

7. Kapitulu

IRK: Eguzki-sistema.

7.1. Sarrera.

Kapitulu honetan, eguzki-sistemaren ekuazio diferentzialei Kepler-en fluxuan oinarritutako aldagai aldaketa aplikatzea proposatuko dugu. 5. kapitulu puntufinkoaren iterazioan oinarrituz eta 6. kapitulu Newton sinplifikatuaren iterazioan oinarrituz, IRK inplementazioak garatu ditugu; eguzki-sistemaren problemaren integratzeorako, bi inplementazioen artean, puntu-finkoarena nabarmen eraginkorragoa dela baieztatu dugu eta Newton sinplifikatuarena, erabat baztertu dugu. Ondorioz, puntu-finkoaren iterazioan oinarritutako IRK inplementazioa erabiliko dugu eta ekuazio diferentzialetako aldagaiei eragingo diegun aldagai aldaketaren bidez, integratze oraginkorra lortzea espero dugu.

Aplikatzeko dugun integratze metodoa sinplektikoa eta simetrikoa da: neurri batean, splitting metodoen antzekoa. Aldagai berriekiko ekuazio diferentzialak, magnitude txikiko balioak hartzen dituzte eta honek, hiru abantaila eragingo ditu. Lehenik, eguzki-sistemaren problemaren trunkezte errore nagusia ezabatzen dugunez, urrats luzera handiagoak erabili ahal izango ditugu. Bigarrenik, batura konpensatuaren konputazioan, informazio gutxiago galduko dugu. Hirugarrenik, puntu-finkoaren iterazioek konbergentzia azkarra izango dute.

Lehenengo, Kepler-en fluxuaren inplementazioa azalduko dugu. Bigarrenik, aldagai aldaketa definitu eta metodoa integratzeko zehaztapenak emango ditugu. Hirugarrenik, eguzki-sistemaren problemaren zenbakizko integratze orak egingo ditugu: inplementazio honen eta doitasun altuko beste metodo sinplektikoen (konposizio eta splitting metodoak) eraginkortasunak, alderatuko ditugu.

7.2. Kepler-en fluxua.

Kepler problema bi gorputzen problemaren kasu partikularra da eta honako Hamiltondarra dagokio,

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} - \frac{\mu}{\|q\|}, \quad (7.1)$$

non m eta μ konstanteen balioak formulazioaren arabera diren.

Koordenatu sistema $q = q_2 - q_1$ duen formulazioa aukeratzeko badugu, konstanteen balioak hauek dira,

$$m = (1/m_1 + 1/m_2)^{-1}, \quad \mu = Gm_1m_2,$$

eta ekuazio diferentzialak era honetan definitzen dira,

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = -\frac{k q}{\|q\|^3}, \quad (7.2)$$

non $k = \mu/m$ eta $q, p \in \mathbb{R}^3$ diren.

Kepler problemaren soluzio zehatza kalkula daiteke: une bateko kokapen eta abiadura emanik, Δt denbora tarte bat igarotakoan (positiboa ala negatiboa), kokapen eta abiadura zehatzak konputatu daitezke. Eguzki-sistemaren integrazioetarako, Kepler problema doitasun handian eta era eraginkorrean kalkulatzeko, funtsezkoa da. Kepler problemaren erreferentziazko inplementazioak, Danby [29] eta J. Wisdom-enak [112] ditugu.

Kepler-en fluxua, era honetan kalkulatu da. Lehenik, koordenatu kartesiarretatik $(q, p \in \mathbb{R}^3)$, koordenatu eliptikoetara (a, e, i, Ω, E) itzulpena egingo dugu. Koordenatu eliptikoetan, E (*eccentric anomaly*) aldagaia izan ezik, beste aldagaiak konstante mantentzen dira: beraz, E_0 balioa emanda, Δt denbora tarte aurrera egin eta E_1 balio berria kalkulatu dugu. Azkenik, koordenatu eliptikoetatik koordenatu kartesiarretara itzulpena eginez, kokapen eta abiadura berriak eskuratuko ditugu.

$$\begin{array}{ccc} (q_0, v_0) \in \mathbb{R}^6 & \longrightarrow & (a, e, i, \Omega, E_0) \in \mathbb{R}^6 \\ & \downarrow \Delta t & \\ (q_1, v_1) \in \mathbb{R}^6 & \longleftarrow & (a, e, i, \Omega, E_1) \in \mathbb{R}^6 \end{array}$$

Gorputz baten orbita Kepleriarra hiru motakoa izan daiteke: $H(q_0, p_0) < 0$ denean orbita eliptikoa da, $H(q_0, p_0) > 0$ orbita hiperbolikoa eta $H(q_0, p_0) = 0$ orbita parabolikoa. Kepler fluxuaren C inplementazioa, orbita eliptikoetarako

garatu dugu eta zehaztasunak, B.1. eranskinean eman ditugu. (7.2) problemari dagokion fluxua, era honetan defini daiteke,

$$\begin{aligned} \varphi_{\Delta t}^k : \mathbb{R}^6 &\longrightarrow \mathbb{R}^6, \\ u_0 &\rightsquigarrow u_1. \end{aligned}$$

non $u = (q, v) \in \mathbb{R}^6$ den.

7.3. Kepler Perturbatuaren problema.

Kepler problemaren Hamiltondarra perturbatzen badugu, ezingo dugu aurreko atalean erabili dugun fluxua erabili problema ebazteko. Kasu honetan Hamiltondarra bi zatitan banatuta egongo da;

$$H(q, p, t) = H_K(q, p) + H_I(q, p, t) \quad (7.3)$$

non H_K mugimendu Kepleriarrari dagokion Hamiltondarraren aldea den, hau da, (7.1) ekuazioko eskuin aldea, eta H_I perturbazioei dagokien Hamiltondarraren aldea den.

Problema berri honetan aldagai aldaketa bat egingo dugu, aldaketaren helburua da Keplerren fluxua erabili ahal izatea problemaren ebazpenean.

Aldagai aldaketa.

(7.3) problemari dagozkion ekuazioetan, Keplerren fluxuan oinarritutako aldagai aldaketa bat egingo dugu, baina horretarako notazioa finkatuko dugu: jatorrizko aldagaiak $u = (q, p) \in \mathbb{R}^{2d}$ izango dira eta aldagai berriak $U = (Q, P) \in \mathbb{R}^{2d}$ letra larriz adieraziko ditugu. Jatorrizko aldagaiei bidez adierazitako problema, alegia, ebatzi beharreko hasierako baliodun problema, honakoa da:

$$\frac{du}{dt} = k(u) + g(u, t), \quad u(0) = u_0 \quad (7.4)$$

non $k(u)$ (7.2) ekuazioan adierazitako alde Kepleriarrari dagokion eta $g(u, t)$ perturbazioari. Problema horretan honako aldagai aldaketa egingo dugu, kontuan izan urrats bakoitzean egingo dugula aldagai aldaketa, hau da $j = 0, 1, 2 \dots$ indizeak j . urratsean aplikatu beharreko aldaketa adierazten du:

$$u(t) = \varphi_{t-(j+\frac{1}{2})h}^k \left(U_j^{j+\frac{1}{2}}(t) \right) \quad (7.5)$$

