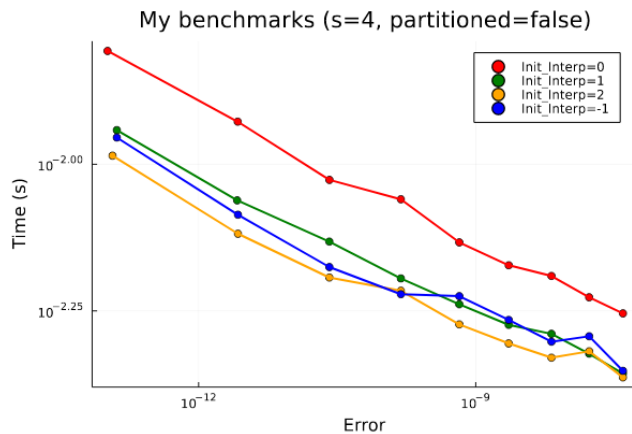


Proyecto de investigación

Mikel Antoñana Otaño



Fecha actualización: 2022-06-05

Índice general

| | |
|--|----|
| 1- Introducción..... | 3 |
| 2- <i>Lineas de investigación</i> | 6 |
| 2.1- Integración de problemas con situaciones de cuasi colisión..... | 6 |
| 2.2- Integración del sistema solar..... | 7 |
| 2.3- Propagación de satélites artificiales..... | 8 |
| 3-Objetivos..... | 10 |
| 3.1- Alineación con los planes de ciencia y tecnología..... | 10 |
| 3.2- Colaboraciones..... | 12 |
| 3.3- Resumen..... | 14 |
| 4-Grupo de Investigación..... | 15 |

1- Introducción

El tema central de nuestra investigación se enmarca en el análisis e implementación de métodos avanzados para la integración numérica de problemas modelados por **ecuaciones diferenciales ordinarias** (EDO). Debido a la gran capacidad computacional actual y al rápido desarrollo de nuevos algoritmos, cada vez es posible trabajar con modelos más realistas de la ciencia e ingeniería. La **simulación** se ha convertido en una herramienta fundamental en muchas áreas (química, astronomía, economía,...) permitiendo la mejora en la comprensión de muchos procesos y los científicos tienen que enfrentarse a la tarea de resolver largos sistemas EDOs de gran complejidad. En este contexto, es necesario el desarrollo de nuevos métodos eficientes para integración numérica de sistemas EDOs.

Concretamente, en nuestro proyecto de investigación abordamos métodos de integración numérica para simulación de problemas que surgen en la **Mecánica Celeste y Astrodinámica**. Los modelos matemáticos empleados son conocidos con el nombre de *El Problema de N Cuerpos Gravitacional*, siendo La Mecánica Celeste, el área que estudia el movimiento de planetas, asteroides, cometas y cualquier otro cuerpo sometido a la ley gravitacional de Newton y La Astrodinámica, considerada una subdisciplina de la Mecánica Celeste, estudia principalmente el movimiento de las órbitas de los satélites artificiales. Como ya se ampliará posteriormente, hay que destacar que existe un **apoyo** explícito a la investigación espacial en los diferentes **planes de ciencia y tecnología** del ámbito autonómico, estatal y europeo. Por otro lado, la investigación tiene un **carácter multidisciplinar** donde se combinan conocimientos de varias áreas: la modelización matemática, análisis numérico, álgebra, estadística, la computación de altas prestaciones, la astronomía, ...

Prestamos especial atención a los métodos **simpléticos** los cuales muestran buenas propiedades para la integración de problemas de la Mecánica Celeste y en particular, a los métodos **de carácter implícito**. Es importante destacar que buscamos métodos apropiados para entornos de **computación paralela**, paradigma dominante en la arquitectura de computadores actual.

En una **primera fase** de la investigación (2012-2013), abordamos la complejidad que generan las situaciones de **cuasi colisión** para la integración numérica en problemas de N cuerpos gravitacionales. Para obtener integraciones eficientes, hemos estudiado la **técnica de reparametrización del tiempo** aplicándola a diferentes problemas clásicos como El Problema Restrictivo de los Tres Cuerpos o Pleiades (7 estrellas). El trabajo está recogido en el trabajo de **fin del Máster Universitario** en Ingeniería Computacional y Sistemas Inteligentes con el título "Continuación y búsqueda de soluciones periódicas en situaciones de cuasi colisión".

