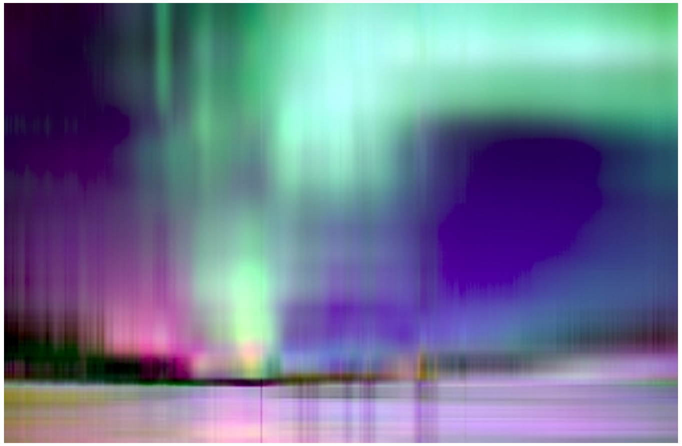
Aljebra linelaren aplikazio bat: irudiak konprimitzea

Zer dago irudi hauen atzean?



Aurkezpenaren atalak

- Zer da matrize bat?
- Zer da irudi bat?
- SVD: balio singularren deskonposaketa
- Oinarrizko adibideak
- Errealitateko irudiak

- Errefentziak

Zer da matrize bat?

Definizioa:

Lerro eta zutabe modura ordenaturiko elementuen multzo laukizuzena da, zeinetan hainbat eragiketa algebraiko definituta dauden. Matrizeak zenbaki asko objektu batean bildu eta modu egokian manipulatzeko aukera eskaintzen digu

Adibidea:

m=4 (lerro) x n=6 (zutabe) dituen matrizea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Bektoreak eta eskalarrak matrize partikularrak dira: zutabe bektorea m x 1, lerro bektorea 1 x n eta eskalarra 1 x 1

Edukia:

Maiz datuak matrize eran biltzen dira: n lagin eta bakoitzerako m aldagai biltzen dituena
Irudia pixel matrize handi bat da

Zer da matrize bat?

Matrizearen heina $rank(A) = r$

Heinak, A matrizearen **benetako** tamaina ematen digu

Heina 1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Heina 2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$rank(A) = 1 \implies A = \text{zutabea bider lerroa} = uv^T$$

Zer da irudi bat?

Definizioa

Irudia planoko laukizuzen bat da non laukizuzenaren P(x,y) puntu bakoitzak kolorea duen

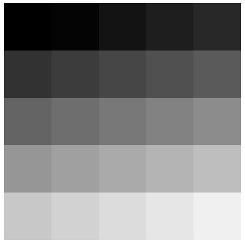
Irudia, gris-eskalen balioen matrize handi bat da eta   balio horrek pixel izena hartzen du

Pixel bat irudi baten unitate txikiena da

Zuri-beltzeko irudiak

Gris eskalen irudi bat m x n tamainako matrizea da eta elementu bakoitzak $0 \leq a_{ij} \leq 255$ arteko balioak hartzen ditu

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 20 & 30 & 40 \\ 50 & 60 & 70 & 80 & 90 \\ 100 & 110 & 120 & 130 & 140 \\ 150 & 160 & 170 & 180 & 190 \\ 200 & 210 & 220 & 230 & 255 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

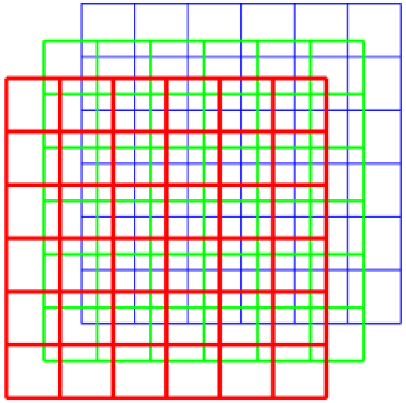


5 x 5   pixel irudia

Zer da irudi bat?

