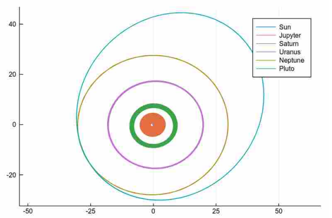
Proyecto de Investigación

- **Categoria**: Plaza Profesorado ayudante Doctor/a
- **Convocatoria**: 2023/2024
- **Fecha Convocatoria**: 26/05/2023
- **N.Convocatoria**: 346
- **Área de Conocimiento**:
  Ciencia de la Computación e Inteligencia Artificial
- **Puesto Específico**: PADCL2-D00140-1

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea



Evolución del sistema solar exterior

Mikel Antoñana Otaño
Donostia, 15 de Junio de 2023

Indice

1. Introducción

Área de investigación

Mi área de investigación se centra en el **análisis e implementación de métodos avanzados para la integración numérica de problemas modelados por ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)**. Las ecuaciones diferenciales ordinarias surgen en mucho campos de la ciencia y los métodos numéricos para la resolución de estos modelos son de gran importancia. Debido a la gran capacidad computacional actual y al rápido desarrollo de nuevos algoritmos, cada vez es posible trabajar con modelos más realistas de la ciencia e ingeniería. La simulación se ha convertido en una herramienta fundamental en muchas áreas de conocimiento (química, astronomía, economía,...), permitiendo la mejora en la comprensión de mucho procesos. Los científicos tienen que enfrentarse a la tarea de resolver grandes sistemas EDOs de gran complejidad y en este contexto, es necesario el desarrollo de nuevos métodos eficientes para integración numérica de sistemas EDOs.

Nuestro objetivo es el diseño de métodos numéricos para la computación eficiente de soluciones en **alta precisión**. Trabajamos en el campo de **métodos numéricos Geométricos** para ecuaciones diferenciales. Concretamente, nos centramos en los métodos **Runge-Kutta simplécticos** y en particular en los métodos de **carácter implícito**, los cuales muestran buenas propiedades para la integración de problemas de la **Mecánica Celeste y Astrodinámica**. El costo computacional por paso de un método Runge-Kutta implícito es más alto que el de un método Runge-Kutta explícito: generalmente se acepta que para **problemas no rígidos**, los métodos explícitos son más eficientes que los métodos implícitos y para **problemas rígidos**, los esquemas implícitos resultan más convenientes ya que sus mejores propiedades de estabilidad compensan el costo computacional. En este contexto, **uno de nuestros objetivos** consiste en demostrar que los métodos implícitos con una buena implementación, pueden resultar más eficientes que los métodos explícitos para la integración de problemas no rígidos. Es importante destacar que para conseguir dicho objetivo nos apoyaremos en la **técnicas de computación paralela** dominantes en la arquitectura de computadores actual.

Etapas de la investigación

- En la primera etapa de la investigación (2012-2013), abordamos la complejidad que generan las **situaciones de encuentros cercanos** para la integración numérica en problemas de N-Cuerpos gravitacionales. Para obtener integraciones eficientes, hemos estudiado la técnica de reparametrización del tiempo aplicándola a diferentes problemas clásicos como El Problema

Restringido de los Tres Cuerpos o Pleiades [15]. El trabajo está recogido en el trabajo de fin del Máster Universitario en Ingeniería Computacional y Sistemas Inteligentes con el título “Continuación y búsqueda de soluciones periódicas en situaciones de encuentros cercanos” [10].

- En el periodo de estudios de doctorado (2013-2017), el tema de estudio ha sido la **integración del sistema solar** de gran precisión y para largos intervalos de tiempo. Es conocido que la simulación del sistema solar para largos intervalos de tiempo es computacionalmente muy costosa y la necesidad de simular modelos del sistema solar cada vez más realistas, requiere métodos de integración de gran precisión. El resultado de este trabajo está recogido en la tesis cuyo título es “Implementación eficiente de métodos Runge-Kutta implícitos simplécticos y su aplicación en la simulación del sistema solar” [11] y tres artículos en revistas clasificadas como Q1 del área de las Matemática Aplicada [7, 8, 9].

