

МЦНМО. КЭМ. Конечные суммы  $k$ -степени,  
 $d$ -порядка.

Богдан Нелимов

18 июня 2021 г.

# 1 Введение

Я заинтересовался конечными суммами натурального ряда от 1 до n, степени k. Обозначим такую сумму как S:

$$S_k(n) = \sum_{j=1}^n j^k = 1^k + 2^k + \dots + n^k$$

Выпишем аналитическое представление для первых нескольких k:

$$\begin{aligned} S_0(n) &= n \\ S_1(n) &= \frac{n(n+1)}{2} \\ S_2(n) &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ S_3(n) &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} = S_1(n) \\ S_4(n) &= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \\ S_5(n) &= \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12} \\ S_6(n) &= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{42} \\ S_7(n) &= \frac{n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2)}{24} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Если взять  $S_k(n)$  но к общему члену добавить 1 под степень, а потом отнять из него ряд  $S_k(n)$ , то получится красивая телескопическая сумма в которой останется только первый и последний элементы ряда. Если записать это как равенство, то из него можно вывести формулу для  $S_{k-1}$ , можете попробовать вывести  $S_1$  подставив k=2:

$$\sum_{j=1}^n (j+1)^k - j^k = (n+1)^k - 1^k$$

Попробую привести в более явном виде. Для начал распишем общий член суммы по биному Ньютона:

$$(j+1)^k - j^k = \sum_{t=0}^{k-1} \binom{k}{t} j^t = \binom{k}{1} j^{k-1} + \binom{k}{2} j^{k-2} + \dots + \binom{k}{k-1} j^1 + 1$$

И теперь всё становится проще:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{t=0}^{k-1} \binom{k}{t} j^t = (n+1)^k - 1^k$$

$$\binom{k}{1} \sum_{j=1}^n j^{k-1} + \binom{k}{2} \sum_{j=1}^n j^{k-2} + \dots + \binom{k}{k-1} \sum_{j=1}^n j + \sum_{j=1}^n 1 = (n+1)^k - 1^k$$

$$\binom{k}{1} S_{k-1} + \binom{k}{2} S_{k-2} + \dots + \binom{k}{k-1} S_1 + S_0 = (n+1)^k - 1^k$$

$$S_{k-1} = \frac{1}{k} ((n+1)^k - 1^k - \sum_{t=2}^k \binom{k}{t} S_{k-t})$$

Красота. Кажется это называется многочленом Бернулли и как-то связано с числами Бернулли. Я плохо в этом разбираюсь, но хочу разобраться. Такая рекуррентная формула хоть и даёт нам более быстрый способ, но для больших  $k$  считать придётся очень долго. Также не понятно как обобщать формулу для дробных и отрицательных  $k$ .

В введении я рассматривал то что я нашёл сам, но потом обнаружил что это было уже найдено до меня, дальше я буду писать о своих идеях обобщения, которые я не видел у других. Честно говоря я специально не гуглил, чтобы не огорчаться от своей вторичности, как допишу работу тогда и узнаю - я просто повторяю успехи предшественников, или делаю какой-то настоящий вклад.

## 2 Суммы d-порядка для $k = 1$

Я мыл посуду и мне стало интересно, как найти сумму сумм натурального ряда от 1 до  $n$ , а также сумму сумм сумм натурального ряда от 1 до  $n$  и так далее :) Попробуем же найти:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n S_1(j) &= \sum_{j=1}^n \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n j^2 + j = \frac{S_2 + S_1}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \left( \frac{(2n+1)}{6} + \frac{1}{2} \right) = \frac{n(n+1)(2n+4)}{12} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \end{aligned}$$

