Aljebra linealaren aplikazio bat: irudiak konprimitzea

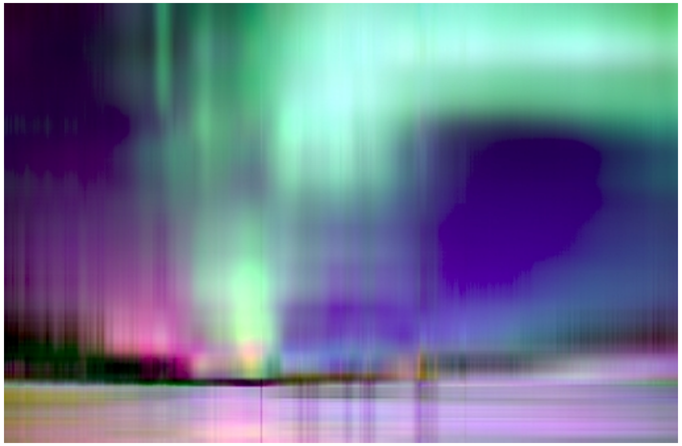
- Mikel Antoñana Otaño
  Saila: Matematika Aplikatua
  EHU/UPV Gipuzkoako Ingeniaritza Eskola

Donostian, 2020ko azaroaren 2an

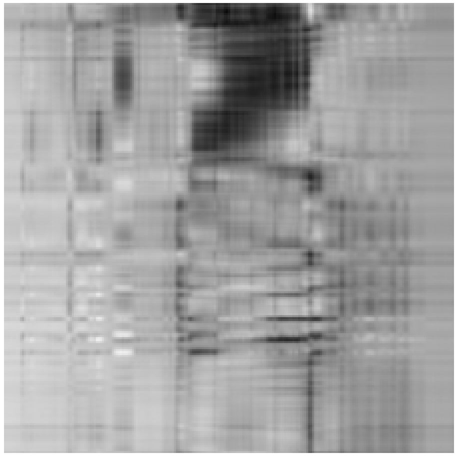
Aljebra linealaren aplikazio bat: irudiak konprimitzea

Zer dago irudi hauen atzean?

1. Irudia



2. Irudia



3. Irudia

Aurkezpenaren atalak

- Definizioak
- SVD: balio singularren deskonposaketa
- Adibideak
- Erreferentziak

Definizioak : matrizea

Zer da matrize bat?

https://eu.wikipedia.org/wiki/Matrize

- Matematikan, **matrizea** zenbakiz osaturiko errenkada (edo zutabe) multzo laukizuzen bat da, beste matrize batekin batera batu eta biderkatu egin daitekeena

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \qquad A^2,\ A^T - 2A, \ldots$$

m=3 (lerro) x n=3 (zutabe)

- Bektoreak eta eskalarrak matrizeen kasu partikularrak dira:
  zutabe bektorea m x 1, lerro bektorea 1 x n eta eskalarra 1 x 1
- Maiz datuak matrize eran biltzen dira: n lagin eta bakoitzerako m aldagai biltzen dituena
- Irudia: matrize handi bat da

Definizioak: matrizea

Matrizearen heina $rank(A) = s$

- Heinak, A matrizearen **benetako** tamaina ematen digu

1-Adibidea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

2-Adibidea

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

- $rank(A) = 1 \implies A = \text{zutabea bider lerroa} = uv^T$
  $rank(B) = 2 \implies B = \text{heina bat duten bi matrizeen batura}$

Definizioak: irudia

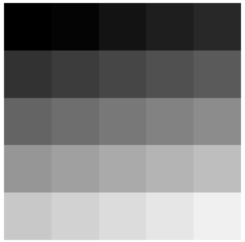
Zer da irudi bat?

