МЦНМО. КЭМ. Уравнения n-степени.

Бодан Нелимов

21 сентября 2021 г.

1 Формула для вычисления корней квадратного уравнения

Чтобы не мучаться с 3 коэфицентам пока возьму только два.
$x^2 + bx + c = 0$
$x^2 + 2\frac{bx}{2} + c = 0$
$x^2 + 2\frac{bx}{2} + (\frac{b}{2}^2 - \frac{b}{2}^2) + c = 0$
$(x + \frac{b}{2})^2 - \frac{b}{2}^2 + c = 0$
$(x + \frac{b}{2})^2 - \frac{b^2}{4} + \frac{4c}{4} = 0$
$(x + \frac{b}{2})^2 - \frac{b^2-4c}{4} = 0$
$(x + \frac{b}{2})^2 - \frac{\sqrt{b^2-4c}}{2}^2 = 0$
$(x + \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{b^2-4c}}{2})(x + \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2-4c}}{2}) = 0$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4c}}{2}$

Теперь добавлю коэфицент a и сделаю то же самое:
$ax^2 + bx + c = 0$
$a(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a}) = 0$
$a(x^2 + 2\frac{bx}{2a} + \frac{c}{a}) = 0$
$a(x^2 + 2\frac{bx}{2a} + (\frac{b}{2a}^2 - \frac{b}{2a}^2) + \frac{c}{a}) = 0$
$a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}) = 0$
$a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}) = 0$
$a((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}^2) = 0$
$a(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a})(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}) = 0$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$
Получили привичную со школы формулу для корней квадратного уравнения. Потом попробую вывести для остальных степеней, я знаю что они все уже найдены кем-то, просто ради интереса, хочу пройти этот путь.

2 Теорема Виета для уравнений n степени

Замечу что это уравнение было получено преобразованием без изменения значений правой и левой части:

$$(x + \frac{b}{2} - \frac{\sqrt{b^2-4c}}{2})(x + \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2-4c}}{2}) = 0$$

То есть эквивалентом записи полинома 2 степени будет:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Приведу эту запись в привычный вид:
$x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2 = 0$
$x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2 = 0$
$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$
$x^2 + k_1x + k_0 = 0$
Для удобства буду обозначать коэфиценты через k. Если учитывать что мы делали преобразование без изменения значений, то можно соотнести коэфиценты и составить такую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -k_1 \\ x_1x_2 = k_0 \end{cases}$$

Проделаю то же самое для 3 и 4 степени уравнения:
$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$
$(x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2)(x - x_3) = 0$
$(x^3 - x^2x_1 - x^2x_2 + xx_1x_2 - x^2x_3 + xx_1x_3 + xx_2x_3 - x_1x_2x_3) = 0$
$(x^3 - x^2(x_1 + x_2 + x_3) + x(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - x_1x_2x_3) = 0$
$x^3 - x^2(x_1 + x_2 + x_3) + x(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - x_1x_2x_3) = 0$
$x^3 + k_2x^2 + k_1x + k_0 = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -k_2 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = k_1 \\ x_1x_2x_3 = -k_0 \end{cases}$$

$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0$
$x^4 - x^3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + x^2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4) -$
$- x(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) + x_1x_2x_3x_4 = 0$
$x^4 + k_3x^3 + k_2x^2 + k_1x + k_0 = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -k_3 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4 = k_2 \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -k_1 \\ x_1x_2x_3x_4 = k_0 \end{cases}$$

Видна закономерность. Уравнение n степени выглядит так:

$$\prod_{j=1}^{n} x - x_j = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{n-1})(x - x_n) = 0$$

Коэфицент k_m при x^m состовляется из суммы всех членов умноженных на m количество x. То есть k_m это сумма всех способов выбрать произведение m количества корненей. Так как это задача комбинаторики, то количество членов в k строке системы уравнений Виета для n степени это биномиальный коэфицент

$\binom{n}{k}$. Для удобного описания этого на языке математики введу функцию $S(k,n)$, где n степень уравнения, k - номер строки в системе. То есть вот так выглядит система Виета для уравнения n степени:

$$Polynom(n) = x^n + \sum_{j=0}^{n-1} k_j x^j = x^n + k_{n-1}x^{n-1} + \cdots + k_1 x + k_0 = 0$$

$$\begin{cases} S(1,n) = -k_{n-1} \\ S(2,n) = k_{n-2} \\ \vdots \\ S(k,n) = (-1)^k k_{n-k} \\ \vdots \\ S(n-1,n) = (-1)^{n-1} k_1 \\ S(n,n) = (-1)^n k_0 \end{cases}$$

А вот так выглядит обобщение для функции $S(k,n)$:

$$S(1,n) = \sum_{(j_1=1)}^{n} x_{j_1}$$

$$S(2,n) = \sum_{(j_1=1)}^{n} \sum_{(j_2=j_1+1)}^{n} x_{j_1} x_{j_2}$$

$$S(3,n) = \sum_{(j_1=1)}^{n} \sum_{(j_2=j_1+1)}^{n} \sum_{(j_3=j_2+1)}^{n} x_{j_1} x_{j_2} x_{j_3}$$

$$\vdots$$

$$S(k,n) = \sum_{(j_1=1)}^{n} \sum_{(j_2=j_1+1)}^{n} \cdots \sum_{(j_{k-1}=j_{k-2}+1)}^{n} \sum_{(j_k=j_{k-1}+1)}^{n} x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_{k-1}} x_{j_k} = \sum_{1 \le j_1 \le \cdots \le j_k \le n} \left(\prod_{i=1}^{k} x_{j_i} \right)$$

$$\vdots$$

$$S(n,n) = \prod_{j=1}^{n} x_j$$