7. Kapitulua

IRK: Eguzki-sistema.

7.1. Sarrera.

Kapitulu honetan, eguzki-sistemaren ekuazio diferentzialei Kepler-en fluxuan oinarritutako aldagai aldaketa aplikatzea proposatuko dugu. 5.. kapituluan puntu-finkoaren iterazioan oinarrituz eta 6.. kapituluan Newton sinplifikatuaren iterazioan oinarrituz IRK inplementazioak garatu ditugu; eguzki-sistemaren problemaren integraziorako, bi inplementazioen artean, puntu-finkoarena eraginkorragoa dela baieztatu dugu. Hortaz, puntu-finkoaren iterazioan oinarritutako IRK inplementazioa erabiliko dugu eta ekuazio diferentzialetako aldagaiei eragingo diegun aldagai aldaketaren bidez, integrazio eraginkorra lortzea espero dugu.

Aplikatzen dugun integrazio metodoa sinplektikoa eta simetrikoa da: neurri batean, Splitting metodoen baliokidea. Aldagai berriekiko ekuazio diferentzialak, magnitude txikiko balioak hartzen dituzte eta honek, hiru abantaila eragingo ditu. Lehenik, eguzki-sistemaren problemaren trunkatze errore nagusiena ezabatzen dugunez, urrats luzera handiagoak erabili ahal izango ditugu. Bigarrenik, batura konpensatuaren konputazioan, informazio gutxiago galduko dugu. Jacobiarraren balioa txikia denez, puntu-finkoaren iterazioek konbergentzia azkarra izango dute.

Lehenengo, Kepler-en fluxuaren inplementazioa azalduko dugu. Bigarrenik, aldagai aldaketa definitu eta metodoa integratzeko zehaztapenak emango ditugu. Hirugarrenik, eguzki-sistemaren problemaren zenbakizko integrazioak egingo ditugu: inplementazio honen eta doitasun altuko beste metodo sinplektikoen eraginkortasunak, alderatuko ditugu.

7.2. Kepler-en fluxua.

Kepler problema bi gorputzen problemaren kasu partikularra da eta honako Hamiltondarra dagokio,

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} - \frac{\mu}{\|q\|}, \tag{7.1}$$

non m eta μ konstanteen balioak, formulazioaren araberakoak diren.

Koordenatu sistema $q = q_2 - q_1$ duen formulazioa aukeratzen badugu, konstanteen balioak hauek dira,

$$m = (1/m_1 + 1/m_2)^{-1}, \ \ \mu = Gm_1m_2,$$

eta ekuazio diferentzialak era honetan definitzen dira,

$$\dot{q} = p, \ \ \dot{p} = -\frac{k\,q}{\|q\|^3}, \tag{7.2}$$

non $k = \mu/m$ eta $q, p \in \mathbb{R}^3$.

Kepler problemaren soluzio zehatza kalkula daiteke: une bateko kokapen eta abiadurak emanik, Δt denbora tarte bat igarotakoan (positiboa ala negatiboa), kokapen eta abiadura zehatzak konputatu daitezke. Eguzki-sistemaren integrazio metodoentzat, Kepler problema doitasun handian eta era eraginkorrean kalkulatzea, funtsezkoa da. Kepler problemaren erreferentziazko inplementazioak, Danby [29] eta J.Wisdom-enak [111] ditugu.

Kepler-en fluxua, era honetan kalkulatzen da. Lehenik, koordenatu cartesiarretatik ($q, p \in \mathbb{R}^3$), koordenatu eliptikoetara (a, e, i, Ω, E) itzulpena egingo dugu. Koordenatu eliptikoetan, E (*eccentric anomaly*) aldagaia izan ezik, beste aldagaiak konstante mantentzen dira: beraz E_0 balioa emanda, Δt denbora tartea aurrera egin eta E_1 balio berria kalkulatuko dugu. Azkenik, koordenatu eliptikoetatik koordenatu cartesiarretara itzulpena eginez, kokapen eta abiadura berriak eskuratuko ditugu.

$$\begin{array}{ccc} (q_0, v_0) \in \mathbb{R}^6 & \longrightarrow & (a, e, i, \Omega, E_0) \in \mathbb{R}^6 \\ & & \downarrow \Delta t \\ (q_1, v_1) \in \mathbb{R}^6 & \longleftarrow & (a, e, i, \Omega, E_1) \in \mathbb{R}^6 \end{array}$$

Gorputz baten orbita Kepleriarra hiru motakoa izan daiteke: $H(q_0, p_0) < 0$ denean orbita eliptikoa da, $H(q_0, p_0) > 0$ orbita hiperbolikoa eta $H(q_0, p_0) = 0$ orbita parabolikoa. Kepler fluxuaren C inplementazioa, orbita eliptikoetarako garatu dugu eta zehaztasunak, B.1. eranskinean eman ditugu. (7.2) problemari dagokion fluxua, era honetan defini daiteke,

$$\begin{array}{rccc} \varphi^k_{\Delta t}: & \mathbb{R}^6 & \longrightarrow & \mathbb{R}^6, \\ & u_0 & \rightsquigarrow & u_1. \end{array}$$

non $u = (q, v) \in \mathbb{R}^6$ den.