$\varphi_{\Delta t}^k$ fluxua $\Delta t > 0$ eta $\Delta t < 0$ balioentzat definitzen da, eta $u = \varphi_{-t}(\varphi_t(u))$ betetzen dela kontutan hartuz honako alderantzizko aldaketa ere egin dezakegu:

$$U^{j+\frac{1}{2}}(t) = \varphi_{-t+(j+\frac{1}{2})h}^k(u(t)) \quad (7.6)$$

Aldaketa hauekin asmoa da $i+1$ urratsa emateko $u_i \approx u(hi)$ zenbakizko soluzioan oinarrituz, aldagai aldaketaren bidez $U_i^{i+\frac{1}{2}} = \varphi_{\frac{h}{2}}^k(u_i)$ lortu, hau da, fluxuan $\frac{h}{2}$ aurrera egin aldagai berriak lortzeko, aldagai berri hauetan ebatzi jatorrizko problemaren urrats bati dagokion zenbakizko soluzioa (ikusiko dugun bezala, aldagai berrietan alde Kepleriarrari dagokion espresioak ez du eraginik eta, azken finean perturbazioari dagokion aldaketa da hemen kalkulatu dena) eta azkenik, aldagai berri hauen balio berriak jatorrizko aldagaia itzuli behar dira, baina $i+1$ urratsari dagozkion unera pasa behar dira aldagaiak, hau da, fluxuan aurrera $\frac{h}{2}$ egin behar da. Atzera egingo bagenu urratsaren hasierako balioei perturbazioak zein aldaketa eragiten dien kalkulatu baikenuke, baina guk urratsaren bukaerako balioak nahi ditugu. Laburbilduz:

$$\begin{array}{ccc} U_0^{\frac{1}{2}} & \implies & U_1^{\frac{1}{2}} \\ \nearrow \varphi_{\frac{h}{2}}(u_0) & & \searrow \varphi_{\frac{h}{2}}(U_1) \\ u_0 & & u_1 \end{array}$$

Aldagai aldaketak fluxuan aurrera egiten du urratsaren luzeraren erdia. Hori horrela egiteak badu arrazoi bat: urratsa bere osotasunean simetrikoa da. Aurrera h luzerako urratsa ematea $-h$ luzerako urratsa ematearekin desegiten baita.

Aldagai berrietan ekuazio diferentzialak.

(7.5) aldagai aldaketa abiapuntutzat hartuz, aldagai berriei dagozkien ekuazio diferentzialak lortu behar ditugu. Horrela, problemaren integrazioa aldagai berrien arabera egin ahal izango dugu. Irakur erraztasunagatik (7.5) ekuazioko $\varphi(U)$ indizerik gabe idatziko dugu, eta \dot{U} ri dagozkion ekuazioak lortze aldera bi aldeak t aldagaiarekiko deribatuko ditugu:

$$\frac{d}{dt}u = \frac{d}{dt}(\varphi(U)), \quad (7.7)$$

Eskuin aldeari katearen erregla aplikatuz,

$$\dot{u} = \dot{\varphi}(U) + \varphi'(U) \frac{d}{dt}U. \quad (7.8)$$

φ Kepler problemaren fluxua da, hau da, $\dot{u} = k(u)$ problemaren fluxua da, eta fluxuaren definizioz $\dot{\varphi}(U) = k(\varphi(U))$ da. Aldaketa horrekin, eta (7.4) ekuazioarekin berdinduz,

$$k(u) + g(u, t) = k(u) + \varphi'(U)\dot{U}. \quad (7.9)$$

Bi aldeetan $k(u)$ kenduz, U aldagaiekiko ebatzi beharreko ekuazio diferentziala lortuko dugu:

$$\dot{U} = (\varphi'(U))^{-1} g(u, t). \quad (7.10)$$

Alderantzizko matrizeak kalkulatu beharrik gabe idatz ditzakegu (7.10) ekuazioak. Horretarako φ fluxuaren izaera sinplektikoa erabiliko dugu, hau da, $(\varphi')^t J \varphi' = J$ propietatea betetzen du fluxuak, non,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

ondorioz,

$$\dot{U} = J^{-1}(\varphi')^t(U) J g(u, t). \quad (7.11)$$

(7.11) ekuazioak $\varphi'(U)$ kalkulatzeari eskatzen du, eta horretarako deribazio automatikoko teknikak erabil ditzakegu.

Algoritmoa. U aldagaietan oinarritutako ekuazio diferentzialen integrazioarako (7.11) espresioaren konputazioa hiru urratsetan egingo dugu:

1. $\{u, aux\} \leftarrow \text{KeplerFlowGen}(t, U, mu)$.

Kepler-en fluxua $u = \varphi_t(U)$ aplikatuko dugu eta fluxuaren kalkulutarako erabilitako tarteko balioak, $aux \in \mathbb{R}^{16}$ aldagaian itzuliko ditugu.

2. $g \leftarrow g(u, t)$.

Jatorrizko problemako ekuazio diferentzialetan perturbazioei dagokien espresioa kalkulatu dugu.

3. $\text{KeplerFlowGFcn} aux(aux, U, t, g)$.

Urrats honetan $\varphi'_t()$ kalkulatu behar da. Deribazio automatikoaren tekniken bidez, Kepler fluxuaren U aldagaiekiko deribatuaren konputazio eraginkorra definitu dugu.

Hirugarren urratsak (7.11) espresioa konputatzeko behar dugun azken zatia kalkulatu du, beraz, bere emaitza \dot{U} ren konputazioa izango da:

$$\dot{U} \leftarrow \text{KeplerFlowGFcn} aux(aux, U, t, g).$$

7.4. Alde Kepleriar bat baino gehiagoko sistemak.

Alde Kepleriar bat baino gehiago dituzten problemetan ere Kepler perturbatuan egindako aldagai aldaketa egin dezakegu. Hainbat gorputzeko sisteman gorputz bakoitzari eragingo diogu aldagai aldaketa, bakoitzak bere fluxu Kepleriar perturbatua izango du, eta horretan oinarrituz egingo diogu aldaketa. Problemaren alde Kepleriarren kopurua k bada, era honetako ekuazio diferentzialak ditugu,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_k \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^{\mu_1}(u_1) \\ k^{\mu_2}(u_2) \\ \vdots \\ k^{\mu_k}(u_k) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(u_1, u_2, \dots, u_k, w, t) \\ g_2(u_1, u_2, \dots, u_k, w, t) \\ \vdots \\ g_k(u_1, u_2, \dots, u_k, w, t) \\ g_{k+1}(u_1, u_2, \dots, u_k, w, t) \end{pmatrix} \quad (7.12)$$