- En la etapa postdoctoral, en el contexto de la construcción de métodos numéricos optimizados de orden alto, trabajamos en un algoritmo basado en técnicas de continuación que se puede aplicar para resolver problemas de minimización numérica con restricciones de igualdad. Dicho trabajo se recoge en el artículo [3].

- En el periodo (2020-2021) hemos retomado el trabajo de reparametrización del tiempo consiguiendo una nueva técnica para la **reparametrización global para el problema gravitacional de N-Cuerpos**. Dicha técnica se describe en los siguientes artículos publicados: el primero en la revista SIAM Journal on Applied Dynamical Systems [5] y el segundo en la revista International Journal of Computer Mathematics [6].

- En el periodo (2021-2022), dando continuación al trabajo de la tesis, hemos aplicado el método a un **modelo más realista del sistema solar** (incluyendo la luna como cuerpo independiente) y mejorado el método de integración, consiguiendo una implementación más robusta. Como resultado hemos elaborado una artículo que ha sido publicado en la revista Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy [4].

- Los métodos de integración desarrollados en estas etapas, se han implementado en el **lenguaje C** y compartido en nuestro repositorio [2]. A partir del 2018 hemos elegido el **lenguaje Julia** para el desarrollo de las nuevas implementaciones. El año 2020 hemos contribuido en el paquete DifferentialEquations.jl con la implementación del método IRKGL16 que ha sido añadida en el repositorio de la organización SciML (Scientific Machine Learning) [1].

Futuro

- **Técnicas de paralelización.**

  La naturaleza secuencial de los métodos de integración numérica explícitos, dificulta obtener mejoras substanciales en la aplicación de técnicas de paralelización. En cambio, los métodos Runge-Kutta implícitos basados en los nodos de Gauss-Legendre (IRKGL) son paralelizables. Queremos mostrar que los métodos Runge-Kutta implícitos pueden ser más eficientes que los mejores métodos explícitos para la integración de problemas no rígidos utilizando técnicas apropiadas de paralelización.

- **Satélites artificiales.**

  Una de las linea de investigaciones futuras se enmarca en el desarrollo de algoritmos para la **propagación numéricas de satélites artificiales** que se espera tengan un gran desarrollo en los próximos años.

  El modelo del sistema solar y de los satélites artificiales tienen en común que parten de una representación de las ecuaciones como suma de términos dominantes y computacionalmente poco complejos (modelo simplificado) y términos computacionalmente complejos que dan cuenta de efectos físicos de magnitud menor. Explotando la estructura especial de las ecuaciones diferenciales involucradas hace posible diseñar integradores eficientes.

- **Paso adaptativo simpléctico para el problema de N-Cuerpos**

  Los métodos de integración geométricos son conocidos por su excelente comportamiento cuando se aplica el tamaño de paso constate durante largos intervalos de tiempo. El control de tamaño de paso adaptativo es difícil de implementar de forma eficiente en los métodos de integración numérica geométrica. Aprovechando el conocimiento adquirido sobre la reparametrización del tiempo para el problema de N-Cuerpos, tenemos previsto desarrollar métodos que incluyan una estrategia de tamaño de paso variable simpléctico para el problema de N-Cuerpos.

- **Cálculo del gradiente de funciones en Aprendizaje Automático Científico**

  En área del Aprendizaje Automático Científico (Scientific Machine Learning), hace falta optimizar funciones cuya evaluación requiere la resolución numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales. Los algoritmos de optimización numérica más útiles para resolver problemas de optimización requieren evaluar un gran número de veces el gradiente de la función objetivo. Los métodos simplécticos implícitos IRKGL permiten calcular de forma exacta y eficiente (con un uso mínimo de memoria) el gradiente de la función objetivo integrando hacia atrás en el tiempo las ecuaciones adjuntas.

2. Lineas de investigación

2.1. Implementación eficiente del método IRKGL16

El método IRKGL16 es un método implícito Runge-Kutta de colocación basado en 8 nodos de Gauss-Legendre. El método tiene propiedades interesantes que lo hacen particularmente útil para integraciones a largo plazo de problemas conservativos, como la integración del sistema solar y de los satélites artificiales. Muestran las siguientes ventajas para integraciones en alta precisión:

- Aplicables a cualquier sistema de ecuaciones diferenciales.
- Los métodos IRKGL son paralelizables, es decir, la evaluación de las funciones para cada etapa se puede computar en paralelo.
- Existen métodos de orden arbitrariamente alto para las integraciones de gran precisión.