7.3. Inplementazioa.

Aldagai aldaketa.

Kontutan hartuko ditugun sistemak Hamiltondarrak dira, $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{2d} \longrightarrow \mathbb{R}$, eta Hamiltondarra bi zatitan bana dakieke:

$$H(q, p, t) = H_K(q, p) + H_I(q, p, t) \tag{7.3}$$

non H_K mugimendu Kepleriarrari dagokion Hamiltondarraren aldea den eta H_I perturbazioei dagokien Hamiltondarraren aldea den.

Problema horri dagozkion ekuazioei Keplerren fluxuan oinarritutako aldagai aldaketa bat egingo dugu, baina horretarako notazioa finkatuko dugu: $u = (q, p) \in \mathbb{R}^{2d}$ erabiliko dugu jatorrizko aldagaientzako eta $U = (Q, P) \in \mathbb{R}^{2d}$ aldagai berrientzako. Jatorrizko aldagaien arabera ebatzi beharreko hasierako baliodun problema honakoa da:

$$\frac{du}{dt} = k(u) + g(u, t), \quad u(t_0) = u_0$$

non $k(u)$ alde kepleriarrari dagokion eta $g(u, t)$ perturbazioari. Problema horretan honako aldagai aldaketa egingo dugu, kontuan izan urrats bakoitzean egingo dugula aldagai aldaketa, hau da $j = 0, 1, 2 \ldots$ indizeak j. urratsean aplikatu beharreko aldaketa adierazten du:

$$u(t) = \varphi^K_{t-(j+\frac{1}{2})h}\left(U^{j+\frac{1}{2}}(t)\right)$$

Fluxua $\Delta t > 0$ eta $\Delta t < 0$ balioentzat definitzen da, eta $u = \varphi_{-t}(\varphi_t(u))$ betetzen dela kontutan hartuz honako alderantzizko aldaketa ere egin dezakegu:

$$U^{j+\frac{1}{2}}(t) = \varphi^K_{-t+(j+\frac{1}{2})h}\left(u(t)\right)$$

Aldaketa hauekin asmoa da $i + 1$ urratsa emateko $u_i \approx y(t_0 + hi)$ zenbakizko soluzioan oinarrituz, aldagai aldaketaren bidez $U_i^{i+\frac{1}{2}} = \varphi_{\frac{h}{2}}(u_i)$ lortu, hau da, fluxuan $\frac{h}{2}$ aurrera egin aldagai berriak lortzeko, aldagai berri hauetan ebatzi jatorrizko problemaren urrats bati dagokion zenbakizko soluzioa (ikusiko dugun bezala, aldagai berrietan alde kepleriarrari dagokion espresioak ez du eraginik eta, azken finean perturbazioari dgokion aldaketa da hemen kalkulatuko dena) eta azkenik, aldagai berri hauen balio berriak jatorrizko aldagaietara itzuli behar dira, baina fluxuan $\frac{h}{2}$ egin behar da aurrera. Atzera egingo bagenu urratsaren hasierako balioei perturbazioak zein aldaketa eragiten dien kalkulatuko baikenuke. Laburbilduz:

$$\begin{array}{cccccc}
 & U_0^{\frac{1}{2}} & & \Longrightarrow & & U_1^{\frac{1}{2}} \\
 & \nearrow \varphi_{\frac{h}{2}}(u_0) & & & & \searrow \varphi_{\frac{h}{2}}(U_1) \\
u_0 & & & & & u_1
\end{array}$$

Aldagai aldaketak fluxuan aurrera egiten du urratsaren luzeraren erdia. Hori horrela egiteak badu arrazoi bat: urratsa bere osotasunean simetrikoa da. Aurrera h luzerako urratsa ematea $-h$ luzerako urratsa ematearekin desegiten baita.

Lehenengo urratsa hasterako, $j = 0$ izanik, $u_0$tik abiatuta $U_0^{\frac{1}{2}}$ lortuko dugu. Aldagai berri horretan gure problema ebatziko dugu eta $U_1^{\frac{1}{2}}$ lortuko dugu. Aldagai hauetan U_0 eta U_1 balioen arteko aldea oso txikia da, orbitaren perturbazioak eragiten duen aldaketa besterik ez baita bien arteko aldea. Ondoren, u_1 balioa lortuko dugu fluxuan $\frac{h}{2}$ aurrera eginez.