En el **periodo de estudios de doctorado** (2013-2017), el tema de estudio ha sido la **integración del sistema solar** de gran precisión y para largos intervalos de tiempo. Es conocido que la simulación del sistema solar para largos intervalos de tiempo es computacionalmente muy costosa y la necesidad de simular modelos del sistema solar cada vez más realistas, requiere métodos de integración de gran precisión. **El resultado** de este trabajo está recogido en la **tesis** cuyo título es "Implementación eficiente de métodos Runge-Kuta implícitos simpléticos y su aplicación en la simulación del sistema solar" y **tres artículos** en revistas clasificadas como Q1 del área de las Matemática Aplicada.

En la **etapa postdoctoral** dando continuación al trabajo de la tesis, hemos aplicado el método a un modelo más realista del sistema solar (incluyendo la luna como cuerpo independiente) y mejorado el método de integración, consiguiendo una implementación más robusta. Como resultado hemos elaborado un artículo que ha sido aceptado para su publicación con fecha 15-04-2022 en la revista *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*.

En este periodo hemos retomado el trabajo sobre **técnicas de reparametrización** del tiempo consiguiendo una nueva técnica para reparametrización global para el problema gravitacional de N-cuerpos. Dicha técnica se describe en los siguientes artículos publicados: "Global time-regularization of the gravitational N-body problem" (2020) en la revista **SIAM Journal on Applied Dynamical Systems** (SIADS) y "Majorant series for the N-body problem" (2021) en la revista **International Journal of Computer Mathematics**.

Es de destacar que en el periodo 2018-2022 hemos elegido el nuevo lenguaje de programación **Julia** (James H. Wilkinson Prize for Numerical Software 2019) para el desarrollo de las implementaciones. Este lenguaje desarrollado principalmente por el MIT está orientado a la **computación científica** y entre sus varias ventajas cabe destacar, que facilita la implementación de la **computación en paralelo**. Además, siendo software **open source**, garantiza la libre transmisión de nuestro trabajo. Siendo un nuevo lenguaje de programación con una rápida expansión, hemos **contribuido** con la implementación del método IRKGL16 (Implicit Runge-Kutta Gauss-Legendre de orden 16) que ha sido añadido en el repositorio de la organización **SciML** (Open Source Scientific Machine Learning).

Como **línea de investigación futura**, vamos a abordar un tema que en la actualidad resulta relevante y es de esperar que en los próximos años tenga un **gran desarrollo**: el desarrollo de algoritmos para la propagación de **satélites artificiales**. En un estudio previo del área, hemos observado oportunidades de mejora, que se resumen en la idea de incorporar los avances que se han producido en métodos de integración numérica en el ámbito de la Astrodinámica.

En la integración numérica de **satélites artificiales**, como característica singular hay que señalar que siendo la ley gravitacional de Newton la causa fundamental del movimiento, hay que considerar otro tipo de fuerzas no gravitacionales (el frenado atmosférico, presión de la radiación solar,...). Además, nos encontramos con la necesidad de diseñar complejas trayectorias para las naves espaciales que les permitan realizar, con limitaciones energéticas, recorridos por el sistema solar. Adicionalmente, resulta prioritario garantizar la **seguridad espacial** dado que el número de cuerpos que orbitan en el espacio es muy elevado; es necesario predecir el posicionamiento (con gran exactitud) de objetos naturales y artificiales que orbitan alrededor de la tierra con el objetivo de evitar colisiones.

Nuestra idea se basa en **explotar la estructura del modelo** a integrar. El modelo del sistema solar y de los satélites artificiales tienen en común que parten de una representación de las ecuaciones como suma de términos dominantes y computacionalmente poco complejos (modelo simplificado) y términos computacionalmente complejos que dan cuenta de efectos físicos de magnitud menor.

Además de las publicaciones relevantes en congresos y revistas de prestigio, priorizamos la publicación de nuestras implementaciones en **repositorios de libre acceso**. De esta forma garantizamos la reproducibilidad de nuestro trabajo y una buena difusión del software en la comunidad científica.

