Correctievoorschrift VWO

2016

tijdvak 2

wiskunde B

Het correctievoorschrift bestaat uit:

- 1 Regels voor de beoordeling
- 2 Algemene regels
- 3 Vakspecifieke regels
- 4 Beoordelingsmodel
- 5 Inzenden scores

1 Regels voor de beoordeling

Het werk van de kandidaten wordt beoordeeld met inachtneming van de artikelen 41 en 42 van het Eindexamenbesluit VO.

Voorts heeft het College voor Toetsen en Examens op grond van artikel 2 lid 2d van de Wet College voor toetsen en examens de Regeling beoordelingsnormen en bijbehorende scores centraal examen vastgesteld.

Voor de beoordeling zijn de volgende aspecten van de artikelen 36, 41, 41a en 42 van het Eindexamenbesluit VO van belang:

- 1 De directeur doet het gemaakte werk met een exemplaar van de opgaven, de beoordelingsnormen en het proces-verbaal van het examen toekomen aan de examinator. Deze kijkt het werk na en zendt het met zijn beoordeling aan de directeur. De examinator past de beoordelingsnormen en de regels voor het toekennen van scorepunten toe die zijn gegeven door het College voor Toetsen en Examens.
- De directeur doet de van de examinator ontvangen stukken met een exemplaar van de opgaven, de beoordelingsnormen, het proces-verbaal en de regels voor het bepalen van de score onverwijld aan de directeur van de school van de gecommitteerde toekomen. Deze stelt het ter hand aan de gecommitteerde.

- De gecommitteerde beoordeelt het werk zo spoedig mogelijk en past de beoordelingsnormen en de regels voor het bepalen van de score toe die zijn gegeven door het College voor Toetsen en Examens.

 De gecommitteerde voegt bij het gecorrigeerde werk een verklaring betreffende de verrichte correctie. Deze verklaring wordt mede ondertekend door het bevoegd gezag van de gecommitteerde.
- 4 De examinator en de gecommitteerde stellen in onderling overleg het behaalde aantal scorepunten voor het centraal examen vast.
- Indien de examinator en de gecommitteerde daarbij niet tot overeenstemming komen, wordt het geschil voorgelegd aan het bevoegd gezag van de gecommitteerde. Dit bevoegd gezag kan hierover in overleg treden met het bevoegd gezag van de examinator. Indien het geschil niet kan worden beslecht, wordt hiervan melding gemaakt aan de inspectie. De inspectie kan een derde onafhankelijke corrector aanwijzen. De beoordeling van deze derde corrector komt in de plaats van de eerdere beoordelingen.

2 Algemene regels

Voor de beoordeling van het examenwerk zijn de volgende bepalingen uit de regeling van het College voor Toetsen en Examens van toepassing:

- 1 De examinator vermeldt op een lijst de namen en/of nummers van de kandidaten, het aan iedere kandidaat voor iedere vraag toegekende aantal scorepunten en het totaal aantal scorepunten van iedere kandidaat.
- Voor het antwoord op een vraag worden door de examinator en door de gecommitteerde scorepunten toegekend, in overeenstemming met het bij de toets behorende correctievoorschrift. Scorepunten zijn de getallen 0, 1, 2, ..., n, waarbij n het maximaal te behalen aantal scorepunten voor een vraag is. Andere scorepunten die geen gehele getallen zijn, of een score minder dan 0 zijn niet geoorloofd.
- 3 Scorepunten worden toegekend met inachtneming van de volgende regels:
 - 3.1 indien een vraag volledig juist is beantwoord, wordt het maximaal te behalen aantal scorepunten toegekend;
 - 3.2 indien een vraag gedeeltelijk juist is beantwoord, wordt een deel van de te behalen scorepunten toegekend in overeenstemming met het beoordelingsmodel;
 - 3.3 indien een antwoord op een open vraag niet in het beoordelingsmodel voorkomt en dit antwoord op grond van aantoonbare, vakinhoudelijke argumenten als juist of gedeeltelijk juist aangemerkt kan worden, moeten scorepunten worden toegekend naar analogie of in de geest van het beoordelingsmodel;
 - 3.4 indien slechts één voorbeeld, reden, uitwerking, citaat of andersoortig antwoord gevraagd wordt, wordt uitsluitend het eerstgegeven antwoord beoordeeld;
 - 3.5 indien meer dan één voorbeeld, reden, uitwerking, citaat of andersoortig antwoord gevraagd wordt, worden uitsluitend de eerstgegeven antwoorden beoordeeld, tot maximaal het gevraagde aantal;
 - 3.6 indien in een antwoord een gevraagde verklaring of uitleg of afleiding of berekening ontbreekt dan wel foutief is, worden 0 scorepunten toegekend tenzij in het beoordelingsmodel anders is aangegeven;