Хмм... Введём для удобства обобщённую форму записи суммы сумм сумм... Обозначим глубину суммы как  $d$  и выразим через рекуренту:

$$S_k^d(n) = \sum_{j=1}^n S_k^{d-1}(j)$$

Из этого замечу интересный факт о сумме нулевой глубины - это просто размер суммы в степени  $k$ :

$$S_k^0(n) = n^k$$

Найду сумму для  $k=1$  для других глубин, как я это делал выше и выпишу:

$$\begin{aligned} S_1^0(n) &= n \\ S_1^1(n) &= \frac{n(n+1)}{2} \\ S_1^2(n) &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \\ S_1^3(n) &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Читается закономерность:

$$S_1^d(n) = \frac{\prod_{j=0}^d n+j}{(d+1)!} = \frac{(n+d)!}{(n-1)!(d+1)!}$$

Я не очень понимаю откуда она берётся. Было бы интересно придать этому какой-то геометрический смысл или найти место где она появляется.

### 3 Таблица сумм в пространстве натуральных d и k

КАРОЧЕ Я БЫ МОГ ВАМ ЭТО ВСЁ ТУТ МИЛЬОН ЛЕТ РАСПИСЫВАТЬ ОБОБЩЁННУЮ ДЛЯ КАЖДОЙ K, НО Я ЭТО ДЕЛАТЬ НЕ БУДУ ТАК КАК ТАМ НИЧЕГО СЛОЖНОГО НЕТ И РАБОТА РУТИННАЯ, ПРИВЕДУ СРАЗУ РИЗУЛЬТАТ ВВИДИ ТАБЛИЧКИ

d \ k	0	1	2	3	4	...	k
0	1	n	n <sup>2</sup>	n <sup>3</sup>	n <sup>4</sup>	...	n <sup>k</sup>
1	n	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\frac{n(n+1)(6n^2+6n)}{24}$	$\frac{n(n+1)(2n+1)(12n^2+12n-4)}{120}$	...	?
2	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$	$\frac{n(n+1)(n+2)(2n+2)}{24}$	$\frac{n(n+1)(n+2)(6n^2+12n+2)}{120}$	$\frac{n(n+1)(n+2)(2n+2)(12n^2+24n-6)}{720}$	...	?
3	$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)}{120}$	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(6n^2+18n+6)}{720}$	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(2n+3)(12n^2+36n-6)}{5040}$	...	?
4	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{120}$	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(2n+4)}{720}$	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(6n^2+24n+12)}{5040}$	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(2n+4)(12n^2+48n-4)}{40320}$	...	?
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
d	$\frac{(n+d)!-1}{(n-1)d!}$	$\frac{(n+d)!}{(n-1)!(d+1)!}$	$\frac{(n+d)!(2n+d)}{(n-1)!(d+2)!}$	$\frac{(n+d)!(6n^2+6dn+d(d-1))}{(n-1)!(d+3)!}$	$\frac{(n+d)!(2n+d)(12n^2+12dn+d(d-5))}{(n-1)!(d+4)!}$	...	?

ПРОСТА КАК ЗАМЕЧАНИЕ, ЭТИ ПРИКОЛЫ ПОХОЖИ НА БИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФИЦЕНТЫ НЕ ЗНАЮ ЧТО С ЭТИМ ФАКТОМ ДЕЛАТЬ

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

МОЖНА УВИДЕТЬ КРУТУЮ ШТУКУ, ВЕЗДЕ ПОВТОРЯЮТСЯ ФАКТОРИАЛЫ, ОБОБЩЁННЫЕ ФОРМУЛЫ ОТЛИЧАЮТСЯ ТОЛЬКО МНОЖИТЕЛЕМ СТЕПЕНИ K-1, ОБОЗНАЧИМ ЕГО КАК  $N_k^d(n)$ :

$$S_k^d(n) = \frac{(n+d)!}{(n-1)!(k+d)!} N_k^d(n)$$

$$O(N_k^d(n)) = n^{k-1}$$

ВОТ ЭТО ДА! КЛАСС! МЫ СУЗИЛИ ЗАДАЧУ, ТЕПЕРЬ ЧТОБЫ ОТВЕТИТЬ НА ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЙ ВОПРОС ПРО СУММЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ НАТУРАЛЬНЫМ k, d И n НАМ ДОСТАТОЧНО ОТВЕТИТЬ НА ТАКОЙ ЖЕ ВОПРОС ПРО МНОГОЧЛЕНЫ, ВЫПИШУ ПЕРВЫЕ ИЗ НИХ:

