Tema 7: Máquinas de Turing

Jose A. Garcia

Universidad de Granada

Contenido

- Introducción
- Máquinas de Turing
- Lenguajes recursivamente enumerables
- Lenguajes recursivos
- El problema de la parada

El Problema de la Parada

Enunciado

- Entrada: un programa y unos datos de entrada
- Salida: SI (cuando el programa termina para esos datos) y NO (cuando el programa cicla de forma indefinida para esos datos)

¿Por qué es difícil saber si un programa termina?

```
int exp(int i,n)
/* calcula i a la potencia n */
{
    int ans,j;
    ans = 1;
    for (j=1; j<=n; j++) ans *= i;
    return(ans);
}

main()
{
    int n, total, x,y,z;
    scanf("%d",&n);
    total = 3;
    while (1) {
        for(x=1; x<=total-2; x++)
            for(y=1; y<=total-x-1; y++) {
                z = total-x-y;
                if (exp(x,n) + exp(y,n) == exp(z,n))
                    printf("hola mundo");
            }
        total++;
    }
}
```

Motivación

- El programa termina para una entrada n si y solo si existen números enteros positivos x, y, z tales que

$$x^n + y^n = z^n$$

- Ahora se sabe que no termina para $n > 2$ según el *último teorema de Fermat*, pero hace algunos años esto no se sabía.
- El teorema fue enunciado en 1637, pero no fue demostrado hasta 1995 por el matemático Andrew Wiles
- Se han necesitado más de 300 años para saber si un programa concreto termina, pero nosotros queremos un algoritmo que nos diga si cualquier programa termina!!
- Este es un problema indecidible. La teoría para demostrar esto la haremos usando Máquinas de Turing. La podríamos hacer usando programas en C, pero las demostraciones matemáticas serían más complejas.

Máquinas de Turing

Una Máquina de Turing (MT) es una séptupla $(Q, A, C, \delta, q_0, \#, F)$ en la que

- Q es un conjunto finito de estados
- A es un alfabeto de entrada
- C es el alfabeto de símbolos de la cinta que incluye a A
- δ es la función de transición que asigna a cada estado $q \in Q$ y símbolo $b \in B$, el valor $\delta(q, b)$ que puede ser vacío (no definido) o una tripleta (p, c, M) donde $p \in Q, c \in C, M \in \{I, D\}$ donde I indica izquierda y D indica derecha.
- q_0 es el estado inicial
- $\#$ es un símbolo de $B \setminus A$ llamado símbolo blanco
- F es el conjunto de estados finales

Consideremos la MT
$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{0,1\}, \{0,1,X,Y,\#\}, \delta, q_0, \#, \{q_4\})$ donde las transiciones no nulas son las siguientes:

$$
\begin{array}{ll}
\delta(q_0,0) = (q_1, X, D) & \delta(q_0, Y) = (q_3, Y, D) \\
\delta(q_1,0) = (q_1, 0, D) & \delta(q_1, 1) = (q_2, Y, I) \\
\delta(q_1, Y) = (q_1, Y, D) & \delta(q_2, 0) = (q_2, 0, I) \\
\delta(q_2, X) = (q_0, X, D) & \delta(q_2, Y) = (q_2, Y, I) \\
\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, D) & \delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D)
\end{array}
$$

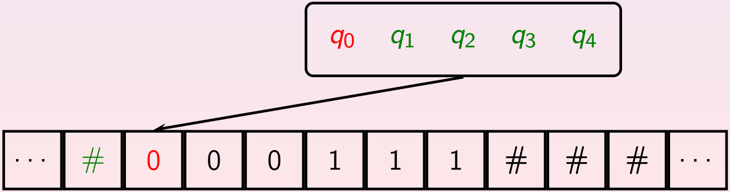
Funcionamiento

$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, D)$ $\delta(q_0, Y) = (q_3, Y, D)$ $\delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$

$\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, I)$ $\delta(q_1, Y) = (q_1, Y, D)$ $\delta(q_2, 0) = (q_2, 0, I)$

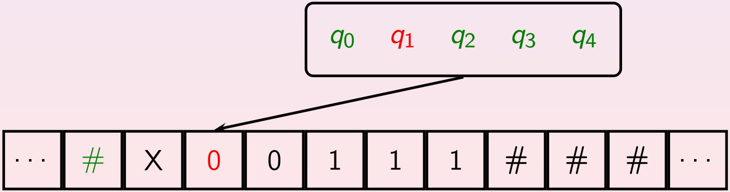
$\delta(q_2, X) = (q_0, X, D)$ $\delta(q_2, Y) = (q_2, Y, I)$

$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, D)$ $\delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D)$