El costo computacional por paso de un método Runge-Kutta implícito es más alto que el de un método Runge-Kutta explícito. En la computación de un paso de los métodos implícitos, es necesario resolver un sistema de ecuaciones no lineales (operación costosa) y supone una desventaja frente a los métodos explícitos. Por ello, generalmente se acepta que para problemas no rígidos los métodos explícitos son más eficientes que los métodos implícitos; en cambio, para problemas rígidos los esquemas implícitos resultan más convenientes ya que sus mejores propiedades de estabilidad compensan el costo computacional.

En este contexto, nuestro objetivo es demostrar que los métodos implícitos con una buena implementación pueden resultar más eficientes que los métodos explícitos para la integración de problemas no rígidos. Es importante destacar que para conseguir dicho objetivo nos apoyaremos en técnicas de computación paralela dominante en la arquitectura de computadores actual.

2.2. Reparametrización del tiempo

En las integraciones numéricas de sistemas dinámicos son frecuentes las situaciones de encuentros cercanos que dificultan mucho su computación. Cuando se produce un acercamiento de dos cuerpo cualquiera de nuestro sistema (por ejemplo un cometa que se aproxima a un planeta), es necesario aplicar pasos de integración muy pequeños para recoger los rápidos cambios que se producen en esos instantes. Resolver esta problemática de una manera satisfactoria no es sencilla: algunas soluciones pueden provocar un coste computacional alto y otras pueden originar errores de integración demasiado grandes.

Una técnica conocida, consiste en aplicar una reaparametrización del tiempo con el objetivo de suavizar el comportamiento del sistema. La idea consiste en definir una función que relaciona el tiempo original con un tiempo ficticio y aplicarlo al sistema de ecuaciones diferenciales originales, obteniendo un nuevo sistema de ecuaciones diferenciales respecto a ese nuevo tiempo ficticio. Obviamente, añadimos cierta complejidad computacional al sistema de ecuaciones diferenciales. La función que define la reaparametrización del tiempo depende del problema que vamos a integrar y establecerla no es tarea sencilla .

En esta investigación, se ha aplicado la técnica de reparametrización del tiempo a distintos problemas de N-Cuerpos gravitacionales.

2.3. Integración del sistema solar

Es conocido que la simulación del sistema solar para largos intervalos de tiempo es computacionalmente muy costosa y que por siguiente, resulta de interés el desarrollo de nuevas implementaciones eficientes. Adicionalmente la necesidad de simular modelos del sistema solar cada vez más realistas, requiere métodos de integración de gran precisión.

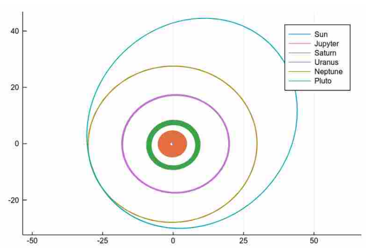


Figura 1: Evolución del sistema solar exterior

Dos temas donde resulta de interés la simulación del sistema solar son lo siguientes:

- **Diseño de misiones espaciales**.
- **Paleoclimatologia**. Este tipo de integraciones proporcionan información interesante a la comunidad paleoclimatológica para explicar los ciclos climatológicos terrestres. El astrónomo francés J. Laskar [16], necesito 18 meses

> para la computación de la integración del sistema solar para un intervalo de tiempo entre 0 y -250 millones de años.
>
> La dificultad para lograr una solución valida para el periodo de ≈ 65 millones años, hizo patente que el sistema solar es caótico y la propagación del error de redondeo limita la validez de la solución computada.

Los métodos más utilizados para la integración del sistema solar de largos intervalos de tiempo son los métodos simplécticos de carácter explícito. Los métodos simplécticos explícitos son muy eficientes, pero su aplicación es limitada: solo se pueden utilizar en sistemas Hamiltonianos con determinada estructura.