ПОИТАЛСЯ ВЫПИСАТЬ МНОГОЧЛЕН ДЛЯ ПЕРВЫХ К И ПРОИЗВОЛЬНЫМ d, НИКИИ КАКИЕ-ТО СВЯЗИ С ФАКТОРИАЛОМ И МНОЖИТЕЛЕМ (2n·d) ДЛЯ ЧЁТНЫХ К, НО СЛОЖНО, СРАЗУ ПОНИТЬ ЗАКОНОМЕРНОСТЬ НЕ ПОЛУЧАЕТСЯ  $N_d^k(n) = \frac{1}{n+d}$

$$\begin{aligned} N_1^1(n) &= 1 \\ N_2^1(n) &= (2n+d) \\ N_3^1(n) &= (6n(n+d)+d(d-1)) \\ N_4^1(n) &= (2n+d)(12n(n+d)+d(d-5)) \\ N_5^1(n) &= (120n^3(n+2d)+30dn(n(5d-3)+d(d-3))+d(d^3-16d^2+11d+4)) \\ N_6^1(n) &= (2n+d)(300n^3(n+2d)+60dn(n(7d-7)+d(d-7))+d(d^3-42d^2+119d+42)) \\ N_7^1(n) &= (5040n^5(n+3d)+8400n^3d(n(2d-1)+d(d-2))+42nd(n(13d^2-25d^2+97d+34)+d(3d^3-56d^2+97d+34))+d(d-1)(d^4-98d^3+670d^2+318d+120)) \\ &\vdots \\ N_8^1(n) &= -7777 \end{aligned}$$

ПОИТАЛСЯ ВЫПИСАТЬ МНОГОЧЛЕН ДЛЯ ПЕРВЫХ К И ПРОИЗВОЛЬНЫМ d, НИКИИ КАКИЕ-ТО СВЯЗИ С ФАКТОРИАЛОМ И МНОЖИТЕЛЕМ (2n·d) ДЛЯ ЧЁТНЫХ К, НО СЛОЖНО, СРАЗУ ПОНИТЬ ЗАКОНОМЕРНОСТЬ НЕ ПОЛУЧАЕТСЯ, ЧТО Ж ВЫПИШУ ТО ЖЕ САМОЕ НО БЕЗ РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОЖИТЕЛИ:

$$\begin{aligned} N_1^2(n) &= \frac{1}{n+d} \\ N_2^2(n) &= 1 \\ N_3^2(n) &= (2n) + (d) \\ N_4^2(n) &= (6n^2) + (d^2-d) + (6nd) \\ N_5^2(n) &= (24n^3) + (d^3-3d^2) + (30n^2d+14nd^2-10nd) \\ N_6^2(n) &= (120n^5) + (d^5-16d^4+14d^3+4d) + (240n^4d-90n^3d^2+150n^2d^3-90nd^4+30nd^5) \\ N_7^2(n) &= (720n^7) + (d^7-42d^6+119d^5+42d^4) + (1800n^6d+1500n^5d^2-840n^4d^3+140n^3d^4-1260n^2d^5+62nd^6-504nd^7+228nd^8+84nd^9) \\ N_8^2(n) &= (5040n^8) + (d^8-98d^7+175d^6-141d^5-398d^4-120d) + (15120n^7d+16800n^6d^2-8400n^5d^3+8400n^4d^4-10800n^3d^5+1806n^2d^6-10626nd^7+4074n^2d^8+1428n^3d^9-2208nd^10+4074nd^11+1428nd^12) \\ &\vdots \\ N_9^2(n) &= (45n^{11}) + (d^{11}-1) + (\frac{15}{2}45n^{10}d-2d...) \end{aligned}$$

