Aljebra linelaren aplikazio bat: irudiak konprimitzea

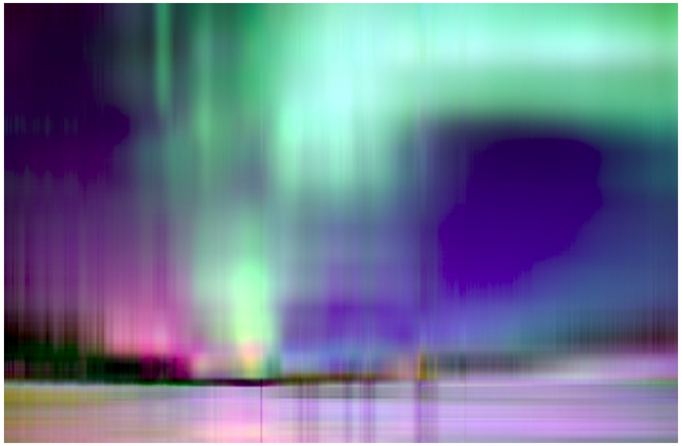
- Mikel Antoñana Otaño
  Saila: Matematika Aplikatua
  EHU/UPV Gipuzkoako Ingeniaritza Eskola

Donostian, 2020ko azaroaren 7an

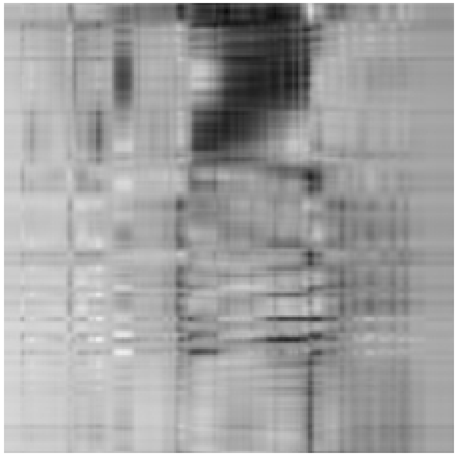
Aljebra linelaren aplikazio bat: irudiak konprimitzea

Zer dago irudi hauen atzean?

1. Irudia



2. Irudia



3. Irudia

Aurkezpenaren atalak

- Definizioak
- SVD: balio singularren deskonposaketa
- Adibideak
- Erreferentziak

Definizioak : matrizea

Zer da matrize bat?

- Matrizeak zenbaki asko objektu batean bildu eta modu egokian manipulatzeko aukera eskaintzen digu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 9 & 36 \end{bmatrix}, \qquad A^T - 2A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \\ -1 & -3 & -6 \end{bmatrix}$$

m=3 (lerro) x n=3 (zutabe)

- Bektoreak eta eskalarrak matrizeen kasu partikularrak dira:
  zutabe bektorea m x 1, lerro bektorea 1 x n eta eskalarra 1 x 1
- Maiz datuak matrize eran biltzen dira: n lagin eta bakoitzerako m aldagai biltzen dituena
- Irudia pixel matrize handi bat da

Definizioak: matrizea

Matrizearen heina $rank(A) = r$

- Heinak, A matrizearen **benetako** tamaina ematen digu

1-Adibidea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

2-Adibidea

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

- $rank(A) = 1 \implies A = \text{zutabea bider lerroa} = uv^T$
  $rank(B) = 2 \implies B = \text{heina bat duten bi matrizeen batura}$

Definizioak: irudia

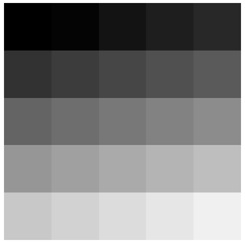
Zer da irudi bat?