En este trabajo nosotros proponemos como alternativa los métodos simplécticos de carácter implícito: un nuevo método de integración para ecuaciones diferenciales perturbadas que aplicaremos para la integración del sistema solar. El sistema solar puede considerarse un sistema perturbado formado por: una parte principal (parte no perturbada) compuesta por varios problemas keplerianos independientes; y una parte perturbada de menor magnitud, compuesta por el resto de las interacciones entre planetas. El nuevo método consiste en la composición del flujo de la parte no perturbada, alternándola con la integración del sistema transformado con un método simpléctico implícito.

2.4. Proyectos Futuros

Implementación vectorizada del método IRKGL

Single Instrucction Multiple (SIMD) o vectorización es un tipo de procesamiento paralelo que existe dentro del núcleo de las CPUs modernas. El paralelismo SIMD ofrece compatibilidad con instrucciones vectoriales, lo que mejora el rendimiento de las aplicaciones intensivas mediante la ejecución de la misma operación en varios elementos de datos en paralelo. En algunos casos, el compilador podría aplicar la vectorización automáticamente, pero, alternativamente, el programador puede vectorizar explícitamente el código.

Los métodos Runge-Kutta implícitos basado en los nodos de Gauss Legendre (IRKGL), son paralelizables. La estructura del método IRKGL16 permite su implementación eficiente operando sobre vectores de 8 números Float64, y por ello resulta muy adecuado para aprovechar la vectorización que ofrecen los sistemas de computación modernos. Los cómputos que actúan sobre vectores con s=8 números Float64, pueden ser evaluados simultáneamente por CPUS modernas con registros especializados de 512 bits con el costo similar de la versión escalar.

Existen varias maneras de aplicar la vectorización SIMD en Julia, pero el paquete SIMD.jl nos permite vectorizar explicitamente el código del método IRKGL16 de forma bastante sencilla. Nuestro objetivo es obtener una implementación vectorizada eficiente de IRKGL16 que resulte transparente para el usuario que definirá la función ODE de forma habitual.

Propagación de satélites artificiales

La tecnología espacial es responsable de una buena parte de los avances tecnológicos actuales. Entre las actividades que son posibles gracias a los satélites artificiales que orbitan alrededor de la tierra, podemos destacar la conexión entre países de otros continentes (comunicación), la geolocalización, la predicción del tiempo,.etc. Para que los satélites artificiales puedan desarrollar las funciones que tiene asignados es fundamental la determinación precisa de su órbita.

Resulta prioritario garantizar la seguridad espacial dado que el número de cuerpos que orbitan en el espacio es muy elevado (ver Figura 2). El término "Space Situational Awareness" (SSA) se refiere a la capacidad de predicción de la localización de objetos naturales y artificiales que orbitan alrededor de la tierra con el objetivo de evitar colisiones. Para garantizar la seguridad espacial, la propagación eficiente y precisa de la órbita de estos objetos para largos intervalos de tiempo es una tarea esencial.

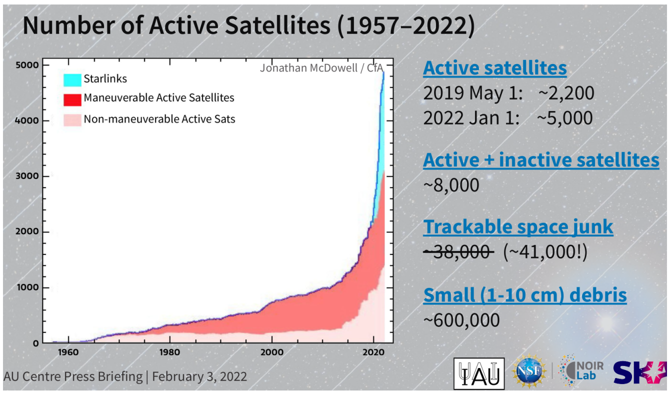


Figura 2: Número de satélites activos (IAU Press)

Los propagadores que se han aplicado tradicionalmente, son de carácter explícito y su implementación es secuencial. Mientras que los métodos mencionados eran suficientes en pasadas décadas, las futuras necesidades computacionales tales como la caracterización de la incertidumbre y el uso de modelos cada vez más precisos, requieren de propagadores rápidos y de gran precisión que permitan formulaciones paralelas y obtengan ventaja de los sistemas computacionales actuales.

