ВЗМШ. Решение вступительной работы по Математике на 2020-2021.

Ларшин Михаил

22 июня 2021 г.

10. (8 - 10 класс)

Два города А и В расположены на берегу реки на расстоянии 10 км друг от друга. Пароход может проплыть из А в В и обратно за 1 час. Больше или меньше времени понадобится ему, чтобы проплыть 20 км по озеру?

$$S_{\text{оз}} = 2S_{\text{р}}$$

$$\begin{aligned}
\frac{S_{oз}}{v_{\text{п}}} &\vee \frac{S_{\text{р}}}{v_{\text{п}} + v_{\text{р}}} + \frac{S_{\text{р}}}{v_{\text{п}} - v_{\text{р}}} \\
\frac{2S_{\text{р}}}{v_{\text{п}}} &\vee \frac{S_{\text{р}}(v_{\text{п}} + v_{\text{р}}) + S_{\text{р}}(v_{\text{п}} - v_{\text{р}})}{(v_{\text{п}} + v_{\text{р}})(v_{\text{п}} - v_{\text{р}})} \\
\frac{2S_{\text{р}}}{v_{\text{п}}} &\vee \frac{2S_{\text{р}}v_{\text{п}}}{v_{\text{п}}^2 - v_{\text{р}}^2} \\
\frac{1}{v_{\text{п}}} &\vee \frac{v_{\text{п}}}{v_{\text{п}}^2 - v_{\text{р}}^2} \\
\frac{1}{v_{\text{п}}^2} &\vee \frac{1}{v_{\text{п}}^2 - v_{\text{р}}^2} \\
v_{\text{п}}^2 &\wedge v_{\text{п}}^2 - v_{\text{р}}^2 \\
0 &> -v_{\text{р}}^2
\end{aligned}$$

В конце получился знак больше, но знак неравенства был один раз перевёрнут, ведь больше то выражение у которого знаменатель меньше, значит итоговый ответ будет меньше. Параходу понадобится меньше времени чтобы проплыть по озеру.

11. (7 – 10 класс)

а) Можно ли занумеровать ребра куба натуральными числами от 1 до 12 так, чтобы для каждой вершины куба сумма номеров ребер, которые в ней сходятся, была одинаковой?
б) Аналогичный вопрос, если расставлять по ребрам куба числа -6,-5,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,5,6.

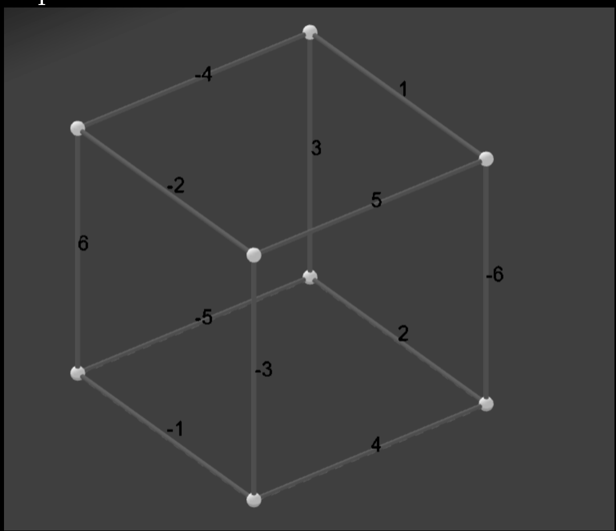
а) Сначала определим что это должна быть за сумма в каждой вершине, обозначим её как x. Чтобы найти x, надо найти сумму всех вершин, обозначим это как $8x$. У куба 12 рёбер, к каждому ребру прилегает

2 вершины, то есть все номера рёбер считаются по 2 раза, значит $8x$ это сумма номеров от одного до 12 посчитаная два раза:

$$8x = 2\frac{12(12+1)}{2}$$
$$x = \frac{12(12+1)}{8}$$
$$x = \frac{3*13}{2}$$
$$x = 19.5$$

Нецелое число. Такое невозможно составить из сложения целых, значит так занумеровать рёбра нельзя.

б) Пойдём по той же тактике и получим $x = 0$, так как все числа сократятся. Такое число уже можно составить из списка чисел, но не гарантирует нам возможность расставить так числа. Попробуем просто нарисовать:



Отлично получилось. Значит ответ можно! Интересной собеностью такого куба является то, что номера противоположных ребёр всегда противоположны по знаку и равны по модулю.

12. (8 - 11 класс)

Найдите целые числа x и y такие, что $x > y > 0$ и $x^3 + 7y = y^3 + 7x$.