- Zenbakizko balioen matrize handi bat da: pixel-a
- Pixel bat irudi baten unitate txikiena da
- Irudi batek pixu handia du (MB)

Zuri-beltzeko irudiak

- m x n tamainako matrizearen elementu bakoitzak $0 \leq a_{ij} \leq 255$ arteko balioak hartzen ditu

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 20 & 30 & 40 \\ 50 & 60 & 70 & 80 & 90 \\ 100 & 110 & 120 & 130 & 140 \\ 150 & 160 & 170 & 180 & 190 \\ 200 & 210 & 220 & 230 & 255 \end{bmatrix} \Rightarrow$$



$a_{ij} = 255 = 11111111$ beltza

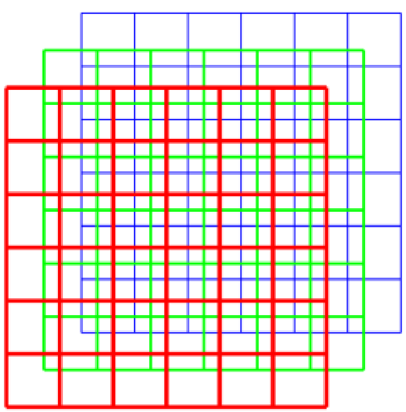
$a_{ij} = 0$ zuria

5 x5 pixel irudia

Definizioak: irudia

Koloredun irudiak

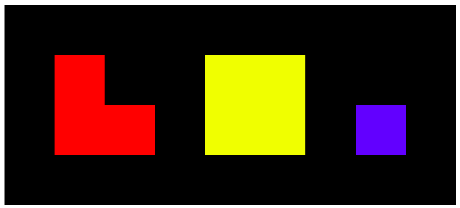
- Kolorea hiru osagaien konbinazioa da: gorria, berdea eta urdina (RGB)
- Hiru dimentsiotako matrizea



$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



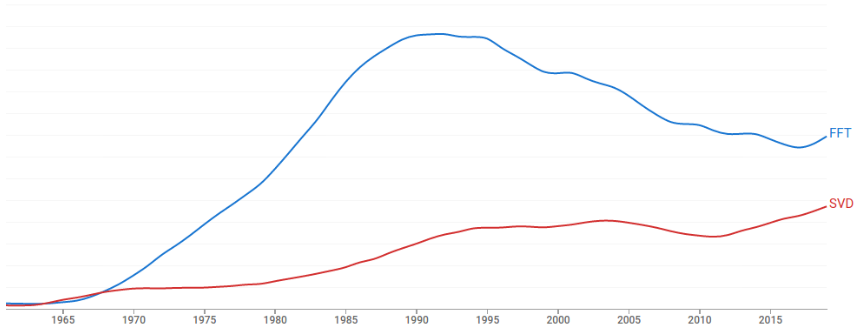
SVD: balio singularren deskonposaketa

Historia pixka bat:

- SVD-ren lehen aipamena : **Beltrami 1873**
- SVD kalkulatzeko lehen metodo fidagarria: **Golub eta Kahan 1965**
- Software matematikoetan erabilgarria: **1970 hamarkadan**
- Gaur egun, Datu-Zientzien arloan paper garrantzitsua jokatzen du

The Top10 Algorithms From 20th Century

1946: The Metropolis Algorithm
1947: Symplex Method
1950: Krylov Subspace Method
1951: The Decompositional Approach to Matrix Computations
1957: The Fortran Optimizing Compiler
1959: QR Algorithm
1962: Quicksort
1965: Fast Fourier Transform
1977: Integer Relation Detection
1987: Fast Multipole Method



FFT vs SVD (Google ngram)

SVD: balio singularren deskonposaketa

Non da aplikagarria?

- SVD egungo arlo teknologiko askotan aplikatzen da:

  Irudien Prozesamendua
  Aholku-Ingeniaritza (NetFlix, Amazon)
  Aurpegi-Errekonozimendu Sistemak

  Osagai Nagusien Analisia
  Gene-Adierazpena

- SVD potentziala ilustratzeko, irudien konprimitzea erakutsiko dugu
- Orokorrean, JPEG algoritmoaren bidezko irudien konprimitzea eraginkorragoa da !!!