Gorputz bakoitzari dagokion aldagai aldaketa, bere $k^{\mu_j}(u_j)$ fluxu Kepleriarren araberakoa da,

$$u_j = \varphi_t^{\mu_j}(U_j), \quad j = 1, \dots, k. \quad (7.13)$$

Bi aldeak t aldagaiarekiko deribatuz eta katearen erregela aplikatuz,

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_k \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}^{\mu_1}(U_1) \\ \dot{\varphi}^{\mu_2}(U_2) \\ \vdots \\ \dot{\varphi}^{\mu_k}(U_k) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\varphi^{\mu_1})'(U_1) \frac{d}{dt} U_1 \\ (\varphi^{\mu_2})'(U_2) \frac{d}{dt} U_2 \\ \vdots \\ (\varphi^{\mu_k})'(U_k) \frac{d}{dt} U_k \\ g_{k+1}(u_1, u_2, \dots, u_k, w, t) \end{pmatrix},$$

ekuazioetan fluxuen propietate eta definizioak erabiliz,

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_k \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^{\mu_1}(u_1) \\ k^{\mu_2}(u_2) \\ \vdots \\ k^{\mu_k}(u_k) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\varphi^{\mu_1})'(U_1) \dot{U}_1 \\ (\varphi^{\mu_2})'(U_2) \dot{U}_2 \\ \vdots \\ (\varphi^{\mu_k})'(U_k) \dot{U}_k \\ g_{k+1}(u_1, u_2, \dots, u_k, w, t) \end{pmatrix},$$

eta, azkenik, (7.12) ekuazioarekin berdinduz eta sinplifikatuz,

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \\ \vdots \\ \dot{U}_k \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ((\varphi^{\mu_1})'(U_1))^{-1} g_1 \\ ((\varphi^{\mu_2})'(U_2))^{-1} g_2 \\ \vdots \\ ((\varphi^{\mu_k})'(U_k))^{-1} g_k \\ g_{k+1} \end{pmatrix},$$

Aldagai berriekiko ekuazio diferentzialak balioztatzeko, fluxuen propietateei esker, $(\varphi')^{-1} = J^{-1}(\varphi')^t J$ kalkula dezakegu eta, Kepler perturbatuan bezalaxe, alderantzizko matrizerik kalkulatu beharrik ez dugu izango. Deribazio automatikoko teknikei esker, kalkulatu ahal izango ditugu. Bestalde, \dot{w} aldagaien ekuazioak balioztatzeko u_i aldagaiak behar ditugu, baina U_i aldagaietatik lor ditzakegu, gainera, g_i funtzioetarako ere behar ditugu. Ondorioz, Kepler perturbatuaren probleman bezala hiru urratsetan balioztatu ahal izango ditugu ekuazioak.

Metodo simetrikoa.

Azpimarratu behar dugu aldagai aldaketa urratsero egiten dugula, eta ekuazio diferentziala aldagai berriekiko ebazten dugula. Aldagai berriak eta jatorrizko aldagaiak fluxuak erlazionatzen ditu: jatorrizko aldagaiak fluxuan $\frac{h}{2}$ aurrera eginez aldagai berriak lor ditzakegu. Ebatzi beharreko problema aldagai berrietan ebatziko dugu, eta h luzerako urratsa emanez aldagai berriak aldatuko ditugu. Jatorrizko aldagaietara igarotzeko fluxuaren bidez mugitu behar ditugu balio horiek: $\frac{h}{2}$ atzera egiten badugu jatorrizko aldagaiak urratsaren hasieran kokatuko ditugu, baina perturbazioari dagokion aldaketa bere baitan daramate, izan ere, aldagai berriei metodoaren urratsa kalkulatu diegu, hau da, perturbazioari dagokion h luzerako urratsa eman dugu. Bestalde, fluxuan $\frac{h}{2}$ aurrera egiten badugu hurrengo urratsaren hasierako egoerara eramango ditugu balioak.

Ondorioz integrazioko urrats bat hiru azpi-urratsen konbinazioa da:

1. $U_i^{i+\frac{1}{2}} = \varphi_{\frac{h}{2}}(u_i)$: fluxuaren arabera $\frac{h}{2}$ aurreratu.
2. Gauss metodoaren h luzerako urratsa: $U_i^{i+\frac{1}{2}}$ aldagaietatik $U_{i+1}^{i+\frac{1}{2}}$ balioetara pasako gara.
3. $u_{i+1} = \varphi_{\frac{h}{2}}(U_{i+1}^{i+\frac{1}{2}})$ fluxuaren arabera $\frac{h}{2}$ aurreratu.

Hiru azpiurratsak simetrikoak dira, eta ondorioz, u_{i+1} abiapuntutzat hartuz, $-h$ luzerako urratsa ematen badugu u_i lortuko dugu:

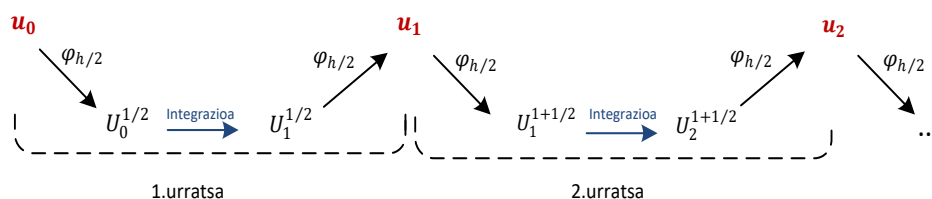
1. $\varphi_{-\frac{h}{2}}(u_{i+1})$ kalkulatu behar da, baina u_{i+1} hirugarren azpiurratsaren emaitza denez, bere espresioa jarriko dugu, eta ikusiko dugu $U_{i+1}^{i+\frac{1}{2}}$ aldagaietatik hasi eta fluxuan aurrera eta atzera egitearen parekoa dela, alegia, ez aldatzearen parekoa:

$$U_{i+1}^{i+1+\frac{1}{2}} = \varphi_{-\frac{h}{2}}(u_{i+1}) = \varphi_{-\frac{h}{2}}\left(\varphi_{\frac{h}{2}}(U_{i+1}^{i+\frac{1}{2}})\right) = U_{i+1}^{i+\frac{1}{2}}$$

2. Gauss metodoaren $-h$ luzerako urratsa: Gaussen metodoa simetrikoa denez, aurreko urratsean bukaerako egoera zenari $-h$ luzerako urratsa eragiteak hasierako egoerara itzultzen du, beraz, $U_{i+1}^{i+\frac{1}{2}}$ balioetatik abiatuz $U_i^{i+\frac{1}{2}}$ balioetara itzuliko gara.
3. Fluxuan urrats luzeraren erdia egin behar da: lehenengo azpiurratsean bezala, fluxuan $\frac{-h}{2}$ mugitu behar gara, baina fluxuan $\frac{h}{2}$ mugitutako balioekin egin behar dugu, hau da:

$$\varphi_{\frac{-h}{2}}(U_i^{i+\frac{1}{2}}) = \varphi_{\frac{-h}{2}}\left(\varphi_{\frac{h}{2}}(u_i)\right) = u_i$$

Metodoaren integrazio eskema orokorra 7.1. irudian laburtu dugu, bere simetria ere bertan ikus daiteke,



7.1. Irudia: Metodoaren integrazio eskema orokorra. Metodoa simetrikoa eta sinplektikoa da.

Integrazioaren urrats guztietan ez baditugu emaitzak itzuli behar, bi urratsean arteko, $\varphi_{h/2}$ fluxuaren bi konputazioak, φ_h fluxuaren konputazio bakarrarekin konputatuko dugu. Horretarako, proiektzio kontzeptua sortuko dugu (7.2. irudia).