Упрощаем выражение:
$x^3 - y^3 = 7x - 7y$

$(x-y)(x^2+xy+y^2)=7(x-y)$
$x^2+xy+y^2=7$
$(x+y)^2=7+xy$
$xy \geq -7$
$x>y>0$

13. (9 – 11 класс)

Разложите на множители:
а) x^8+x^4+1 (на три множителя)
б) x^5+x+1 (на 2 множителя)

а) $1*1*(x^8+x^4+1)$. Готово! Ладно, понимаю, что не это имеется ввиду.

$$x^8-x^7+x^7-x^6+x^6-x^5+x^5+x^4-x^3+x^3-x^2+x^2-x+x+1$$

$$(x^8-x^7+x^6)+(x^7-x^6+x^5)-(x^5-x^4+x^3)+(x^3-x^2+x)+(x^2-x+1)$$
$$x^6(x^2-x+1)+x^5(x^2-x+1)-x^3(x^2-x+1)+x(x^2-x+1)+(x^2-x+1)$$
$$(x^2-x+1)(x^6+x^5-x^3+x+1)$$
$$(x^2-x+1)(x^6+x^5-x^4+x^4-x^3-x^2+x^2+x+1)$$
$$(x^2-x+1)((x^6+x^5+x^4)-(x^4+x^3+x^2)+(x^2+x+1))$$
$$(x^2-x+1)(x^4(x^2+x+1)-x^2(x^2+x+1)+(x^2+x+1))$$
$$(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$$

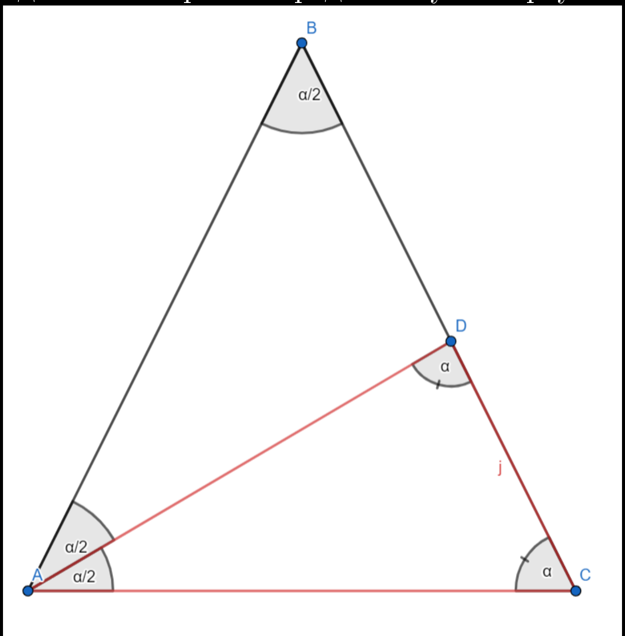
б) x^5+x+1

$$x^5-x^4+x^4-x^3+x^3-x^2+x^2+x+1$$

$$(x^5+x^4+x^3)+(-x^4-x^3-x^2)+(x^2+x+1)$$
$$x^3(x^2+x+1)-x^2(x^2+x+1)+(x^2+x+1)$$
$$(x^3-x^2+1)(x^2+x+1)$$

14. (8 – 11 класс)

В равнобедренном треугольнике биссектриса угла при основании равна одной из сторон. Определите углы треугольника.



Выделенный красным треугольник тоже является равнобедренным, так как у него две стороны равны, значит $\angle ADC = \alpha$. Большой треугольник имеет такие же углы, значит $\angle ABC = \frac{\alpha}{2}$. Можем составить уравнение и найти α.

$$\alpha + \alpha + \frac{\alpha}{2} = 180$$

$$2.5\alpha = 180$$

$$\alpha = 72$$

Углы треугольника: 72°, 72°, 36°

15. (9 – 11 класс)

а) Докажите, что а + $\frac{1}{a} \geq 2$ при а > 0.
б) Постройте график функции $y = x + \frac{1}{x}$

а)

$$\text{а} - 2 + \frac{1}{a} \geq 0$$

$$\sqrt{\text{a}}^2 - 2 + \sqrt{\frac{1}{a}}^2 \geq 0$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}})^2 \geq 0$$