SVD: balio singularren deskonposaketa

A-ren balio singularren deskonposaketa: $A = U\Sigma V^T$

- A m x n tamainako matrizea eta $rank(A) = r$

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & .. & u_r & .. & u_m \end{bmatrix} \left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & & 0 \\ & \ddots & & 0 \\ & & \sigma_r & 0 \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} v_1 & .. & v_r & .. & v_n \end{bmatrix}^T$$

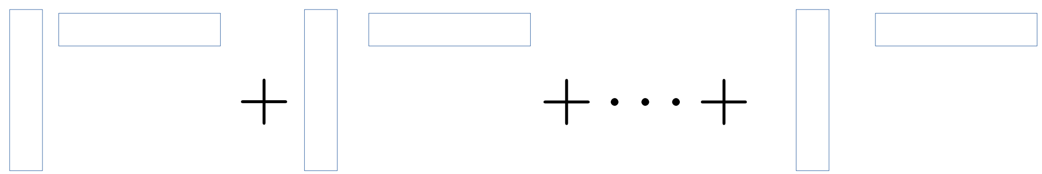
$$m \times n \;=\; m \times m \qquad m \times n \qquad n \times n$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\sqrt{5} & \\ & \sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

SVD: balio singularren deskonposaketa

SVD-k matrizea zati bakanetan banatzen du

$$A = U\Sigma V^T = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \cdots + \sigma_r u_r v_r^T$$



- Zati hauek garrantziaren arabera lortzen dira $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \sigma_r > 0$
  Zati garrantzitsuena $\sigma_1 u_1 v_1^T$

- $A_k = \sigma_1 u_1 v_1^T + \cdots + \sigma_k u_k v_k^T$ k heineko A-ren hurbilketa hoberena:

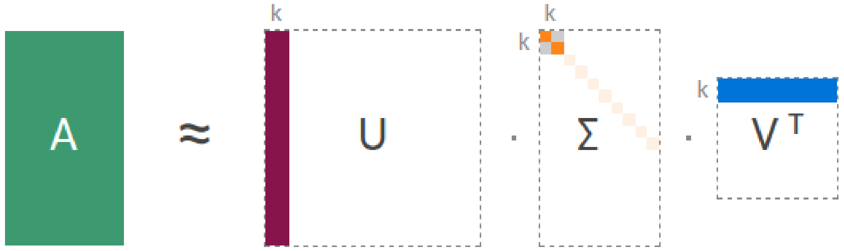
$$rank(B) = k \implies ||A - A_k|| \leq ||A - B||$$

SVD: balio singularren deskonposaketa

Demagun 1000 x 1000 matrizea (pixelak)

Konprimitu gabe = m x n => 1000 x 1000= 10^6

Konprimituta = m*k+k+k*n= k*(1+m+n) = k*(2n+1)~ k*(2000)



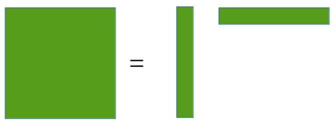
Oinarrizko adibideak

Herrialdeetako ikurrinak

wikipedia: Collection-national-flags.png

Oinarrizko adibideak

1. Adibidea (heina=1)

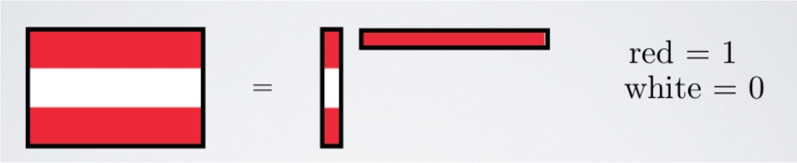


$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 6 x 6 pixel $\Longrightarrow$ 6+6
- 300 x 300 pixel $\Longrightarrow$ 600

Oinarrizko adibideak

2. Adibidea (heina=1)

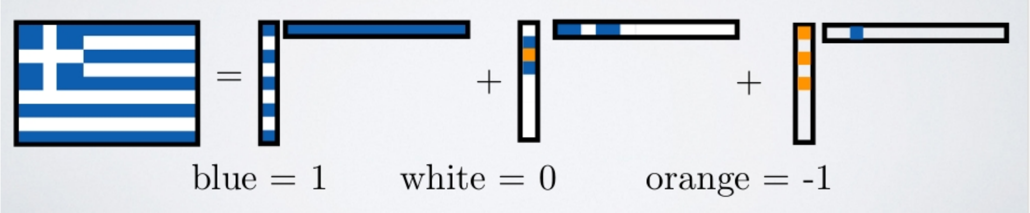


$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 300 x 300 pixel $\Rightarrow$ 600

Oinarrizko adibideak

3. Adibidea (heina=3)



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \dots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

- 300 x 300 pixel $\Rightarrow$ 1800

Oinarrizko adibideak

4. Adibidea (heina osoa)

 $\Rightarrow$ heina=6 !!!