Integrazioa.

Aldagai berrien araberako Hamiltondarra honakoa da,

$$\mathcal{H}(Q,P,t) = H_I(\varphi^K_{t-t_0}(Q,P),t) := G(Q,P,t). \tag{7.4}$$

eta hauek dira ekuazio diferentzialak,

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_i}{dt} &= +\frac{\partial G}{\partial P_i}(Q,P,t), \\
\frac{dP_i}{dt} &= -\frac{\partial G}{\partial Q_i}(Q,P,t),\ i = 1,\ldots,d.
\end{aligned} \tag{7.5}$$

Hurrengo ataletan, ekuazio diferentzialen konputazioaren zehaztapenak emango ditugu. Lehenik, gorputz bakarraren problema, hau da, alde Kepleriar bakarra duen kasu partikularra aztertuko dugu. Bigarrenik, $N > 1$ gorputzen problemarekin, alde kepleriar bat baino gehiago duen kasu orokorra aztertuko dugu.

Alde Kepleriar bakarra.

Satelite baten orbitaren ekuazio diferentzialak, era honetan idatz daitezke,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q \\ v \end{pmatrix} &= k(t,q,v) + g(t,q,v), \\ k(t,q,v) &= \begin{pmatrix} v \\ -\frac{\mu}{\|q\|^3}\, q \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{7.6}$$

non $q, v \in \mathbb{R}^3$ diren. Azpimarratu nahi dugu, $g(t,q,v)$ perturbazioa ez duela zertan Hamiltondarra izan behar.

Fluxuan oinarritutako aldagai aldaketa aplikatzen badugu,

$$\begin{pmatrix} q \\ v \end{pmatrix} = \varphi_t(Q,V), \tag{7.7}$$

aldagai berriei dagozkien ekuazio diferentzialak era honetan definitzen dira (ikus B.4. eranskinean garapen osoa),

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} Q(t) \\ V(t) \end{pmatrix} = \left(\varphi_t'(Q,V)\right)^{-1} g. \tag{7.8}$$

Algoritmoa. (Q,V) aldagaien integrazioa, hiru urratsetan egingo dugu:

1. $\{q, v, aux\} \leftarrow KeplerFlowGen(t, Q, V, mu)$.

   Kepler-en fluxua $(q,v) = \varphi_t(Q,V)$ aplikatuko dugu eta fluxuaren kalkulutarako erabilitako tarteko balioak, $aux \in \mathbb{R}^{16}$ aldagaian itzuliko ditugu.

2. $g \leftarrow g(t,q,v)$.

   Perturbazioei dagokien ekuazio diferentziala aplikatuko dugu.

3. $KeplerFlowGFcnaux(aux, Q, V, t, g)$.

   Lehenik, $\varphi_t'(Q,V))$ modu eraginkorrean kalkulatu behar da. Deribazio automatikoaren teknikaren bidez, Kepler fluxuaren deribatuaren konputazio eraginkorra definitu dugu.

   Ekuazio diferentzialen (7.8) espresioaren konputazioa egingo dugu,

   $$KeplerFlowGFcnaux(aux, Q, V, t, g) = \left(\varphi_t'(Q,V)\right)^{-1} g.$$

Alde Kepleriar bat baino gehiago.

Alde Kepleriar bat baino gehiago dugun problemen azterketa egingo dugu. Problemaren alde Kepleriarren kopurua k bada, era honetako ekuazio diferentzialak ditugu,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} q \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ v_1 \\ q_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ q_k \\ v_k \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ -\mu_1\, q_1/\|q_1\|^3 \\ v_2 \\ -\mu_2\, q_2/\|q_2\|^3 \\ \vdots \\ v_k \\ -\mu_k\, q_k/\|q_k\|^3 \\ 0 \end{pmatrix} + g(t, q_1, v_1, \ldots, q_k, v_k, w),$$

non

$$g(t, q_1, v_1, \ldots, q_k, v_k, w) = \begin{pmatrix} g_1(t, q_1, v_1, \ldots, q_k, v_k, w) \\ g_2(t, q_1, v_1, \ldots, q_k, v_k, w) \\ \vdots \\ g_k(t, q_1, v_1, \ldots, q_k, v_k, w) \\ g_{k+1}(t, q_1, v_1, \ldots, q_k, v_k, w) \end{pmatrix}.$$