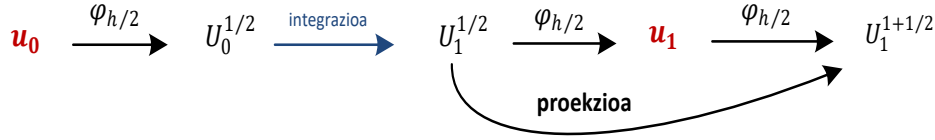
Azkenik, emaitzak behar ditugun urratsetarako fluxua $\varphi_{-h/2}$ aplikatuko dugu (7.3. irudia).

u_i jatorrizko aldagaiak eta U_i aldagai berriak adierazten duten notazioa erabiliko dugu. Hauek dira, integratzeko emango ditugun urratsak:

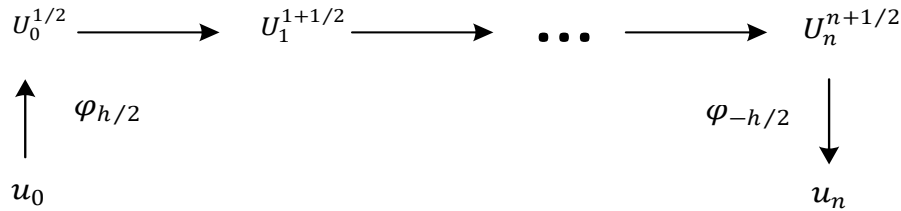
1. *Startfun* funtzioa.

Lehenengo, u_0 jatorrizko aldagaien hasierako balioetik abiatuta, $\varphi_{h/2}$ fluxuaren konputazioaren bidez, aldagai berrietan dagokion hasierako balioa lortuko dugu.

$$u_0 \rightarrow U_0^{\frac{1}{2}}.$$



7.2. Irudia: Proiekzioa: bi urratsen arteko, $\varphi_{h/2}$ fluxuaren bi konputazioak, φ_h fluxuaren konputazio bakarrarekin konputatuko dugu



7.3. Irudia: u_i jatorrizko aldagaiak eta U_i aldagai berriak dira. Lehenengo, u_0 jatorrizko aldagaien hasierako baliotik abiatuta, aldagai berriei dagokion $U_0^{1/2}$ hasierako balioa finkatuko dugu. Urrats bakoitza, integrazio eta proiekzioaren konposaketa da, 7.2. irudian zehaztu dugun bezala. Erabiltzaileak definitutako urratsetarako, u_n jatorrizko aldagaietan zenbakizko soluzioa itzuliko dugu

2. Urratsa.

Urratsa bi azpiurratsen konbinazio bezala ikusiko dugu: aldagai berriei Gaussen metodoaren bidezko integrazioaren urrats bat eta lortutako maitzei φ_h bidez fluxuan h aurrera egitea. Bigarren azpiurratsa fluxuaren bidez proiektatzea da. 7.2. irudian zehaztutak eman ditugu.

$$U_0^{\frac{1}{2}} \rightarrow U_1^{\frac{1}{2}} \rightarrow U_1^{1+\frac{1}{2}}.$$

Biribiltze errorea txikitzeko, proiekzioa doitasun altuan konputatzea garrantzitsua da. Modu honetan, batura konpensatua aplikatzerakoan zifra batzuk irabaziko ditugu.

3. *Outputfun* funtzioa.

Erabiltzaileak, t -ren balio jakin batzuetan $u(t)$ balioen zenbakizko soluzioak nahiko ditu, kasu horietan $\varphi_{-h/2}$ fluxuaren konputazioaren bidez, $U_i^{i+\frac{1}{2}}$ balioetatik u_i jatorrizko aldagaien balioak lortuko dira:

$$U_n^{n+\frac{1}{2}} \rightarrow u_n.$$

Gauss metodoa, neurri batean splitting eta konposizio metodoen antzekoak dira.

Konposizio metodoa \equiv Gauss metodoa aldagai aldaketa gabe.

Splitting metodoa \equiv Gauss metodoa aldagai aldaketarekin.

Splitting metodoekiko antzekotasuna azaltzeko, (2.21) *Störmer-Verlet* splitting metodoarekin konparatuko dugu. *Störmer-Verlet* metodoa, era honetan aplikatzen da: $h/2$ fluxua aplikatu, perturbazioak kalkulatu eta berriz $h/2$ fluxua aplikatu. Fluxuaren aldagai aldaketarekin, gauza bera egiten ari gara: $h/2$ fluxua aurreratu, perturbazioak kalkulatu (aldagai berrietan eta beraz, hobeto kalkulatzen dugu), $h/2$ fluxua aurreratu.

7.5. Zenbakizko esperimentuak.

Zenbakizko esperimentuetarako, puntu-finkoaren iterazioan oinarritutako Gauss metodoaren inplementazioa (5. kapitula) erabili dugu. Lehenengo, Gauss metodoaren bi bertsio konparatu ditugu: aldagai aldaketarik gabeko integrazioa eta aldagai aldaketa aplikatutako integrazioa. Kepler fluxuan oinarritutako aldagai aldaketarekin integrazioaren abantaila argia denez, hurrengo esperimentuetarako aldagai aldaketa aplikatutako integrazioa bakarrik hartu dugu kontutan.

$s = 6, 8, 9, 16$ ataletako Kepler-en fluxuan oinarritutako aldagai aldaketa aplikatutako Gauss metodoen arteko metodo eraginkorra aukeratu dugu, *CO1035* konposizio eta *ABAH1064* splitting metodoekin konparatzeko.

Gauss metodoen konputaziorako, 64-biteko (*double*) eta 80-biteko (*long double*) doitasunak nahasi ditugu. Konputazioaren zati nagusia, 64-biteko doitasunean egin dugu eta proiektzioa kalkulatzeko, 80-biteko doitasuna aplikatu dugu. Era honetan, modu merkean soluzioaren doitasuna hobetzea lortu dugu.

Gauss metodoaren exekuzio sekuentziala eta paraleloak egin ditugu. s atalen funtzioen balioztapena,

$$F_{n,i} = f(Y_{n,i}), \quad i = 1, \dots, s,$$

independenteak dira eta paraleloan kalkula daitezke. $s = 8$ metodoaren integrazio paraleloak egin ditugu eta hari kopurua 2 aplikatu dugu.

Problemak.

9-planeten problema (3.4. atala) erabili dugu integrazioetarako. Hasierako balioak *DE-430* efemerideen artikulutik hartu ditugu: planeten masak 3.4. taulan laburtu ditugu; eta hasierako kokapen eta abiadurak 3.5. taulan aurki daitezke.