En este proyecto, queremos proponer una alternativa diferente para responder a la necesidad de propagadores de órbitas eficientes. En lugar de aplicar métodos generales, proponemos desarrollar nuevos métodos que se adapten y obtengan beneficio de las propiedades especificas de los problemas orbitales.

Un aspecto fundamental de dicho desarrollo es la formulación de modelos matemáticos (descritos como sistemas EDO) que incorporen de forma apropiada tanto las fuerzas gravitacionales como las no gravitacionales que afectan al movimiento de los objetos que orbitan alrededor de la tierra. Una observación importante relativa a dichos modelos es que todos ellos se pueden obtener a partir de un modelo simplificado común al que se le añaden términos de magnitud menor y complejidad computacional mayor. Aunque la aplicación a dichos modelos matemáticos de métodos numéricos convencionales de resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias suele dar resultados satisfactorios, creemos que la eficiencia de la propagación numérica de órbitas podría mejorar de forma significativa con el desarrollo de algoritmos a medida.

En el presente proyecto partimos de modelos matemáticos previamente desarrollados y probados por otros. Nuestro objetivo consiste en explotar la estructura común de dichos modelos, para mejorar substancialmente la eficiencia de los algoritmos de propagación de órbitas diseñando métodos numéricos específicos para este tipo de modelos. Los modelos físicos utilizado para la propagación de órbitas son muy complejos y debemos considerar los tipos más frecuentes de satélites artificiales: órbitas bajas (LEO), medias (MEO), geoestacionarias (GEO), órbitas altamente excéntricas, etc.

Paso adaptativo simpléctico para el problema de N-Cuerpos

Los métodos de integración geométricos son conocidos por su excelente comportamiento cuando se aplica el tamaño de paso constante durante largos intervalos de tiempo. El control de tamaño de paso adaptativo es difícil de implementar de forma eficiente en métodos de integración numérica geométrica. Cuando se aplican estrategias estándar de longitud de tamaño de paso variable en la integración de métodos geométricos, estos pierden sus propiedades favorables. y por tanto, desaparecen las ventajas sobre los métodos explícitos o multipaso.

Aprovechando el conocimiento adquirido sobre la reparametrización del tiempo para el problema de N-Cuerpos, tenemos previsto la implementación de un método que incluya una estrategia de tamaño de paso variable simpléctico para el problema de N-Cuerpos.

Cálculo del gradiente de funciones en Aprendizaje Automático Científico

En el área del Aprendizaje Automático Científico (Scientific Machine Learning), hace falta optimizar funciones cuya evaluación requiere la resolución numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales. Los algoritmos de optimización numérica más útiles para resolver problemas de optimización requieren evaluar un gran número de veces el gradiente de la función objetivo. Los métodos simplécticos implícitos IRKGL permiten calcular de forma exacta y eficiente (con un uso mínimo de memoria) el gradiente de la función objetivo integrando hacia atrás en el tiempo las ecuaciones adjuntas.

3. Aspectos relevantes de la investigación

3.1. Alineación con los planes de ciencia y tecnología

Tanto el plan de ciencia y tecnología e innovación autonómico “PCTI Euskadi 2030” [19] como el estatal “EECTI 2021-2027” [13] están alineados con la estrategia del Programa Marco de Investigación, Desarrollo Tecnológico e Innovación de la Unión Europea, denominado “Horizon Europe plan estratégico 2021-2024“ [14].

Efemérides planetarias Los siguientes aspectos remarcan la importancia

Horizon Europe plan estratégico 2021-2024. Dotado con un presupuesto de casi 95.000 millones de euros en ciencia e innovación desde el 2021 hasta el 2027. Esto incluye 5400 millones de euros procedentes del instrumento Next Generation EU, en especial para el apoyo de la recuperación ecológica y digital tras la crisis de la COVID-19.

El presupuesto se divide entre cuatro pilares y quince componentes para la creación de un programa que apoyará todas las **áreas de la investigación y la innovación**:

1) **Ciencia Excelente**: Refuerzo de la posición de la UE en ciencia para impulsar la investigación de alto nivel en Europa, incluyendo el Consejo Europeo de Investigación (ERC), acciones Marie Skłodowska-Curie e infraestructuras de investigación.