Gorputz bakoitzari dagokion aldagai aldaketa lokala da,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} q_j \\ v_j \end{pmatrix} &= \varphi_t^{\mu_j}(Q_j, V_j), \quad j = 1, \ldots, k, \\ w &= W. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Aldagaia berriekiko ekuazio diferentzialak honakoak dira (ikus B.4. eranskinean garapena),

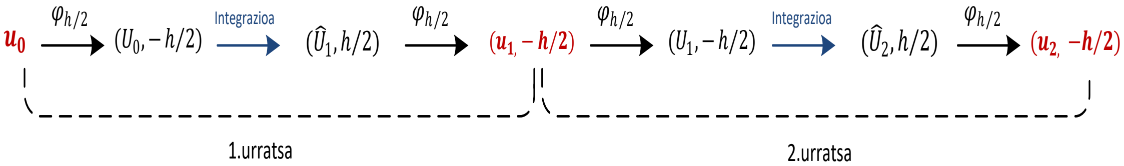
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} Q_1 \\ V_1 \\ \vdots \\ Q_k \\ V_k \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {\varphi'}_t^{\mu_1}(Q_1, V_1)^{-1}\, g_1 \\ {\varphi'}_t^{\mu_2}(Q_2, V_2)^{-1}\, g_2 \\ \vdots \\ {\varphi'}_t^{\mu_k}(Q_k, V_k)^{-1}\, g_k \\ g_{k+1} \end{pmatrix}.$$

Metodo simetrikoa.

Lehenik, azpimarratu behar dugu aldagai aldaketa lokala izan behar duela eta horretako, integraziorako egoera aldagai berri bat (τ) gehitu behar dugula,

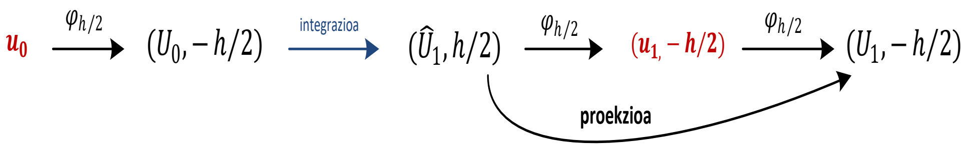
$$(U, \tau). \tag{7.10}$$

Metodoa simetriko izateko, integrazio eskema orokorra 7.1. irudian laburtu dugu,



7.1. Irudia

Integrazioaren urrats guztietan ez baditugu emaitzak itzuli behar, bi urratsen arteko, $\varphi_{h/2}$ fluxuaren bi konputazioak, φ_h fluxuaren konputazio bakarrarekin konputatuko dugu. Horretarako, proiekzio kontzeptua sortuko dugu (7.2. irudia).



7.2. Irudia: Proiekzioa: bi urratsen arteko, $\varphi_{h/2}$ fluxuaren bi konputazioak, φ_h fluxuaren konputazio bakarrarekin konputatuko dugu

Azkenik, emaitzak behar ditugun urratsetarako fluxua $\varphi_{-h/2}$ aplikatuko dugu (7.3. irudia).

u_i jatorrizko aldagaiak eta U_i aldagai berriak adierazten duten notazioa erabiliko dugu. Hauek dira, integratzeko emango ditugun urratsak:

1. *Startfun* funtzioa.

   Lehenengo, u_0 jatorrizko aldagaien hasierako baliotik abiatuta, $\varphi_{h/2}$ fluxuaren konputazioaren bidez, aldagai berrietan dagokion hasierako balioa lortuko dugu.

$$u_0 \;\rightarrow\; (U_0, -h/2).$$

$$
\begin{tikzcd}
(U_0, -h/2) \arrow[r] & (U_1, -h/2) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & (U_n, -h/2) \arrow[d, "\varphi_{-h/2}"'] \\
u_0 \arrow[u, "\varphi_{h/2}"'] & & & u_n
\end{tikzcd}
$$

7.3. Irudia: u_i jatorrizko aldagaiak eta U_i aldagai berriak adierazten dute. Lehenengo, u_0 jatorrizko aldagaien hasierako baliotik abiatuta, aldagai berriei dagokion hasierako balioa finkatuko dugu $(U_0, -h/2)$. Urrats bakoitza, integrazio eta proiekzioaren konposaketa da eta 7.2. irudian zehaztu dugu. Erabiltzaileak definitutako urratsetarako, u_n jatorrizko aldagaietann zenbakizko soluzioa itzuliko dugu

2. *Urratsa.*

   Urratsa integrazio eta proiekzioaren konposaketa da; 7.2. irudian zehaztapenak eman ditugu. Aldagai aldaketa urrats bakoitzean aplikatzen dugu.

$$(U_0, -h/2) \ \rightarrow \ (U_1, -h/2).$$

   Biribiltze errorea txikitzeko, proiekzioa doitasun altuan konputatzea garrantzitsua da. Modu honetan, batura konpensatua aplikatzerakoan zifra batzuk irabaziko ditugu.