Koordenatu heliozentrikoei dagokien Hamiltondar sistema (B.3),

$$H(q, p) = H_K(q, p) + H_I(q, p),$$

integratu dugu. $H_K(q, p)$ mugimendu Kepleriarrari dagokion Hamiltondarraren aldea da eta $H_I(q, p)$, perturbazioei dagokien Hamiltondarraren aldea da.

Integrazioen tartea, $t_{end} = 10^6$ egunetakoa da eta zenbakizko integrazioetan, h -ren balio ezberdinak erabili ditugu. $s = 6$ metodoarentzat urrats luzerak aukeratu ditugu eta gainontzeko metodoentzat, s -atalen araberrako urrats luzera proportzionalak finkatu ditugu:

$$s = 6 : \quad h = 2^{k/4}, \quad k = 4, \dots, 28,$$

$$s = 8 : \quad (8/6)h,$$

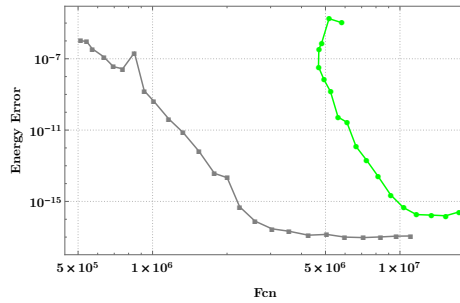
$$s = 9 : \quad (9/6)h,$$

$$s = 16 : \quad (16/6)h.$$

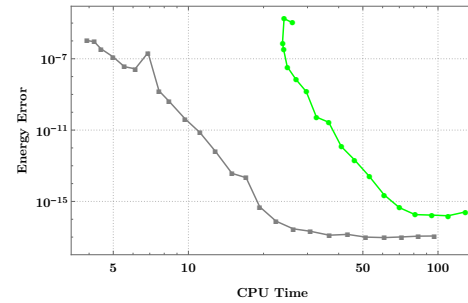
Zenbakizko esperimentuetarako, aldagai aldaketa planeta guzietan aplikatzea erabaki dugu. 9-planeten problemaren, gorputz kopurua txikia denez, Kepler fluxuaren gainkarga esanguratsua da eta barne-planetei bakarrik aplikatzea, eragin-korragoa izan daiteke. Baina, gorputz gehiago kontsideratzen baditugu (esaterako ilargia eta asteroide nagusienak) edo eguzki-sistemaren eredu konplexuagoetan (esaterako erlatibitate efektua gehituzkoan), perturbazio aldearen konputazioa nagusituko da eta Kepler fluxuaren kalkuluak pisua galduko luke.

Gauss metodoen eraginkortasuna.

7.5. irudian, $s = 6$ ataletako Gauss metodoaren bi bertsioen eraginkortasunak konparatu ditugu: aldagai aldaketarik gabeko integrazioa eta aldagai aldaketa aplikatutako integrazioa. Aldagai aldaketarik gabeko integrazioarako, puntu-finkoaren iterazio partizionatua eta interpolazio bidezko hasieraketa aplikatu dugu. Ekuazio diferentzialen ebaluazioen konparaketan, aldagai aldaketa aplikatutako integrazioa, nabarmen eraginkorragoa da. Ereditu sinplearen integrazioen exekuzio denboren konparaketan, aldea txikiagoa da, baina orduan eta eredu konplexuagoa izan abantaila handituz joango da.



(a) Gauss metodoak (FCN).



(b) Gauss metodoak (CPU).

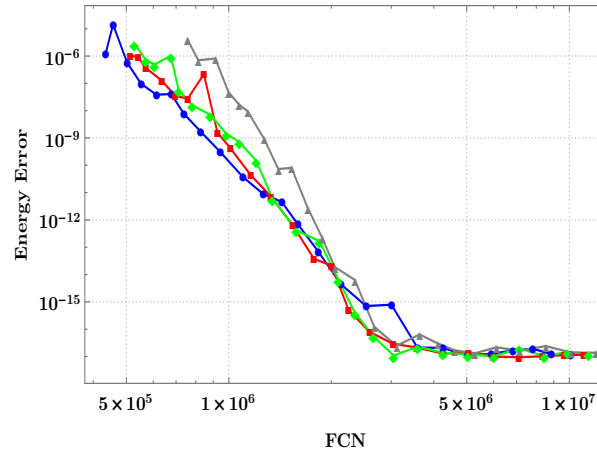
7.4. Irudia: Eraginkortasun grafikoak eskala logaritmiko bikoitzean irudikatu ditugu. Ardatz bertikalean, energiaren errore erlatibo maximoa eman dugu. (a) irudian, ekuazio diferentzialen ebaluazio kopuruarekiko (FCN) eraginkortasuna neurtu dugu. (b) irudian, CPU denborarekiko eraginkortasuna neurtu dugu. Irudi bakoitzean, Gauss metodoaren $s = 6$ ataletako bi bertsio konparatu ditugu: aldagai aldaketa gabe berdez eta aldagai aldaketa aplikatuta grisez.

Jarraian, $s = 6, 8, 9, 16$ ataletako metodoen eraginkortasuna aztertu dugu. 7.5. irudian, diferentzialen ebaluazio kopuruarekiko (FCN) eta 7.6. irudian, CPU-denborarekiko (exekuzio paraleloetan Wall time) erakutsi dugu. FCN-rekiko eraginkortasuna, metodoak problema errealean batean nola jokatu luke erakusten digu eta CPU-rekiko eraginkortasuna, problema zehatz honetarako gertatzen dena azaltzen digu.

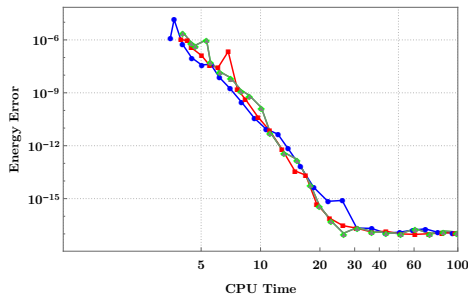
Exekuzio sekuentzialak eta exekuzio paraleloak aztertuz, Gauss metodo eraginkorra aukeratu nahi dugu. Horretarako, biribiltze errorea nagusitzen hasten den inguruko unean gertatutakoa aztertu dugu: $s = 8, 9, 16$ metodoak, $s = 6$ metodoa baino eraginkorragoak azaldu zaizkigu. $s = 8, 9, 16$ metodoak beraien artean oso antzekoak izanik, $s = 8$ ataleko Gauss metodoa aukeratu dugu. Bestalde, exekuzio paraleloa, sekuentziala baino eraginkorragoa da.

Energia errorea eta errore globalak.

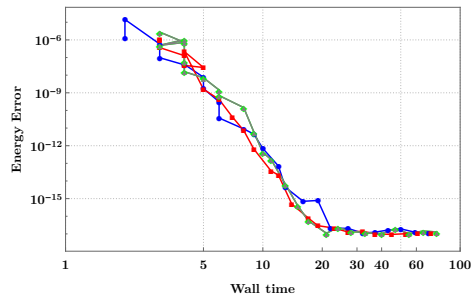
Atal honetan, $s = 8$ ataleko Gauss metodoaren, CO1035 konposizio metodoaren eta ABAH1064 splitting metodoaren erroreak konparatu ditugu. Hiru errore mota ezberdin aztertu ditugu: energia errorea; kokapen eta abiaduren erroreen estimazioak; orbita eliptikoaren erdi-ardatz nagusiaren (semi-axis) eta eszentrikotasunaren erroreen estimazioak. Gauss metodoa $h = 10.63$ urrats luzerarekin integratu dugu eta CO1035, ABAH1064 metodoak $h = 4.76$ urrats luzerarekin.



