

МЦНМО. КЭМ. Уравнения n -степени.

пошёл нахуй аркаша

21 июня 2021 г.

1 Формула для вычисления корней квадратного уравнения

Чтобы не мучаться с 3 коэффициентами пока возьму только два.

$$x^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + 2\frac{bx}{2} + c = 0$$

$$x^2 + 2\frac{bx}{2} + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{2} + c = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + \frac{4c}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2 - 4c}{4} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}^2 = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}\right)\left(x + \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}\right) = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

Теперь добавлю коэффициент a и сделаю то же самое:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$a\left(x^2 + 2\frac{bx}{2a} + \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$a\left(x^2 + 2\frac{bx}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{2a^2} + \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right) = 0$$

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = 0$$

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}^2\right) = 0$$

$$a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Получили привычную со школы формулу для корней квадратного уравнения. Потом попробую вывести для остальных степеней, я знаю что они все уже найдены кем-то, просто ради интереса, хочу пройти этот путь.

2 Теорема Виета для уравнений n степени

Замечу что это уравнение было получено преобразованием без изменения значений правой и левой части:

$$\left(x + \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}\right)\left(x + \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2 - 4c}}{2}\right) = 0$$

То есть эквивалентом записи полинома 2 степени будет:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Приведу эту запись в привычный вид:

$$x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2 = 0$$

$$x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2 = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$$

$$x^2 + k_1x + k_0 = 0$$

Для удобства буду обозначать коэффициенты через k . Если учитывать что мы делали преобразование без изменения значений, то можно соотнести коэффициенты и составить такую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -k_1 \\ x_1x_2 = k_0 \end{cases}$$

Прделаю то же самое для 3 и 4 степени уравнения:

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$$

$$(x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2)(x - x_3) = 0$$

$$(x^3 - x^2x_1 - x^2x_2 + xx_1x_2 - x^2x_3 + xx_1x_3 + xx_2x_3 - x_1x_2x_3) = 0$$

$$(x^3 - x^2(x_1 + x_2 + x_3) + x(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - x_1x_2x_3) = 0$$

$$x^3 - x^2(x_1 + x_2 + x_3) + x(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - x_1x_2x_3 = 0$$

$$x^3 + k_2x^2 + k_1x + k_0 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -k_2 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = k_1 \\ x_1x_2x_3 = -k_0 \end{cases}$$

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0$$

$$x^4 - x^3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + x^2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4) -$$

$$- x(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) + x_1x_2x_3x_4 = 0$$

$$x^4 + k_3x^3 + k_2x^2 + k_1x + k_0 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -k_3 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4 = k_2 \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -k_1 \\ x_1x_2x_3x_4 = k_0 \end{cases}$$

Видна закономерность. Уравнение n степени выглядит так:

$$\prod_{j=1}^n x - x_j = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1})(x - x_n) = 0$$

Коэффициент k_m при x^m составляется из суммы всех членов умноженных на m количество x . То есть k_m это сумма всех способов выбрать произведение m количества корней. Так как это задача комбинаторики, то количество членов в k строке системы уравнений Виета для n степени это биномиальный коэффициент

$\binom{n}{k}$. Для удобного описания этого на языке математики введу функцию $S(k, n)$, где n степень уравнения, k - номер строки в системе. То есть вот так выглядит система Виета для уравнения n степени:

$$Polynom(n) = x^n + \sum_{j=0}^{n-1} k_j x^j = x^n + k_{n-1} x^{n-1} + \dots + k_1 x + k_0 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S(1, n) = -k_{n-1} \\ S(2, n) = k_{n-2} \\ \vdots \\ S(k, n) = (-1)^k k_{n-k} \\ \vdots \\ S(n-1, n) = (-1)^{n-1} k_1 \\ S(n, n) = (-1)^n k_0 \end{array} \right.$$

А вот так выглядит обобщение для функции $S(k, n)$:

$$\begin{aligned} S(1, n) &= \sum_{(j_1=1)}^n x_{j_1} \\ S(2, n) &= \sum_{(j_1=1)}^n \sum_{(j_2=j_1+1)}^n x_{j_1} x_{j_2} \\ S(3, n) &= \sum_{(j_1=1)}^n \sum_{(j_2=j_1+1)}^n \sum_{(j_3=j_2+1)}^n x_{j_1} x_{j_2} x_{j_3} \\ &\vdots \\ S(k, n) &= \sum_{(j_1=1)}^n \sum_{(j_2=j_1+1)}^n \dots \sum_{(j_{k-1}=j_{k-2}+1)}^n \sum_{(j_k=j_{k-1}+1)}^n x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_{k-1}} x_{j_k} = \sum_{1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_k \leq n}^n \left(\prod_{i=1}^k x_{j_i} \right) \\ &\vdots \\ S(n, n) &= \prod_{j=1}^n x_j \end{aligned}$$