- Zenbakizko balioen matrize handi bat da (balioa ~ pixel)
- Pixel bat irudi baten unitate txikiena da
- Irudi batek pixu handia du (MB)

Zuri-beltzeko irudiak

- m x n tamainako matrizearen elementu bakoitzak $0 \leq a_{ij} \leq 255$ arteko balioak hartzen ditu

$$\begin{bmatrix} 0 & 10 & 20 & 30 & 40 \\ 50 & 60 & 70 & 80 & 90 \\ 100 & 110 & 120 & 130 & 140 \\ 150 & 160 & 170 & 180 & 190 \\ 200 & 210 & 220 & 230 & 255 \end{bmatrix} \Rightarrow$$



$a_{ij} = 255 = 11111111 \text{ zuria}$

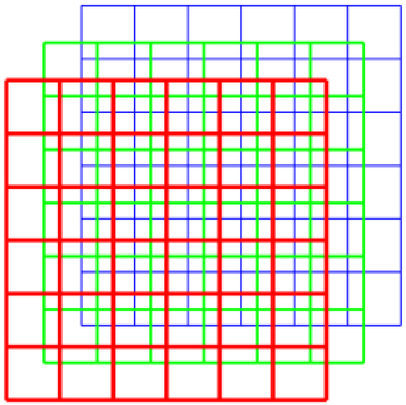
$a_{ij} = 0 \text{ beltza}$

5 x5 pixel irudia

Definizioak: irudia

Koloredun irudiak

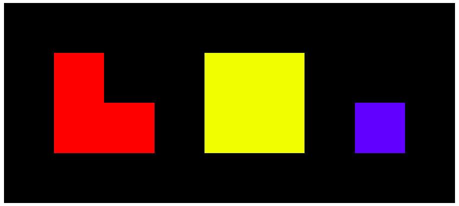
- Kolorea hiru osagaien konbinazioa da: gorria, berdea eta urdina (RGB)
- Hiru dimentsiotako matrizea



$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



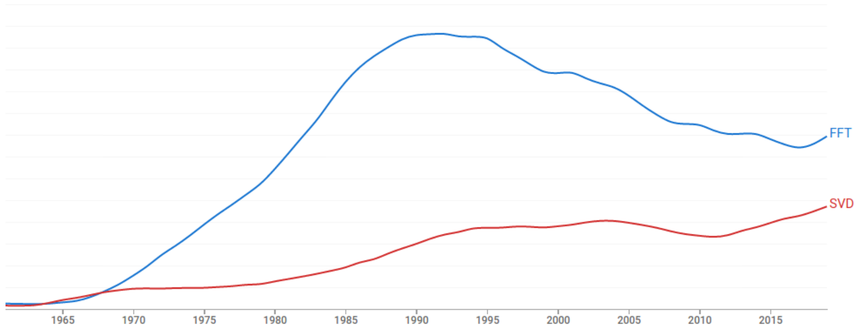
SVD: balio singularren deskonposaketa

Historia pixka bat:

- SVD-ren lehen aipamena : **Beltrami 1873**
- SVD kalkulatzeko lehen metodo fidagarria: **Golub eta Kahan 1965**
- Matlab softwarean erabilgarria: **1970 hamarkadan**
- **Gaur egun**, Datu-Zientzien arloan paper garrantzitsua jokatzen du

The Top10 Algorithms From 20th Century (Alex Townsend)

1946: The Metropolis Algorithm
1947: Symplex Method
1950: Krylov Subspace Method
1951: The Decompositional Approach to Matrix Computations
1957: The Fortran Optimizing Compiler
1959: QR Algorithm
1962: Quicksort
1965: Fast Fourier Transform
1977: Integer Relation Detection
1987: Fast Multipole Method



FFT vs SVD (Google ngram)

SVD: balio singularren deskonposaketa

Non da aplikagarria?

- SVD egungo arlo teknologiko askotan aplikatzen da:

Irudien Prozesamendua
Aholku-Ingeniaritza (NetFlix, Amazon)
Aurpegi-Errekonozimendu Sistemak

Osagai Nagusien Analisia
Gene-Adierazpena

- SVD potentziala ilustratzeko, irudien konprimitzea erakutsiko dugu

- * oharra: JPEG algoritmoaren bidezko irudien konprimitzea eraginkorragoa da !!!

