Incertidumbre

Incertidumbre

- En los temas anteriores se han descrito técnicas de representación del conocimiento y razonamiento para un modelo del mundo:
  - Completo
  - Consistente
  - Inalterable

- Sin embargo, en muchos dominios de interés no es posible crear tales modelos debido a la presencia de incertidumbre:
  - “Falta de conocimiento seguro y claro de algo”. (DiccionarioRAE)

- En los próximos temas se revisarán las principales aproximaciones para tratar con la incertidumbre haciendo hincapié en las Redes Bayesianas

Fuentes de Incertidumbre: Hechos

- **Con respecto a los hechos:**
  - Ignorancia
    - Puede que en un determinado campo el conocimiento sea incompleto.
      - Por ejemplo en el campo de las Ciencias Médicas.
    - Aunque se pudiera completar el conocimiento, puede ser necesario tomar decisiones con información incompleta.
      - Un paciente llega con gravedad a urgencias y es necesario proponer un tratamiento sin que sea posible realizar todos los tests necesarios para saber con total exactitud su enfermedad.
    - En otros campos la ignorancia es irreducible
      - Presente en modelos físicos
        - » ¿Cuál será el resultado del lanzamiento de una moneda?
      - Presente en la vida real
        - » ¿Es la otra persona sincera?
  - Vaguedad e Imprecisión
    - Algunos conceptos son vagos o imprecisos.
      - Las personas altas, guapas, felices etc.

Fuentes de Incertidumbre: Reglas

- **Con respecto a las reglas:**
  - Las reglas son generalmente heurísticas que utilizan los expertos en determinadas situaciones.
  - En el mundo real utilizamos habitualmente reglas que son :
    - Inexactas o incompletas
      - "Si es un ave entonces vuela", ¿y los pingüinos?
      - "Si te duele la cabeza tienes gripe" ¿y si te diste un golpe?
    - Imprecisas
      - "Si el agua está caliente añada un poco de sal"
    - Inconsistentes
      - "Al que madruga Dios le ayuda"
      - "No por mucho madrugar amanece más temprano"

Razonamiento con Incertidumbre

- **Objetivo:**
  - Ser capaz de razonar sin tener todo el conocimiento relevante en un campo determinado utilizando lo mejor posible el conocimiento que se tiene.

- **Implementación**
  - Es dificil cumplir estos requerimientos utilizando la lógica de primer orden
  - Deben de introducirse modelos para manejar información vaga, incierta, incompleta y contradictoria.
  - Crucial para un sistema funcione en el "mundo real"

Cuestiones a Resolver por las Aproximaciones a la Incertidumbre

- **¿Cómo evaluar la aplicabilidad de las condiciones de las reglas?**
  - Si X es mayor necesita gafas.
    - ¿Se puede aplicar la regla si X tiene 40 años?
- **¿Cómo combinar hechos imprecisos ?**
  - X es alto, X es rubio
    - ¿Con que certidumbre puedo afirmar que X es alto y rubio?
- **Dada un hecho imprecisa y una regla imprecisa: ¿qué confianza se puede tener en las conclusiones?**
  - X estudia mucho
  - Si X estudia mucho aprobará
    - ¿Con que certidumbre puedo afirmar que X aprobará?

Cuestiones a Resolver por las Aproximaciones a la Incertidumbre

- **Dada la misma conclusión incierta de varias reglas: ¿qué confianza se puede tener en la conclusión?**
  - Juan llega tarde, Luis llega tarde
  - Si Juan llega tarde la carretera está cortada
  - Si Luis llega tarde la carretera está cortada

  - ¿Cuál es la certidumbre de que la carretera esté cortada?

Algo de Historia

- **Inicialmente la mayoría de los investigadores en IA enfatizaban la importancia del razonamiento simbólico y evitaban la utilización de números.**
  - Los sistemas expertos no deben usar números puesto que los expertos humanos no lo hacen.
  - Los expertos no pueden suministrar los números requeridos.
- **Sin embargo los ingenieros que desarrollaban las aplicaciones se dieron cuenta pronto de la necesidad de representar la incertidumbre**
  - El sistema experto MYCIN (años 70) para el tratamiento de infecciones bacterianas fue el primer éxito en este campo.
- **Los métodos numéricos (especialmente los basados en probabilidad) son actualmente una herramienta aceptada en IA**
  - Debido a los éxitos prácticos
  - A la complejidad de las teorías alternativas

Principales Modelos de Representación de la Incertidumbre

- **La lógica de primer orden (LPO) no es adecuada para modelar la incertidumbre por lo que son necesarios nuevos modelos, entre ellos destacan:**

- **Modelos Simbólicos**
  - Lógicas por Defecto
  - Lógicas basadas en Modelos Mínimos
    - La asunción del mundo cerrado
    - Terminación de predicados
- **Modelos Numéricos**
  - Probabilidad
  - Teoría de Dempster-Shaffer
  - Lógica difusa

Representación Simbólica de la Incertidumbre: LPO

- **La LPO asume que el conocimiento:**
  - Es exacto.
    - Los hechos son ciertos o falsos
  - Es completo.
    - Se conoce todo acerca del campo de trabajo.
  - Es consistente.
    - No tiene contradicciones.

- **Por tanto, con la LPO :**
  - No se puede expresar incertidumbre.
  - No puede hacer deducciones lógicamente incorrectas pero probables
  - No se puede trabajar con información contradictoria

El Razonamiento no Monótono

- **Como la LPO asume que el conocimiento es completo y consistente, una vez que un hecho se asume/es cierto permanece así (Monotonía)**
  – Si de una Base de Conocimiento (BC) se deduce una expresión s, y se tiene otra Base de conocimiento BC′ de forma que BC $\subset$ BC′, entonces de BC′ también se deduce s.
  – Por tanto el añadir nuevo conocimiento siempre incrementa el tamaño de la Base de Conocimiento.
- **La presencia de conocimiento incompleto nos lleva a modelos no monótonos:**
  – El conocimiento de nuevos hechos puede hacer que nos retractemos de algunas de nuestras creencias.
  – Ejemplo:

Representación Simbólica de la Incertidumbre

- **Lógica por defecto**
  - Propuesta por Reiter para solucionar el problema del conocimiento incompleto (1980).
  - Para ello se introducen una serie de reglas por defecto.
  - Intuitivamente:
    - "Las reglas por defecto expresan características comunes a un conjunto de elementos que se asumen ciertas salvo que se indique lo contrario".
- **Asunción del mundo cerrado**
  - Sirve para manejar conocimiento incompleto.
  - Intuitivamente:
    - "Lo que no se puede probar a partir de mi Base de Conocimiento es falso"
  - Utilizado en las B.D. y Prolog.
- **Inconvenientes**
  - Teorías complejas y a veces inconsistentes.