2-Lineas de investigación

2.1- Integración de problemas con situaciones de cuasi colisión

En las integraciones numéricas de sistemas dinámicos son frecuentes las **situaciones de cuasi colisión** que dificultan mucho su computación. Cuando se produce un acercamiento de dos cuerpos cualquiera de nuestro sistema (por ejemplo un cometa que se aproxima a un planeta), es necesario aplicar pasos de integración muy pequeños para recoger los rápidos cambios que se producen en esos instantes. Resolver esta problemática de una manera satisfactoria no es sencilla: algunas soluciones pueden provocar un coste computacional alto y otras pueden originar errores de integración demasiado grandes.

Una técnica conocida, consiste en aplicar una **regularización del tiempo** con el objetivo de *suavizar* el comportamiento del sistema. La idea consiste en definir una función que relaciona el tiempo original con un tiempo ficticio y aplicarlo al sistema de ecuaciones diferenciales originales, obteniendo un nuevo sistema de ecuaciones diferenciales respecto a ese nuevo tiempo ficticio. Obviamente, añadimos cierta complejidad computacional al sistema de ecuaciones diferenciales. La función que define la regularización del tiempo depende del problema que vamos a integrar y no es tarea sencilla establecerla.

En esta investigación, se ha probado empíricamente la validez de una técnica sistemática para definir las funciones de regularización adecuadas para problemas de N cuerpos gravitacionales. Concretamente, la técnica se ha aplicado a problemas clásicos como *El Problema Restringido de los Tres Cuerpos* y *Pleiades* (7 estrellas), aplicando el método de integración de Taylor. En los experimentos hemos observado, que aplicando la técnica de regularización el número de pasos de la integración disminuye considerablemente y en menor medida el tiempo de computación.

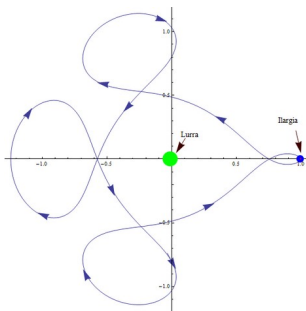


Figura1.: Problema Restringido de los Tres Cuerpos

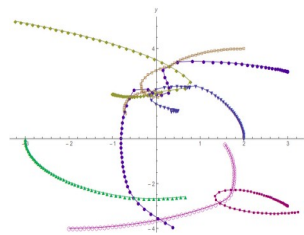


Figura 2.: Pleiades

2.2- Integración del sistema solar

Es conocido que la **simulación del sistema solar** para largos intervalos de tiempo es computacionalmente muy costosa y que por siguiente, resulta de interés el desarrollo de nuevas implementaciones eficientes. Adicionalmente la necesidad de simular modelos del sistema solar cada vez más realistas, requiere métodos de integración de gran precisión.

Este tipo de integraciones proporcionan información interesante a la **comunidad paleoclimatológica** para explicar los ciclos climatológicos terrestres. El astrónomo francés J. Laskar en su trabajo “La2010: a new orbital solution for the long-term motion of the earth (2011)” necesito 18 meses para la computación de la integración del sistema solar para un intervalo de tiempo entre 0 y –250 millones de años. No consiguió su objetivo que era lograr una solución valida para el periodo de ~ 65 millones años, ya que el sistema solar es caótico y la propagación del error de redondeo limita la validez de la solución computada.

Los métodos más utilizados para la integración del sistema solar de largos intervalos de tiempo son los métodos **simplécticos** de carácter **explícito**. Los métodos simplécticos explícitos son muy eficientes, pero su aplicación es limitada: solo se pueden utilizar en sistemas Hamiltonianos con determinada estructura.

En este trabajo nosotros proponemos como alternativa los métodos **simplecticos** de carácter **implícito**. Para aplicar los métodos implícitos, es necesario resolver un sistema de ecuaciones no lineales (operación costosa) y por tanto, supone una desventaja frente a los métodos explícitos. Sin embargo, nuestra **hipótesis** es que con **una implementación adecuada**, los métodos implícitos pueden llegar a ser **más eficientes** que los métodos explícitos.