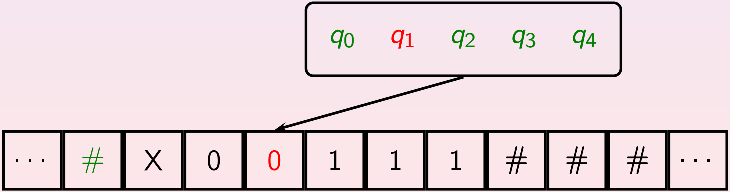
Funcionamiento

$$
\begin{array}{lll}
\delta(q_0,0)=(q_1,X,D) & \delta(q_0,Y)=(q_3,Y,D) & \delta(q_1,0)=(q_1,0,D) \\
\delta(q_1,1)=(q_2,Y,I) & \delta(q_1,Y)=(q_1,Y,D) & \delta(q_2,0)=(q_2,0,I) \\
\delta(q_2,X)=(q_0,X,D) & \delta(q_2,Y)=(q_2,Y,I) & \\
\delta(q_3,Y)=(q_3,Y,D) & \delta(q_3,\#)=(q_4,\#,D) &
\end{array}
$$



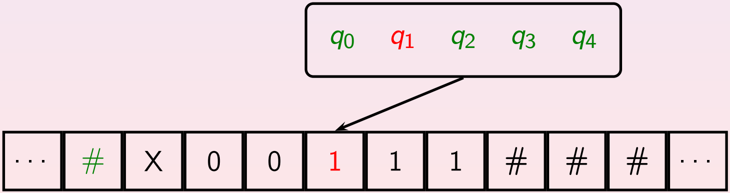
Funcionamiento

$$
\begin{array}{lll}
\delta(q_0,0)=(q_1,X,D) & \delta(q_0,Y)=(q_3,Y,D) & \delta(q_1,0)=(q_1,0,D) \\
\delta(q_1,1)=(q_2,Y,I) & \delta(q_1,Y)=(q_1,Y,D) & \delta(q_2,0)=(q_2,0,I) \\
\delta(q_2,X)=(q_0,X,D) & \delta(q_2,Y)=(q_2,Y,I) & \\
\delta(q_3,Y)=(q_3,Y,D) & \delta(q_3,\#)=(q_4,\#,D) &
\end{array}
$$



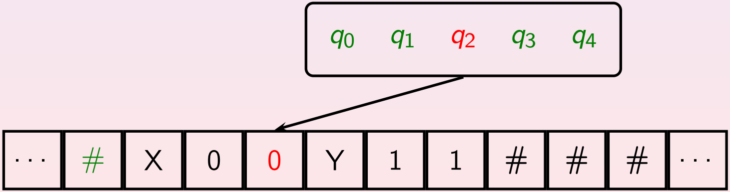
Funcionamiento

$$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, D) \quad \delta(q_0, Y) = (q_3, Y, D) \quad \delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$$
$$\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, I) \quad \delta(q_1, Y) = (q_1, Y, D) \quad \delta(q_2, 0) = (q_2, 0, I)$$
$$\delta(q_2, X) = (q_0, X, D) \quad \delta(q_2, Y) = (q_2, Y, I)$$
$$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, D) \quad \delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D)$$



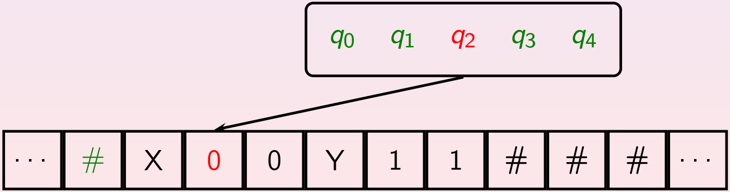
Funcionamiento

$$
\begin{array}{lll}
\delta(q_0,0)=(q_1,X,D) & \delta(q_0,Y)=(q_3,Y,D) & \delta(q_1,0)=(q_1,0,D) \\
\delta(q_1,1)=(q_2,Y,I) & \delta(q_1,Y)=(q_1,Y,D) & \delta(q_2,0)=(q_2,0,I) \\
\delta(q_2,X)=(q_0,X,D) & \delta(q_2,Y)=(q_2,Y,I) & \\
\delta(q_3,Y)=(q_3,Y,D) & \delta(q_3,\#)=(q_4,\#,D) &
\end{array}
$$



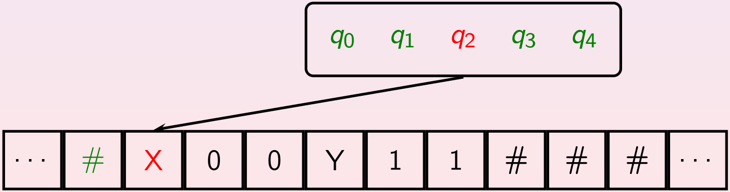
Funcionamiento

$$\delta(q_0,0)=(q_1,X,D) \quad \delta(q_0,Y)=(q_3,Y,D) \quad \delta(q_1,0)=(q_1,0,D)$$
$$\delta(q_1,1)=(q_2,Y,I) \quad \delta(q_1,Y)=(q_1,Y,D) \quad \delta(q_2,0)=(q_2,0,I)$$
$$\delta(q_2,X)=(q_0,X,D) \quad \delta(q_2,Y)=(q_2,Y,I)$$
$$\delta(q_3,Y)=(q_3,Y,D) \quad \delta(q_3,\#)=(q_4,\#,D)$$