Representación Numérica de la Incertidumbre: Factores de Certeza

- **Los Factores de certeza aparecieron en el sistema experto MYCIN:**
  - desarrollado en la Universidad de Stanford (década de los 70) para el diagnóstico y consulta de enfermedades infecciosas.

- **Factores de certeza**
  - La Base de Conocimiento de MYCIN consistía en reglas de la forma:

    Evidencia $\rightarrow$Hipótesis FC(H|E)
  - El factor de certeza FC representa la certidumbre en la Hipótesis cuando se observa la Evidencia.
  - Los FC varían entre –1 (creencia nula) y 1 (creencia total)

Representación Numérica de la Incertidumbre: Factores de Certeza

- **Grados de creencia**
  - Los FC se calculan a partir de los grados de creencia GC y no creencia en la hipótesis
  - Los GC varían entre 0 (creencia nula) y 1 (creencia total)
  - La relación entre FC y GC es: $FC(H|E)=GC(H|E)- GC(\neg H| E)$
- **Propiedades**
  - A diferencia de los grados de creencia probabilísticos $GC(H|E)+GC(\neg H|E) \neq 1$

Las Reglas en Mycin

- **Ejemplo:**

  ```
  ($AND     (SAME CNTXT GRAM GRAMNEG)
            (SAME CNTXT MORPH ROD)
            (SAME CNTXT AIR ANAEROBIC))
  (CONCLUDE CNTXT IDENTITY BACTEROIDES TALLY .6)
  ```

- **Lo que significa:**

  SI el organismo es gram-negativo
  Y tiene forma de bastón
  Y es anaerobio
  ENTONCES el organismo es bacteriode (con certeza 0.6)

- **Los factores de certidumbre se introducían a mano por el diseñador**

Combinación de Factores de Certeza

- **Combinación de Reglas Convergentes**

  Si E_1 entonces H con $FC(H|E_1)$
  Si E_2 entonces H con $FC(H|E_2)$

  Si $E_1 \vee E_2$ entonces H con $FC(H| E_1 \vee E_2)$

  Con: $FC(H| E_1 \vee E_2)=f_{comb}(FC(H|E_1), FC(H|E_2))$ definida como

$$f_{comb}(x,y)= \begin{cases} x+y-xy & x,y>0 \\ (x+y)/(1-\min(|x|,|y|)) & xy \leq 0 \\ x+y+xy & x,y<0 \end{cases}$$

- **Encadenado de Reglas**

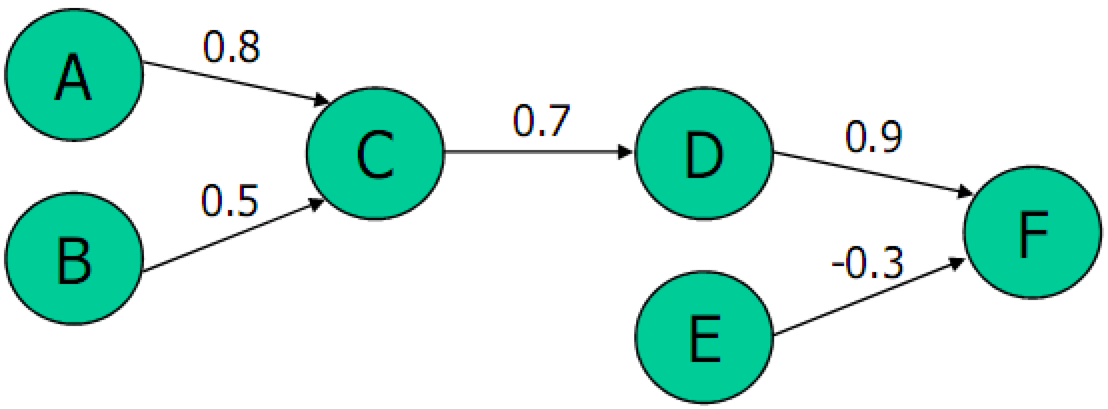
  Si A entonces B con $FC(B|A)$
  Si B entonces C con $FC(C|B)$

  Si A entonces C con $FC(C|A)$

  Con: $FC(C|A)= \begin{cases} FC(C|B)\ FC(B|A) & FC(B|A)\geq 0 \\ 0 & FC(B|A)<0 \end{cases}$

Ejemplo de Combinación de Factores de Certeza

- **Dadas siguientes reglas calcular el factor de certeza de la proposición $A \vee B \vee E \rightarrow F$**



– $A \rightarrow C$, $B \rightarrow C$	$FC(C\|A,B)=0.8+0.5(1-0.8)=0.9$	(Convergencia)
– $A \vee B \rightarrow C$, $C \rightarrow D$	$FC(D\|A,B)=0.9x0.7=0,63$	(Encadenado)
– $A \vee B \rightarrow D$, $D \rightarrow F$	$FC(F\|A,B)=0.63x0.9=0,567$	(Encadenado)
– $A \vee B \rightarrow F$, $E \rightarrow F$	$FC(F\|A,B,E)= (0.567-0.3)/(1-min(0.567,0.3)) =0.38$	(Convergencia)

- **Por tanto, si observamos A,B y E podemos concluir F con certidumbre 0.38**

¿Cómo era el rendimiento de Mycin?

- **El sistema experto Mycin proporcionaba diagnósticos y recomendaciones terapéuticas que eran al menos tan buenas como los mejores expertos en la especialidad**
- **Sin embargo los factores de certeza tienen graves incoherencias, por ejemplo:**
  - De Sarampión→Ronchas (0.8) y Ronchas→Alergia (0.5) obtenemos (encadenado) Sarampión→Alergia (0.4)!

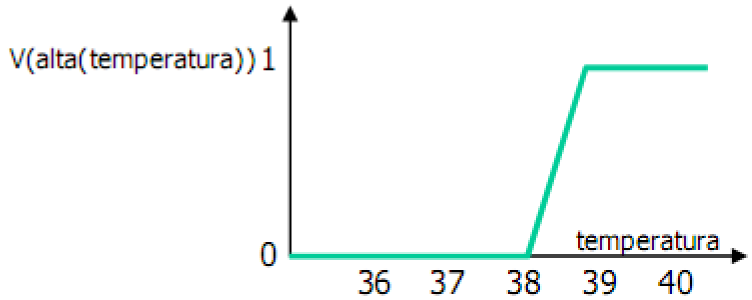
Representación Numérica de la Incertidumbre: Lógica difusa

- **Desarrollada a partir de los trabajos de Zadeh (mediados de los 60)**
- **Asigna a cada proposición A un "grado de verdad" V entre 0 y 1 donde:**
  - V(A)=0 indica que la proposición es completamente falsa
  - V(A)=1 indica que la proposición es totalmente verdadera
  - Valores intermedios de V(A) reflejan diferentes grados de verdad de la proposición
- **Es una generalización de la lógica clásica (que aparece tomando los valores de verdad de todas las proposiciones como 0 ó 1)**
- **Relacionada con la descripción de la vaguedad en vez de la incertidumbre**