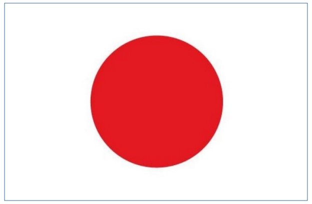
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \sigma_3 u_3 v_3^T + \sigma_4 u_4 v_4^T + \sigma_5 u_5 v_5^T + \sigma_6 u_6 v_6^T$$

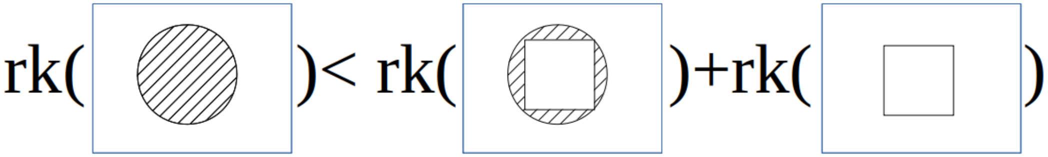
$$A_k = \sigma_1 u_1 v_1^T + \cdots + \sigma_k u_k v_k^T$$

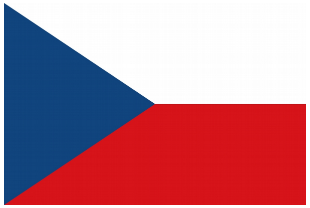
A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7

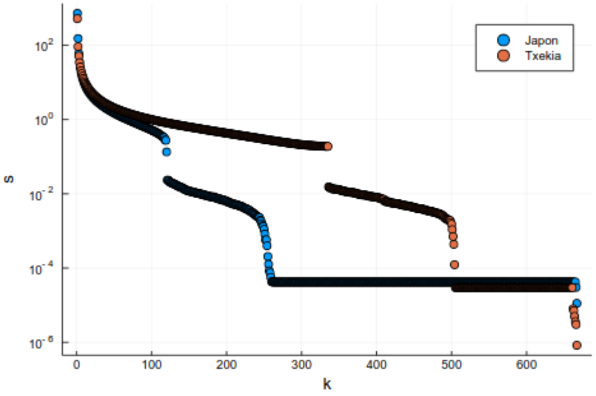
Oinarrizko adibideak

5. Adibidea









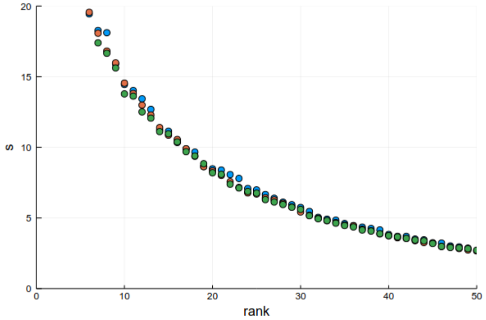
Errealitateko irudiak

Konprimitze ona lortzeko:

Elkarren ondoko pixelen kolorea antzekoa izatea behar dugu

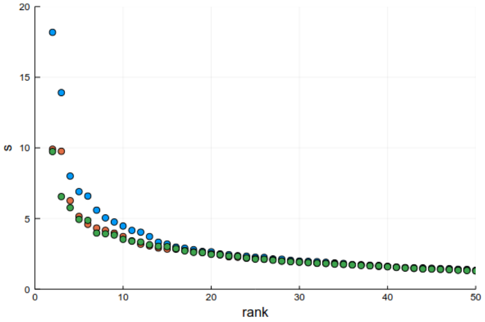
Komikia

4. Irudia

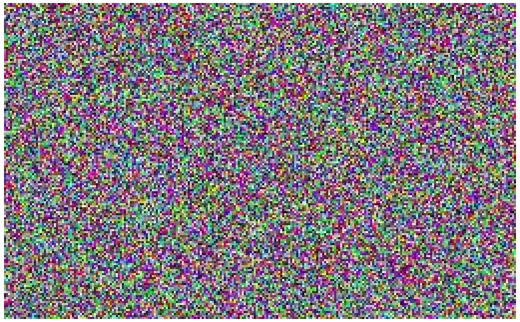


Errealitateko irudia

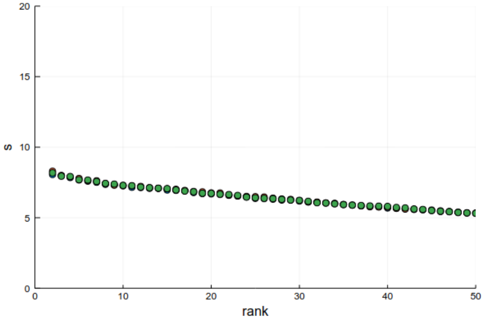
5. Irudia



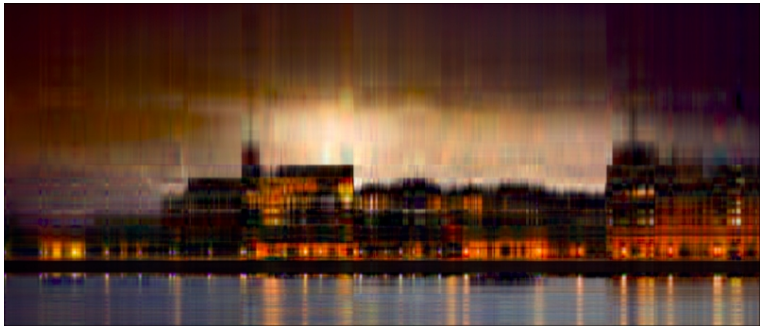
Ausazko zarata irudia



6. Irudia



Errealitateko irudiak



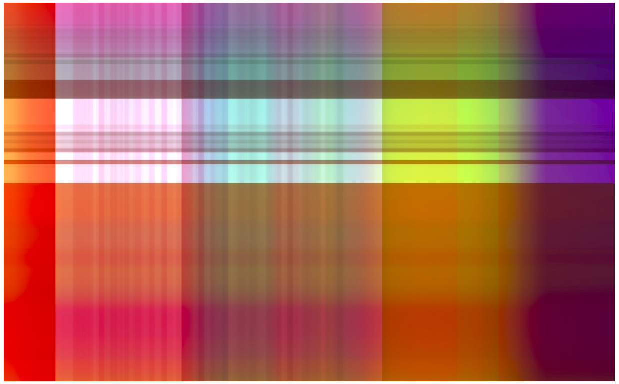
A_{10}

A_{50}

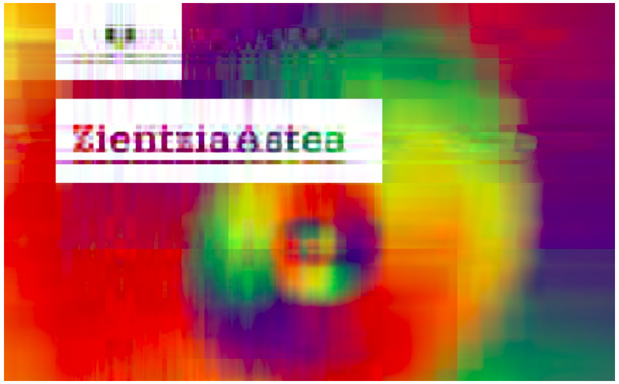
A_{30}

Konprimitu gabea

Errealitateko irudiak



A_1



A_{10}

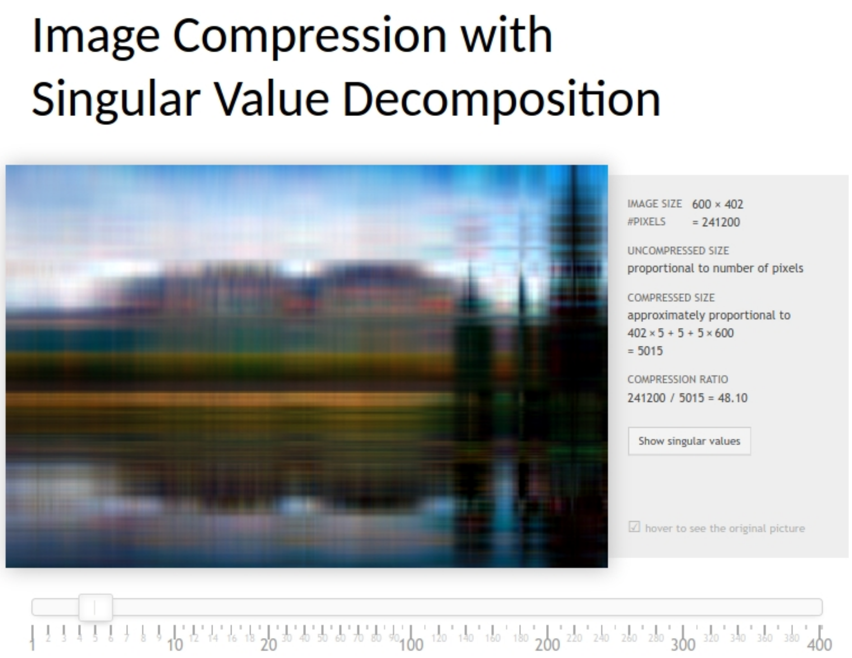
A_{40}

Konprimitu gabea

Errealitateko irudiak

Zuen irudiak konprimitzeko webgunea

- http://timbaumann.info/svd-image-compression-demo/



Errealitateko irudiak

1. Irudia

2. Irudia

3. Irudia

Erreferentziak

Irudien zerrenda:

- **[1. Irudia]**: Egilea: Pierre Dalous - Own work, CC BY-SA 3.0
  https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=20802692
- **[2. Irudia]**: Egilea: Senior Airman Joshua Strang / Public domain
  https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Polarlicht_2.jpg
- **[3. Irudia]**: Egilea: Antton Olariaga
