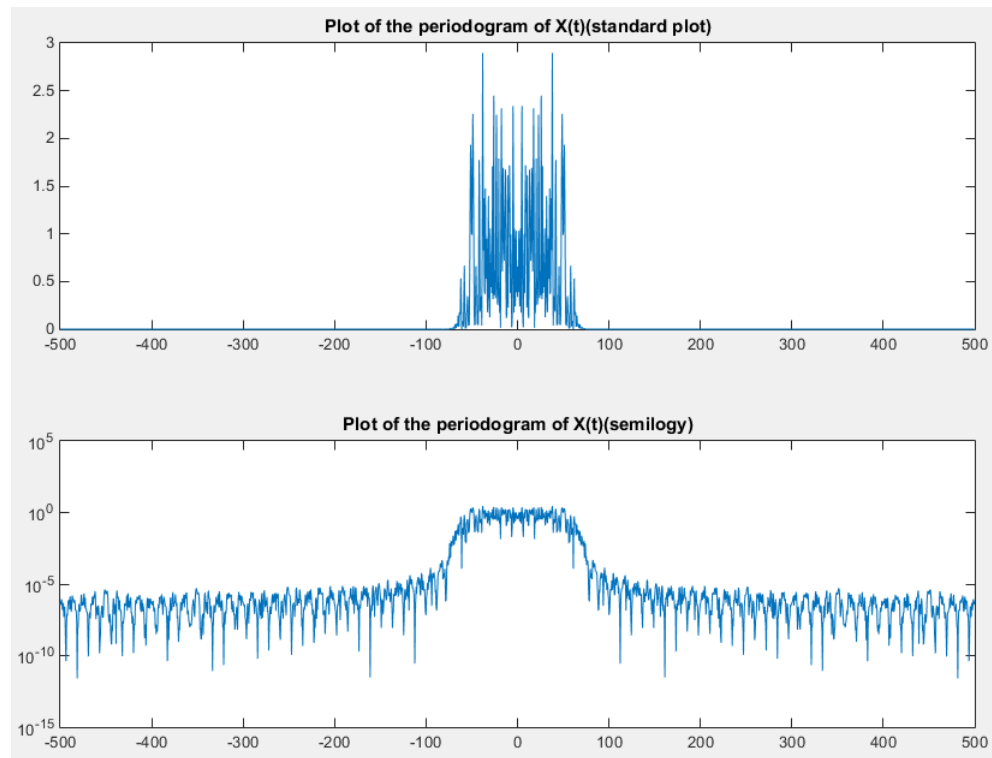
1 %% A.2
2 %creating an array of 100 random bits
3 b = (sign(randn(N, 1)) + 1)/2;
4 X = bits.to_2PAM(b);
5 %creating an empty vector to store the numbers
6 f_all_temp=zeros(length(b),length(t1)+(length(b)-1)*over);
7 %creating the time moved signals
8 for i=0:length(b)-1
9     for j=1:length(t1)
10         f_all_temp(i+1,j+i*over)=X(i+1)*f1(j);
11     end
12 end
13 %calculating the time of the signal
14 t=t1(end)+Ts:Ts:t1(end)+T*(length(b)-1);
15 t=[t1 t];
16 X_t=sum(f_all_temp, 1);
17
18 figure()
19 plot(t,X_t)