3. *Outputfun* funtzioa.

   Erabiltzaileak definitutako urratsetarako, $\varphi_{-h/2}$ fluxuaren konputazioaren bidez, u_n zenbakizko soluzioa jatorrizko aldagaietan itzuliko dugu.

$$(U_n, -h/2) \ \rightarrow \ u_n.$$

Gauss metodoa, neurri batean Splitting eta konposizio metodoen baliokideak dira.

Konposizio metodoa $\Leftrightarrow$ Gauss metodoa aldagai aldaketa gabe.

Splitting metodoa $\Leftrightarrow$ Gauss metodoa aldagai aldaketarekin.

Splitting metodoekiko antzekotasuna azaltzeko, (2.21) *Störmer-Verlet* Splitting metodoarekin konparatuko dugu. *Störmer-Verlet* metodoa, era honetan aplikatzen da: $h/2$ fluxua aplikatu, perturbazioak kalkulatu eta berriz $h/2$ fluxua aplikatu. Fluxuaren aldagai aldaketarekin, gauza bera egiten ari gara: $h/2$ fluxua aurreratu, perturbazioak kalkulatu (aldagai berrietan eta beraz, hobeto kalkulatzen dugu), $h/2$ fluxua aurreratu.

7.4. Zenbakizko esperimentuak.

Atal honetan, puntu-finkoaren iterazioan oinarritutako Gauss metodoaren inplementazioa erabili dugu eta eguzki-sistemaren ekuazio diferentzialei, Kepler-en fluxuan oinarritutako aldagai aldaketa aplikatu diegu. $s = 6, 8, 9, 16$ ataletako Gauss metodoak exekutatu ditugu eta metodo eraginkorrena aukeratu dugu, ordena altuko beste metodo sinplektikoekin konparatzeko.

Problemak.

9-planeten problema (3.4. atala) erabili dugu integrazioetarako. Hasierako balioak *DE-430* efemerideen artikulutik hartu ditugu: planeten masak 3.4. taulan laburtu ditugu; hasierako kokapen eta abiadurak 3.5. taulan aurki daitezke. Integratzeko, koordenatu heliozentrikoei dagokien (B.3) Hamiltondarrean oinarrituko gara.

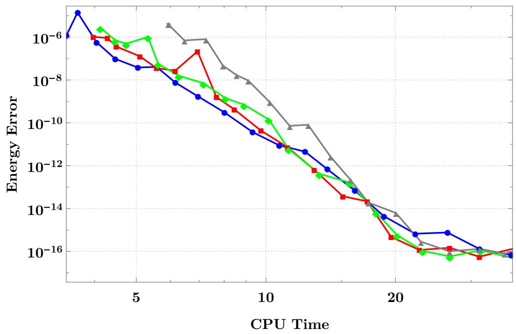
Integrazioaren tartea, $t_{end} = 10^6$ egunetakoa izan da eta zenbakizko integrazioetan, h-ren balio ezberdinak erabili ditugu. $s = 6$ metodoarentzat urrats luzerak aukeratu ditugu eta gainontzeko metodoentzat, s-atalen araberako urrats luzera proportzionalak finkatu ditugu:

$$
\begin{aligned}
s = 6: &\quad h = 2^{k/4},\ k = 4, \dots, 28,\\
s = 8: &\quad (8/6)h,\\
s = 9: &\quad (9/6)h,\\
s = 16: &\quad (16/6)h.
\end{aligned}
$$

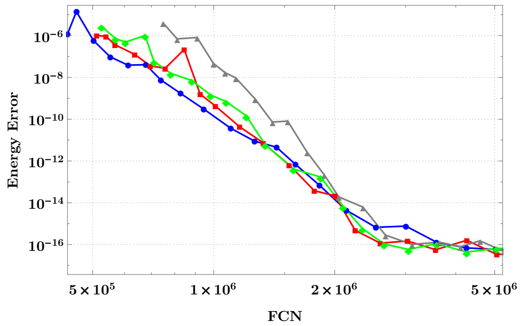
Zenbakizko esperimentuetarako, aldagai aldaketa planeta guziei aplikatzea erabaki dugu. 9-planeten probleman, gorputz kopurua txikia denez, Kepler fluxuaren gainkarga esanguratsua da eta barne-planetei bakarrik aplikatzea, eraginkorragoa izan daiteke. Baina, gorputz gehiago kontsideratzen baditugu (esaterako ilargia eta asteroide nagusienak) edo eguzki-sistemaren eredu konplexuagoetan (esaterako erlatibitate efektua gehitzerakoan), perturbazio aldearen konputazioa nagusituko da eta Kepler fluxuaren kalkuluak pisua galduko du.