Irudiak koloredunak

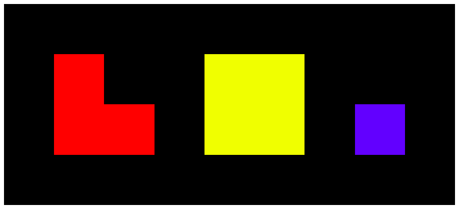
- Kolorea hiru osagaien konbinazioa da: gorria, berdea eta urdina (RGB)
- Hiru dimentsiotako matrizea



$$B = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&1&1&0&0&0 \\ 0&1&1&0&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$$



Zer da irudi bat?

Irudiak pisu handia du:

Bereizmen handiko irudi batek m=1080 x n=1920

3 x 8 x 1080 x 1920 = 49766400 bits = 48600 MB

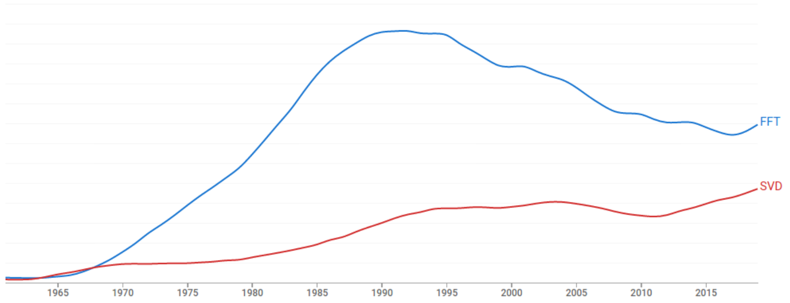
SVD: balio singularren deskonposaketa

Historia pixka bat:

- SVD-ren lehen erreferentziak : Beltrami 1873
- SVD kalkulatzeko lehen metodo fidagarria: Golub eta Kahan 1965
- Software matematikoetan erabilgarria: 1970 hamarkadan
- Gaur egun Datu-Zientzia arloan paper garrantzitsua jokatzen du

THE TOP10 ALGORITHMS FROM THE 20TH CENTURY

1946: The Metropolis Algorithm
1947: Symplex Method
1950: Krylov Subspace Method
1951: The Decompositional Approach to Matrix Computations
1957: The Fortran Optimizing Compiler
1959: QR Algorithm
1962: Quicksort
1965: Fast Fourier Transform
1977: Integer Relation Detection
1987: Fast Multipole Method



SVD: balio singularren deskonposaketa

Non da aplikagarria?

- SVD egungo arlo teknologiko askotan aplikatzen da

Irudien Prozesamendua, Aholku-Ingeniaritza (NetFlix, Amazon), Osagai Nagusien Analisia, Aurpegi-Errekonozimendu Sistemak, Gene-Adierazpena, e.a.

- Adibide honek ilustratzen duen SVD irudi konprimitzea orokorrean, JPEG-ren bidez eraginkorrahoa gertatzen da

SVD: balio singularren deskonposaketa

A-ren balio singularren deskonposaketa: $A = U\Sigma V^T$

A m x n tamainako matrizea eta $rank(A) = r$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & .. & u_r & .. & u_m \end{bmatrix}}_{m \times m} \underbrace{\left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & & 0 \\ & \ddots & & 0 \\ & & \sigma_r & 0 \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right]}_{m \times n} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 & .. & v_r & .. & v_n \end{bmatrix}^T}_{n \times n}$$

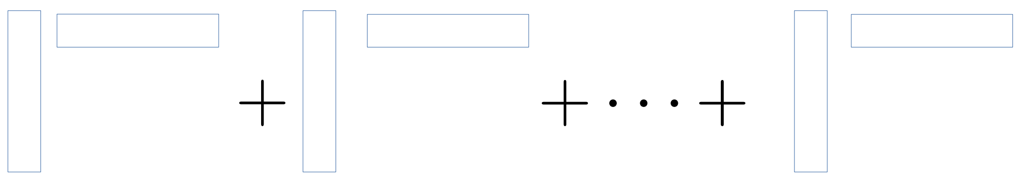
$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\sqrt{5} & \\ & \sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