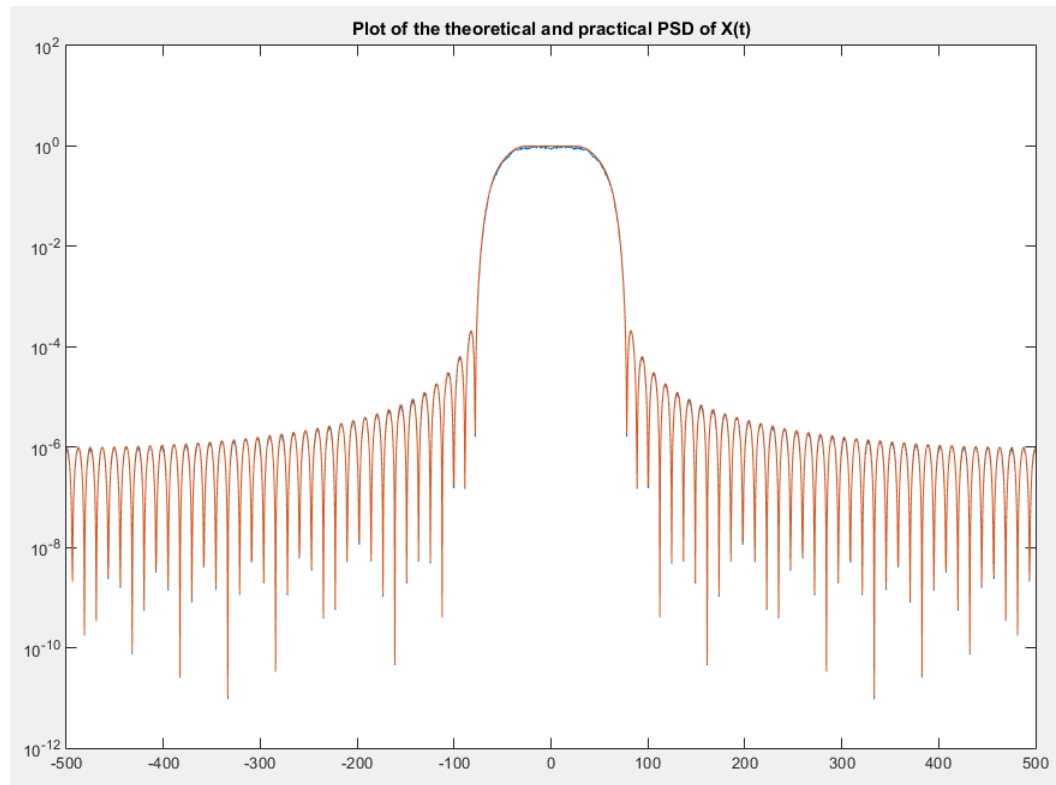
```

A3

Αρχικά υπολογίστηκε το περιοδόγραμμα της $X(t)$. Έπειτα υπολογίστηκε αριθμητικά η φασματική πυκνότητα ισχύος υπολογίζοντας αριθμητικές μέσες πάνω σε $K=500$ υλοποιήσεις περιοδογραμμάτων και σχεδιάστηκε μαζί με τη θεωρητική,

όπως φαίνεται στο πρώτο σχήμα. Όσο αυξανόταν το K η προσέγγιση γινόταν όλο και καλύτερη. Δυστηχώς όμως όσο αυξανόταν το N η πρακτική εκτίμηση της φασματικής πυκνότητας ισχύος απέκλινε από τη θεωρητική, όπως φαίνεται στο δεύτερο σχήμα.





```

1  %% A.3
2  figure()
3  %creating the periodogram of X_t
4  Px=fftshift(abs(fft(X_t,Nf)).^2)*Ts./length(t);
5  subplot(2,1,1)
6  plot(Faxis,Px)
7  subplot(2,1,2)
8  semilogy(Faxis,Px)
9
10 %calculating the median of Px
11 rep=500;
12 Pmean=zeros(rep,length(Px));
13
14 for u=1:rep
15 %creating an array of 100 random bits
16 b = (sign(randn(N, 1)) + 1)/2;
17 X = bits_to_2PAM(b);
18 %creating an empty vector to store the numbers
19 f_all_temp=zeros(length(b),length(t1)+(length(b)-1)*over);
20 %creating the time moved signals
21 for i=0:length(b)-1
22     for j=1:length(t1)
23         f_all_temp(i+1,j+i*over)=X(i+1)*f1(j);
24     end

```