Ejemplo

- **Dada la proposición "La temperatura del enfermo es alta"**
  - En la lógica clásica
    - Diríamos por ejemplo alta(temperatura)$\Leftrightarrow$ temperatura>38
    - Por tanto si la temperatura es 37.99 diríamos que la temperatura no es alta. Nosotros no solemos razonar así
  - En la lógica difusa
    - Se da un grado de verdad V a alta en función de temperatura
    - Por ejemplo:

$$V(\text{alta}(\text{temperatura})) = \begin{cases} 0 & \text{temperatura} < 38 \\ \text{temperatura} - 38 & 38 \leq \text{temperatura} \leq 39 \\ 1 & \text{temperatura} > 39 \end{cases}$$



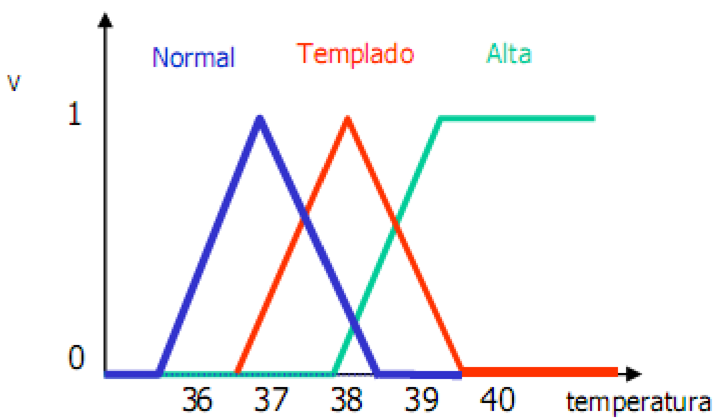
Grados de verdad del predicado alta(temperatura)

Proposiciones Compuestas

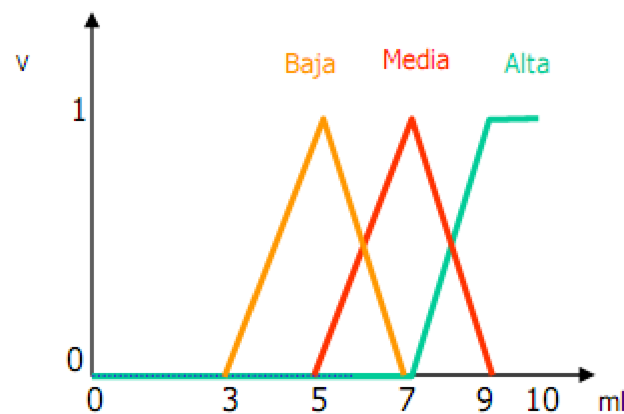
- **En la lógica difusa al igual que en la lógica clásica el valor de verdad de una proposición compuesta se calcula a través del valor de verdad de las proposiciones individuales**
- **Existen varias formas de calcular estos valores de verdad. Los más usuales son:**
  - $V(A \wedge B)=\min(V(A),V(B))$
  - $V(A \vee B)=\max(V(A),V(B))$
  - $V(\neg A)=1-V(A)$
  - $V(A \rightarrow B)=\max(1- V(A), V(B))$
- **Nótese que la lógica difusa no cumple:**
  - No contradicción: $V(A \wedge \neg A) \neq 0$ en general
  - Tercio excluso: $V(A \vee \neg A) \neq 1$ en general

Razonamiento Difuso basado en Reglas

- **Lo mostraremos con un ejemplo:**
  - Se le toma la temperatura a un paciente y se quiere saber la dosis apropiada de un medicamento.
  - Hechos:
    - temperatura=38
  - Reglas:
    - normal(temperatura)→baja(dosis)
    - templada(temperatura) →media(dosis)
    - alta(temperatura) →alta(dosis)



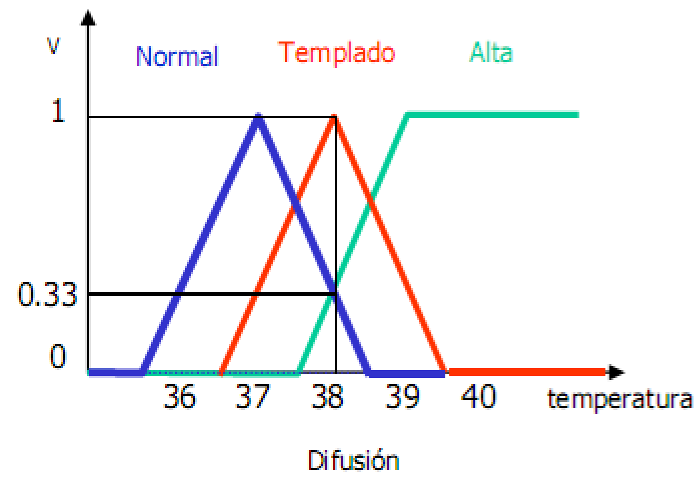
Conjuntos Difusos temperatura normal, templada y alta



Conjuntos Difusos dosis baja, media y alta

Razonamiento Difuso basado en Reglas

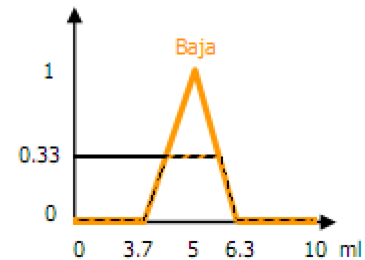
- **Generalmente el proceso de razonamiento difuso consta de 4 pasos**
  - Difusión:Obtener los grados de verdad de los antecedentes.
    - Se obtienen los grados de verdad de los antecedentes utilizando los hechos observados.
    - En el ejemplo:
    - Hechos:
      - temperatura=38
      - Grados de verdad:
        - » normal(temperatura): 0.33
        - » templado(temperatura): 1
        - » alta(temperatura): 0.33



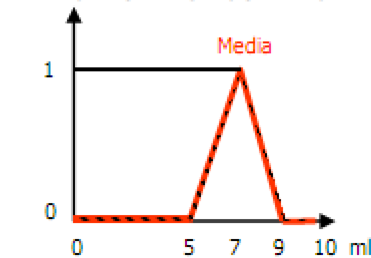
Razonamiento Difuso: Inferencia

– Inferencia: Obtener los grados de verdad de los consecuentes
  - Una vez calculados los grados de verdad de la premisa de cada regla se recalculan los grados de verdad de los consecuentes mediante:
    - Min: los grados de verdad del consecuente se cortan a la altura del grado de verdad de la premisa, o
    - Producto: se multiplican los grados de verdad de consecuente y premisa