2) **Desafíos mundiales y competitividad industrial Europea**:

   Impulsar las tecnologías y soluciones clave para sustentar las políticas de la UE y los Objetivos de Desarrollo Sostenible: salud, cultura creatividad y sociedad inclusiva, seguridad civil para la sociedad, mundo digital, industria y espacio, clima energía y movilidad, Alimentación, bioeconomía, recursos naturales, agricultura y medio ambiente.

3) **Europa innovadora**:

   Estimular las innovaciones de vanguardia y creadoras de mercados y los ecosistemas que propician la innovación.

4) **Refuerzo del Espacio Europeo de Investigación**

   Ampliar la participación y difundir la excelencia. Reformar y mejorar el sistema europeo de investigación e innovación.

EU Space Program. La investigación espacial se enmarca dentro del grupo de prioridades Desafíos mundiales y competitividad industrial Europea. Su principal objetivo es garantizar la seguridad y un desarrollo adecuado en tecnología espacial manteniendo la independencia de Europa en este área. En el programa de trabajo sobre la seguridad espacial, se destaca la necesidad de mejora en Vigilancia y Seguimiento Espacial (Space Surveillance and Tracking Support framework) y se detalla los siguientes aspectos:

> "In February 2022, the European Commission proposed two new flagship initiatives to boost satellite-based secure connectivity and Space Traffic Management:
>
> - **EU space-based secure connectivity system** will ensure worldwide access to secure and cost-effective satellite communications services, for governmental communications and commercial use. It aims to protect critical infrastructures, support surveillance and crisis management, as well as enable high-speed broadband everywhere in Europe to best anticipate future challenges of our economy.
> - **Space Traffic Management**: The exponential applications of space services involve more and more satellites, thus more traffic in space. As the congestion of satellites and debris threaten the viability of space infrastructure, the European Commission and the High Representative of the Union for Foreign Affairs and Security Policy have presented an EU approach on Space Traffic Management (STM). This would further strengthen the Union's space surveillance and tracking capabilities (already providing collision avoidance services to more than 260 European spacecraft), and set clear standards and regulation for a safe, sustainable and secure use of space".
>
> ".

En este contexto, el desarrollo de algoritmos de propagación de órbitas más eficientes que los utilizados en la actualidad resulta relevante. Actualmente, la computación en paralelo se ha convertido en el paradigma dominante en la arquitectura de computadores. En este sentido, el informe [12] publicado por National Research Council (2012) se remarca la necesidad de mejorar los propagadores de órbitales y en uno de los apartados se recoge lo siguiente:

> "Future computational demands such as the characterization of uncertainty and use of high-fidelity models may require the development

> and use of fast and accurate ordinary differential equation propagators that take advantage of advanced computer architectures and parallel formulations.
>
> As modern computer hardware architectures evolve away from serial processing, the astrodynamics algorithms are poised to benefit tremendously across multiple levels of parallelism that currently are not exploited ."

En el punto 20 de la Decisión Nº 541/2014/EE del Parlamento Europeo y del Consejo del 16 de abril de 2014, relativo al establecimiento de un marco de apoyo a la vigilancia y seguimiento espacial (Space Surveillance and Tracking Support framework, VSE), se dice lo siguiente:

> "El carácter potencialmente sensible de los datos de vigilancia y seguimiento espacial que requiere una cooperación basada en la confianza mutua y en la eficiencia, en especial por lo que se refiere a la forma en que se procesan y analizan los datos de VSE. El uso potencial de **software de código abierto**, que permite el acceso seguro de las personas autorizadas que contribuyen con datos de VSE al código fuente para introducir cambios y mejoras, debe apoyar a la consecución de este objetivo."

Resumiendo, se puede afirmar que desde diferentes instituciones se apoya el desarrollo de nuevos propagadores orbitales y en especial, proyectos realizado en software de código abierto.