SVD: balio singularren deskonposaketa

Datu-zientziarako garrantzikoa:

SVD-k matrizea zati bakanetan banatzen du

$$A = U\Sigma V^T = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \cdots + \sigma_r u_r v_r^T$$



Zati hauek garrantziaren arabera lortzen dira $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \sigma_r > 0$

Zati garrantzitsuena $\sigma_1 u_1 v_1^T$

$A_k = \sigma_1 u_1 v_1^T + \cdots + \sigma_k u_k v_k^T$ k heineko A-ren hurbilketa hoberena:

$$rank(B) = k \implies ||A - A_k|| \leq ||A - B||$$

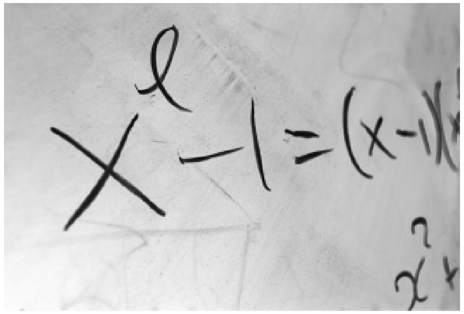
SVD: balio singularren deskonposaketa

Adibidea: SVD-ren gaitasuna ilustratzeko

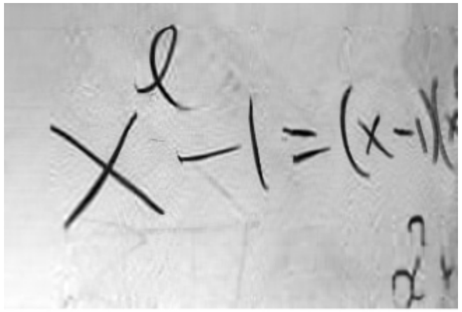
- Kontsidera dezagun 1a.irudiko zuri-beltzeko eta 1067x 1600 tamainako irudia
- Balio singularrak 8.4 x 10^4 eta 1.3 x 10 tartean daude
- Lehen 40 balio singularrak bakarrik erabiliz

$$A_{40} = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_1 u_1 v_1^T + \cdots + \sigma_{40} u_{40} v_{40}^T \color{red}{+ \sigma_{40} u_{40} v_{40}^T + \sigma_{41} u_{41} v_{41}^T + \ldots}$$

1b. irudia lortzen dugu: jatorrizko matrizearen %6-ren edukiera



1a. Irudia



1b.Irudia

SVD: balio singularren deskonposaketa

Demagun 1000 x 1000 matrizea (pixelak)

Konprimitu gabe = m x n => 1000 x 1000= 10^6

Konprimituta = m*k+k+k*n= k*(1+m+n) = k*(2n+1)~ k*(2000)

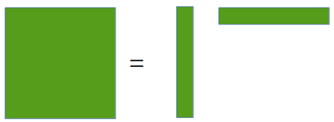
Oinarrizko adibideak

Herrialdeetako ikurrinak

wikipedia: Collection-national-flags.png

Oinarrizko adibideak

1. Adibidea (heina=1)

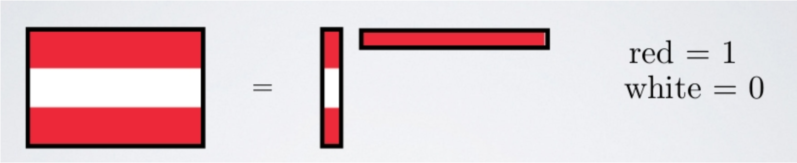


$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- 6 x 6 pixel $\Longrightarrow$ 6+6
- 300 x 300 pixel $\Longrightarrow$ 600