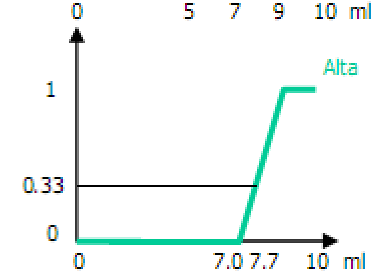
– Ejemplo (continuación)
  - Reglas:
    - normal(temperatura)→baja(dosis) v=0.33



    - templada(temperatura) →media(dosis) v=1



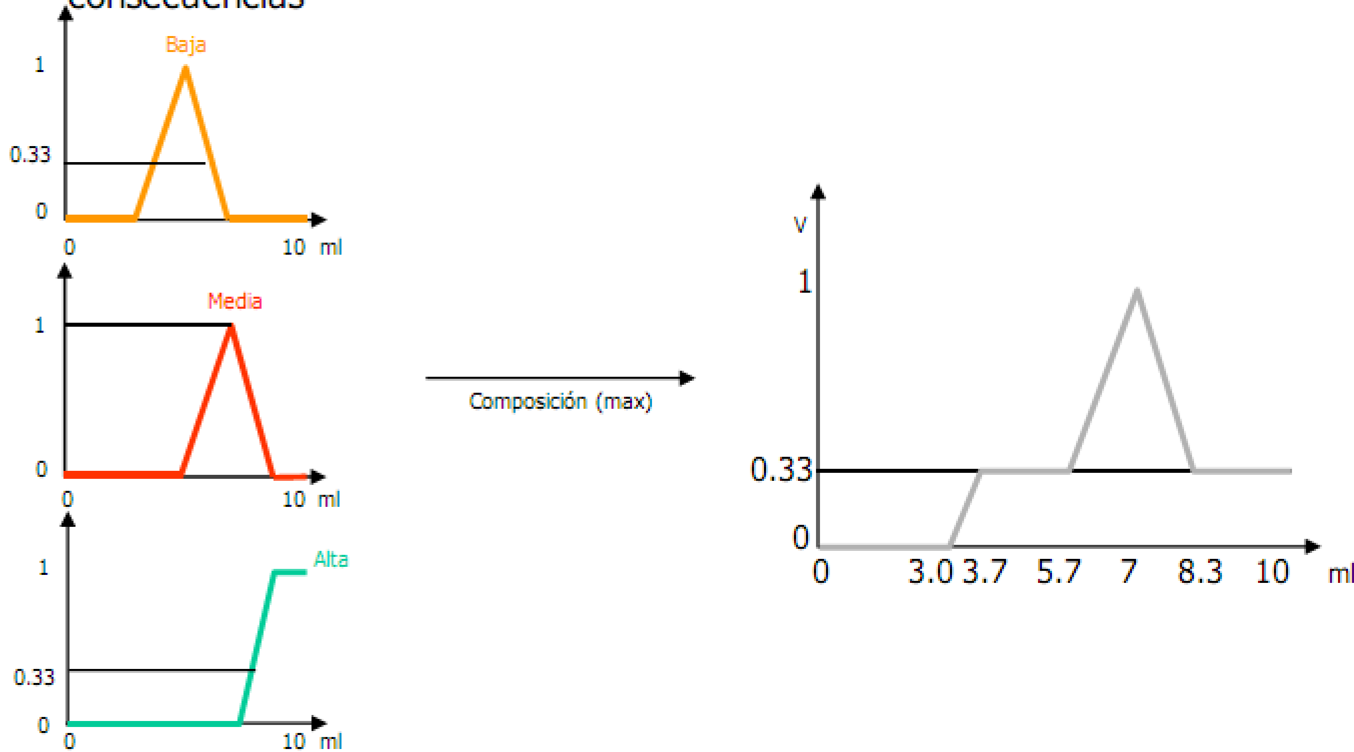
    - alta(temperatura) →alta(dosis) v=0.33



Razonamiento Difuso: Composición

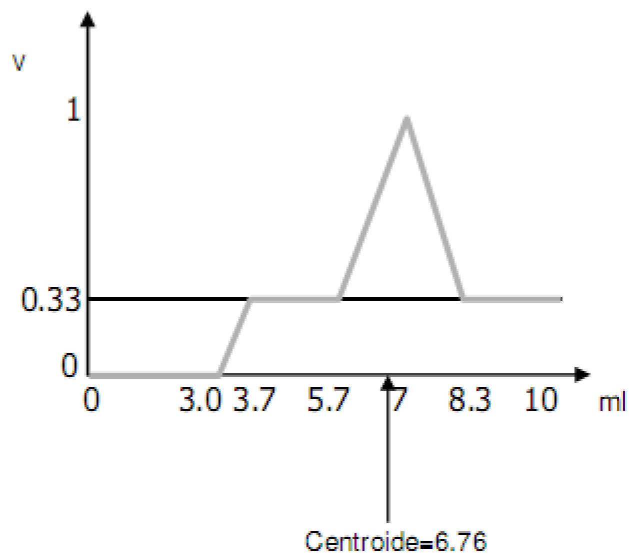
– Composición de consecuentes

- Todos los grados de verdad difusos correspondientes a reglas con el mismo consecuente se combinan para dar lugar a los grados de verdad de la conclusión de las reglas mediante:
  - Max: Se toma el máximo de los grados de verdad correspondientes a las distintas consecuencias, o
  - Sum: Se toma la suma de los grados de verdad correspondientes a las distintas consecuencias



Razonamiento Difuso: Concisión

- Concisión (Opcional)
  - Se utiliza cuando se necesita convertir una conclusión difusa en concreta.
  - Generalmente se utilizan los métodos:
    - Centroide: Se calcula el centro de gravedad de los grados de verdad de la conclusión difusa, o
    - Máximo: Se elige el máximo valor de los grados de verdad.



$$\text{centroide} = \frac{\int x \cdot v(x)\, dx}{\int v(x)\, dx}$$

- Por tanto con 38 grados la dosis sería de 6.76 ml.

Representación Numérica de la Incertidumbre: Probabilidad

- **La Teoría de la Probabilidad (TProb)**
  - Es un área de las Matemáticas que ha sido aplicada a problemas de razonamiento con incertidumbre
  - Es una teoría elegante, bien entendida y con mucha historia (formalizaciones a partir de mediados del siglo XVII)
  - Asigna valores numéricos (llamados probabilidades) a las proposiciones.
  - Nos dice, dadas las probabilidades de ciertas proposiciones, y algunas relaciones entre ellas como asignar probabilidades a las proposiciones relacionadas
  - Relación con la LPO:
    - En la LPO las proposiciones son ciertas o falsas.
    - Con la Tprob las proposiciones son también ciertas o falsas pero se tiene un grado de creencia en la certeza o falsedad.