3.2. Contribución en un proyecto de software libre

Los métodos para resolver ecuaciones diferenciales es una de las área más importantes en el campo de la computación científica. Existen muchos paquetes para resolver ecuaciones diferenciales (Matlab ODE suite, Sundials, ODEPACK, SciPy's suite, . . .) pero **DifferentialEquations.jl** [18], el paquete desarrollado recientemente en el lenguaje Julia, incorporá varios aspectos que lo convierten en la opción actual más interesante. Por una parte, se trata de un paquete muy completo, que cubre ecuaciones diferenciales ordinarias (estocásticas), ecuaciones diferenciales algebraicas, ecuaciones diferenciales de retardo, ecuaciones diferenciales parciales (estocásticas). . . . Por otra parte, tiene integradas muchas características modernas de computación, como sistemas numéricos arbitrarios definidos por el usuario para alta precisión, dispatch múltiple, paralelismo y multihreading incorporado . . . . Además, Julia es un lenguaje de alto rendimiento, con la posibilidad de ejecutar programas que son competitivos en rendimiento con código escrito en C y por lo tanto, los métodos disponibles en el paquete resultan muy eficientes.

En 2018 comenzamos a trabajar con el lenguaje Julia y en 2020 contribuimos en el paquete DifferentialEquations.jl con la implementación del método IRKGL16 que ha sido añadida en el repositorio de la organización SciML (Scientific Machine Learning) [1]. Como consecuencia más directa de la contribución, obtenemos una mejor difusión de nuestras implementaciones. Sin embargo, consideramos que el aspecto más importante de la contribución en este paquete, consiste en que nos obliga a progresar y formarnos en temas novedosos de la computación moderna. Por tanto, consideramos fundamental seguir contribuyendo en proyectos de software libre interesantes relacionados con nuestro área de investigación.

3.3. Aportaciones en la docencia

Probablemente no sea exagerado decir que las ecuaciones diferenciales son el modelo matemático más común e importante en ciencia e ingeniería. Una vez establecido el modelo matemático del problema, se resuelve aplicando un método numérico. En el proceso de **diseñar un método numérico eficiente** para encontrar la solución de una ecuación diferencial, es necesario aplicar diferentes conocimientos de la ciencia de la computación. Se combina la modelización, diferentes técnicas del área de las matemáticas, métodos numéricos, programación y se requiere de conocimientos de Hardware para que la implementación resulte eficiente.

Como conclusión, se quiere remarcar que la actividad investigadora propuesta en este proyecto de investigación tiene muchos aspectos que pueden incorporarse en la docencia de las asignaturas de grado y máster.

Repositorios de libre accesso

> “Open science aims to ensure the free availability and usability of scholarly publications, the data that result from scholarly research, and the methodologies, including code or algorithms, that were used to generate those data". [17]

Además de las publicaciones relevantes en congresos y revistas de prestigio, cuidamos la publicación de nuestras implementaciones en **repositorios de libre acceso**. De esta forma garantizamos la **reproducibilidad** de nuestro trabajo y una buena difusión del software en la comunidad científica.

Es de destacar que actualmente empleamos el lenguaje Julia para el desarrollo de las implementaciones. El lenguaje esta orientado a la **computación científica** y siendo un lenguaje de **alto nivel**, facilita la publicación y transmisión de nuestro trabajo.

4. Grupo de Investigación

El presente proyecto de investigación se enmarca dentro del grupo de investigación MATHMODE (Group on Applied Mathematical Modeling, Statistics, and Optimization) que ha sido nombrado Grupo Consolidado de Investigación del Sistema Universitario Vasco. Actualmente el grupo de investigación tiene las siguientes líneas principales de investigación:

1. Problemas de optimización aplicada mediante proyectos con empresas, realizando transferencia de tecnología en los campos de optimización, simulación, investigación operativa y estadística.

2. Estadística. Validación y análisis eficiente de datos reales, promoviendo la transferencia de la investigación en estadística a campos biomédicos y experimentales.

3. Método de Elementos Finitos de mallado adaptativo para la resolución eficiente de problemas de ingeniería que se rigen por ecuaciones en derivadas parciales (EDPs).

4. Métodos numéricos avanzados para la integración temporal de ecuaciones diferenciales. En especial, los métodos de integración geométrica y, en particular, los métodos para problemas conservativos.

5. Desarrollo de métodos numéricos precisos y robustos para simular computacionalmente aplicaciones multifísicas en diferentes áreas (geofísica, medicina, biotecnología).

6. Deep learning. Aplicación de redes neuronales convolucionales profundas para la inversión de mediciones de resistividad en perforaciones petrolíferas y aplicaciones en el área de la salud.