```

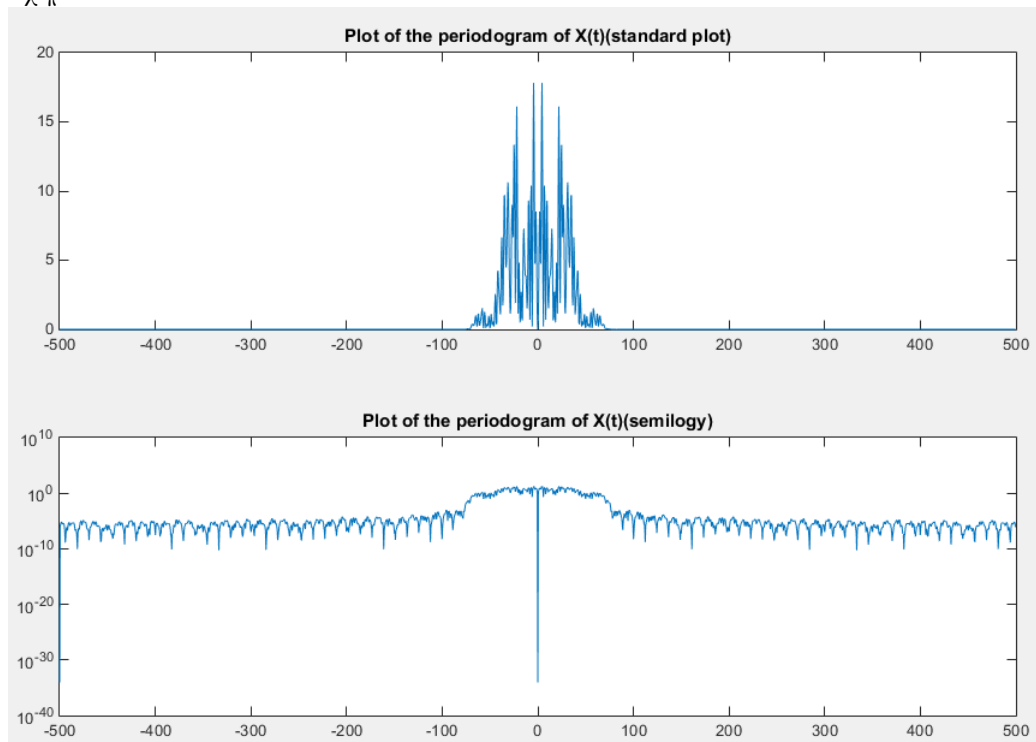
25 end
26
27 X_t=sum(f_all_temp, 1);
28 Pmean(u,:)=fftshift(abs(fft(X_t,Nf)).^2)*Ts./length(t);
29
30 end
31 %summing all the calculated X_t and calculating the practical ...
    median of X_t
32 PSD_pract=sum(Pmean,1)/rep;
33 %Calculating the theoretical median of X_t
34 PSD_theor=(1/T).*(F1.^2);
35 figure()
36 semilogy(Faxis,PSD_pract);
37 hold on;
38 semilogy(Faxis,PSD_theor);

```

A4

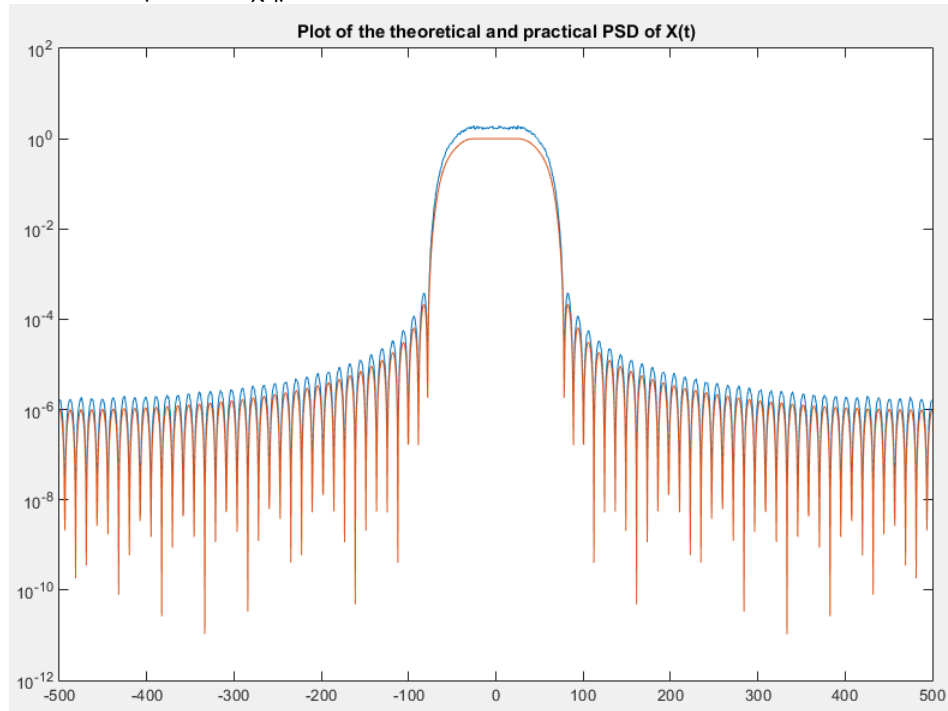
Αρχικά, φτιάξαμε τη συνάρτηση bits-to-4PAM η οποία κατασκευάζει από μια σειρά από bits κατασκευάζει την αντίστοιχη ακολουθία 4-PAM. Η συνάρτηση $X(t)$ υπολογίστηκε με παρόμοιο τρόπο όπως στο A2 ερώτημα.

Παρατηρείται ότι υπάρχει μια μικρή απόκλιση μεταξύ της πρακτικής και της θεωρητικής τιμής της φασματικής πυκνότητας ισχύος, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Παρατηρείται ότι υπάρχει μια μικρή διαφορά ανάμεσα στα δύο μέγιστα πλάτη των

φασματικών πυκνοτήτων ισχύος, ενώ το εύρος φάσματος μένει το ίδιο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