En este trabajo, hemos analizado los métodos de Runge-Kutta simplécticos e implícitos, concretamente los **métodos de colocación** basados en nodos de **Gauss Legendre**. En lo que sigue nos referiremos a ellos como métodos de Gauss. Destacamos las siguientes ventajas de dichos modelos:

- Aplicables a **cualquier sistema de ecuaciones diferencial**.
- Una de las mayores ventajas de los métodos implícitos es su **flexibilidad**. Se pueden combinar diferentes técnicas para la resolución del sistema de ecuaciones y por lo tanto, hay muchas posibilidades para adaptarnos al problema que queremos resolver y mejorar la eficiencia de la integración.
- Los métodos de Gauss son **paralelizables**, es decir, la evaluación de las funciones para cada etapa se puede computar en paralelo.
- Existen métodos de **orden arbitrariamente alto** para las integraciones de gran precisión.

En una primera parte del estudio, hemos desarrollado dos nuevas implementaciones eficientes de los métodos de Gauss que mejoran las implementaciones estándar existentes: la primera, basada en la **iteración del punto fijo** y la segunda, basada en la **iteración simplificada de Newton**.

En la segunda parte del estudio, proponemos un nuevo método de integración para **ecuaciones diferenciales perturbadas** que aplicaremos para la integración del sistema solar. El sistema solar puede considerarse un sistema perturbado formado por: una parte principal (parte no perturbada) compuesta por varios problemas keplerianos independientes; y una parte perturbada de menor magnitud, compuesta por el resto de las interacciones entre planetas. El nuevo método consiste en la composición del flujo de la parte no perturbada, alternándola con la integración del sistema transformado con un método simplectico implícito.

2.3- Propagación de satélites artificiales

La **tecnología espacial** es responsable de una buena parte de los **avances tecnológicos actuales**. Entre las actividades que son posibles gracias a los satélites artificiales que orbitan alrededor de la tierra, podemos destacar la conexión entre países de otros continentes (comunicación), la geolocalización, la predicción del tiempo, etc. Para que los satélites artificiales puedan desarrollar las funciones que tiene asignados es fundamental la determinación precisa de sus órbitas.

Resulta prioritario garantizar la **seguridad espacial** dado que el número de cuerpos que orbitan en el espacio es muy elevado. El término "Space Situational Awareness" (SSA) se refiere a la capacidad de predicción de la localización de objetos naturales y artificiales que orbitan alrededor de la tierra con el objetivo de evitar colisiones. Para garantizar la seguridad espacial, la propagación eficiente y precisa de las órbitas de estos objetos para largos intervalos de tiempo es una tarea esencial.

*Los propagadores que se han aplicado tradicionalmente, son de carácter explícito y su implementación es secuencial. Mientras que los métodos mencionados eran suficientes en pasadas décadas, las futuras necesidades computacionales tales como la caracterización de la incertidumbre y el uso de modelos cada vez más precisos, **requieren de propagadores rápidos y de gran precisión** que permitan formulaciones paralelas y obtengan ventaja de los sistemas computacionales actuales.*

En este proyecto, queremos proponer una alternativa diferente para responder a la necesidad de propagadores de órbitas eficientes. En lugar de aplicar métodos generales, proponemos desarrollar nuevos métodos que se adapten y obtengan beneficio de las propiedades específicas de los problemas orbitales.

Un aspecto fundamental de dicho desarrollo es la formulación de modelos matemáticos (descritos como sistemas EDO) que incorporen de forma apropiada tanto las fuerzas gravitacionales como las no gravitacionales que afectan al movimiento de los objetos que orbitan alrededor de la tierra. Una observación importante relativa a dichos modelos es que todos ellos se pueden obtener a partir de un modelo simplificado común al que se le añaden términos de magnitud menor y complejidad computacional mayor. Aunque la aplicación a dichos modelos matemáticos de métodos numéricos convencionales de resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias suele dar resultados satisfactorios, creemos que la eficiencia de la propagación numérica de órbitas podría mejorar de forma significativa con el desarrollo de algoritmos a medida.

*Actualmente, la **computación en paralelo** se ha convertido en el paradigma dominante en la arquitectura de computadores, principalmente en forma de procesadores multinúcleo. Es por tanto necesario aplicar ideas innovadoras para el desarrollo de algoritmos eficientes en un entorno de computación paralela. Nuestro objetivo consiste en desarrollar algoritmos específicos altamente eficientes para la propagación de órbitas, que sean además especialmente adecuadas para su implementación en un entorno computacional paralelo.*

En el presente proyecto partimos de **modelos matemáticos** previamente desarrollados y probados por otros. Nuestro objetivo consiste en explotar la estructura común de dichos modelos, para mejorar substancialmente la eficiencia de los algoritmos de propagación de órbitas diseñando métodos numéricos específicos para este tipo de modelos. Los modelos físicos utilizado para la propagación de órbitas son muy complejos y debemos considerar los tipos más frecuentes de satélites artificiales: **órbitas bajas (LEO)**, **medias (MEO)**, **geoestacionarias (GEO)**, **órbitas altamente excéntricas**, etc.