Funcionamiento

$$\delta(q_0,0)=(q_1,X,D) \quad \delta(q_0,Y)=(q_3,Y,D) \quad \delta(q_1,0)=(q_1,0,D)$$
$$\delta(q_1,1)=(q_2,Y,I) \quad \delta(q_1,Y)=(q_1,Y,D) \quad \delta(q_2,0)=(q_2,0,I)$$
$$\delta(q_2,X)=(q_0,X,D) \quad \delta(q_2,Y)=(q_2,Y,I)$$
$$\delta(q_3,Y)=(q_3,Y,D) \quad \delta(q_3,\#)=(q_4,\#,D)$$



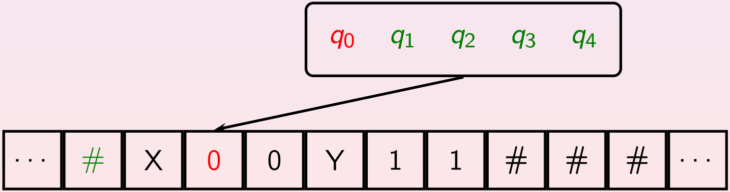
Funcionamiento

$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, D)$ $\quad$ $\delta(q_0, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad$ $\delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$

$\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, I)$ $\quad$ $\delta(q_1, Y) = (q_1, Y, D)$ $\quad$ $\delta(q_2, 0) = (q_2, 0, I)$

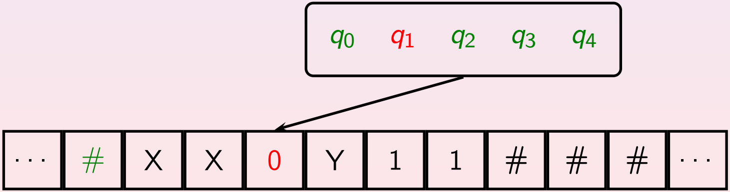
$\delta(q_2, X) = (q_0, X, D)$ $\quad$ $\delta(q_2, Y) = (q_2, Y, I)$

$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad$ $\delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D)$



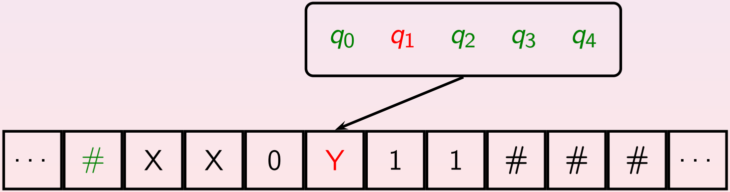
Funcionamiento

$$
\begin{array}{lll}
\delta(q_0,0)=(q_1,X,D) & \delta(q_0,Y)=(q_3,Y,D) & \delta(q_1,0)=(q_1,0,D) \\
\delta(q_1,1)=(q_2,Y,I) & \delta(q_1,Y)=(q_1,Y,D) & \delta(q_2,0)=(q_2,0,I) \\
\delta(q_2,X)=(q_0,X,D) & \delta(q_2,Y)=(q_2,Y,I) & \\
\delta(q_3,Y)=(q_3,Y,D) & \delta(q_3,\#)=(q_4,\#,D) &
\end{array}
$$



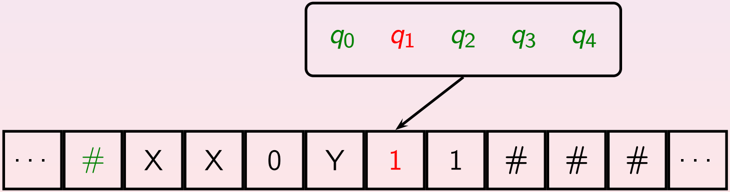
Funcionamiento

$$
\begin{array}{lll}
\delta(q_0,0)=(q_1,X,D) & \delta(q_0,Y)=(q_3,Y,D) & \delta(q_1,0)=(q_1,0,D) \\
\delta(q_1,1)=(q_2,Y,I) & \delta(q_1,Y)=(q_1,Y,D) & \delta(q_2,0)=(q_2,0,I) \\
\delta(q_2,X)=(q_0,X,D) & \delta(q_2,Y)=(q_2,Y,I) & \\
\delta(q_3,Y)=(q_3,Y,D) & \delta(q_3,\#)=(q_4,\#,D) &
\end{array}
$$



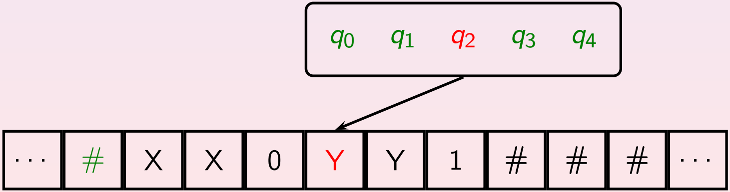
Funcionamiento

$$\delta(q_0,0)=(q_1,X,D) \quad \delta(q_0,Y)=(q_3,Y,D) \quad \delta(q_1,0)=(q_1,0,D)$$
$$\delta(q_1,1)=(q_2,Y,I) \quad \delta(q_1,Y)=(q_1,Y,D) \quad \delta(q_2,0)=(q_2,0,I)$$
$$\delta(q_2,X)=(q_0,X,D) \quad \delta(q_2,Y)=(q_2,Y,I)$$
$$\delta(q_3,Y)=(q_3,Y,D) \quad \delta(q_3,\#)=(q_4,\#,D)$$