```

1 %% A.4
2 %creating an array of 100 random bits
3 b = (sign(randn(N, 1)) + 1)/2;
4 d = zeros(1,length(b)/2);
5 X = bits_to_4PAM(b,d);
6 %creating an empty vector to store the numbers
7 f_all_temp=zeros(length(X),length(t1)+(length(X)-1)*over);
8 %creating the time moved signals
9 for i=0:length(X)-1
10     for j=1:length(t1)
11         f_all_temp(i+1,j+i*over)=X(i+1)*f1(j);
12     end
13 end
14 %calculating the time of the signal
15 t=t1(end)+Ts:Ts:t1(end)+T*(length(X)-1);
16 t=[t1 t];
17 X_t=sum(f_all_temp, 1);
18 figure()
19 Px=fftshift(abs(fft(X_t,Nf)).^2)*Ts./length(t);
20 subplot(2,1,1)
21 plot(Faxis,Px)
22 subplot(2,1,2)
23 semilogy(Faxis,Px)
24
25

```

```

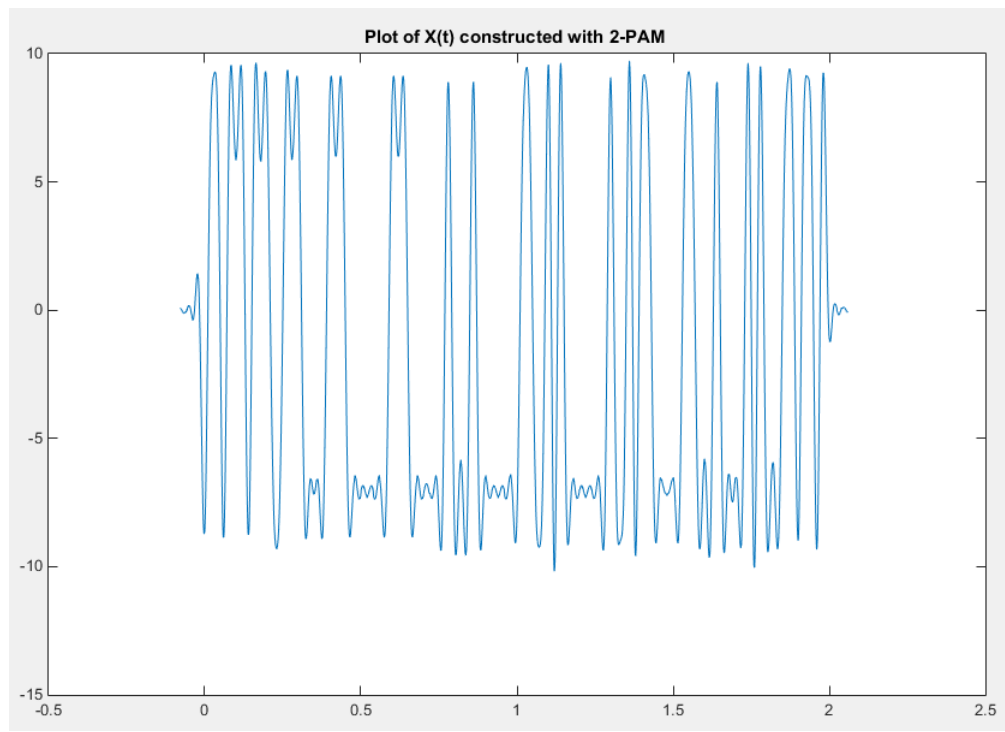
26
27 rep=500;
28 Pmean=zeros(rep,length(Px));
29
30 for u=1:rep
31 %creating an array of 100 random bits
32 b = (sign(randn(N, 1)) + 1)/2;
33 X = bits_to_2PAM(b);
34 %creating an empty vector to store the numbers
35 f_all_temp=zeros(length(X),length(t1)+(length(X)-1)*over);
36 %creating the time moved signals
37 for i=0:length(X)-1
38     for j=1:length(t1)
39         f_all_temp(i+1,j+i*over)=X(i+1)*f1(j);
40     end
41 end
42
43 X_t=sum(f_all_temp, 1);
44 Pmean(u,:)=fftshift(abs(fft(X_t,Nf)).^2)*Ts./length(t);
45
46 end
47 %summing all the calculated X_t and calculating the practical ...
    median of X_t
48 PSD_pract=sum(Pmean,1)/rep;
49 %Calculating the theoretical median of X_t
50 PSD_theor=(1/T).*(F1.^2);
51 figure()
52 semilogy(Faxis,PSD_pract);
53 hold on;
54 semilogy(Faxis,PSD_theor);