Oinarrizko adibideak

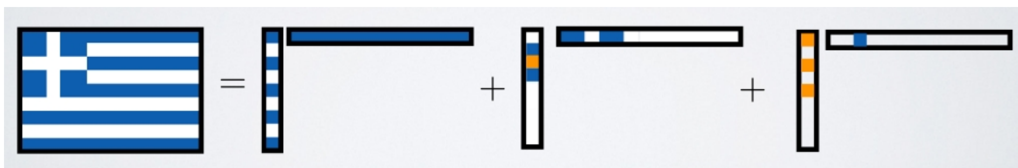
2. Adibidea (heina=1)



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Oinarrizko adibideak

3. Adibidea (heina=3)



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\dots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

300 x 300 pixel $\Rightarrow$ 1800

Oinarrizko adibideak

4. Adibidea (heina osoa)

$\Rightarrow \quad heina = 6$!!!

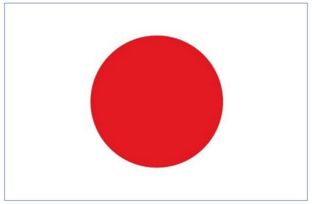
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \sigma_3 u_3 v_3^T + \sigma_4 u_4 v_4^T + \sigma_5 u_5 v_5^T + \sigma_6 u_6 v_6^T$$

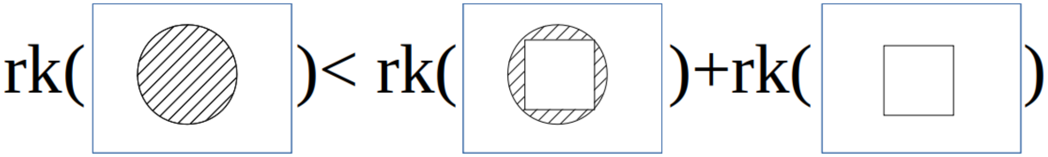
$$A_k = \sigma_1 u_1 v_1^T + \cdots + \sigma_k u_k v_k^T$$

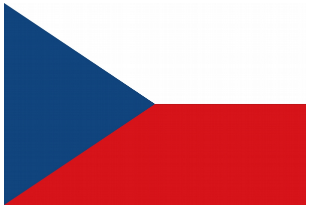
A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7