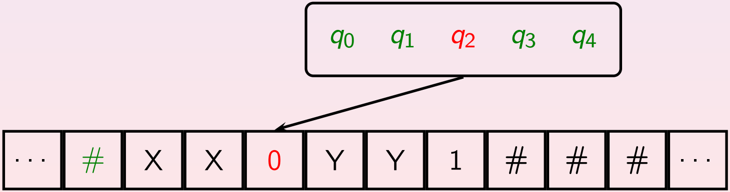
Funcionamiento

$$\delta(q_0,0)=(q_1,X,D) \quad \delta(q_0,Y)=(q_3,Y,D) \quad \delta(q_1,0)=(q_1,0,D)$$
$$\delta(q_1,1)=(q_2,Y,I) \quad \delta(q_1,Y)=(q_1,Y,D) \quad \delta(q_2,0)=(q_2,0,I)$$
$$\delta(q_2,X)=(q_0,X,D) \quad \delta(q_2,Y)=(q_2,Y,I)$$
$$\delta(q_3,Y)=(q_3,Y,D) \quad \delta(q_3,\#)=(q_4,\#,D)$$



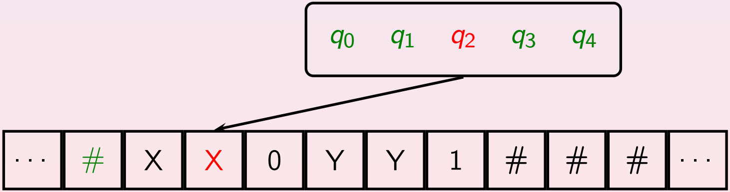
Funcionamiento

$$\delta(q_0,0)=(q_1,X,D) \quad \delta(q_0,Y)=(q_3,Y,D) \quad \delta(q_1,0)=(q_1,0,D)$$
$$\delta(q_1,1)=(q_2,Y,I) \quad \delta(q_1,Y)=(q_1,Y,D) \quad \delta(q_2,0)=(q_2,0,I)$$
$$\delta(q_2,X)=(q_0,X,D) \quad \delta(q_2,Y)=(q_2,Y,I)$$
$$\delta(q_3,Y)=(q_3,Y,D) \quad \delta(q_3,\#)=(q_4,\#,D)$$



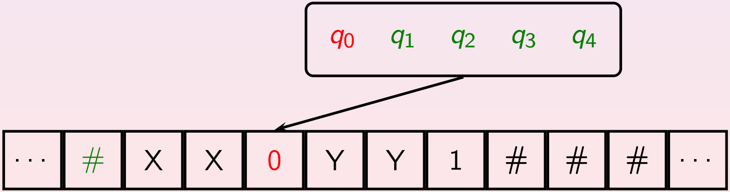
Funcionamiento

$$\begin{array}{lll}
\delta(q_0,0)=(q_1,X,D) & \delta(q_0,Y)=(q_3,Y,D) & \delta(q_1,0)=(q_1,0,D)\\
\delta(q_1,1)=(q_2,Y,I) & \delta(q_1,Y)=(q_1,Y,D) & \delta(q_2,0)=(q_2,0,I)\\
\delta(q_2,X)=(q_0,X,D) & \delta(q_2,Y)=(q_2,Y,I) & \\
\delta(q_3,Y)=(q_3,Y,D) & \delta(q_3,\#)=(q_4,\#,D) &
\end{array}$$

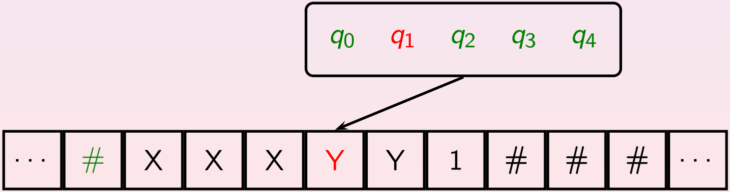


Funcionamiento

$$\delta(q_0,0)=(q_1,X,D) \quad \delta(q_0,Y)=(q_3,Y,D) \quad \delta(q_1,0)=(q_1,0,D)$$
$$\delta(q_1,1)=(q_2,Y,I) \quad \delta(q_1,Y)=(q_1,Y,D) \quad \delta(q_2,0)=(q_2,0,I)$$
$$\delta(q_2,X)=(q_0,X,D) \quad \delta(q_2,Y)=(q_2,Y,I)$$
$$\delta(q_3,Y)=(q_3,Y,D) \quad \delta(q_3,\#)=(q_4,\#,D)$$