SVD: balio singularren deskonposaketa

A-ren balio singularren deskonposaketa: $\boxed{A = U\Sigma V^T}$

- A m x n tamainako matrizea eta $rank(A) = s$

$$
A = \begin{bmatrix} u_1 & .. & u_s & .. & u_m \end{bmatrix}
\left[\begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & & 0 \\ & \ddots & & 0 \\ & & \sigma_s & 0 \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right]
\begin{bmatrix} v_1 & .. & v_s & .. & v_n \end{bmatrix}^T
$$

$$
m \times n \;=\; m \times m \qquad m \times n \qquad n \times n
$$

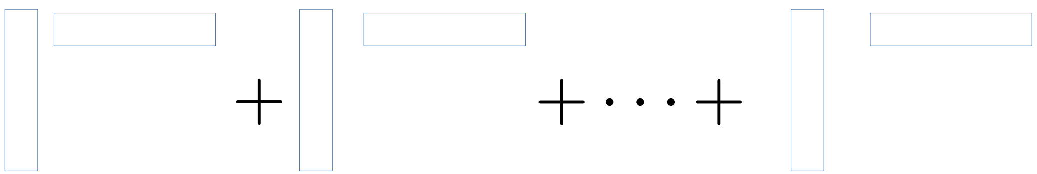
- Adibidea

$$
\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\sqrt{5} & \\ & \sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}
$$

SVD: balio singularren deskonposaketa

SVD-k matrizea zati bakanetan banatzen du

$$A = U\Sigma V^T = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T + \cdots + \sigma_s u_s v_s^T$$



- Garrantzi handienetik txikienera: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \sigma_s > 0$
  Zati garrantzitsuena $\sigma_1 u_1 v_1^T$

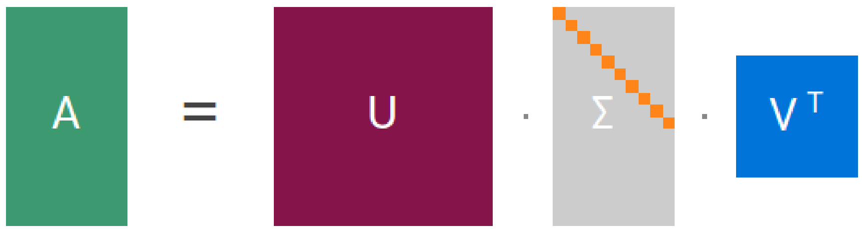
- $A_k = \sigma_1 u_1 v_1^T + \cdots + \sigma_k u_k v_k^T$ k heineko A-ren hurbilketa hoberena:

$$rank(B) = k \implies ||A - A_k|| \leq ||A - B||$$

SVD: balio singularren deskonposaketa

Demagun 1000 x 1000 matrizea (pixelak)

Konprimitu gabe = m x n => 1000 x 1000= 10^6



Konprimituta = m*k+k+k*n= k*(1+m+n) = k*(2n+1)~ k*(2000)

$$A_k = \boxed{\sigma_1 u_1 v_1^T + \cdots + \sigma_k u_k v_k^T} + \sigma_{k+1} u_{k+1} v_{k+1}^T + \ldots$$

Errealitateko irudiak

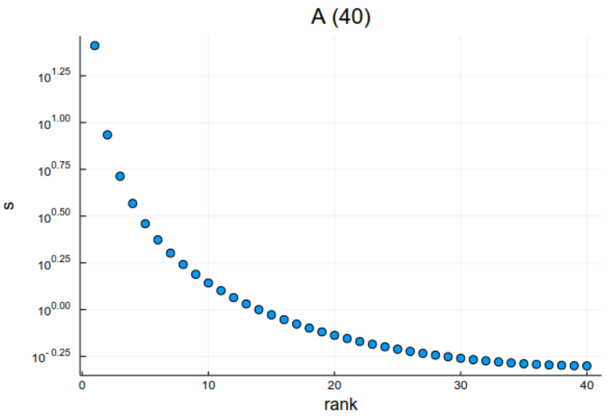
Txikitze abiadura: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \sigma_s > 0$