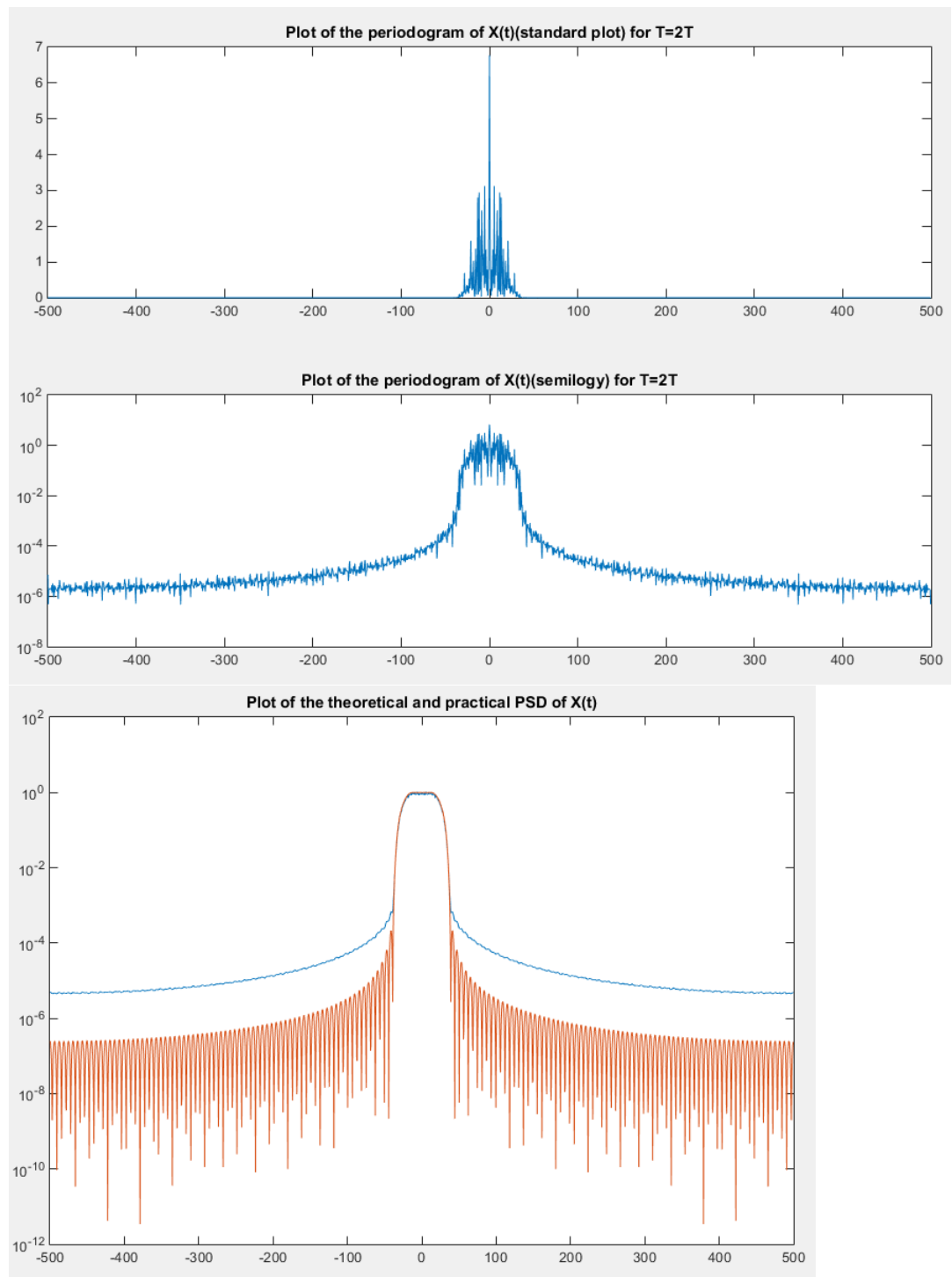
```

A5

Επαναλήφθηκε το βήμα A3 θέτοντας περίοδο συμβόλου $T' = 2T$ διατηρώντας την ίδια περίοδο δειγματοληψίας T_s με πριν και διπλασιάζοντας την παράμετρο *over*, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.

Παρατηρείται ότι το εύρος φάσματος μειώθηκε εμφανώς σε σχέση με το ερώτημα A3, διότι διπλασιάστηκε η περίοδος και όπως ξέρουμε από τη θεωρία το εύρος φάσματος είναι αντιστρόφως ανάλογο με την περίοδο ($W = \frac{1+a}{2T}$)