7.5. Irudia: Eraginkortasun grafikoa eskala logaritmiko bikoitzean irudikatu dugu. Ardatz bertikalean, energiaren errore erlatibo maximoa eman dugu eta ardatz horizontalean, ekuazio diferentzialen ebaluazio kopurua (FCN). Gauss metodoaren s ataletako lau integrazio konparatu ditugu: $s = 6$ urdinez, $s = 8$ gorriz, $s = 9$ berdez, eta $s = 16$ grisez



(a) Exekuzioa sekuentziala.



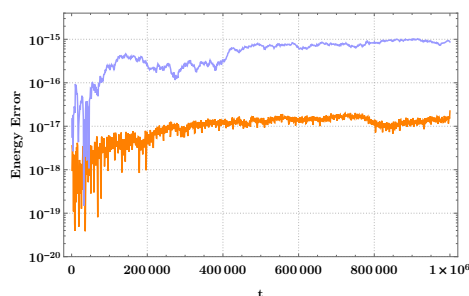
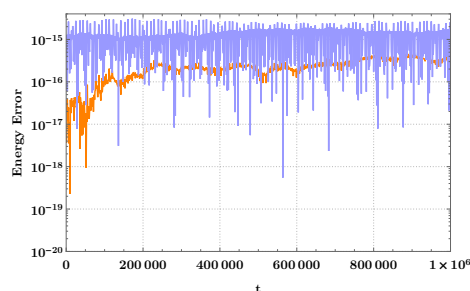
(b) Exekuzio paraleloa.

7.6. Irudia: Eraginkortasun grafikoa eskala logaritmiko bikoitzean irudikatu ditugu. Ardatz bertikalean, energiaren errore erlatibo maximoa eman dugu eta ardatz horizontalean, CPU denbora (exekuzio paraleloan Wall-Time). (a) konputazioa modu sekuentzialean egin dugu eta (b) modu paraleloan hari kopurua 2 izanik. Irudi bakoitzean, Gauss metodoaren s ataletako lau integrazio konparatu ditugu: $s = 6$ urdinez, $s = 8$ gorriz, $s = 9$ berdez, eta $s = 16$ grisez.

Energiaren eboluzioa

7.7. irudian, lau integrazioen energiaren errore erlatiboaren eboluzioa erakutsi ditugu. Batetik, Gauss metodoa 64-biteko (*double*) proiektzioarekin eta 80-biteko (*double*) proiektzioarekin konputatutako integrazioak. Bestetik, *CO1035* konposi-

zio eta *ABAH1064* splitting metodoen integrazioak. Proiektzioa 80-biteko doitasunarekin kalkulatzekoan, energiaren errorea modu esanguratsuan txikitzea lortu dugu. Aipagarria da ere, Gauss metodoa 80-biteko proiektzioaren integrazioa, *ABAH1064* splitting metodoarekin alderatuz, energia errorea txikiagoa dela.

(a) Gauss metodoa ($s = 8$).

(b) ABAH1064 eta CO1035

7.7. Irudia: Energia erroreakaren eboluzioa lau integrazio metodoetarako erakutsi dugu. Ezkerreko irudian, $s = 8$ ataletako Gauss metodoaren $h = 10,667$ urrats luzerarekin egindako integrazioak erakutsi ditugu: proiektzioa 80-biteko *long double* doitasunarekin (laranjaz) eta proiektzioa 64-biteko *double* doitasunarekin (urdinez). Eskuineko irudian, splitting/konposizio metodoak erakutsi ditugu: ABAH1064 (laranjaz) eta CO1035(urdinez)

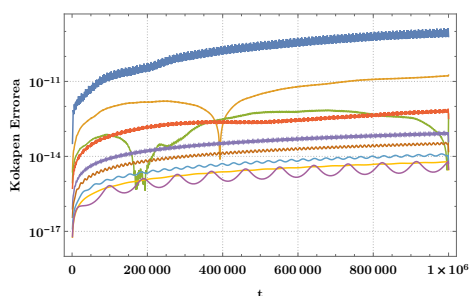
Kokapen eta abiadura erroreen estimazioak

7.8. irudian, Gauss ($s = 8$) eta *ABAH1064* metodoentzako, kokapen eta abiaduraren erroreen estimazioak erakutsi ditugu. Erroreak estimatzeko, urrats txikiagoako integrazioaren soluzioarekiko diferentzia gisa kalkulatu dugu. Gauss metodoaren integrazioan, urrats luzera handiago erabili arren, barne-planeten kokapen eta abiaduren errore estimazioak, *ABAH1064* splitting metodoaren integrazioan baino txikiagoak izan dira.

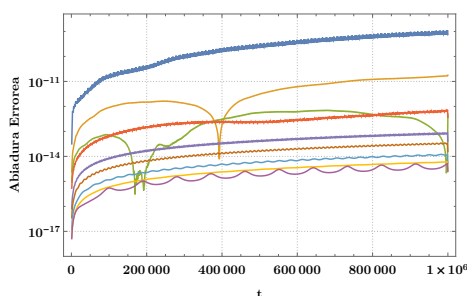
Eszentrikotasun eta erdi-ardatza nagusiaren erroreen estimazioak

Planeten mugimendu orbitala, eliptikoa da. Orbitaren propietateak finkatzen dituzten bi konstante hauen erroreen estimazioa kalkulatu dugu:

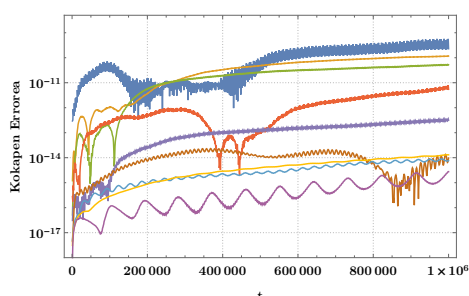
1. a erdi-ardatz nagusia (*semi-axis*) izeneko konstantea, orbita eliptikoaren tamaina definitzen duena.
2. e eszentrikotasuna konstantea, orbita eliptikoaren forma finkatzen duena.