¿Qué son las Probabilidades?

- **A pesar de su larga historia los valores numéricos que representan las probabilidad no tiene una interpretación única.**
- **Algunas Interpretaciones:**
  - Frecuentista: Es el valor, cuando el número de pruebas tiende a infinito, de la frecuencia de que ocurra algún evento
  - Subjetiva: Es un grado de creencia acerca de un evento incierto
- **Aún así:**
  - Existe un consenso sobre el modelo matemático que soporta la Teoría

Los Valores Numéricos de la Probabilidad

- **Denotaremos por P(A) a la probabilidad de la proposición A**
  - A="El paciente tiene sarampión"
  - A="Mañana saldrá el sol" ...
- **Los valores de la Probabilidad satisfacen un conjunto de axiomas:**
  - $0 \leq P(A) \leq 1$
  - P(Proposición Verdadera)=1
  - $P(A \vee B)=P(A)+P(B)$
    - Siempre que A y B sean disjuntos, es decir $\neg(A \wedge B)$
- **A partir de ellos se puede demostrar por ejemplo:**
  - $P(\neg A)=1-P(A)$
  - P(Proposición Falsa)=0
  - $P(A \vee B)=P(A)+P(B)-P(A \wedge B)$

Variables Aleatorias

- **Muchas veces tenemos un evento con un conjunto de resultados:**
  - Completo

    Se conocen todos los posibles resultados
  - Mutuamente excluyente

    No se pueden dar dos resultados distintos simultáneamente.

  Ejemplos
    - Si tiramos una moneda, el resultado es cara o cruz
    - Si tiramos un dado, se producen seis resultados distintos
    - La temperatura de un paciente puede estar en un conjunto de intervalos: <36.5, 36.5-37.4, 37.5-38.4, 38.5-39.4, >39.4
- **En lugar de tener una proposición para cada resultado se introduce el concepto de Variable aleatoria**
- **Se permiten proposiciones de la forma Variable = resultado**
  - Por ejemplo, si M="Resultado de tirar una moneda con valores posibles cara y cruz" se permiten las proposiciones:
    - M=cara y M=Cruz y podemos hablar de
    - P(M=cara) y P(M=cruz) que representan la probabilidad de obtener una cara y una cruz respectivamente

Variables Aleatorias

- **Por consistencia, se puede considerar que todas las proposiciones son variables aleatorias que toman dos valores verdadero o falso**
  - Por ejemplo, dada la proposición "Tiene Sarampión"
    - Construimos la variable aleatoria Sarampión que toma los valores verdadero y falso
  - Y representamos la probabilidad de que un paciente tenga Sarampión P("Tiene Sarampión") como P(Sarampión =verdadero)
- **Abreviaturas**
  - Se suele escribir P(M=cara) como P(cara), cuando está claro que nos referimos a la variable aleatoria M.
  - Si una variable aleatoria como Sarampión toma únicamente los valores verdadero o falso se suele escribir P(Sarampión =verdadero) como P(sarampión) y P(Sarampión =falso) como P(¬ sarampión)

Distribuciones de Probabilidad

- **Dada una Variable Aleatoria nos gustaría conocer la probabilidad para cada valor que pueda tomar**
- **Esta descripción se llama distribución de probabilidad (Dprob) de la variable aleatoria y consiste en listar los valores de probabilidad para cada valor de la variable**
- **Ejemplo:**
  - Distribución de probabilidad de la variable Llueve

Variable

Valores

Llueve	P(Llueve)
Verdadero	0.1
Falso	0.9

Probabilidades

Proposiciones más Complejas

- **Podemos estar interesados en estudiar varias variables en conjunto.**
  - Por ejemplo
    - P(Sarampión=verdadero $\wedge$ Fiebre=verdadero) que es la probabilidad de que el paciente tenga sarampión y fiebre
  - Generalmente lo escribiremos como:
    - P(sarampión$\wedge$ fiebre) o P(sarampión, fiebre)
- **Para ello se necesita asignar probabilidades a cada posible combinación de los valores de las variables.**
- **El listado de todos esos valores se llama la distribución conjunta del conjunto de variables**

Ejemplo de distribución conjunta

- **Distribución conjunta de las variables Llueve y EnCalle P(Llueve, EnCalle):**

Llueve	EnCalle	P(Llueve,EnCalle)
Verdadero	Verdadero	0.01
Verdadero	Falso	0.09
Falso	Verdadero	0.2
Falso	Falso	0.7

- **También se puede escribir como:**

Llueve	EnCalle	P(Llueve,EnCalle)
llueve	encalle	0.01
llueve	¬encalle	0.09
¬ llueve	encalle	0.2
¬ llueve	¬encalle	0.7

- **Recuerda a la tabla de la verdad lógica excepto que:**
  - Describe las probabilidad para cada combinación de valores de las variables
  - Generalmente dichos valores no se pueden calcular a partir de sus componentes

La Importancia de la Distribución Conjunta

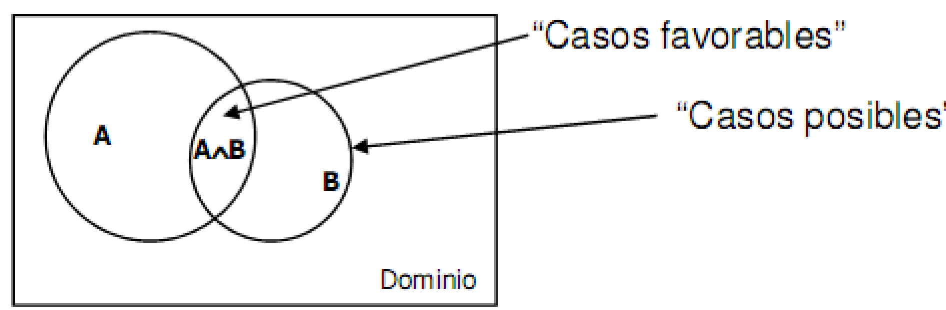
- **La distribución conjunta contiene todo lo que se necesita saber acerca de un conjunto de variables aleatorias.**
- **En particular, la distribución de cada variable individual se puede calcular a partir de la distribución conjunta (y se llama distribución marginal)**
  - Ejemplo: Supongamos las variables aleatorias: Llueve y EnCalle con distribución conjunta P(Llueve,EnCalle)

llueve	encalle	0.01
llueve	¬encalle	0.09
¬ llueve	encalle	0.2
¬ llueve	¬encalle	0.7

- Entonces $P(llueve) = P(llueve \wedge enCalle) + P(llueve \wedge \neg enCalle) = 0.01+0.09=0.1.$
- De forma similar $P(\neg llueve) = 0.9$
- También podemos calcular la probabilidad de disyunciones: $P(llueve \vee enCalle) = 0.01+0.09+0.2 = 0.3$

Probabilidad Condicional

- **Escribiremos P(A|B) para representar la probabilidad de A dado B. Esta probabilidad se llama probabilidad condicional.**
- **Lo podemos interpretar como mi grado de creencia en A cuando todo lo que sé es B.**
  - O de forma alternativa, de los casos en los que se da B, ¿en que proporción se da A?



