Придумайте такое двумерное случайное распределение $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, что для любых a и b случайная величина $\varkappa = a\xi_1 + b\xi_2$ имеет плотность тогда и только тогда, когда $ab \neq 0$. *Распределение в ответе не должно зависеть от a и b!*

Решение.

Двумерное случайное распределение $(\xi_1; \xi_2) \in R^2$ задаётся плотностью распределения $f_{\xi_1,\xi_2}(x; y)$, которая удовлетворяет условию нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f_{\xi_1,\xi_2}(x; y) = 1 .$$

При этом плотности распределения случайных величин ξ_1 и ξ_1 выражаются интегралами:

$$g_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1,\xi_2}(x; y)\, dy , \tag{1}$$

$$h_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1,\xi_2}(x; y)\, dx . \tag{2}$$

Допустим, что случайная величина $\chi = a\xi_1 + b\xi_2$ имеет плотность только в случае $ab \neq 0$. Пусть $a = 1$, $b = 0$, тогда согласно условию случайная величина $\chi = a\xi_1 + b\xi_2 = 1 \cdot \xi_1 + 0 \cdot \xi_2 = \xi_1$ не имеет плотности распределения (т.е., не является случайной величиной или её плотность распределения тождественно равна нулю). Тем не менее, случайная величина $\chi = \xi_1$ имеет плотность распределения, которая задавaётся формулой (1). Значит, условие задачи не может быть удовлетворено.

Таким образом, двумерной случайной величины, удовлетворяющей условию задачи, не существует.