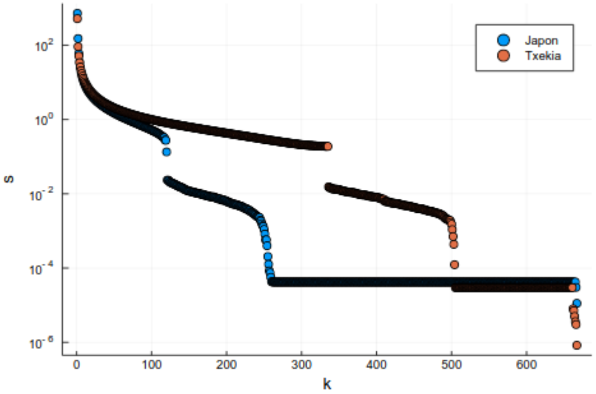
Oinarrizko adibideak

5. Adibidea





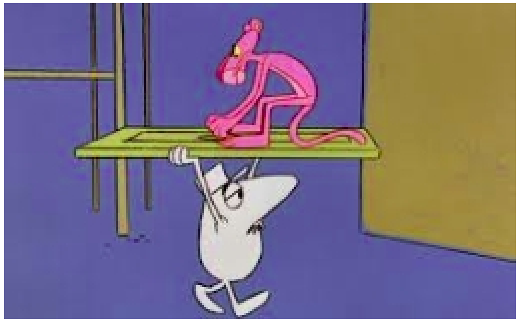
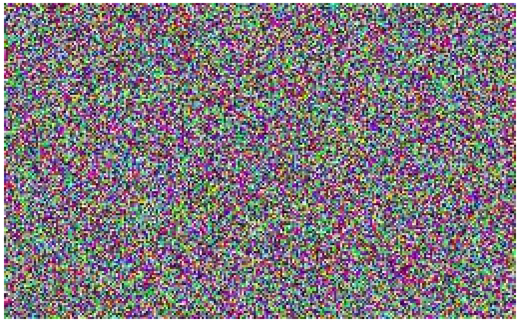
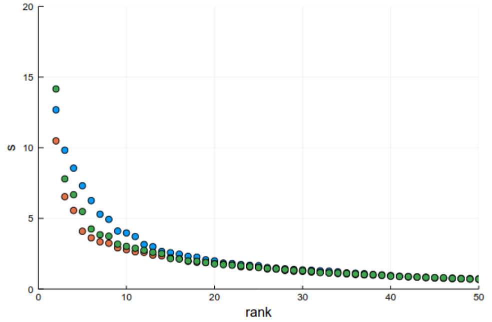
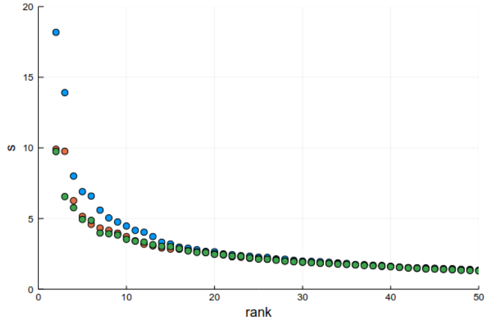
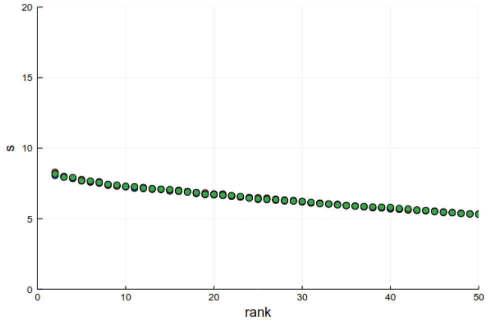




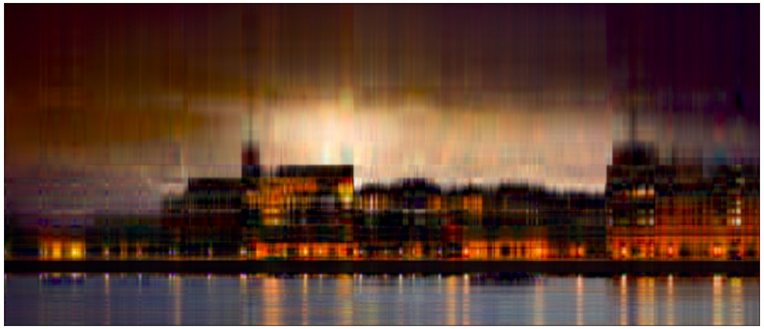
Errealitateko irudiak

Balio singularrak

Elkarren ondoko pixelen kolorea antzekoa izatea behar dugu

Marrazki biziduna	**Errealitateko irudia**	**Ausazko zarata irudia**
		
		

Errealitateko irudiak



A_{10}

A_{50}

A_{30}

Konprimitu gabea

Errealitateko irudiak

https://commons.wikimedia.org/

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Polarlicht_2.jpg

Erreferentziak

[1] Introduction to Linear Algebra, Strang,G. -Wellesley – Cambridge Press

[2] Professor SVD, Cleve Moler tribute to Gene Golub

[3] How are so many matrices of low rank in computational math?, Alex Townsend

[4] Gilbert Strang: Singular Value Decomposition https://www.youtube.com/watch?v=YPe5OP7Clv4

[5] The Singular Value Decomposition, Nicholas J. Higham, The Princeton Companion to Applied Mathematics (2015)