Actualmente existen varios desarrollos profesionales para la propagación orbital de los satélites. Como es lógico, debemos estudiarlos en profundidad para aprender y detectar áreas de mejora. Con el objetivo de dar una visión general, enumeramos algunas de las soluciones más importantes: Empresas americanas como Analytical Graphics Inc o Numerica Corporation han desarrollado propagadores profesionales. Además, existen herramientas más sencillas integradas en entornos de programación como Matlab (Orbit Determination Toolbox, desarrollado por la NASA), Mathematica (ORBITS, desarrollado por el grupo de Mecánica Espacial de la Universidad de Zaragoza) o Julia (SatellitetoolBox, Brazilian National Institute for Space Research).

3-Objetivos

3.1- Alineación con los planes de ciencia y tecnología

Tanto el plan de ciencia y tecnología e innovación autonómico “PCTI Euskadi 2020” como el estatal “PCTI 2017-2020” están alineados con la estrategia del Programa Marco de Investigación, Desarrollo Tecnológico e Innovación de la Unión Europea, denominado en el período 2014-2020 **Horizon 2020**.

La estrategia Europa 2020 propone tres prioridades que se refuerzan mutuamente:

- Crecimiento inteligente: desarrollo de una economía basada en el conocimiento y la innovación, lo cual significa mejorar el rendimiento de la UE en materia de educación, investigación e innovación y sociedad digital.
- Crecimiento sostenible: promoción de una economía que haga un uso más eficaz de los recursos, que sea más verde y competitiva.
- Crecimiento integrador: fomento de una economía con alto nivel de empleo que tenga cohesión social y territorial.

Las prioridades anteriores se concretan en cinco ambiciosos objetivos para Europa en el año 2020:

- Empleo
- Investigación y Desarrollo
- Cambio climático y sostenibilidad energética
- Educación
- Lucha contra la pobreza

Dotado con un presupuesto de casi 80.000 millones de euros en ciencia e innovación desde el 2014 hasta el 2020, un 25% superior a su antecesor, el **Programa Marco Horizonte 2020** constituye la herramienta clave para la ejecución de la iniciativa «Unión por la innovación» y, por tanto, el principal programa de financiación para las actividades de investigación y la innovación en la Unión Europea.

Cabe destacar como principal novedad, que por primera vez este programa cubrirá todo el ciclo desde la investigación fundamental al desarrollo experimental, incluyendo las actividades de demostración y las fases más cercanas al mercado. Su articulación se desarrolla en base a tres prioridades:

- Ciencia Excelente: Refuerzo de la posición de la UE en ciencia para impulsar la investigación de alto nivel en Europa, incluyendo el Consejo Europeo de Investigación (ERC).
- Industrias Competitivas: Promoción del liderazgo industrial en materia de innovación mediante una mayor inversión en tecnologías industriales y facilitadoras (TICs, más Tecnologías Clave Facilitadoras o KET, y Espacio), un mayor acceso a capital, y un mayor apoyo a las PYMEs.
- Retos Sociales: Contribución de la innovación a la solución de las mayores preocupaciones compartidas por la ciudadanía como el cambio climático, el transporte sostenible, la sostenibilidad y seguridad energética, la seguridad de los alimentos, el *envejecimiento de la población o la salud*.

La **investigación espacial** se enmarca dentro del grupo de prioridades Industrias Competitivas (Industrial Leadership). Su principal objetivo es garantizar **la independencia de Europa** en este área y un desarrollo adecuado en tecnología espacial. En el programa de trabajo sobre la seguridad espacial, se destaca la

necesidad de mejora en *Vigilancia y Seguimiento Espacial (Space Surveillance and Tracking Support framework)* y se detalla los siguientes aspectos:

“The Seventh Framework Programme (FP7) encouraged the development of new concepts in space transportation and space technologies. Space-based assets and systems are critical to ensuring security on Earth (security from space).