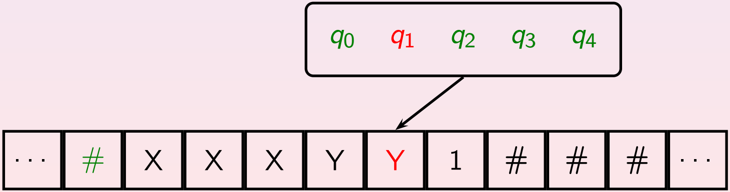


$$
\begin{array}{lll}
\delta(q_0,0)=(q_1,X,D) & \delta(q_0,Y)=(q_3,Y,D) & \delta(q_1,0)=(q_1,0,D)\\
\delta(q_1,1)=(q_2,Y,I) & \delta(q_1,Y)=(q_1,Y,D) & \delta(q_2,0)=(q_2,0,I)\\
\delta(q_2,X)=(q_0,X,D) & \delta(q_2,Y)=(q_2,Y,I) & \\
\delta(q_3,Y)=(q_3,Y,D) & \delta(q_3,\#)=(q_4,\#,D) &
\end{array}
$$



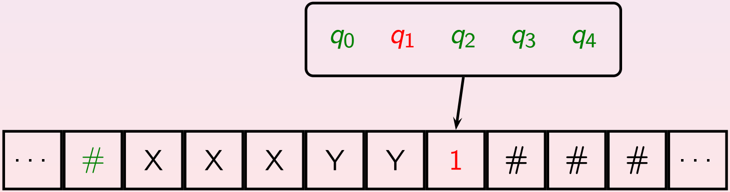
Funcionamiento

$$\delta(q_0,0)=(q_1,X,D) \quad \delta(q_0,Y)=(q_3,Y,D) \quad \delta(q_1,0)=(q_1,0,D)$$
$$\delta(q_1,1)=(q_2,Y,I) \quad \delta(q_1,Y)=(q_1,Y,D) \quad \delta(q_2,0)=(q_2,0,I)$$
$$\delta(q_2,X)=(q_0,X,D) \quad \delta(q_2,Y)=(q_2,Y,I)$$
$$\delta(q_3,Y)=(q_3,Y,D) \quad \delta(q_3,\#)=(q_4,\#,D)$$



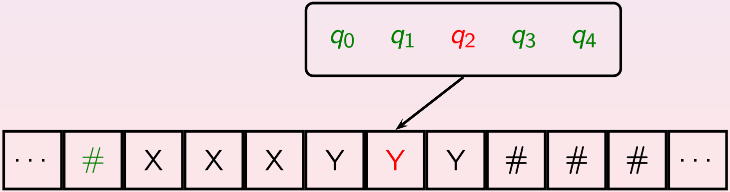
Funcionamiento

$$\delta(q_0,0)=(q_1,X,D) \quad \delta(q_0,Y)=(q_3,Y,D) \quad \delta(q_1,0)=(q_1,0,D)$$
$$\delta(q_1,1)=(q_2,Y,I) \quad \delta(q_1,Y)=(q_1,Y,D) \quad \delta(q_2,0)=(q_2,0,I)$$
$$\delta(q_2,X)=(q_0,X,D) \quad \delta(q_2,Y)=(q_2,Y,I)$$
$$\delta(q_3,Y)=(q_3,Y,D) \quad \delta(q_3,\#)=(q_4,\#,D)$$



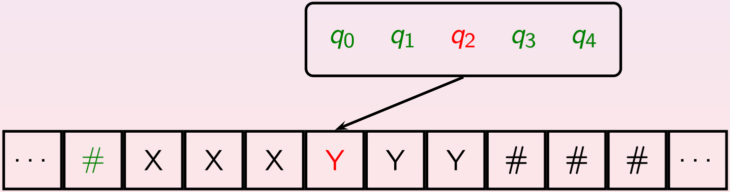
Funcionamiento

$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, D)$ $\delta(q_0, Y) = (q_3, Y, D)$ $\delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$
$\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, I)$ $\delta(q_1, Y) = (q_1, Y, D)$ $\delta(q_2, 0) = (q_2, 0, I)$
$\delta(q_2, X) = (q_0, X, D)$ $\delta(q_2, Y) = (q_2, Y, I)$
$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, D)$ $\delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D)$



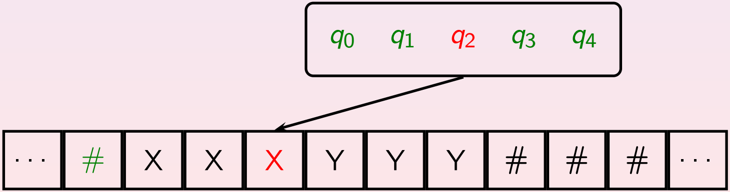
Funcionamiento

$$\delta(q_0,0)=(q_1,X,D) \quad \delta(q_0,Y)=(q_3,Y,D) \quad \delta(q_1,0)=(q_1,0,D)$$
$$\delta(q_1,1)=(q_2,Y,I) \quad \delta(q_1,Y)=(q_1,Y,D) \quad \delta(q_2,0)=(q_2,0,I)$$
$$\delta(q_2,X)=(q_0,X,D) \quad \delta(q_2,Y)=(q_2,Y,I)$$
$$\delta(q_3,Y)=(q_3,Y,D) \quad \delta(q_3,\#)=(q_4,\#,D)$$