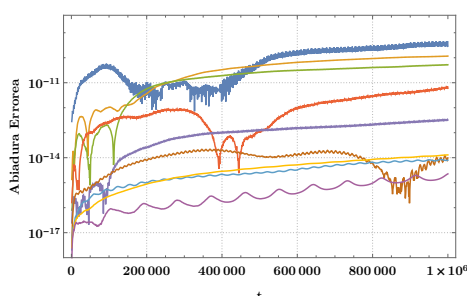
(a) Gauss metodoa (kokapen errorea)



(b) Gauss metodoa (abiadura errorea)



(c) ABAH1064 (kokapen errorea)



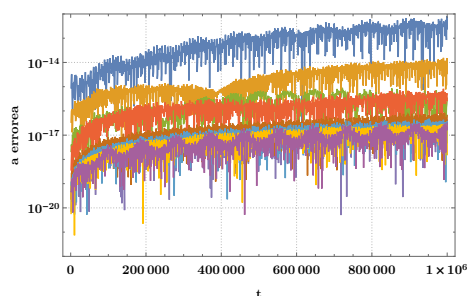
(d) ABAH1064 (abiadura errorea)

7.8. Irudia: Kokapen eta abiaduraren erroreen estimazioak erakutsi ditugu. (a) eta (b) irudietan, $s = 8$ ataletako Gauss metodoaren errore estimazioak eman ditugu, $h = 10$, 667 urrats luzera aplikatutako integrazioarentzat. (c) eta (d) irudietan, *ABAH1064* splitting metodoaren errore estimazioak eman ditugu, $h = 4.76$ urrats luzera aplikatutako integrazioarentzat. Kolore bakoitza planeta bakoitzari dagokion errorea da: Merkurio (urdin ilunez), Artizarra (marroi argiz), Lurra (berdez), Marte (gorriz), Jupiter (more argiz), Saturno (marroi ilunez), Urano (urdin argiz), Neptuno (laranja argiz), Pluto (morez)

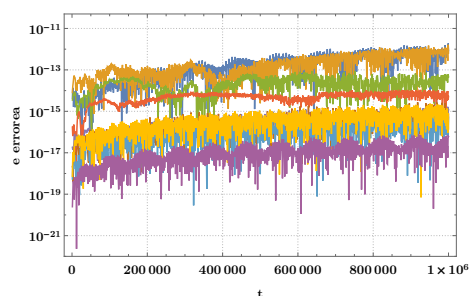
7.9. irudian, bai Gauss metodoarentzat, bai *ABAH1064* splitting metodoarentzat, a erdi-ardatz nagusiaren eta e eszentrikotasun erroreak, kokapen eta abiaduraren erroreak baino txikiagoak dira. Honek esan nahi du, integrazioaren orbitaren forma mantentzen dela eta errorea, orbitaren fasean nagusitzen dela. Esperimentu honetan ere, Gauss metodoaren erroreak, *ABAH1064* splitting metodoarenak baino txikiagoak dira.

Biribiltze errorea.

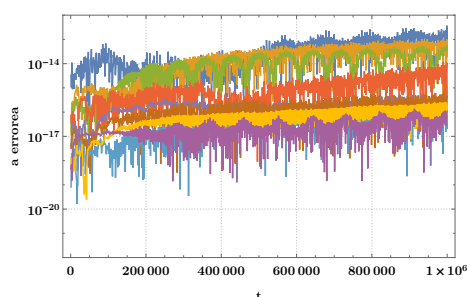
Hirugarren esperimentu honetan, biribiltze errorea ilustratzeko esperimentua egin dugu eta horretarako, momentu angeluarraren errore erlatiboaren eboluzioan oinarritu gara. Lau faktore hartu behar dira kontutan. Kepler-en fluxuak, momentu angeluarra zehazki mantentzen du eta jatorrizko ekuazio diferentzialen inbarianten



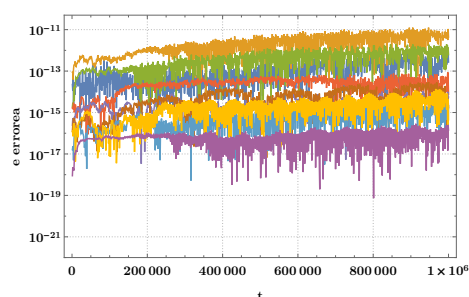
(a) Gauss maetodoa (erdi-ardatz nagusiaren errorea)



(b) Gauss maetodoa (eszentrikotasunaren errorea)



(c) ABAH1064 (erdi-ardatz nagusiaren errorea)

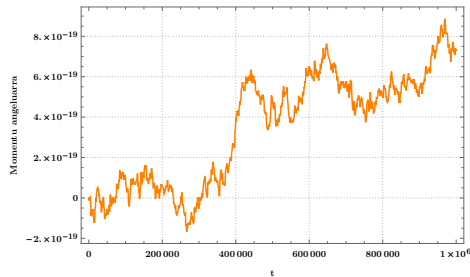
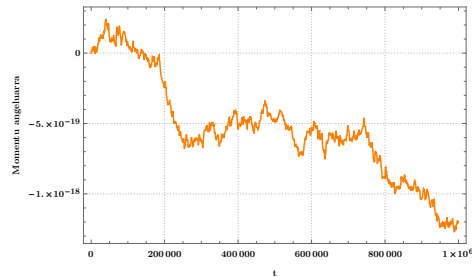


(d) ABAH1064 (eszentrikotasunaren errorea)

7.9. Irudia: Orbita eliptikoaren a erdi-ardatz nagusiaren eta e eszentrikotasunaren erroreen estimazioak erakutsi ditugu. (a) eta (b) irudietan, $s = 8$ ataletako Gauss metodoaren errore estimazioak eman ditugu, $h = 10,667$ urrats luzerarekin integratuz. (c) eta (d) irudietan, *ABAH1064* Splitting metodoaren errore estimazioak eman ditugu, $h = 4.76$ urrats luzerarekin integratuz. Kolore bakoitza planeta bakoitzari dagokion errorea da: Merkurio (urdin ilunez), Artizarra (marroi argiz), Lurra (berdez), Marte (gorriz), Jupiter (more argiz), Saturno (marroi ilunez), Urano (urdin argiz), Neptuno (laranja argiz), Pluto (morez)

te koadratikoa da. Hori dela-eta, Kepler-en fluxuan oinarritutako aldagai aldatetarekin lortutako ekuazio diferentzialen inbariante koadratikoa da. Integratzeko Runge-Kutta metodo sinplektikoa aplikatu dugunez, inbariante koadratikoak zehazki mantentzen ditu eta beraz, ikusten duguna biribiltze errorea da.

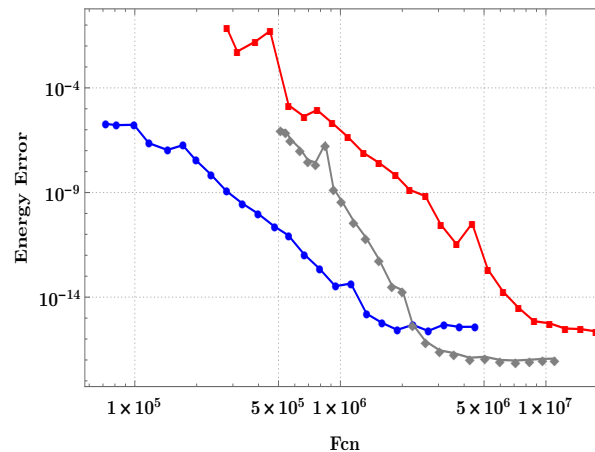
7.10. irudian, Gaussen $s = 8$ ataletako metodoarekin, $h = 9.0$ eta $h = 10.63$ urrats luzerarekin integrazioen soluzioen momentu angeluarraren errorea erakutsi dugu eta espero bezala, biribiltze errorea zein den erakusten dute.