7. Desarrollo de algoritmos numéricos de simulación e inversión.

El subgrupo de la linea de investigación Métodos Numéricos Avanzados, liderado por Ander Murua, lo formamos las siguientes personas:

- Ander Murua Uria. Profesor pleno de la universidad en el departamento de CCIA de la Facultad de Informática de la UPV/EHU

- Joseba Makazaga Odria. Profesor agregado en el departamento de CCIA de la Facultad de Informática de la UPV/EHU
- Elisabete Alberdi Celaya. Profesora agregada en el departamento de Matemática Aplicada de la Escuela de Ingeniería de Bilbao de la UPV/EHU
- Mikel Antoñana Otaño. Profesor en el departamento de Matemática Aplicada de la Escuela de Ingeniería de Donostia de la UPV/EHU

5. Bibliografia

Referencias

[1] Sciml: Open source software for scientific machine learning. //sciml.ai/.

[2] Software: Métodos numéricos para integrar ecuaciones diferenciales. /mikelehu.github.io/.

[3] Elisabete Alberdi, Mikel Antoñana, Joseba Makazaga, and Ander Murua. An algorithm based on continuation techniques for minimization problems with highly non-linear equality constraints. *arXiv preprint arXiv:1909.07263*, 2019.

[4] Mikel Antonana, Eli Alberdi, Joseba Makazaga, and Ander Murua. An implicit symplectic solver for high-precision long-term integrations of the solar system. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 134, 2022.

[5] Mikel Antonana, Philippe Chartier, Joseba Makazaga, and Ander Murua. Global time-renormalization of the gravitational n-body problem. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, 19(4):2658–2681, 2020.

[6] Mikel Antoñana, Philippe Chartier, and Ander Murua. Majorant series for the n-body problem. *International Journal of Computer Mathematics*, 99 (1):158–183, 2022.

[7] Mikel Antonana, Joseba Makazaga, and Ander Murua. Reducing and monitoring round-off error propagation for symplectic implicit runge-kutta schemes. *Numerical Algorithms*, 76:861–880, 2017.

[8] Mikel Antoñana, Joseba Makazaga, and Ander Murua. Efficient implementation of symplectic implicit runge-kutta schemes with simplified newton iterations. *Numerical Algorithms*, 78(1):63–86, 2018.

[9] Mikel Antoñana, Joseba Makazaga, and Ander Murua. New integration methods for perturbed odes based on symplectic implicit runge–kutta schemes with application to solar system simulations. *Journal of Scientific Computing*, 76:630–650, 2018.

[10] Mikel Antoñana. Soluzio periodikoen bilaketa edo jarraipena kolisiotik gertuko egoeretan. *Master Tesia*, 2013.

[11] Mikel Antoñana. Runge-kutta metodo inplizitu sinplektikoen inplementazio eraginkorra, eguzki-sistemaren simulaziorako aplikazioarekin. *Tesia*, 2017.

[12] National Research Council et al. *Continuing Kepler's quest: Assessing Air force space command's astrodynamics standards*. National Academies Press, 2012.

[13] Gobierno de España. Estrategia española de ciencia, tecnología e innovación (eecti) 2021-2027. *Ministerio de Ciencia e Innovación, Madrid, España X*, 83120021:2020.

[14] Horizon Europe. Horizon europe strategic plan 2021-2024. *URL: Horizon Europe| European Commission*, 2021.

[15] Ernst Hairer, Christian Lubich, and Gerhard Wanner. *Geometric numerical integration: structure-preserving algorithms for ordinary differential equations*, volume 31. Springer Science & Business Media, 2006.

[16] Jacques Laskar, Agnes Fienga, Mickael Gastineau, and Herve Manche. La2010: a new orbital solution for the long-term motion of the earth. *Astronomy & Astrophysics*, 532:A89, 2011.

[17] Engineering National Academies of Sciences, Medicine, et al. Open science by design: Realizing a vision for 21st century research. 2018.

[18] Christopher Rackauckas and Qing Nie. Differentialequations.jl–a performant and feature-rich ecosystem for solving differential equations in julia. *Journal of Open Research Software*, 5(1):15, 2017.

[19] Gobierno Vasco. Plan de ciencia, tecnología e innovación euskadi 2030. *Una estrategia de especialización inteligente. PCTI Euskadi*, 2020.