```

1  %% A.5
2
3  T=2*T;
4  over=20;
5  Ts=T/over;
6
7  figure()
8  %creating the periodogram of X_t
9  Px=fftshift(abs(fft(X_t,Nf)).^2)*Ts./length(t);
10 subplot(2,1,1)
11 plot(Faxis,Px)
12 subplot(2,1,2)
13 semilogy(Faxis,Px)
14
15 rep=500;
16 Pmean=zeros(rep,length(Px));
17
18 for u=1:rep
19     %creating an array of 100 random bits
20     b = (sign(randn(N, 1)) + 1)/2;
21     X = bits_to_2PAM(b);
22     %creating an empty vector to store the numbers
23     f_all_temp=zeros(length(b),length(t1)+(length(b)-1)*over);
24     %creating the time moved signals
25     for i=0:length(b)-1
26         for j=1:length(t1)
27             f_all_temp(i+1,j+i*over)=X(i+1)*f1(j);
28         end
29     end
30
31     X_t=sum(f_all_temp, 1);
32     Pmean(u,:)=fftshift(abs(fft(X_t,Nf)).^2)*Ts./length(t);
33
34 end
35 %summing all the calculated X_t and calculating the practical ...
    median of X_t
36 PSD_pract=sum(Pmean,1)/rep;
37 %Calculating the theoretical median of X_t
38 PSD_theor=(1/T).*(F1.^2);
39
40 figure()
41 semilogy(Faxis,PSD_pract);
42 hold on;
43 semilogy(Faxis,PSD_theor);

```

A6

- Για να σταλούν δεδομένα όσο το δυνατό ταχύτερα έχοντας διαθέσιμο το ίδιο εύρος φάσματος, θα ήταν προτιμότερο να επιλεγόταν το 4-PAM για να μπορούν να σταλούν περισσότερα bits πληροφορίας σε λιγότερο χρόνο απότι θα σταλούνταν με 2-PAM
- Αν το διαθέσιμο εύρος φάσματος είναι πολύ ακριβό, τότε θα επιλεγόταν περίοδος συμβόλου $T'=2T$, με σκοπό να μειωθεί το απαιτούμενο εύρος φάσμα-

τος, γνωρίζοντας πως $W = \frac{1+a}{2T}$

B

Επειδή το latex δεν δεχόταν ελληνικούς χαρακτήρες στις εξισώσεις έχουν αντικατασταθεί το Θ με z , το τ με u , το $\varphi(t)$ με $f(t)$ και το $\Phi(F + -f_0)$ με $F(F + -f_0)$. Για τον ίδιο λόγο δεν χρησιμοποιήθηκε το σ_X , αλλά συμβολίστηκε μόνο ως $E[X_n]$

B1

Ισχύει ότι:

- $E[X_n] = 0, E[X_n^2] = s_x^2, T > 0.$

- Αφού $z \sim U[0, 2\pi]$ ανεξάρτητη της X_n :

$$f_z(z) = \frac{1}{2\pi} \quad 0 \leq z < 2\pi$$

$$= 0 \quad \text{αλλιώς}$$

- $E[X(t)] = E[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \cos(2\pi * f_0 t + z)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E[X_n] \cos(2\pi * f_0 t + z) \Rightarrow E[X(t)] = 0$
- Ισχύει επίσης ότι: $E[g(x)] = \int g(x) f_x(x)$, άρα:
 $E[Y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \cos(2\pi f_0 * t + z) f_z(z) dz =$