Space-based products and services rely on satellites which must be monitored and protected against threats to ensure a safe and uninterrupted service. To mitigate the risk of collisions, it is necessary to identify and monitor satellites and space debris. This activity is known as Space Surveillance and Tracking (SST).

At the moment, satellite and launch operations are dependent on US data for anti-collision alerts. In 2014, the Decision of the European Parliament and the Council Establishing a Space Surveillance and Tracking Support Framework was adopted. The aims of the SST Support Framework are to help project European and national space infrastructure, facilities, and services.

In order to implement the SST Support Framework and develop a European SST capability EUSST consists of three incremental projects funded by the Galileo, Copernicus and H2020 programmes (approx. €70M for 2016-2020) and Horizon 2020 (approx. €12M for the first 18 months)”.

En este contexto, el **desarrollo de algoritmos de propagación de órbitas** más eficientes que los utilizados en la actualidad **resulta muy relevante**.

Actualmente, la **computación en paralelo** se ha convertido en el paradigma dominante en la arquitectura de computadores. En este sentido, el informe “Continuing Kepler's : Assessing Air Force Space (USA, 2012)” se remarca la necesidad de mejorar los propagadores de orbitales y en uno de los apartados se recoge lo siguiente:

“Future computational demands such as the characterization of uncertainty and use of high-fidelity models may require the development and use of fast and accurate ordinary differential equation propagators that take advantage of advanced computer architectures and parallel formulations.

As modern computer hardware architectures evolve away from serial processing, the astrodynamics algorithms are poised to benefit tremendously across multiple levels of parallelism that currently are not exploited .“

En el punto 20 de la Decisión Nº 541/2014/EE del Parlamento Europeo y del Consejo del 16 de abril de 2014, relativo al establecimiento de un marco de apoyo a la vigilancia y seguimiento espacial (Space Surveillance and Tracking Support framework, VSE), se dice lo siguiente:

*“El carácter potencialmente sensible de los datos de vigilancia y seguimiento espacial que requiere una cooperación basada en la confianza mutua y en la eficiencia, en especial por lo que se refiere a la forma en que se procesan y analizan los datos de VSE. El uso potencial de **software de código abierto**, que permite el acceso seguro de las personas autorizadas que contribuyen con datos de VSE al código fuente para introducir cambios y mejoras, debe apoyar a la consecución de este objetivo. “*

Resumiendo, se puede afirmar que desde diferentes instituciones se apoya el desarrollo de nuevos propagadores orbitales y en especial, proyectos realizado en software de código abierto.

3.2- Colaboraciones

Consideramos necesario establecer colaboraciones con grupos de investigación de otras instituciones así como con empresas del área de la tecnología espacial.

Enumeramos algunas de las posibilidades más interesantes:

Instituciones y Universidades

- **Agencia Espacial Europea (ESA)**

Instituto Europeo responsable en materia de tecnología espacial y en particular, el plan de desarrollo de EUSST (European Union Space Surveillance and Tracking)

- **Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Ephémérides (IMCCE)**, Observatoire de Paris, France

Para avazar en la investigación de métodos para la integración del sistema solar consideramos muy interesante colaborar con el prestigioso Instituto de Mecánica Celeste y Cálculo de Efemerides de Paris (IMCCE). En el grupo del área de la astronomía dinámica de IMCCE participa Jacques Laskar, que en parte ha inspirado nuestra investigación y actualmente es una de las referencias más importante en dicha área. De esta manera presentariamos nuestro trabajo a la comunidad astronómica y contrastar la utilidad de nuestra implementación. Adicionalmente esperamos conseguir interesantes aportaciones y ampliar nuestros conocimientos en el área.

- **Grupo de Mecánica Espacial de la Universidad de Zaragoza**

Grupo que ha trabajado en el desarrollo para propagación orbital de satélites y que ha integrado el paquete ORBITS en el software Mathematica.

- **MIT (Massachusetts Institute of Technology)**

Empleamos para nuestros desarrollos el lenguaje de programación Julia apoyado por el Massachusetts Institute of Technology (MIT). Se trata de un lenguaje que está teniendo rápida expansión y como reconocimiento ha obtenido el premio J.H. Wilkinson Prize for Numerical Software 2019.