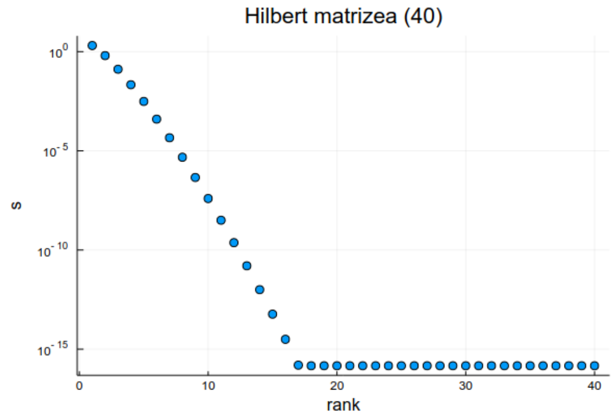
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

VS

Hilbert Matrizea:

$$H_n = (h_{ij}), \; h_{ij} = 1/(i+j-1)$$





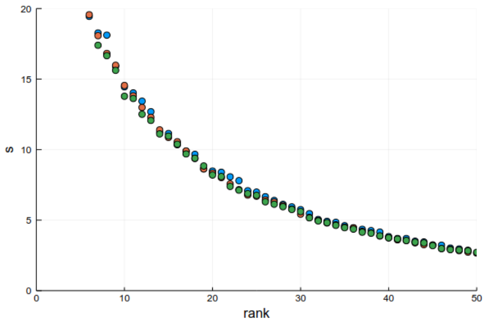
Errealitateko irudiak

Konprimitze ona lortzeko:

Elkarren ondoko pixelen kolorea antzekoa izatea lagungarria da

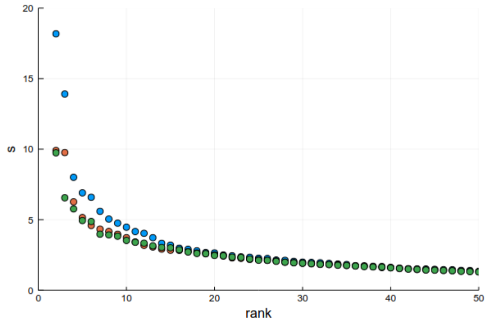
Komikia

5. Irudia

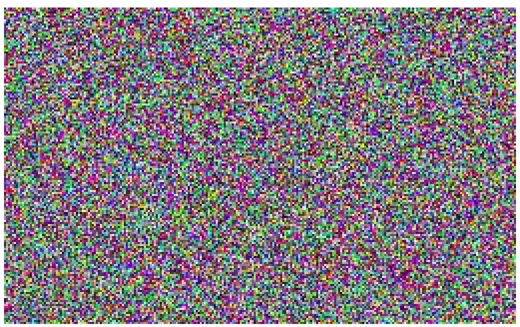


Errealitateko irudia

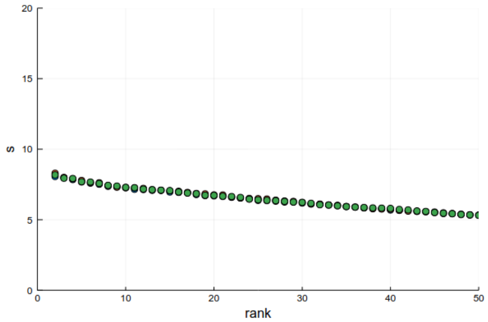
6. Irudia



Ausazko zarata irudia



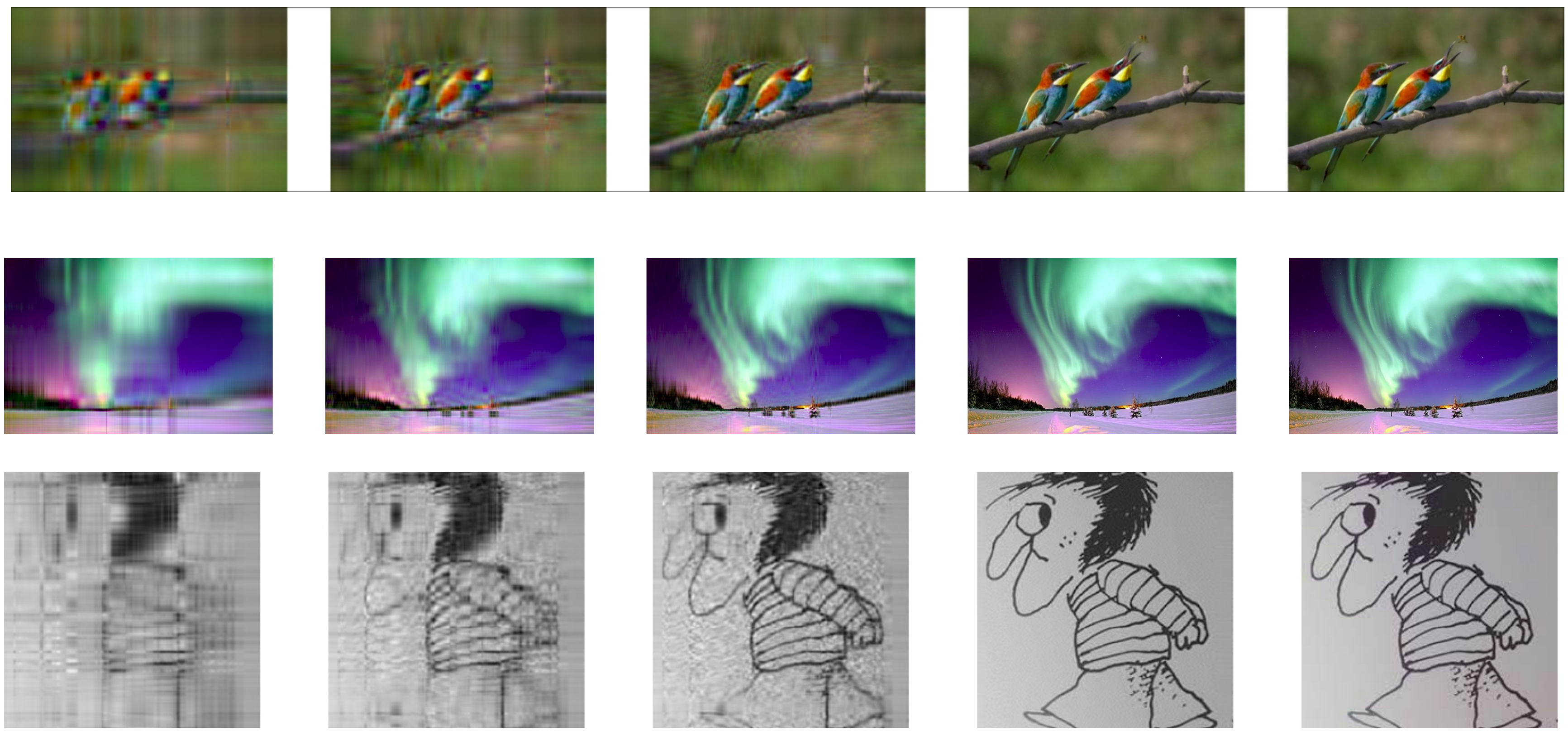
7. Irudia



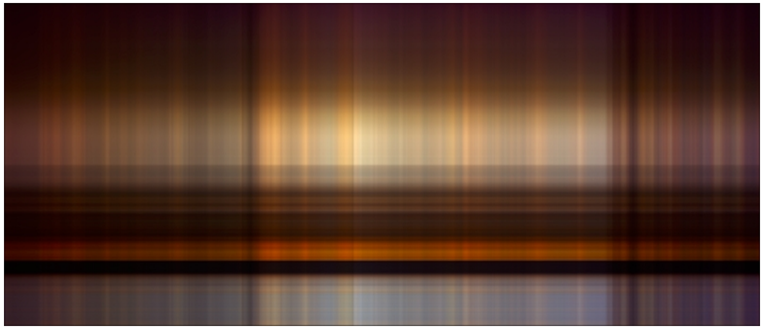
Errealitateko irudiak

Irudiak $$A = U\Sigma V^T \;\Rightarrow\; A_k = \sigma_1 u_1 v_1^T + \cdots + \sigma_k u_k v_k^T$$