 $X(t) \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_0 * t + z) \frac{1}{2\pi} dz = \frac{1}{2\pi} X(t) [\sin(2\pi f_0 t + z)]_0^{2\pi} \Rightarrow$
 $E[Y(t)] = 0$
- Ξέρω ότι $R_{YY}(t+u, t) = E[Y(t+u)Y(t)]$, άρα:
 $E[Y(t+u)Y(t)] = E[X(t+u) \cos(2\pi * f_0(t+u) + z) X(t) \cos(2\pi * f_0 t + z)] =$
 $E[X(t+u)X(t)] * \frac{1}{2} E[\cos(4\pi * f_0 t + 2\pi * f_0 u + 2z) + \cos(2\pi * f_0 u)]$
- $\cos(4\pi * f_0 t + 2\pi * f_0 u + 2z) = 0$, αφού γίνεται ολοκλήρωση ως προς u στο $[0, 2\pi]$.
- άρα $E[Y(t+u)Y(t)] = \frac{1}{2} * R_{XX}(t+u, t) * \cos(2\pi * f_0 u)$, αφού
 $R_{XX}(t+u, t) = E[X(t+u)X(t)]$

B2

- Ισχύει ότι $E[Y(t)] = 0$, άρα η Y είναι σταθερή, οπότε αρκεί η $R_{YY}(t+u, t)$ να είναι περιοδική:
 $R_{YY}(t+u, t) = \frac{1}{2} R_{XX}(t+u, t) \cos(2\pi * f_0 u)$
- Άρα αρκεί η $R_{XX}(t+u, t)$ να είναι περιοδική:
 $R_{XX}(t+T+u, t+T) = E[X(t+T+u)X(t+T)] =$
 $E[\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n f(t+T+u-nT) \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m f(t+T-nT)]$

- Ισχύει ότι οι X_n, X_m είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές μηδενικής μέσης τιμής, οπότε:

$$R_{XX}(t+T+u, t+T) = E[X_n^2] \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+u+(n+1)T)f(t+(n+1)T) =$$

$$E[X_n^2] \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t+u+nT)f(t+nT) = R_{XX}(t+u, t)$$
- άρα η R_{XX} είναι περιοδική, άρα και η R_{YY} , άρα η $Y(t)$ είναι κυκλοστάσιμη υπό την ευρεία έννοια

B3

- Αφού η $Y(t)$ είναι κυκλοστάσιμη, υπό την ευρεία έννοια, με περίοδο T , η φασματική πυκνότητα ισχύος της είναι $S_Y(F) = F[R_Y^-(u)](1)$,
- Ισχύει ότι: $R_Y^-(u) = \frac{1}{T} \int_T R_{YY}(t+u, t)dt =$

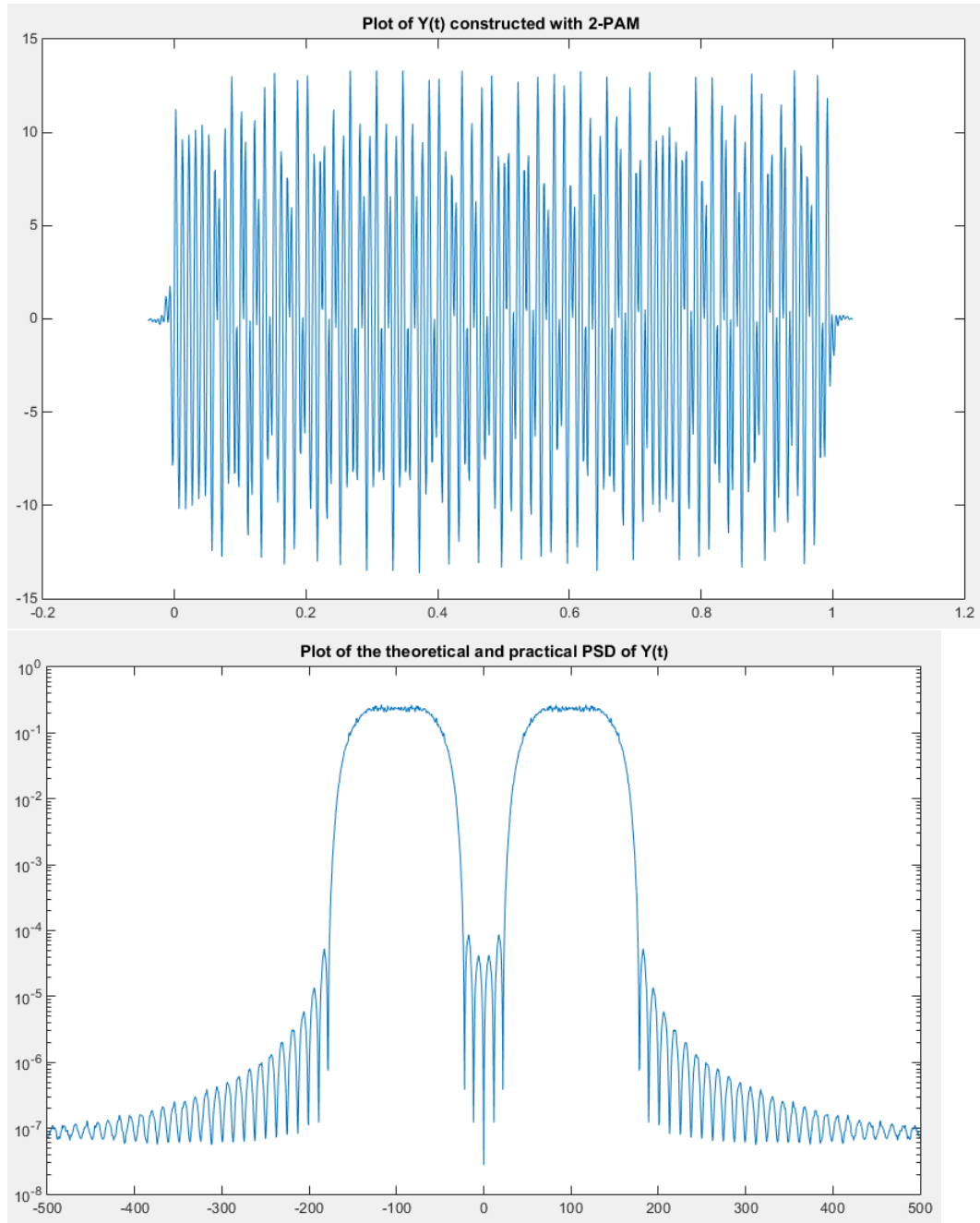
$$\frac{1}{T} \int_T R_{XX}(t+u, t) \frac{1}{2} \cos(2\pi * f_0 u) dt = \frac{1}{2} \cos(2\pi * f_0 u) R_X^-(u)(2),$$
- Αφού $R_X^-(u) = \frac{1}{T} \int_T R_{XX}(t+u, t)$
- Από τις (1),(2) προκύπτει ότι: $S_Y(F) = F[R_X^-(u) \frac{1}{2} \cos(2\pi * f_0 u)]$
- Από θεωρία ισχύει ότι: $R_X^-(u) = \frac{E[X_n^2]}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t+u)f(t)dt =$

$$\frac{E[X_n^2]}{T} f(u) * f(-u)$$
- Άρα $S_Y(F) = F[\frac{E[X_n^2]}{2T} f(u) * f(-u) \cos(2\pi * f_0 u)] =$

$$\frac{E[X_n^2]}{4T} [F(F+f_0)F^*(F+f_0) + F(F-f_0)F^*(F-f_0)] =$$

$$\frac{E[X_n^2]}{4T} [|F(F+f_0)|^2 + |F(F-f_0)|^2]$$

B4