Hay varias razones importantes que no han empujado a tomar la decisión de emplear este lenguaje de programación:

- Se trata de un proyecto **open source**
"Open source software is crucial to modern scientific research, advancing biology and medicine while providing reproducibility and transparency"
- Orientado a la **computación científica**
- Facilita la implementación de la **computación en paralelo**

Adicionalmente, existe un ecosistema llamado **DifferentialEquations.jl** donde se agrupan las funcionalidades para la solución de ecuaciones diferenciales y que actualmente se encuentra en desarrollo. Consideramos que **contribuir** en este proyecto con nuestros desarrollos resulta muy interesante, ya que conseguiremos una buena difusión nuestro trabajo.

Empresas

La idea consistiría en contactar con empresas del sector aeroespacial que pudieran estar interesadas en la aplicación de las técnicas relacionadas con nuestro tema de investigación. En el contexto de la Space Surveillance and Tracking mencionada en Horizon 2020, parece especialmente apropiado tratar de establecer contacto con el sector **Espacial de GMV**, que da servicios de vigilancia y seguimiento en el marco del programa dedicado de la Comisión Europea (EUSST). En el entorno más cercano, nos proponemos contactar también con las empresas del sector aeroespacial que se engloban en el **Cluster Hegan** (Basque Aerospace Cluster), en particular, con Sener Aeroespacial y Orbital Critical Systems.

3.3- Resumen

La **tecnología espacial** es responsable de una buena parte de los **avances tecnológicos actuales**. Entre las actividades que son posibles gracias a los satélites artificiales que orbitan alrededor de la tierra, podemos destacar la conexión entre países de otros continentes (comunicación), la geolocalización, la predicción del tiempo, etc. Para que los satélites artificiales puedan desarrollar las funciones que tiene asignados es fundamental la determinación precisa de sus órbitas.

Dificultades

- EDOs de gran complejidad
- Resistencia a cambios por parte de instituciones/empresas que tienen implantado grandes sistemas

Beneficios

- Relevante para el desarrollo de la tecnología espacial
- Protección de infraestructuras espaciales y ciudadanos

Oportunidades

- La idea de incorporar los avances en métodos de integración numérica en el ámbito de la Astrodinámica

4-Grupo de Investigación

El presente proyecto de investigación se enmarca dentro del grupo de investigación **MATHMODE** (Group on Applied Mathematical Modeling, Statistics, and Optimization) que ha sido nombrado Grupo Consolidado de Investigación del Sistema Universitario Vasco. Actualmente el grupo de investigación tiene las siguientes líneas principales de investigación:

1. Problemas de optimización aplicada mediante proyectos con empresas, realizando transferencia de tecnología en los campos de optimización, simulación, investigación operativa y estadística.
2. Estadística. Validación y análisis eficiente de datos reales, promoviendo la transferencia de la investigación en estadística a campos biomédicos y experimentales.
3. Método de Elementos Finitos de mallado adaptativo para la resolución eficiente de problemas de ingeniería que se rigen por ecuaciones en derivadas parciales (EDPs).
4. Métodos numéricos avanzados para la integración temporal de ecuaciones diferenciales. En especial, los métodos de integración geométrica y, en particular, los métodos para problemas conservativos.
5. Desarrollo de métodos numéricos precisos y robustos para simular computacionalmente aplicaciones multifísicas en diferentes áreas (geofísica, medicina, biotecnología).
6. Deep learning. Aplicación de redes neuronales convolucionales profundas para la inversión de mediciones de resistividad en perforaciones petrolíferas y aplicaciones en el área de la salud.
7. Desarrollo de algoritmos numéricos de simulación e inversión.

El subgrupo de la línea de investigación **Métodos Numéricos Avanzados**, liderado por Ander Murua, lo formamos las siguientes personas:

- **Ander Murua Uria**. Profesor pleno de la universidad en el departamento de CCIA de la Facultad de Informática de la UPV/EHU
- **Joseba Makazaga Odria**. Profesor agregado en el departamento de CCIA de la Facultad de Informática de la UPV/EHU
- **Elisabete Alberdi Celaya**. Profesora adjunta en el departamento de Matemática Aplicada de la Escuela de Ingeniería de Bilbao de la UPV/EHU
- **Mikel Antoñana Otaño**. Profesor en el departamento de Matemática Aplicada de la Escuela de Ingeniería de Donostia de la UPV/EHU