(a) Momentu angeluarra $h = 9.0$.(b) Momentu angeluarra $h = 10.63$

7.10. Irudia: Momentu angeluarraren errore erlatiboaren eboluzioa erakutsi dugu. Gaussen $s = 8$ ataletako metodoa integratu dugu $h = 9.0$ eta $h = 10.63$ urrats luze-rarekin.

Eraginkortasun konparaketa.

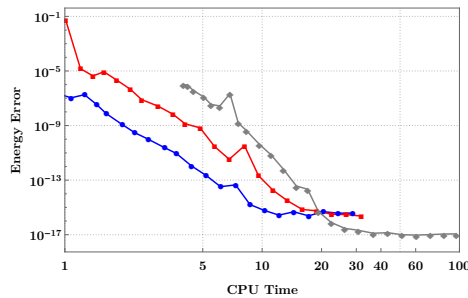
Atal honetan, Gauss metodoa eta konposizio/splitting metodoen arteko eraginkortasunaren konparaketa egin dugu. 7.11. irudian, eraginkortasuna, ekuazio diferentzialaren ebaluazio kopuruaren arabera neurtu dugu. Gure inplementazio berriak, *ABAH1064* splitting metodoak baino doitasun txikiagoa lortzen du. Etorkizuneko inplementazioaren konputazioa, 80-biteko doitasunean eta proiektzioa, 128-biteko doitasunean egin daiteke: era honetan, bien arteko koxka handiago izango da.



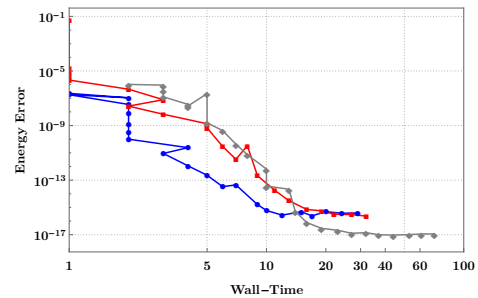
7.11. Irudia: Eraginkortasun grafikoa, eskala logaritmiko bikoitzean irudikatu dugu. Ardatz bertikalean, energiaren errore erlatibo maximoa eman dugu eta ardatz horizontalean, ekuazio diferentzialaren ebaluazio kopurua (FCN). Hiru integrazio metodo konparatu ditugu: $s = 6$ Gauss metodoa grisez, *ABAH1064* urdinez eta *CO1035* gorritz

7.12. irudian, $s = 8$ ataletako Gauss metodoa, modu sekuentzialean eta modu paraleloan exekutatu dugu. Eguzki-sistemaren eredu sinplearen integraziorako, splitting metodoak oso eraginkorrak azaldu zaizkigu. Gauss metodoaren exekuzioa paralelizatzeak abantaila erakusten du baina hala ere, splitting metodoak eraginkorragoak dira.

Dena den, eredu errealistagoak (gorputz kopurua handitzen delako edota erlatibitate efektua kontutan hartzen delako) integratzeko, Gauss metodoak eraginkorragoak bilakatzea espero da. Splitting metodoen konputazioak, modu trinkoan kalkulatu behar dira, hau da, atalen konputazioak sekuentzialki exekutatzen dira eta ez ditu konputazio aldaerarik onartzen. Gauss metodoaren ekuazio inplizituak ebazteko, ordea, teknika ezberdinak konbina daitezke eta eraginkortasuna hobetzeko aukera asko eskaintzen dizkigu. Adibidez, iterazio gehienak problemaren eredu sinple batekin, doitasun baxuan kalkula daitezke [13] eta bukaerako iterazio pare bat eredu osoarekin, doitasun altuan. Gauss metodoaren s -ataletako funtzioen ebaluazioak modu paraleloan exekutatu daitezke eta eguzki-sistemaren eredu konplexuagoa aplikatzen den neurrian, paralelizazioak abantaila handiagoa suposatuko du.



(a) Exekuzio sekuentziala.



(b) Exekuzio paraleloa.

7.12. Irudia: Eraginkortasun grafikoak eskala logaritmiko bikoitzean irudikatu ditugu. Ardatz bertikalean, energiaren errore erlatibo maximoa eman dugu eta ardatz horizontalean, CPU denbora (exekuzio paralelotan Wall-Time) erakutsi dugu. (a) konputazioa modu sekuentzialean egin dugu eta (b) modu paraleloan, hari kopurua 2 izanik. Iru-di bakoitzean, hiru integrazio metodo konparatu ditugu: $s = 6$ Gauss metodoa grisez, *ABAH1064* urdinez eta *CO1035* gorritz

7.6. Laburpena.

Kapitulu honetan, eguzki-sistemaren integraziorako inplementazio berri bat aurkeztu dugu. Inplementazio berria, egungo metodo sinplektiko eraginkorrenekin

alderatu dugu eta emaitzak, baikorrak izateko modukoak iruditu zaizkigu. Oinarrizko azterketa egin badugu ere, agerian geratu da, metodoak etorkizunean izan ditzakeen potentziala. Dударik gabe, etorkizun hurbilean azterketa sakonagoa egin beharko litzateke, metodoaren propietate onak baieztatzeko. Horien artean, honako ideia aipatuko ditugu:

1. Biribiltze erroreen hedapenaren azterketa estatistikoa, puntu-finkoaren eta Newton sinplifikatuaren inplementazioetan egin genuen moduan.
2. 80-biteko doitasuneko (*long double*) integrazioaren konputazioa: kasu honetan, proiektzioa 128-biteko doitasunean egitea komeniko litzateke.
3. Kepler fluxuaren inplementazioaren hobekuntzak: oraingo inplementazioaren iterazio guztietan, ez dugu aurreko iterazioen informazio erabiltzen. Iterazio berri baten kalkuluan, aurreko iterazioen egoeretatik abiatuta, nahikoa izango litzateke fluxuaren iterazio bakarra egitea.
4. Eguzki sistemaren eredu konplexuago batekin (ilargia eta zenbait asteroide, erlatibitate efektua, eguzkiaren atxatamendua), Gauss metodoa eraginkorragoa bilakatzea espero da. Eguzki-sistemaren eredu konplexuago, aplikatzen den neurrian paralelizazioak abantaila handiagoa suposatuko du. Era berean, iterazio gehienak problemaren eredu sinple batekin, doitasun baxuan kalkula daitezke eta bukaerako iterazio pare bat eredu osoarekin, doitasun altuan.
5. Eraginkortasuna hobetzeko, Jacobiarraren hurbilpen sinple baten erabilera (puntu finkoaren eta Newton-en arteko algoritmo eraginkorra).

Eguzki-sistema eredu konplexuetan, Kleperiarrak ez diren indarrak aplika daitezke. Aldagai hauen konbergentzia azkartzeko, Newton sinplifikatuaren iterazioan oinarritutako inplementazioa aplikatzea komeniko da.