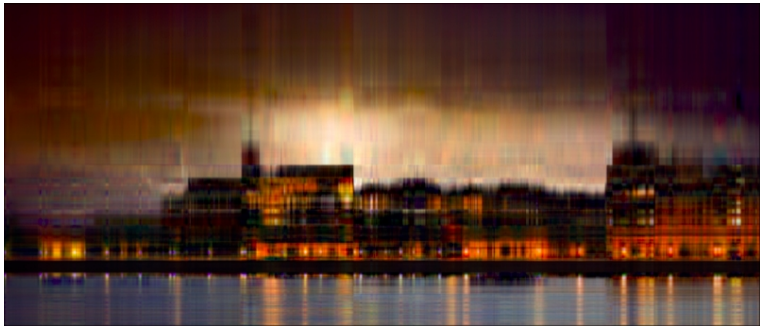
A_5 A_{10} A_{20} A_{100} A



Errealitateko irudiak



A_1

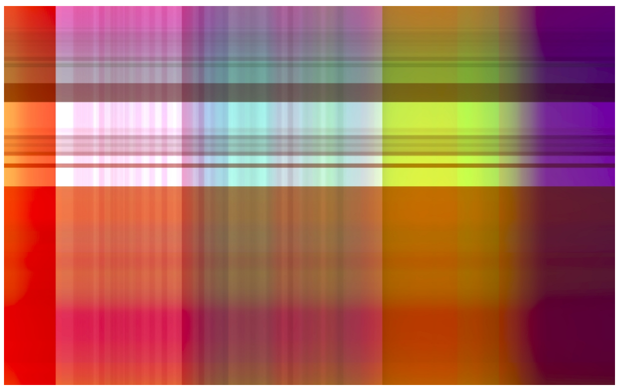


A_{30}

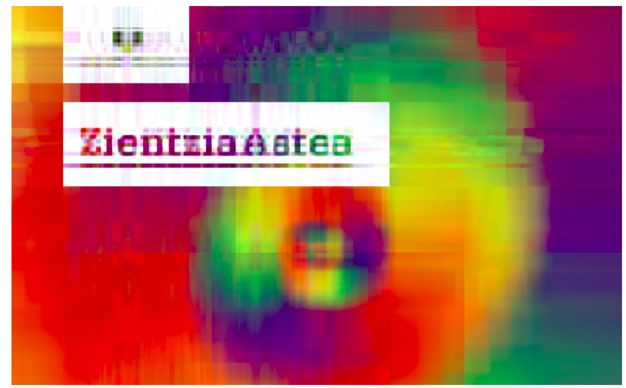
A_{50}

8. Irudia: konprimitu gabea

Errealitateko irudiak



A_1



A_{10}

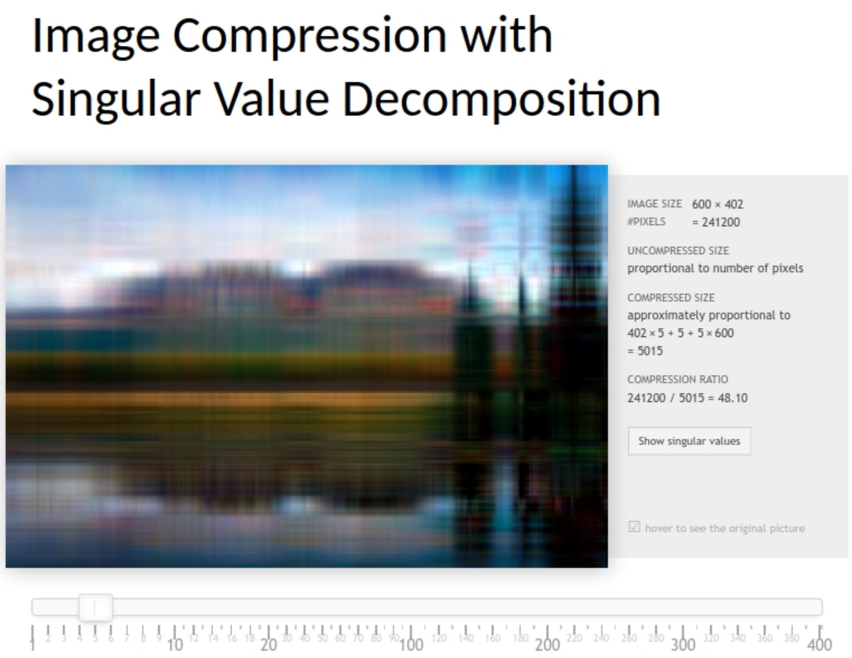
A_{40}

9. Irudia: konprimitu gabea

Errealitateko irudiak

Zuen irudiak konprimitzeko webgunea

- http://timbaumann.info/svd-image-compression-demo/



Erreferentziak

Irudien zerrenda:

- **[1. Irudia]**: Egilea: Pierre Dalous - Own work, CC BY-SA 3.0
  https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=20802692
- **[2. Irudia]**: Egilea: Senior Airman Joshua Strang / Public domain
  https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Polarlicht_2.jpg
- **[3. Irudia]**: Wikipedia: Collection-national-flags.png
- **[4. Irudia]**: Egilea: Antton Olariaga
- **[5. Irudia]**: Egilea: Antton Olariaga (Berria Egunkaria)
- **[6. Irudia]**: Egilea: David Gubler bahnbilder