```
1 clear all;
```

```

2 close all;
3 T=1/100;
4 over=10;
5 Ts=T/over;
6 A=4;
7 a=0.5;
8 Nf=2048;
9 Fs=1/Ts;
10 N=100;
11 fo=1/T;
12
13 [f1,t1]=srrc_pulse(T,over,A,a);
14 Faxis=-Fs/2:Fs/Nf:Fs/2-Fs/Nf;
15 F1=abs(fftshift(fft(f1,Nf))*Ts);
16 theta=0+(2*pi)*rand(1,1);
17
18 b = (sign(randn(N, 1)) + 1)/2;
19 X = bits_to_2PAM(b);
20 %creating an empty vector to store the numbers
21 f_all_temp=zeros(length(b),length(t1)+(length(b)-1)*over);
22 %creating the time moved signals
23 for i=0:length(b)-1
24     for j=1:length(t1)
25         f_all_temp(i+1,j+i*over)=X(i+1)*f1(j);
26     end
27 end
28 %calculating the time of the signal
29 t=t1(end)+Ts:Ts:t1(end)+T*(length(b)-1);
30 t=[t1 t];
31 X_t=sum(f_all_temp, 1);
32 temp=cos(2*pi*fo*t+theta);
33 Y_t=X_t.*temp;
34 figure()
35 plot(t,Y_t)
36 title('Plot of Y(t) constructed with 2-PAM ')
37 %creating the periodogram of Y_t
38 Px=fftshift(abs(fft(Y_t,Nf)).^2)*Ts./length(t);
39 rep=500;
40 Pmean=zeros(rep,length(Px));
41
42 for u=1:rep
43     %creating an array of 100 random bits
44     b = (sign(randn(N, 1)) + 1)/2;
45     X = bits_to_2PAM(b);
46     %creating an empty vector to store the numbers
47     f_all_temp=zeros(length(b),length(t1)+(length(b)-1)*over);
48     %creating the time moved signals
49     for i=0:length(b)-1
50         for j=1:length(t1)
51             f_all_temp(i+1,j+i*over)=X(i+1)*f1(j);
52         end
53     end
54
55     X_t=sum(f_all_temp, 1);
56     temp=cos(2*pi*fo*t+theta);
57     Y_t=X_t.*temp;
58     Pmean(u,:)=fftshift(abs(fft(Y_t,Nf)).^2)*Ts./length(t);

```

```

59
60 end
61 %summing all the calculated Y_t and calculating the practical PSD ...
    of Y_t
62 PSD_pract=sum(Pmean,1)/rep;
63 %Calculating the theoretical PSD of Y_t
64 PSD_theor=(1/T).*(F1.^2);
65 figure()
66 semilogy(Faxis,PSD_pract);
67
68 title('Plot of the theoretical and practical PSD of Y(t)')

```