Funcionamiento

$$\begin{array}{lll}
\delta(q_0,0)=(q_1,X,D) & \delta(q_0,Y)=(q_3,Y,D) & \delta(q_1,0)=(q_1,0,D) \\
\delta(q_1,1)=(q_2,Y,I) & \delta(q_1,Y)=(q_1,Y,D) & \delta(q_2,0)=(q_2,0,I) \\
\delta(q_2,X)=(q_0,X,D) & \delta(q_2,Y)=(q_2,Y,I) & \\
\delta(q_3,Y)=(q_3,Y,D) & \delta(q_3,\#)=(q_4,\#,D) &
\end{array}$$



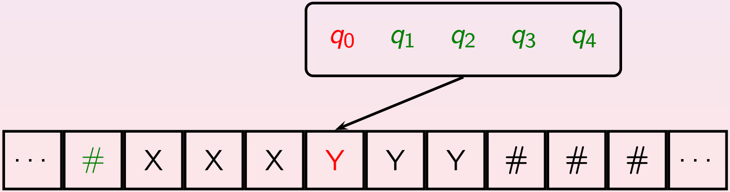
Funcionamiento

$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, D)$ $\quad$ $\delta(q_0, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad$ $\delta(q_1, 0) = (q_1, 0, D)$

$\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, I)$ $\quad$ $\delta(q_1, Y) = (q_1, Y, D)$ $\quad$ $\delta(q_2, 0) = (q_2, 0, I)$

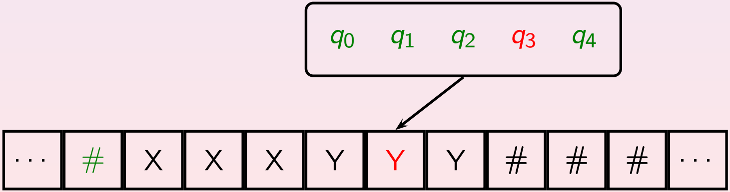
$\delta(q_2, X) = (q_0, X, D)$ $\quad$ $\delta(q_2, Y) = (q_2, Y, I)$

$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, D)$ $\quad$ $\delta(q_3, \#) = (q_4, \#, D)$



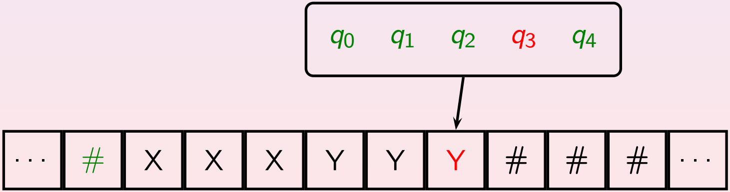
Funcionamiento

$$\delta(q_0,0)=(q_1,X,D) \quad \delta(q_0,Y)=(q_3,Y,D) \quad \delta(q_1,0)=(q_1,0,D)$$
$$\delta(q_1,1)=(q_2,Y,I) \quad \delta(q_1,Y)=(q_1,Y,D) \quad \delta(q_2,0)=(q_2,0,I)$$
$$\delta(q_2,X)=(q_0,X,D) \quad \delta(q_2,Y)=(q_2,Y,I)$$
$$\delta(q_3,Y)=(q_3,Y,D) \quad \delta(q_3,\#)=(q_4,\#,D)$$



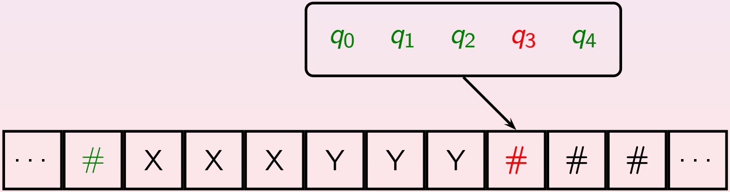
Funcionamiento

$$\begin{array}{lll} \delta(q_0,0) = (q_1,X,D) & \delta(q_0,Y) = (q_3,Y,D) & \delta(q_1,0) = (q_1,0,D) \\ \delta(q_1,1) = (q_2,Y,I) & \delta(q_1,Y) = (q_1,Y,D) & \delta(q_2,0) = (q_2,0,I) \\ \delta(q_2,X) = (q_0,X,D) & \delta(q_2,Y) = (q_2,Y,I) & \\ \delta(q_3,Y) = (q_3,Y,D) & \delta(q_3,\#) = (q_4,\#,D) & \end{array}$$