- 3.7 indien in het beoordelingsmodel verschillende mogelijkheden zijn opgenomen, gescheiden door het teken /, gelden deze mogelijkheden als verschillende formuleringen van hetzelfde antwoord of onderdeel van dat antwoord;
- 3.8 indien in het beoordelingsmodel een gedeelte van het antwoord tussen haakjes staat, behoeft dit gedeelte niet in het antwoord van de kandidaat voor te komen;
- 3.9 indien een kandidaat op grond van een algemeen geldende woordbetekenis, zoals bijvoorbeeld vermeld in een woordenboek, een antwoord geeft dat vakinhoudelijk onjuist is, worden aan dat antwoord geen scorepunten toegekend, of tenminste niet de scorepunten die met de vakinhoudelijke onjuistheid gemoeid zijn.
- 4 Het juiste antwoord op een meerkeuzevraag is de hoofdletter die behoort bij de juiste keuzemogelijkheid. Voor een juist antwoord op een meerkeuzevraag wordt het in het beoordelingsmodel vermelde aantal scorepunten toegekend. Voor elk ander antwoord worden geen scorepunten toegekend. Indien meer dan één antwoord gegeven is, worden eveneens geen scorepunten toegekend.
- 5 Een fout mag in de uitwerking van een vraag maar één keer worden aangerekend, tenzij daardoor de vraag aanzienlijk vereenvoudigd wordt en/of tenzij in het beoordelingsmodel anders is vermeld.
- 6 Een zelfde fout in de beantwoording van verschillende vragen moet steeds opnieuw worden aangerekend, tenzij in het beoordelingsmodel anders is vermeld.
- Indien de examinator of de gecommitteerde meent dat in een examen of in het beoordelingsmodel bij dat examen een fout of onvolkomenheid zit, beoordeelt hij het werk van de kandidaten alsof examen en beoordelingsmodel juist zijn. Hij kan de fout of onvolkomenheid mededelen aan het College voor Toetsen en Examens. Het is niet toegestaan zelfstandig af te wijken van het beoordelingsmodel. Met een eventuele fout wordt bij de definitieve normering van het examen rekening gehouden.
- 8 Scorepunten worden met inachtneming van het correctievoorschrift toegekend op grond van het door de kandidaat gegeven antwoord op iedere vraag. Er worden geen scorepunten vooraf gegeven.
- 9 Het cijfer voor het centraal examen wordt als volgt verkregen. Eerste en tweede corrector stellen de score voor iedere kandidaat vast. Deze score wordt meegedeeld aan de directeur. De directeur stelt het cijfer voor het centraal examen vast op basis van de regels voor omzetting van score naar cijfer.
- NB1 Het College voor Toetsen en Examens heeft de correctievoorschriften bij regeling vastgesteld. Het correctievoorschrift is een zogeheten algemeen verbindend voorschrift en valt onder wet- en regelgeving die van overheidswege wordt verstrekt. De corrector mag dus niet afwijken van het correctievoorschrift.
- NB2 Het aangeven van de onvolkomenheden op het werk en/of het noteren van de behaalde scores bij de vraag is toegestaan, maar niet verplicht.

 Evenmin is er een standaardformulier voorgeschreven voor de vermelding van de scores van de kandidaten.

 Het vermelden van het schoolevamensijfer is toegestaan, maar niet verplicht

Het vermelden van het schoolexamencijfer is toegestaan, maar niet verplicht. Binnen de ruimte die de regelgeving biedt, kunnen scholen afzonderlijk of in gezamenlijk overleg keuzes maken.

NB3 Als het College voor Toetsen en Examens vaststelt dat een centraal examen een onvolkomenheid bevat, kan het besluiten tot een aanvulling op het correctievoorschrift. Een aanvulling op het correctievoorschrift wordt zo spoedig mogelijk nadat de onvolkomenheid is vastgesteld via Examenblad.nl verstuurd aan de examensecretarissen.

Soms komt een onvolkomenheid pas geruime tijd na de afname aan het licht. In die gevallen vermeldt de aanvulling:

NB

Als het werk al naar de tweede corrector is gezonden, past de tweede corrector deze aanvulling op het correctievoorschrift toe.

Een onvolkomenheid kan ook op een tijdstip geconstateerd worden dat een aanvulling op het correctievoorschrift te laat zou komen. In dat geval houdt het College voor Toetsen en Examens bij de vaststelling van de N-term rekening met de onvolkomenheid.