- **[4. Irudia]**: Egilea: Antton Olariaga (Berria Egunkaria)
- **[5. Irudia]**: Egilea: David Gubler bahnbilder
  https://commons.wikimedia.org/wiki/File:FCAB_EMD_GT22CU-3_San_Pedro_-_Ascotan.jpg
- **[6. Irudia]**: Egilea: Ni neu (softwarez sortua)
- **[7. irudia]**: Egilea: Ezezaguna

Erreferentziak

[1] Introduction to Linear Algebra, Strang,G. -Wellesley – Cambridge Press (2017)

[2] Professor SVD (tribute to Gene Golub), Cleve Moler (2006)

[3] How are so many matrices of low rank in computational math?, Alex Townsend (2017)

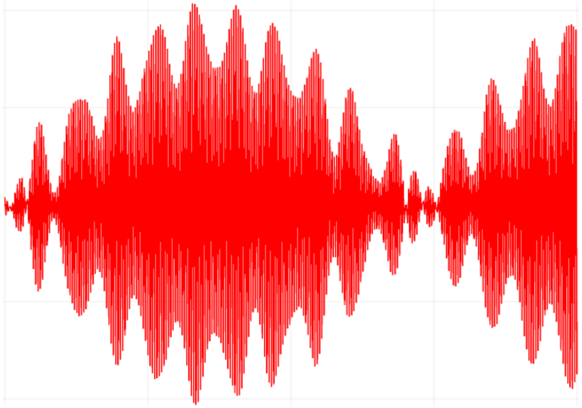
[4] Gilbert Strang: Singular Value Decomposition (2019) https://www.youtube.com/watch?v=YPe5OP7Clv4

[5] The Singular Value Decomposition, Nicholas J. Higham. The Princeton Companion to Applied Mathematics (2015)

[6] What is the Singular Values Decomposition?, Nicholas J. Higham. What is series. https://github.com/higham/what-is. (2020)

Aljebra linelaren aplikazio bat: irudiak konprimitzea

Eskerrik asko !!!!!



- https://github.com/mikelehu/Zientzia-Astea-2020
- mikel.antonana@ehu.eus