МЦНМО. КЭМ. Конечные суммы k-степени, d-порядка.

Богдан Нелимов

21 сентября 2021 г.

1 Введение

Я заинтересовался конечными суммами натурального ряда от 1 до n, степени k. Обозначим такую сумму как S:

$$S_k(n) = \sum_{j=1}^{n} j^k = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$$

Выпишем аналитическое представление для первых нескольких k:

$$\begin{aligned}
S_0(n) &= n \\
S_1(n) &= \frac{n(n+1)}{2} \\
S_2(n) &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
S_3(n) &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} = S_1(n)^2 \\
S_4(n) &= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \\
S_5(n) &= \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12} \\
S_6(n) &= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{42} \\
S_7(n) &= \frac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{24} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Если взять $S_k(n)$ но к общему члену добавить 1 под степень, а потом отнять из него ряд $S_k(n)$, то получится красивая телескопическая сумма в которой останется только первый и последний элементы ряда. Если записать это как равенство, то из него можно вывести формулу для S_{k-1}, можете попробовать вывести S_1 подставив k=2:

$$\sum_{j=1}^{n} (j+1)^k - j^k = (n+1)^k - 1^k$$

Попробую привести в более явному виду. Для начал распишем общий член суммы по биному ньютона:

$$(j+1)^k - j^k = \sum_{t=0}^{k-1} \binom{k}{t} j^t = \binom{k}{1} j^{k-1} + \binom{k}{2} j^{k-2} + \ldots + \binom{k}{k-1} j^1 + 1$$

И теперь всё становится проще:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{t=0}^{k-1} \binom{k}{t} j^t = (n+1)^k - 1^k$$

$$\binom{k}{1}\sum_{j=1}^{n} j^{k-1} + \binom{k}{2}\sum_{j=1}^{n} j^{k-2} + \ldots + \binom{k}{k-1}\sum_{j=1}^{n} j + \sum_{j=1}^{n} 1 = (n+1)^k - 1^k$$

$$\binom{k}{1}S_{k-1} + \binom{k}{2}S_{k-2} + \ldots + \binom{k}{k-1}S_1 + S_0 = (n+1)^k - 1^k$$

$$S_{k-1} = \frac{1}{k}((n+1)^k - 1^k - \sum_{t=2}^{k}\binom{k}{t}S_{k-t})$$

Красота. Кажется это называется многочленом Бернулли и как-то связано с числами Бернулли. Я плохо в этом разбираюсь, но хочу разобраться. Такая рекурентная формула хоть и даёт нам более быстрый способ, но для больших k считать придётся очень долго. Также не понятно как обобщать формулу для дробных и отрицательных k.

В введении я рассматривал то что я нашёл сам, но потом обнаружил что это было уже найдено до меня, дальше я буду писать о своих идеях обобщения, которые я не видел у других. Честно говоря я специально не гуглил, чтобы не огорчаться от своей вторичности, как допишу работу тогда и узнаю - я просто повторяю успехи предшественников, или делаю какой-то настоящий вклад.

2 Суммы d-порядка для k = 1

Я мыл посуду и мне стало интересно, как найти сумму сумм натурального ряда от 1 до n, а также сумму сумм сумм натурального ряда от 1 до n и так далее :) Попробуем же найти:

$$\sum_{j=1}^{n} S_1(j) = \sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2 + j = \frac{S_2 + S_1}{2} = \frac{1}{2}(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2})$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}(\frac{(2n+1)}{6} + \frac{1}{2}) = \frac{n(n+1)(2n+4)}{12} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Хмм... Введём для удобства обобщённую форму записи суммы сумм сумм... Обозначим глубину суммы как d и выразим через рекуренту:

$$S_k^d(n) = \sum_{j=1}^{n} S_k^{d-1}(j)$$

Из этого замечу интересный факт о сумме нулевой глубины - это просто размер суммы в степени k:

$$S_k^0(n) = n^k$$

Найду сумму для k=1 для других глубин, как я это делал выше и выпишу:

$$\begin{aligned}
S_1^0(n) &= n \\
S_1^1(n) &= \frac{n(n+1)}{2} \\
S_1^2(n) &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \\
S_1^3(n) &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Читается закономерность:

$$S_1^d(n) = \frac{\prod_{j=0}^{d} n+j}{(d+1)!} = \frac{(n+d)!}{(n-1)!(d+1)!}$$

Я не очень понимаю откуда она берётся. Было бы интересно придать этому какой-то геометрический смысл или найти место где она появляется.