Funcionamiento

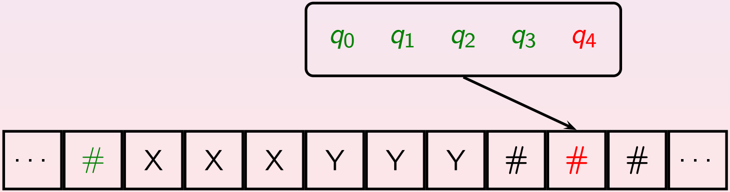
$$\delta(q_0,0) = (q_1,X,D) \quad \delta(q_0,Y) = (q_3,Y,D) \quad \delta(q_1,0) = (q_1,0,D)$$
$$\delta(q_1,1) = (q_2,Y,I) \quad \delta(q_1,Y) = (q_1,Y,D) \quad \delta(q_2,0) = (q_2,0,I)$$
$$\delta(q_2,X) = (q_0,X,D) \quad \delta(q_2,Y) = (q_2,Y,I)$$
$$\delta(q_3,Y) = (q_3,Y,D) \quad \delta(q_3,\#) = (q_4,\#,D)$$



Funcionamiento

$$\begin{array}{lll}
\delta(q_0,0)=(q_1,X,D) & \delta(q_0,Y)=(q_3,Y,D) & \delta(q_1,0)=(q_1,0,D) \\
\delta(q_1,1)=(q_2,Y,I) & \delta(q_1,Y)=(q_1,Y,D) & \delta(q_2,0)=(q_2,0,I) \\
\delta(q_2,X)=(q_0,X,D) & \delta(q_2,Y)=(q_2,Y,I) & \\
\delta(q_3,Y)=(q_3,Y,D) & \delta(q_3,\#)=(q_4,\#,D) &
\end{array}$$

La palabra 000111 es aceptada



Configuración

Una configuración de una Máquina de Turing es una tripleta (q, w_1, w_2) donde

- q es el estado en el que se encuentra la máquina
- w_1 es la representación de la parte de la palabra que hay a la izquierda de la posición del cabezal de lectura (puede ser vacío). Esta representación se obtiene eliminando la sucesión infinita de blancos a la izquierda de las casillas que son distinto de blanco.
- w_2 es la representación de la parte de la palabra que se obtiene empezando en el cabezal de lectura hacia la derecha. No puede ser vacío. Esta representación se obtiene eliminando la sucesión infinita de blancos a la derecha de las casillas que son distinto de blanco.

Configuración Inicial

Si $u \in A^*$, la configuración inicial de la Máquina de Turing $(Q, A, C, \delta, q_0, \#, F)$ asociada a esta palabra es (q_0, ε, u).

Proceso de Cálculo II

Paso de Cálculo (movimiento a la izquierda)

Si $\delta(q,a) = (p,b,I)$ entonces decimos que de la configuración $(q, c_1 \ldots c_n, ad_2 \ldots d_m)$ llegamos en un paso de cálculo a la configuración $(p, c_1 \ldots c_{n-1}, c_n b d_3 \ldots d_m)$ lo que se denota como $(q, c_1 \ldots c_n, ad_2 \ldots d_m) \vdash (p, c_1 \ldots c_{n-1}, c_n b d_3 \ldots d_m)$ con dos excepciones:

- Si $n = 0$ (partimos de $(q, \varepsilon, ad_2 \ldots d_m)$) , se llega a $(p, \varepsilon, \# b d_3 \ldots d_m)$
  $(q, \varepsilon, ad_2 \ldots d_m) \vdash (p, \varepsilon, \# b d_3 \ldots d_m)$
- Si $m = 1$ y $b = \#$, entonces se llega a $(p, c_1 \ldots c_{n-1}, \#)$
  $(q, c_1 \ldots c_n, a) \vdash (p, c_1 \ldots c_{n-1}, c_n)$

Las dos excepciones se pueden dar de forma simultánea (si $b = \#$) y entonces de $(q, \varepsilon, a) \vdash (p, \varepsilon, \#)$

Paso de Cálculo (movimiento a la derecha)

Si $\delta(q,a) = (p,b,D)$ entonces decimos que de la configuración $(q, c_1 \dots c_n, ad_2 \dots d_m)$ llegamos en un paso de cálculo a la configuración $(p, c_1 \dots c_n b, d_2 d_3 \dots d_m)$ lo que se denota como $(q, c_1 \dots c_n, ad_2 \dots d_m) \vdash (p, c_1 \dots c_n b, d_2 d_3 \dots d_m)$ con dos excepciones:

- Si $m = 1$ (partimos de $(q, c_1 \dots c_n, a)$) , se llega a $(p, c_1 \dots c_n b, \#)$
  $(q, c_1 \dots c_n, a) \vdash (p, c_1 \dots c_n b, \#)$
- Si $n = 0$ y $b = \#$, entonces se llega a $(p, \varepsilon, d_2 d_3 \dots d_m)$
  $(q, \varepsilon, ad_2 \dots d_m) \vdash (p, \varepsilon, d_2 d_3 \dots d_m)$

Las dos excepciones se pueden dar de forma simultánea (si $b = \#$) y entonces de $(q, \varepsilon, a) \vdash (p, \varepsilon, \#)$

Proceso de Cálculo IV

Relación de pasos de cálculo

Si R y R' son configuraciones de una máquina de Turing $M = (Q, A, C, \delta, q_0, \#, F)$, se dice que desde R se llega en una sucesión de pasos de cálculo a R' lo que se denota como $R \overset{*}{\vdash} R'$ si y solo si existe una sucesión finita de configuraciones $R_1, \ldots, R_n$ tal que $R = R_1$, $R' = R_n$ y $R_i \vdash R_{i+1}, \forall i < n$.