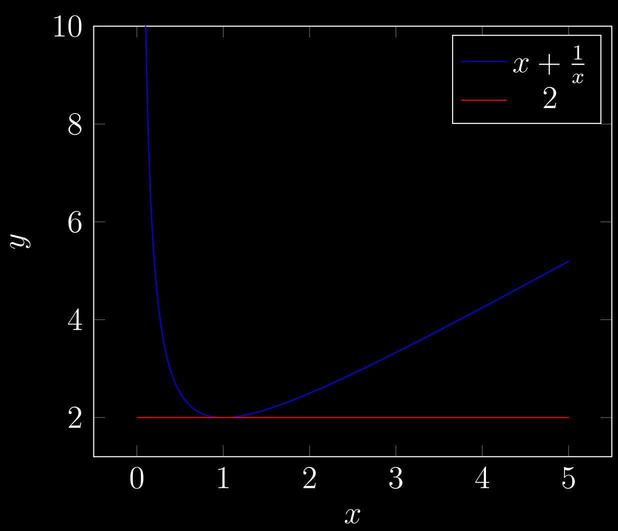
$$\sqrt{a} - \sqrt{\frac{1}{a}} \geq 0$$

$$a - 1 \geq 0$$

$$a \geq 1$$

б)

Графичек



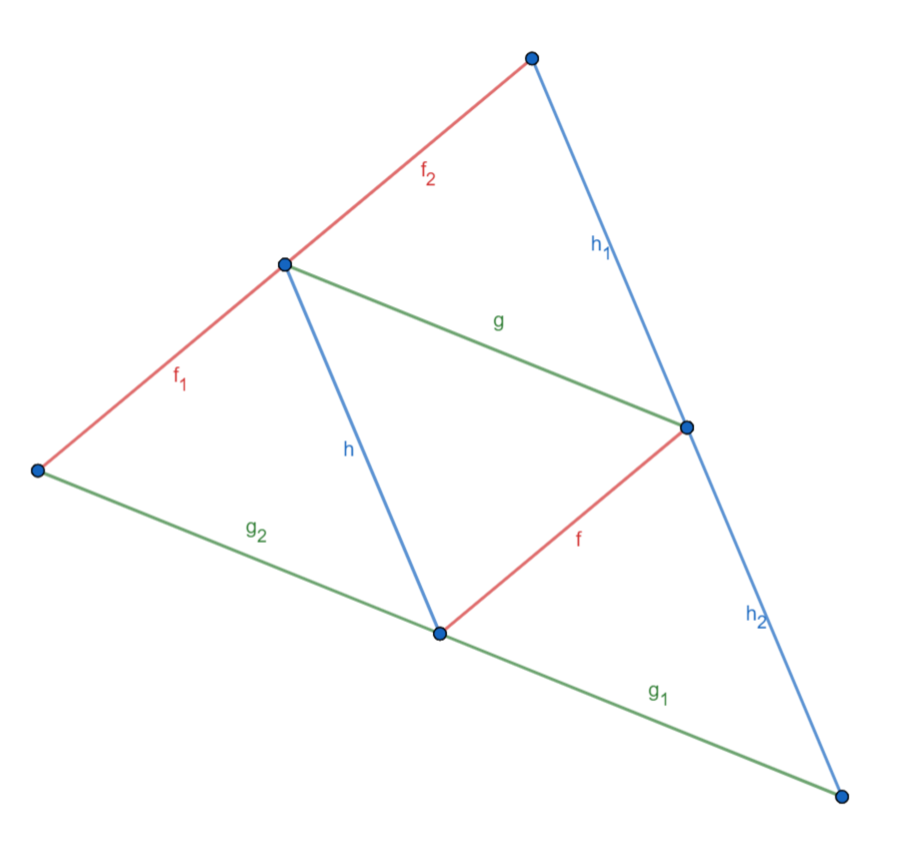
16. (9 – 11 класс)

Известно, что $a + b + c < 0$ и что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет действительных корней. Определите, какой знак имеет число с.

Если квадратное уравнение не имеет действительных корней, значит его график не персекает ось Ox и имеет один и тот же знак при любом x. $a + b + c < 0$ это квадратное уравнение при $x = 1$, значит при любом x это квадратное уравнение меньше 0. Квадратное уравнение при $x = 0$ это с < 0, значит с отрицательно.

17. (9 – 11 класс)

Можно ли восстановить треугольник по серединам его сторон? А четырёхугольник? Любой ответ требует доказательства!



Для треугольника ответ да. Так как вся информация для построения треугольника у нас есть, мы строим треугольник по трём точкам-серединам и откладываем от каждой его точки в две стороны противоположную от точки сторону. Для каждой стороны у нас есть нужная информация, длина стороны это длина противоположной стороны умноженная на два, а наклон это наклон противоположной стороны. Это следует из теоремы о средней линии треугольника.

Для четуёхугольника существует бесконечное множество решений