КАКИЕ-ТО НАБРОСКИ УЖЕ ЕСТЬ, НО СЛОЖНО, ПЕРИЁМСЯ К РАССМОТРЕНИЮ СУММ ДЛЯ D = K

$$\begin{aligned} N_1^3(n) &= \frac{1}{n+1} \\ N_2^3(n) &= 1 \\ N_3^3(n) &= (2n+1) \\ N_4^3(n) &= (6n^3+6n) \\ N_5^3(n) &= (24n^5+36n^3)+4(n-1) \\ N_6^3(n) &= (120n^7+24n^5)+60n(n-1) \\ N_7^3(n) &= (720n^9+1440n^7)+220n^5(n-1)-120(n-1) \\ N_8^3(n) &= (5040n^9+15120n^7)+840n^5(n-1)-330n(n-1) \\ N_9^3(n) &= (40320n^7+141120n^5)+30800n^3(n-1)-68544n^2(n-1)+12096(n-1) \\ N_{10}^3(n) &= (362880n^8+1451520n^6)+1270080n^4(n-1)-1270080n^3(n-1)+548280n(n-1) \\ N_{11}^3(n) &= (362880n^8+1451520n^6)+1034400n^4(n-1)-22982400n^3(n-1)+1034400n^2(n-1)-3024000(n-1) \\ N_{12}^3(n) &= (39910800n^{10}+199584000n^8)+23050800n^6(n-1)-419126400n^5(n-1)+45904320n^4(n-1)-199584000n(n-1) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$N_1^4(n) = 14n^{11} + 42214n^{10} + \frac{(2-7)(3-2)}{2} (14n^9-7) + \frac{(2+9)(3-5)(4-2)}{2} (14n^8-7) + \frac{(2+9)(4-5)(4-2)(4-2)}{24} (14n^7-7) + \frac{(2-7)(3-4)(3-2)(3+2)(4+2)}{240} (14n^6-7) - \frac{(4-7)(4-5)(4-3-2)(4+2)}{240} (14n^5-7) - \dots$$

$$N_2^4(n) = 14(n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{(2-9)(3-2)}{2} n^9) + \frac{(2+9)(3-5)(4-2)}{2} n^8(n-1) + \frac{(2+9)(4-5)(4-2)(4+2)}{24} n^7(n-1) + \frac{(2-7)(3-4)(3-2)(3+2)(4+2)}{240} n^6(n-1) - \dots$$

УЖЕ ЛУЧШЕ, ВИДНЫ ЯВНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ, УЖЕ МОЖНО С ХОРОШЕЙ ТОЧНОСТЬЮ ОЦЕНИТЬ РЕЗУЛЬТАТ, И ЕСЛИ ЗНАТЬ ЗАКОНОМЕРНОСТЬ В КОЭФФИЦИЕНТАХ С К ТО ОТВЕТ НА ЗАДАЧУ НАЙДЕТСЯ, НО НЕ БУДУ ШОКА ВВОДИТЬ НОВЫЙ МНОГОЧЛЕН, ПОПРОБУЮ РАССМОТРЕТЬ ТО ЖЕ САМОЕ ДЛЯ D = 2:

$$\begin{aligned} N_1^2(n) &= \frac{1}{n+2} \\ N_2^2(n) &= 1 \\ N_3^2(n) &= (2n+2) \\ N_4^2(n) &= 6n^2+12n+2 \\ N_5^2(n) &= 24n^4+72n^2+36n-12 \\ N_6^2(n) &= 120n^6+480n^4+420n^2-120n-60 \\ N_7^2(n) &= 720n^8+3600n^6+420n^4-72n^2-192n+60 \\ N_8^2(n) &= 5040n^8+30240n^6+5040n^4-37296n^2+6048n+6048 \\ &\vdots \\ N_9^2(n) &= 45(n^{11} + (k-1)n^{10} - 2...) \end{aligned}$$