Probabilidad Condicional
Representación gráfica

- **Se define como:**
  - $P(A|B)=P(A \wedge B)/P(B)$ (Asumiendo $P(B)\neq 0$) o equivalentemente
  - $P(A \wedge B)= P(A|B)P(B)$ (Regla del Producto)

Distribución Condicional

- **Nos permite conocer la probabilidad de que se tomen unos determinados valores por un conjunto de variables aleatorias cuando se saben los valores que han tomado otras.**
  - Ejemplo: P(Llueve|enCalle)

Llueve	P(Llueve|enCalle)
llueve	0.05
¬ llueve	0.95

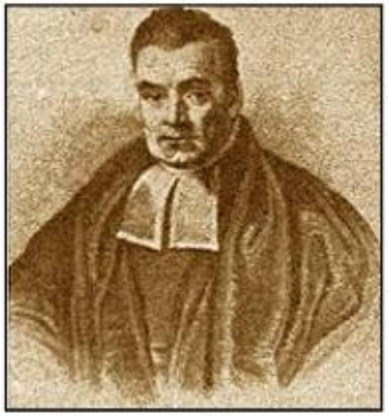
  - Ejemplo: P(Llueve| ¬ enCalle)

Llueve	P(Llueve| ¬enCalle)
llueve	0.11
¬ llueve	0.89

  - Nótese que Llueve|enCalle y Llueve| ¬ enCalle son variables aleatorias

Razonamiento con Probabilidades: La Regla de Bayes

- **Propuesta en 1763 por el Reverendo T. Bayes**
  - $P(A|B)= P(B|A)\,P(A) \;/\; P(B)$
  - Es una consecuencia de la regla del producto:
    - $P(A|B)P(B) = P(A,B) = P(B|A)P(A)$



Thomas Bayes

- **De forma intuitiva:**
  - La probabilidad de una hipótesis A dada una evidencia B: $P(A|B)$ es proporcional a probabilidad de la hipótesis $P(A)$ multiplicada por el grado en que la hipótesis predice los datos $P(B|A)$
- **Aplicabilidad**
  - En muchos problemas dado un conjunto de datos (evidencia) B tenemos que seleccionar la hipótesis A más probable mediante $P(A|B)$

Regla de Bayes: Forma General

- **Forma general de la Regla de Bayes**
  - Si se tiene un conjunto de proposiciones $\{A_1, A_2,\ldots, A_m\}$ completas y mutuamente excluyente se tiene:

$$P(A_i|B)= \frac{P(B|A_i)\ P(A_i)}{P(B|A_1)\ P(A_1)+\ldots\ P(B|A_n)\ P(A_m)}$$

O lo que es lo mismo, si tiene una variable aleatoria A con valores $a_1, a_2,\ldots, a_m$

$$P(a_i|B)= \frac{P(B|a_i)\ P(a_i)}{P(B|a_1)\ P(a_1)+\ldots\ P(B|a_n)\ P(a_m)}$$

La Regla de Bayes: Ejemplo

- **Intentemos resolver un caso real con probabilidades:**
  - Se pretende determinar la presencia o no de una enfermedad con un test.
    - En este caso:
      - Hipótesis (A): Enfermedad (variable aleatoria con dos valores verdadero y falso)
      - Evidencia (B): Test (variable aleatoria con dos valores positivo y negativo)
    - Se tiene:
      - $P(a)=1/10000$ (Prevalencia)
      - $P(b|a)=0.99$ (Sensibilidad)
      - $P(\neg b| \neg a)=0.99$ (Especificidad)
    - Aplicando la Regla de Bayes:

      $P(a|b)= P(b|a) \; P(a) \; /(P(b|a) \; P(a) \; + P(b| \neg a) \; P(\neg a))=$

      $0.99 \times 0.0001/ (0.99 \times 0.0001 + (1\text{-}0.99)\times(1\text{-}0.0001))=$

      $(1/102)=0.0098$

      $P(\neg a |b)=1\text{-} 0.0098=0.9902$
    - Al elegir la hipótesis más probable debemos concluir que con este test si el resultado es positivo lo más probable es que el paciente no esté enfermo!

La Regla de Bayes: Ejemplo

- **Continuamos con el ejemplo:**
  - ¿Y si hay varios tests $B_1, B_2, \ldots, B_m$?
    - Supondremos que cada test $B_1, B_2, \ldots, B_m$ es una variable aleatoria con dos resultados: positivo y negativo.
  - Entonces si queremos calcular la probabilidad de que el paciente esté enfermo necesitamos calcular:

$$P(A| B_1, B_2, \ldots, B_m) = P(B_1, B_2, \ldots, B_m| A)P(A)/P(B_m, B_m, \ldots, B_m)$$

  - Si al paciente se le hace un conjunto de 30 pruebas y por simplificar se supone que cada una da como resultado sí o no.
    - Entonces para almacenar la tabla de probabilidad conjunta $P(B_1, B_2, \ldots, B_m| A)$ se necesitan guardar unos 2^{30} números reales (unos 8 DVD's por paciente).
    - ¿De donde sacamos los números ? ¿Cómo estimar los números a partir de casos (en la Tierra hay 2^{32} personas aproximadamente)?
    - ¿Cómo hacemos los cálculos computacionalmente eficientes?

Independencia: ¿Una Solución?

- **Independencia**
  - Decimos que dos proposiciones A_1 y A_2 son independientes si el conocimiento de una no cambia la probabilidad de la otra
    - Por ejemplo si
      - A_1="Es rubio" , A_2="Tiene la piel clara" ,A_3="Lloverá mañana"
      - A_1 y A_3 son independientes A_1 y A_2 no.
  - Formalmente A_1,A_2 son independientes si $P(A_1|A_2)=P(A_1)$
    o de forma equivalente: $P(A_2|A_1)=P(A_2)$
    o utilizando la regla del producto $P(A_1 \wedge A_2)= P(A_1)\, P(A_2)$
  - Entonces $P(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n)= P(A_1)\, P(A_2) \ldots P(A_n)$
    Para especificar la distribución conjunta de n variables se necesitan o(n) números en lugar de o(2^n)
  - Dos variables aleatorias son independientes si el conocimento del valor que toma una no cambia la probabilidad de los valores de la otra: $P(A_1=c|A_2=d) = P(A_1=c)$