Lehen esperimentua.

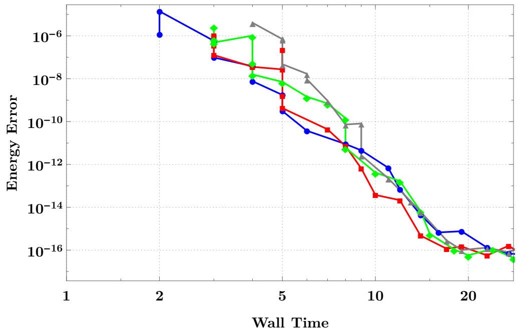
7.4. irudian, $s = 6, 8, 9, 16$ ataletako metodoen, bi eraginkortasun grafiko irudikatu ditugu. Eraginkortasuna, energia errore erlatibo maximoaren arabera neurtu dugu: lehen kasuan, *CPU*-denborarekiko eta bigarren kasuan, ekuazio diferentzialen ebaluazio kopuruarekiko (*FCN*). Eraginkortasuna *CPU*-rekiko, problema zehatz honetarako gertatzen dena azaltzen digu eta eraginkortasuna *FCN*-rekiko, metodoak problema erreal batean nola jokatuko luke erakusten digu.



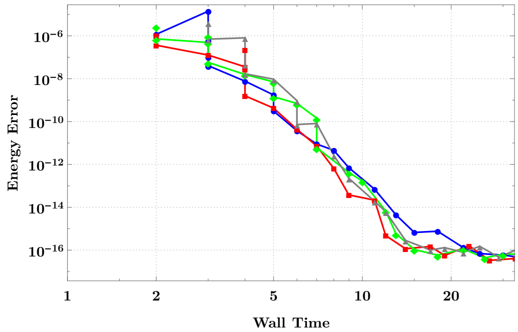
(a) Exekuzioa serian. $\max(|\Delta E|)$-CPU.



(b) Exekuzioa serian. $\max(|\Delta E|)$-FCN.



(c) Exekuzio paraleloa. $\max(|\Delta E|)$-CPU.



(d) Exekuzio paraleloa. $\max(|\Delta E|)$-FCN.

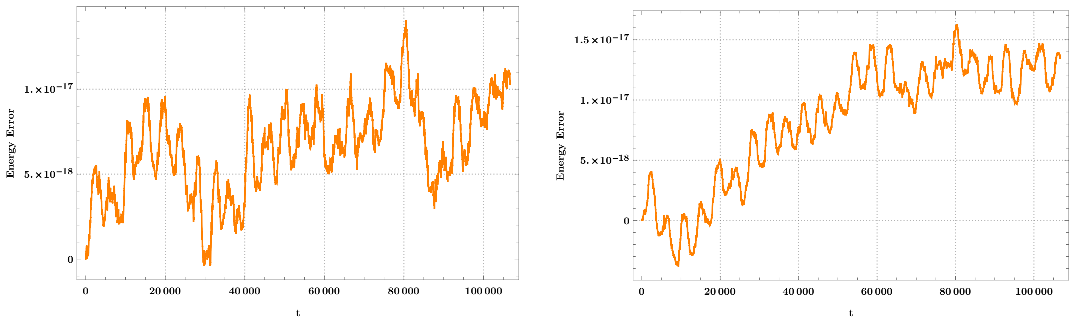
7.4. Irudia: Eraginkortasun grafikoak eskala logaritmiko bikoitza erabiliz irudikatu ditugu. Batetik ardatz bertikalean, energiaren errore erlatibo maximoa eman dugu. Bestetik, ardatz horizontalean, ezkerreko grafikoan CPU denbora eta eskuineko grafikoan, ekuazio diferentzialen ebaluazio kopurua (FCN) erakutsi dugu. Irudi bakoitzean, Gauss metodoaren lau integrazio konparatu ditugu: $s = 6$ urdinez, $s = 8$ gorriz, $s = 9$ berdez, eta $s = 16$ grisez. (a) eta (b) konputazioak modu sekuentzialean egin ditugu; (c) eta (d) modu paraleloan, lehenak hari kopurua 2 eta bigarrenak hari kopurua 4

Gure helburua, bai exekuzio sekuentzialak bai exekuzio paraleloak aztertuz, doitasun altuko integrazioetarako Gauss metodo eraginkorrena aukeratzea da. Horretarako, biribiltze errorea nagusitzen hasten den inguruko unean gertatutakoa aztertu dugu: $s = 8, 9, 16$ metodoak, $s = 6$ metodoa baino eraginkorragoak azaldu zaizkigu eta hirurak oso antzekoak dira.