3 Таблица сумм в пространстве натуральных d и k

КАРОЧЕ Я БЫ МОГ ВАМ ЭТО ВСЁ ТУТ МИЛЬОН ЛЕТ РАСПИСЫВАТЬ ОБОБЩЁННУЮ ДЛЯ КАЖДОЙ К, НО Я ЭТО ДЕЛАТЬ НЕ БУДУ ТАК КАК ТАМ НИЧЕГО СЛОЖНОГО НЕТ И РАБОТА РУТИННАЯ, ПРИВЕДУ СРАЗУ РИЗУЛЬТАТ ВВИДИ ТАБЛИЧКИ

d\k	0	1	2	3	4	…	k
0	1	n	n^2	n^3	n^4	…	n^k
1	n	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\frac{n(n+1)(6n^2+6n)}{24}$	$\frac{n(n+1)(2n+1)(12n^2+12n-4)}{120}$	…	?
2	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$	$\frac{n(n+1)(n+2)(2n+2)}{24}$	$\frac{n(n+1)(n+2)(6n^2+12n+2)}{120}$	$\frac{n(n+1)(n+2)(2n+2)(12n^2+24n-6)}{720}$	…	?
3	$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)}{120}$	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(6n^2+18n+6)}{720}$	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)(12n^2+36n-6)}{5040}$	…	?
4	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{120}$	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(2n+4)}{720}$	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(6n^2+24n+12)}{5040}$	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(2n+4)(12n^2+48n-4)}{40320}$	…	?
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
d	$\frac{(n+d)!\frac{1}{n+d}}{(n-1)!d!}$	$\frac{(n+d)!}{(n-1)!(d+1)!}$	$\frac{(n+d)!(2n+d)}{(n-1)!(d+2)!}$	$\frac{(n+d)!(6n^2+6dn+d(d-1))}{(n-1)!(d+3)!}$	$\frac{(n+d)!(2n+d)(12n^2+12dn+d(d-5))}{(n-1)!(d+4)!}$	…	?

ПРОСТА КАК ЗАМЕЧАНИЕ, ЭТИ ПРИКОЛЫ ПОХОЖИ НА БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФИЦЕНТЫ НЕ ЗНАЮ ЧТО С ЭТИМ ФАКТОМ ДЕЛАТЬ

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

МОЖНА УВИДИТЬ КРУТУЮ ШТУКУ, ВЕЗДЕ ПОВТОРЯЮТСЯ ФАКТОРИАЛЫ, ОБОБЩЁННЫЕ ФОРМУЛЫ ОТЛИЧАЮТСЯ ТОЛЬКО МНОЖИТЕЛЕМ СТЕПЕНИ К-1, ОБОЗНАЧИМ ЕГО КАК $N_k^d(n)$:

$$S_k^d(n) = \frac{(n+d)!}{(n-1)!(k+d)!} N_k^d(n)$$

$$O(N_k^d(n)) = n^{k-1}$$

ВОТ ЭТО ДА! КЛАСС! МЫ СУЗИЛИ ЗАДАЧУ, ТЕПЕРЬ ЧТОБЫ ОТВЕТИТЬ НА ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЙ ВОПРОС ПРО СУММЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ НАТУРАЛЬНЫМ k, d И n НАМ ДОСТАТОЧНО ОТВЕТИТЬ НА ТАКОЙ ЖЕ ВОПРОС ПРО МНОГОЧЛЕНЫ, ВЫПИШУ ПЕРВЫЕ ИЗ НИХ:

ПОПЫТАЛСЯ ВЫПИСАТЬ МНОГОЧЛЕН ДЛЯ ПЕРВЫХ K И ПРОИЗВОЛЬНЫМ d, ВИДНЫ КАКИЕ-ТО СВЯЗИ С ФАКТОРИАЛОМ И МНОЖИТЕЛЬ (2N+D) ДЛЯ ЧЁТНЫХ K, НО СЛОЖНО, СРАЗУ ПОНЯТЬ ЗАКОНОМЕРНОСТЬ НЕ ПОЛУЧАЕТСЯ $N_0^d(n) = \frac{1}{n+d}$

$N_1^d(n) = 1$

$N_2^d(n) = (2n+d)$

$N_3^d(n) = \qquad (6n(n+d) + d(d-1))$

$N_4^d(n) = (2n+d)(12n(n+d) + d(d-5))$

$N_5^d(n) = \qquad (120n^3(n+2d) + 30dn(n(5d-3) + d(d-3)) + d(d^3 - 16d^2 + 11d + 4))$

$N_6^d(n) = (2n+d)(360n^3(n+2d) + 60dn(n(7d-7) + d(d-7)) + d(d^3 - 42d^2 + 119d + 42))$

$N_7^d(n) = \qquad (5040n^5(n+3d) + 8400n^3d(n(2d-1) + d(d-2)) + 42nd(n(43d^3 - 254d^2 + 97d + 34) + d(3d^3 - 54d^2 + 97d + 34)) + d(d-1)(d^4 - 98d^3 + 659d^2 + 518d + 120))$

$\vdots$

$N_k^d(n) = ????$

ПОПЫТАЛСЯ ВЫПИСАТЬ МНОГОЧЛЕН ДЛЯ ПЕРВЫХ K И ПРОИЗВОЛЬНЫМ d, ВИДНЫ КАКИЕ-ТО СВЯЗИ С ФАКТОРИАЛОМ И МНОЖИТЕЛЬ (2N+D) ДЛЯ ЧЁТНЫХ K, НО СЛОЖНО, СРАЗУ ПОНЯТЬ ЗАКОНОМЕРНОСТЬ НЕ ПОЛУЧАЕТСЯ. ЧТОЖ ВЫПИШУ ТОЖЕ САМОЕ НО БЕЗ РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОЖИТЕЛИ:

$N_0^d(n) = \frac{1}{n+d}$

$N_1^d(n) = 1$

$N_2^d(n) = (2n) + (d)$

$N_3^d(n) = (6n^2) + (d^2 - d) + \qquad (6nd)$

$N_4^d(n) = (24n^3) + (d^3 - 5d^2) + \qquad (36n^2d + 14nd^2 - 10nd)$

$N_5^d(n) = (120n^4) + (d^4 - 16d^3 + 11d^2 + 4d) + \qquad (240n^3d - 90n^2d + 150n^2d^2 - 90nd^2 + 30nd^3)$

$N_6^d(n) = (720n^5) + (d^5 - 42d^4 + 119d^3 + 42d^2) + \qquad (1800n^4d + 1560n^3d^2 - 840n^3d + 540n^2d^3 - 1260n^2d^2 + 62nd^4 - 504nd^3 + 238nd^2 + 84nd)$

$N_7^d(n) = (5040n^6) + (d^6 - 99d^5 + 757d^4 - 141d^3 - 398d^2 - 120d) + (15120n^5d + 16800n^4d^2 - 8400n^4d + 8400n^3d^3 - 16800n^3d^2 + 1806n^2d^4 - 10668n^2d^3 + 4074n^2d^2 + 1428n^2d + 126nd^5 - 2268nd^4 + 4074nd^3 + 1428nd^2)$

$\vdots$

$N_k^d(n) = (k!n^{k-1}) + (d^{k-1}...) + (\frac{k-1}{2}k!n^{k-2}d...)$

КАКИЕ ТО НАБРОСКИ УЖЕ ЕСТЬ НО СЛОЖНО, ВЕРНЁМСЯ К РАССМОТРЕНИЮ СУММ ДЛЯ D = 1:

$N_0^1(n) = \frac{1}{n+1}$

$N_1^1(n) = 1$

$N_2^1(n) = (2n+1)$

$N_3^1(n) = (6n^2 + 6n)$

$N_4^1(n) = (24n^3 + 36n^2) + 4(n-1)$

$N_5^1(n) = (120n^4 + 240n^3) + 60n(n-1)$

$N_6^1(n) = (720n^5 + 1800n^4) + 720n^2(n-1) - 120(n-1)$

$N_7^1(n) = (5040n^6 + 15120n^5) + 8400n^3(n-1) - 3360n(n-1)$

$N_8^1(n) = (40320n^7 + 141120n^6) + 100800n^4(n-1) - 68544n^2(n-1) + 12096(n-1)$

$N_9^1(n) = (362880n^8 + 1451520n^7) + 1270080n^5(n-1) - 1270080n^3(n-1) + 544320n(n-1)$

$N_{10}^1(n) = (3628800n^9 + 16329600n^8) + 16934400n^6(n-1) - 22982400n^4(n-1) + 16934400n^2(n-1) - 3024000(n-1)$

$N_{11}^1(n) = (39916800n^{10} + 199584000n^9) + 239500800n^7(n-1) - 419126400n^5(n-1) + 459043200n^3(n-1) - 199584000n(n-1)$

$\vdots$

$N_k^1(n) = k!n^{k-1} + \frac{k-1}{2}k!n^{k-2} + \frac{(k-2)(k-3)}{12}k!n^{k-3} - \frac{(k-2)(k-3)}{12}k!n^{k-4} - \frac{(k+9)(k-5)(k-4)(k-2)}{720}k!n^{k-5} + \frac{(k+9)(k-5)(k-4)(k-2)}{720}k!n^{k-6} + \frac{(k-7)(k-6)(k-4)(k-2)(k^2+10k+45)}{30240}k!n^{k-7} - \frac{(k-7)(k-6)(k-4)(k-2)(k^2+10k+45)}{30240}k!n^{k-8}...$

$N_k^1(n) = k!(n^{k-1} + \frac{k-1}{2}n^{k-2} + \frac{(k-2)(k-3)}{12}n^{k-4}(n-1) - \frac{(k+9)(k-5)(k-4)(k-2)}{720}n^{k-6}(n-1) + \frac{(k-7)(k-6)(k-4)(k-2)(k^2+10k+45)}{30240}n^{k-8}(n-1) - ...)$

УЖЕ ЛУЧШЕ, ВИДНЫ ЯВНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ, УЖЕ МОЖНО С ХОРОШЕЙ ТОЧНОСТЬЮ ОЦЕНИТЬ РЕЗУЛЬТАТ, И ЕСЛИ ЗНАТЬ ЗАКОНОМЕРНОСТЬ В КОЭФИЦЕНТАХ С K ТО ОТВЕТ НА ЗАДЧУ НАЙДЁТСЯ, НО НЕ БУДУ ПОКА ВВОДИТЬ НОВЫЙ МНОГОЧЛЕН, ПОПРОБУЮ РАССМОТРЕТЬ ТО ЖЕ САМОЕ ДЛЯ D=2:

$N_0^2(n) = \frac{1}{n+2}$

$N_1^2(n) = 1$

$N_2^2(n) = (2n+2)$

$N_3^2(n) = 6n^2 + 12n + 2$

$N_4^2(n) = 24n^3 + 72n^2 + 36n - 12$

$N_5^2(n) = 120n^4 + 480n^3 + 420n^2 - 120n - 60$

$N_6^2(n) = 720n^5 + 3600n^4 + 4560n^3 - 720n^2 - 1920n + 480$

$N_7^2(n) = 5040n^6 + 30240n^5 + 50400n^4 - 37296n^2 + 6048n + 6048$

$\vdots$

$N_k^2(n) = k!(n^{k-1} + (k-1)n^{k-2}...)$