Independencia Condicional

- **Pero...**
  - La condición de independencia es muy restrictiva.
  - Por ejemplo, los resultados de los tests en medicina no suelen ser independientes.
- **Independencia condicional**
  - Se dice que dos proposiciones A_1, A_2 son independientes dada una tercera B si cuando B está presente el conocimiento de una no influye en la probabilidad de la otra: $P(A_1|A_2,B)=P(A_1|B)$

    o de forma equivalente: $P(A_2|A_1,B)=P(A_2|B)$

    o de forma equivalente: $P(A_1 \wedge A_2 |B)= P(A_1|B)\ P(A_2|B)$
    - Ejemplo:
      - A_1="Tengo congestión nasal" A_2="Tengo fiebre" A_3="Tengo gripe"
      - A_1 y A_2 son dependientes pero son independientes si se conoce A_3.
  - Ahora se tiene: $P(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n |B)=P(A_1|B)\ P(A_2|B) \ldots P(A_n|B)$
    - Tenemos o(n) números en lugar de o(2^n)

Independencia Condicional

- **Finalizamos el ejemplo:**
  - ¿Y si hay varios tests $B_1,B_2,\dots,B_m$?
  - Como vimos, para calcular la probabilidad de que el paciente esté enfermo hay que calcular:

    $P(A|\ B_1,B_2,\dots,B_m)=P(B_1,B_2,\dots,B_m|\ A)P(A)/P(B_m,B_m,\dots,B_m)$
  - Si los tests $B_1,B_2,\dots,B_m$ son independientes dada la enfermedad A (aproximación que suele dar buenos resultados):

    $P(B_1,B_2,\dots,B_m|A)=P(B_1|A)\ P(B_2|A)\ \dots\ P(B_m|\ A)$
  - El problema a resolver ya es abordable:

    Basta calcular:

    $P(A|\ B_1,B_2,\dots,B_m)=P(B_1|A)\ P(B_2|A)\dots P(B_m|\ A)P(A)/P(B_m,B_m,\dots,B_m)$

    $P(\neg A|\ B_1,B_2,\dots,B_m)=P(B_1|\neg A)\ P(B_2|\neg A)\dots P(B_m|\neg A)\ P(\neg A)$
    $/P(B_m,B_m,\dots,B_m)$

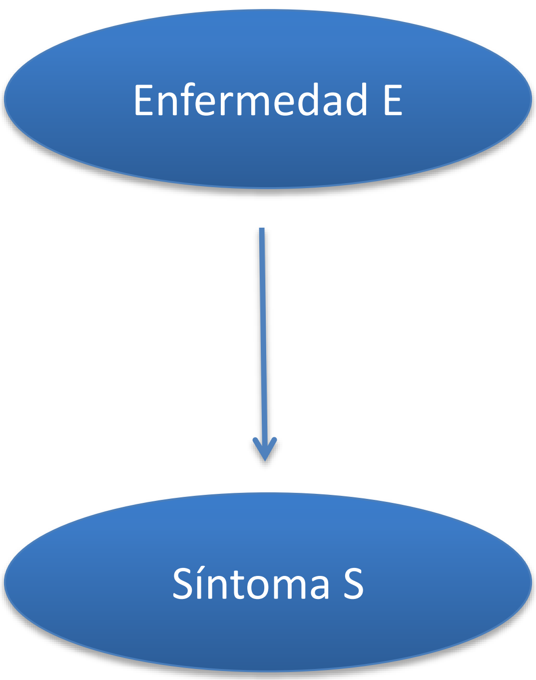
    con $P(B_m,B_m,\dots,B_m)= P(B_1|A)\ P(B_2|A)\dots P(B_m|\ A)P(A)+$
    $P(B_1|\neg A)\ P(B_2|\neg A)\dots P(B_m|\neg A)\ P(\neg A)$

Representación de la Independencia:Redes Bayesianas

- **La clave hacer factible la inferencia con probabilidades es la introducción explícita de la independencia entre variables**
- **El modelo más extendido de representación de independencias lo constituye las Redes Bayesianas.**
- **En este modelo se representa de forma explícita la dependencia entre variables mediante un grafo**
- **Los nodos del grafo se corresponden con variables y las dependencias se representan mediante arcos entre ellas**

Aplicación Regla de Bayes

- Ejemplo simple

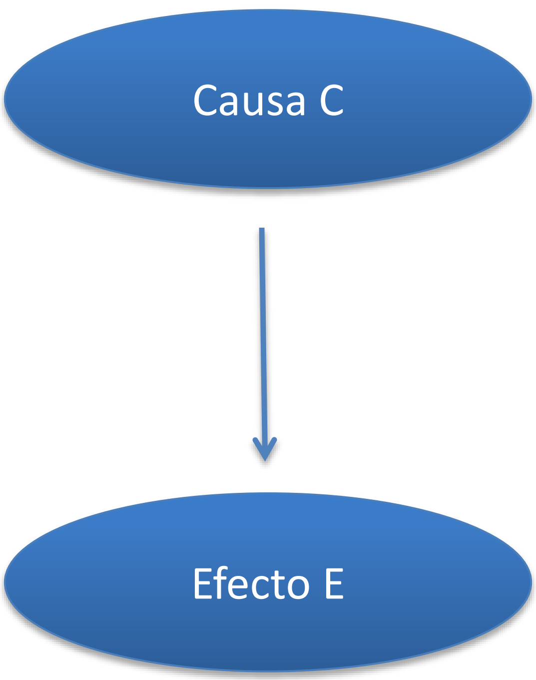


Se que se da S, ¿que probabilidad hay de que se de E?

$$P(E|S) = \frac{P(S|E).P(E)}{P(S|E).P(E)+P(S|\neg E).P(\neg E)}$$

Aplicación Regla de Bayes

- **Caso simple: Probabilidad inducida por un efecto**



Se conoce P(E), P(E|C) y P(E|¬C), ¿Puedo calcular P(C|E)?