Bigarren esperimentua.

$s = 8$ metodoarentzat, birbiltze errorea hasten den uneko urrats luzera hartu dut: $k = 12,\ h = 10,667$. Kokapen errore erlatiboaren estimazioa, $h/2$ integrazioarekiko diferentzia gisa kalkulatu ditugu.

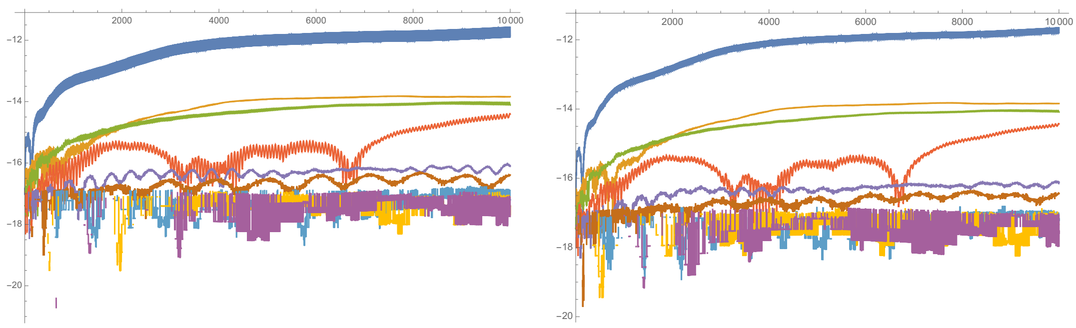
Energiaren eboluzioa



(a) Energia errorea: $h = 10,667$. (b) Energia errore: $h = 10,667/2$.

7.5. Irudia: Energia errorearen eboluzioa.

Errore globalak

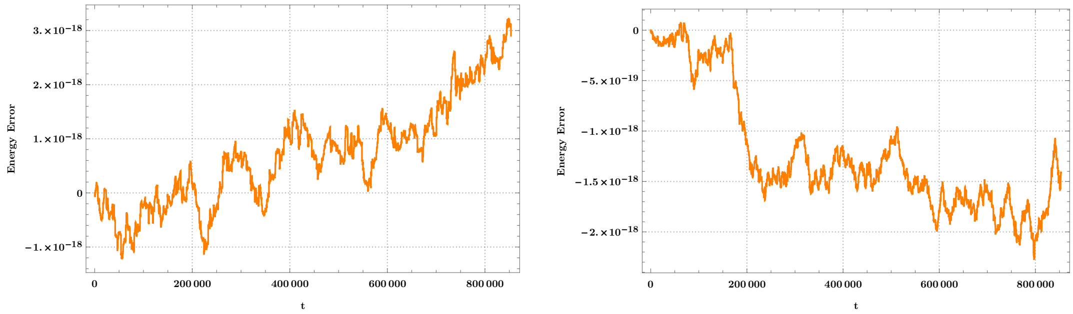


(a) Kokapen errorea. (b) Abiadura errorea.

7.6. Irudia:

Hirugarren esperimentua.

Biribiltze errorearen azterketa (momentu angeluarra). $s = 8$ metodoa eta urrats luzera handiak ($h = 42.667$ eta $h = 42.667/2$) erabiliz egindako integrazioak. Momentu angeluarraren trunkatze errorea beti zero da, metodo sinplektikoek inbariante koadratikoak zehazki mantentzen dituzte.



(a) Momentu angeluarra $h = 42.667$.

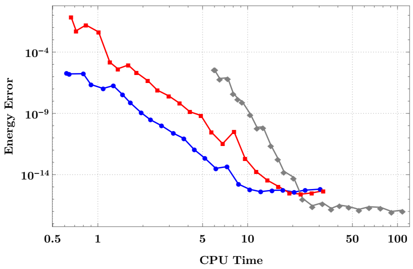
(b) Momentu angeluarra $h = 42.667/2$

7.7. Irudia:

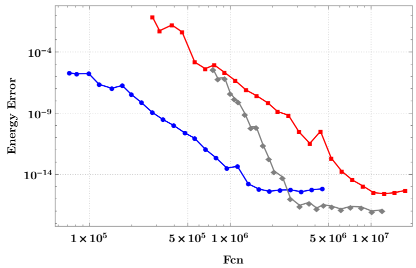
Laugarren esperimentua.