Lenguaje aceptado por una Máquina de Turing

Si M es una máquina de Turing, entonces el lenguaje aceptado es el conjunto de palabras $L(M)$ tales que $u \in L(M)$ si y solo si existen $w_1, w_2 \in A^*$ y $q \in F$ tales que $(q_0, \varepsilon, u) \overset{*}{\vdash} (q, w_1, w_2)$ (es decir desde la configuración inicial asociada a u se puede llegar mediante una sucesión de pasos de cálculo a una configuración en la que estamos en un estado final).

Definición: Recursivamente Enumerable

Un lenguaje $L \subseteq A^*$ se dice recursivamente enumerable (e.r.) si y solo si existe una máquina de Turing $M = (Q, A, C, \delta, q_0, \#, F)$ tal que $L(M) = L$.

Parada en las Máquinas de Turing

Una máquina para cuando en el estado actual y símbolo de la cinta no hay ninguna transición definida.
Cuando se llega a un estado final $q \in F$ podemos suponer que la Máquina de Turing para, es decir no hay ninguna transición definida.

Existe otro criterio de aceptación: una palabra es aceptada cuando la MT para. La clase de lenguajes aceptada por este criterio es también la clase de los lenguajes recursivamente enumerables.

Definición

Un lenguaje se dice recursivo si es aceptado por una MT que siempre para.

Un lenguaje recursivo es siempre recursivamente enumerable. Los lenguajes recursivos son aquellos cuyo problema de aceptación pueder ser resuelto mediante un algoritmo.
En el caso de lenguajes recursivos, podemos suponer que hay dos tipos de estados finales: de aceptación y de rechazo. La máquina acepta cuando se llega a un estado de aceptación y rechaza cuando llega a un estado de rechazo.

Sea $D \subseteq A^*, H \subseteq B \setminus \{\#\}$ y $f : D \to H^*$ una función.

Definición

La función f se dice parcialmente calculable si existe una MT $M = (Q, A, C, \delta, q_0, \#, F)$ tal que si $u \in D$ entonces desde la configuración (q_0, ε, u) (configuración inicial) se llega a una configuración (q, u_1, u_2) en la que $u_1 u_2 = f(u), q \in F$ y la máquina para (llegamos a una configuración en la que estamos en un estado final, la máquina termina y el contenido de la cinta es $f(u)$. Si $u \notin D$ entonces la máquina no para.

Funciones Calculables Totales

Si una función es calculable parcial y $D = A^*$ (está siempre definida) se dice que es calculable total.

Ejemplo: restar números en unario

- Vamos a diseñar una MT que resta números en unario.
- Para dos números naturales $n, m \in \mathbb{N}$ calcula $f(n,m)$ que es igual a $n - m$ si $n \geq m$ y 0 si $n < m$.
- La entrada debe de ser $0^n 1 0^m$ y la salida debe de ser una confiración en la que en la cinta esté $0^{f(n,m)}$ rodeado de blancos. No nos preocupa cual es la salida si la entrada no es correcta (no corresponde a dos series de ceros separadas por un 1).
- La MT será $M = (\{\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}, \{0,1\}, \{0,1,\#\}, \delta, q_0, \#, q_6)$

Restar números en unario: función de transición

δ viene dada por la siguiente tabla:

Estado	0	1	#
q_0	$(q_0, \#, D)$	$(q_5, \#, D)$	–
q_1	$(q_1, 0, D)$	$(q_2, 1, D)$	–
q_2	$(q_3, 1, I)$	$(q_2, 1, D)$	$(q_4, \#, I)$
q_3	$(q_3, 0, I)$	$(q_3, 1, I)$	$(q_0, \#, D)$
q_4	$(q_4, 0, I)$	$(q_4, \#, I)$	$(q_6, 0, D)$
q_5	$(q_5, \#, D)$	$(q_5, \#, D)$	$(q_6, \#, D)$
q_6	–	–	–

Ejercicios

Diseñar máquinas de Turing para los siguientes lenguajes:

- Palabras sobre el alfabeto $\{0,1\}$ con el mismo número de ceros que de unos.
- $L = \{a^n b^n c^n | n \geq 1\}$
- $\{ww^{-1} \,|\, w \in \{0,1\}^*\}$
- $\{wcw \,|\, w \in \{0,1\}^*\}$

Una MT puede diseñarse para que recuerde un símbolo del alfabeto de trabajo (o del alfabeto de entrada). Por ejemplo, si queremos que se recuerde un símbolo de C, basta con que el conjunto de