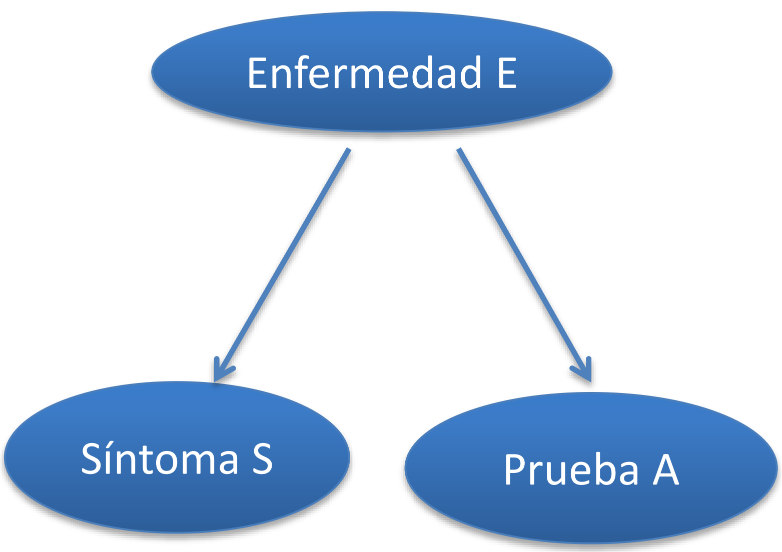
$$P(C|E) = \frac{P(E|C).P(C)}{P(E|C).P(C) + P(E|\neg C).P(\neg C)}$$

Aplicación Regla de Bayes

- **Probabilidad inducida por varias efectos** (suponiendo independencia)

ENFERMEDAD (E): presente (+e), ausente (¬e)
SÍNTOMA (S): presente (+s), ausente (¬s)
PRUEBA ANALÍTICA (A): positivo (+a), negativo (¬a)

Grafo dirigido acíclico



$P(+e) = 0'002$
$P(+s|+e) = 0'93 \quad P(+a|+e) = 0'995$
$P(+s|\neg e) = 0'01 \quad P(+a|\neg e) = 0'003$

$P(+e/+s,+a) = P(+e,+s,+a) / P(+s,+a)$
$P(+e,+s,+a) = P(+e).P(+s|+e).P(+a|+e) = 0{,}00185$
$P(\neg e,+s,+a) = P(\neg e).P(+s|\neg e).P(+a|\neg e) = 0{,}00003$
$P(+s,+a) = P(+e,+s,+a) + P(\neg e,+s,+a) = 0{,}00188$
$\mathbf{P(+e/+s,+a) = P(+e,+s,+a) / P(+s,+a) = 0{,}984}$

Red Bayesiana

- **Probabilidad inducida por varias causas (independientes) y varios efectos (independientes)**

PALUDISMO (X): presente (+x), ausente (¬x)

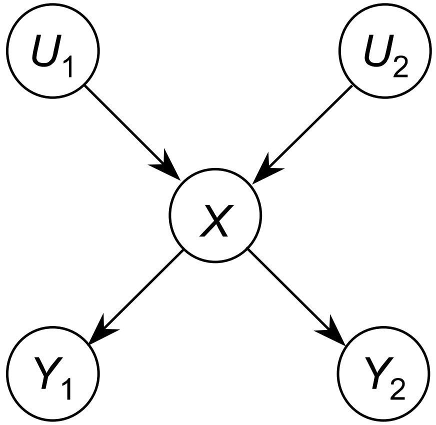
ZONA DE ORIGEN (U1): alto riesgo (u1+), medio riesgo (u1O), bajo riesgo (u1-)

TIPO SANGUÍNEO (U2): mayor inmunidad (u2+), menor inmunidad (u2-)

GOTA GRUESA (Y1): positivo (+y1), negativo (¬ y1)

FIEBRE (Y2): presente (+y2), ausente (¬y2)

- Grafo dirigido acíclico ⟹



Red Bayesiana

$$\begin{cases} P(u_1^+) = 0'10 \\ P(u_1^0) = 0'10 \\ P(u_1^-) = 0'80 \end{cases} \qquad \begin{cases} P(u_2^+) = 0'60 \\ P(u_2^-) = 0'40 \end{cases}$$

$P(+x \mid u_1, u_2)$	u_1^+	u_1^0	u_1^-
u_2^+	0'015	0'003	0'0003
u_2^-	0'022	0'012	0'0008

$$\begin{cases} P(+y_1 \mid +x) = 0'992 \\ P(+y_1 \mid \neg x) = 0'006 \end{cases} \qquad \begin{cases} P(+y_2 \mid +x) = 0'98 \\ P(+y_2 \mid \neg x) = 0'017 \end{cases}$$

- Probabilidad conjunta:

$$P(u_1, u_2, x, y_1, y_2) = P(u_1) \cdot P(u_2) \cdot P(x \mid u_1, u_2) \cdot P(y_1 \mid x) \cdot P(y_2 \mid x)$$

Cálculo de la probabilidad

$$P(u_1, u_2, x, y_1, y_2) = P(u_1) \cdot P(u_2) \cdot P(x|u_1, u_2) \cdot P(y_1|x) \cdot P(y_2|x)$$

- Ejemplo: calcular $P(+x \,|\, u_1^0, u_2^-, \neg y_1, +y_2)$

$$P(u_1^0, u_2^-, +x, \neg y_1, +y_2) =$$
$$= P(u_1^0) \cdot P(u_2^-) \cdot P(+x|u_1^0, u_2^-) \cdot P(\neg y_1|+x) \cdot P(+y_2|+x)$$
$$= 0'10 \cdot 0'40 \cdot 0'12 \cdot 0'008 \cdot 0'98 = 0'0000376$$

$$P(u_1^0, u_2^-, \neg x, \neg y_1, +y_2) =$$
$$= P(u_1^0) \cdot P(u_2^-) \cdot P(\neg x|u_1^0, u_2^-) \cdot P(\neg y_1|\neg x) \cdot P(+y_2|\neg x)$$
$$= 0'10 \cdot 0'40 \cdot 0'88 \cdot 0'994 \cdot 0'017 = 0'0005948$$

$$P(u_1^0, u_2^-, \neg y_1, +y_2) = 0'0000376 + 0'0005948 = 0'0006324$$

$$P(+x \,|\, u_1^0, u_2^-, \neg y_1, +y_2) = \frac{P(u_1^0, u_2^-, +x, \neg y_1, +y_2)}{P(u_1^0, u_2^-, \neg y_1, +y_2)} = \frac{0'0000376}{0'000632} = 0'056$$

Resumen de representaciones numéricas

- **Grados de certidumbre en Mycin**
  - Asigna:Un número entre -1 y 1 a cada regla
  - Mide: La incertidumbre asociada a cada regla
  - Aplicaciones: Sistemas Expertos
  - Ventajas: El número de parámetros necesario es razonable
  - Inconvenientes: Débil representación de la independencia, Incoherencias
- **Lógica difusa**
  - Asigna:Un número entre 0 y 1 a cada proposición
  - Mide: La verdad asociada a cada proposición
  - Aplicaciones: Sistemas Expertos, Control
  - Ventajas: Proporciona una forma de razonar con la vaguedad asociadas al lenguaje natural
  - Inconvenientes: Tiene muchas elecciones arbitrarias (combinación de grados de creencia, inferencia, etc.)

Resumen de representaciones numéricas

- **Probabilidad**
  - Asigna:Un número entre 0 y 1 a cada proposición
  - Mide: La incertidumbre asociada a dicha proposición
  - Aplicaciones: Sistemas Expertos, Clasificación
  - Ventajas: Sistema formalmente probado y robusto
  - Inconvenientes: Se necesita mucha información