Beste metodo sinplektikoekiko konparaketa. Gauss metodoa modu paraleloan exekutatu dugu: $s = 16$ eta $s = 8$ metodoak, splitting/konposizio metodoekin konparatu ditugu.

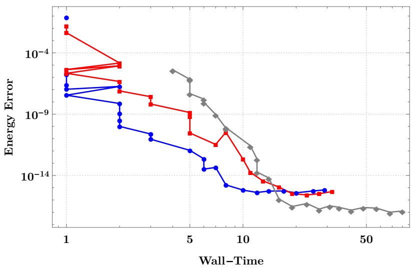
7.5. Laburpena.



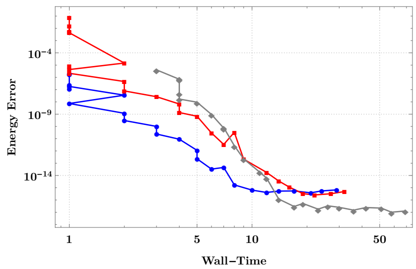
(a) $s = 16$ Exekuzio sekuentziala: CPU-denbora.



(b) $s = 16$ Exekuzio sekuentziala:: FCN.

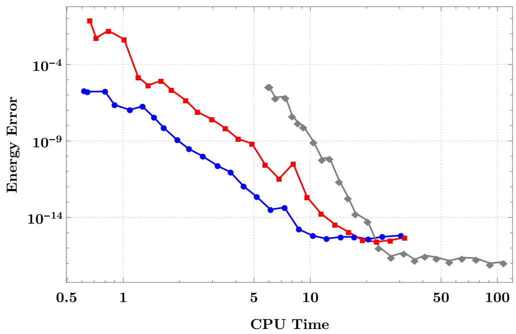


(c) $s = 16$ Exekuzio paraleloa: hariak=2.

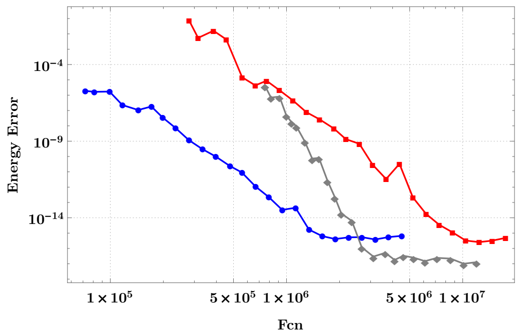


(d) $s = 16$ Exekuzio paraleloa: hariak=4.

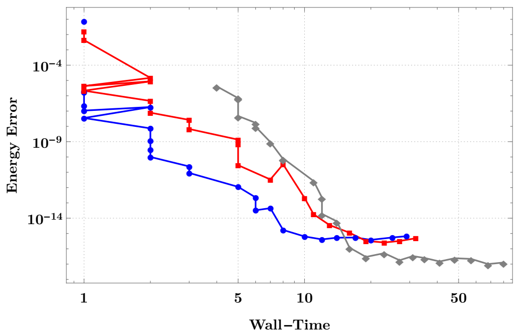
7.8. Irudia: Eraginkortasun grafikoak irudikatu ditugu: ezkerrean energiaren errore maximoa, CPU denborarekiko; eskuinean ekuazio diferentzialen ebaluazio kopuruarekiko (FCN). Lau integrazio metodo konparatu ditugu: $ABAH1064$ urdinez, $CO1035$ gorriz, eta *IRKFLUXU* grisez



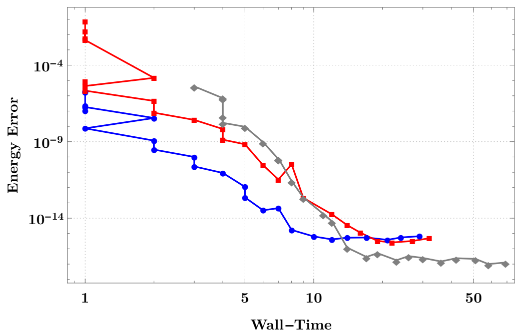
(a) $s = 16$ Exekuzio sekuentziala: CPU-denbora.



(b) $s = 16$ Exekuzio sekuentziala:: FCN.



(c) $s = 16$ Exekuzio paraleloa: hariak=2.



(d) $s = 16$ Exekuzio paraleloa: hariak=4.

7.9. Irudia: Eraginkortasun grafikoak irudikatu ditugu: ezkerrean energiaren errore maximoa, CPU denborarekiko; eskuinean ekuazio diferentzialen ebaluazio kopuruarekiko (FCN). Lau integrazio metodo konparatu ditugu: $ABAH1064$ urdinez, $CO1035$ gorriz, eta *IRKFLUXU* grisez