  https://commons.wikimedia.org/wiki/File:FCAB_EMD_GT22CU-3_San_Pedro_-_Ascotan.jpg
- **[7. Irudia]**: Egilea: Ni neu (softwarez sortua)
- **[8. irudia]**: Egilea: Ezezaguna
- **[9. irudia]**: UPV/EHU Zientzia-Astea

Erreferentziak

[1] Introduction to Linear Algebra, Strang,G. -Wellesley – Cambridge Press (2017)

[2] Professor SVD (tribute to Gene Golub), Cleve Moler (2006)

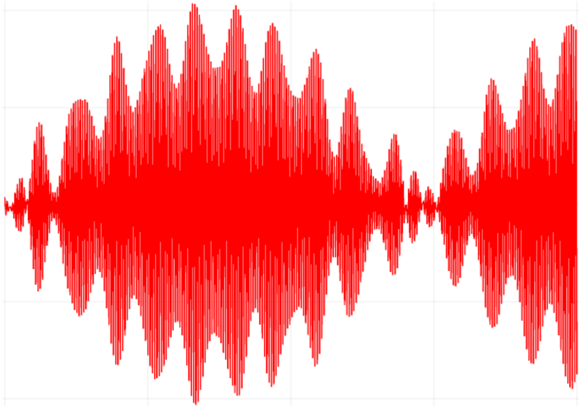
[3] How are so many matrices of low rank in computational math?, Alex Townsend (2017)

[4] Gilbert Strang: Singular Value Decomposition (2019) https://www.youtube.com/watch?v=YPe5OP7Clv4

[5] The Singular Value Decomposition, Nicholas J. Higham. The Princeton Companion to Applied Mathematics (2015)

[6] What is the Singular Values Decomposition?, Nicholas J. Higham. What is series. https://github.com/higham/what-is. (2020)

Aljebra linealaren aplikazio bat: irudiak konprimitzea



Eskerrik asko !!!!!

- https://github.com/mikelehu/Zientzia-Astea-2020
- mikel.antonana@ehu.eus