3 Vakspecifieke regels

Voor dit examen kunnen maximaal 76 scorepunten worden behaald.

Voor dit examen zijn de volgende vakspecifieke regels vastgesteld:

- 1 Voor elke rekenfout of verschrijving in de berekening wordt 1 scorepunt in mindering gebracht tot het maximum van het aantal scorepunten dat voor dat deel van die vraag kan worden gegeven.
- 2 De algemene regel 3.6 geldt ook bij de vragen waarbij de kandidaten de grafische rekenmachine gebruiken. Bij de betreffende vragen geven de kandidaten een toelichting waaruit blijkt hoe zij de GR hebben gebruikt.

4 Beoordelingsmodel

Vraag

Antwoord

Scores

Parabolen met gemeenschappelijke raaklijn

1 maximumscore 4

•
$$f_p(0) = p^2 + 2p = 0$$

•
$$p(p+2) = 0$$
 geeft $p = 0$ of $p = -2$

•
$$p = 0$$
 geeft $f_0(x) = x^2$ met top $(0, 0)$

•
$$p = -2$$
 geeft $f_{-2}(x) = (x+2)^2 - 4$ met top $(-2, -4)$

2 maximumscore 4

• Het punt
$$(p+1; 2p+1)$$
 ligt op k want $2p+1=2(p+1)-1$

• Het punt (p+1; 2p+1) ligt op de grafiek van f_p want

$$f_p(p+1) = 2p+1$$

•
$$f_p'(x) = 2(x-p)$$

• $f_p'(p+1) = 2$ en dit is ook de richtingscoëfficiënt van k(dus (p+1; 2p+1) is het raakpunt)

of

• Voor het gemeenschappelijke punt geldt
$$(x-p)^2 + 2p = 2x-1$$

• Uitwerken geeft
$$x^2 - (2p+2)x + p^2 + 2p + 1 = 0$$

• De discriminant van deze vergelijking is $(-(2p+2))^2 - 4(p^2 + 2p + 1) = 0$ (dus het gemeenschappelijke punt is

$$(-(2p+2))^{-4}(p^{2}+2p+1)=0$$
 (dus net gemeenschappenjke punt is een raakpunt)

•
$$x = \frac{2p+2}{2} = p+1$$
 en $y = 2(p+1)-1 = 2p+1$
(dus $(p+1; 2p+1)$ is het raakpunt)

of

•
$$f_p'(x) = 2(x-p)$$

•
$$f_p'(x) = 2$$
 geeft $x = p + 1$

•
$$x = p+1$$
 invullen in de vergelijking van k geeft $y = 2p+1$

• Ook
$$f_p(p+1) = 2p+1$$
 (dus $(p+1; 2p+1)$ is het raakpunt)

3 maximumscore 5

- De x-coördinaten van Q en R_p zijn 1 en p+1
- Het gemiddelde van de x-coördinaten van Q en R_p is $\frac{1+p+1}{2}$

$$\left(=\frac{1}{2}p+1\right)$$

1

•
$$f_0(\frac{1}{2}p+1) = (\frac{1}{2}p+1)^2 = \frac{1}{4}p^2 + p + 1$$

•
$$f_p(\frac{1}{2}p+1) = (-\frac{1}{2}p+1)^2 + 2p = \frac{1}{4}p^2 - p + 1 + 2p$$

• $f_0(\frac{1}{2}p+1) = f_p(\frac{1}{2}p+1)$ (dus de x-coördinaat van S_p is het gemiddelde van de x-coördinaten van Q en R_p)

of

- De x-coördinaten van Q en R_p zijn 1 en p+1
- Het gemiddelde van de x-coördinaten van Q en R_p is $\frac{1+p+1}{2}$ $(=\frac{1}{2}p+1)$
- Voor de x-coördinaat van S_p geldt $(x-p)^2 + 2p = x^2$
- $x^2 2px + p^2 + 2p = x^2$ geeft $2px = p^2 + 2p$
- Hieruit volgt $x = \frac{1}{2}p + 1$ (dus de x-coördinaat van S_p is het gemiddelde van de x-coördinaten van Q en R_p)

4 maximumscore 6

- De raakpunten liggen bij x = 1 en x = 5
- De x-coördinaat van S_4 is (het gemiddelde van 1 en 5, dus) 3

• De oppervlakte van
$$V$$
 is $\int_{1}^{3} f_0(x) dx + \int_{3}^{5} f_4(x) dx - \int_{1}^{5} (2x-1) dx$

• Een primitieve van f_0 is $\frac{1}{3}x^3$ en een primitieve van f_4 is

$$\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 24x$$

- Een primitieve van 2x-1 is x^2-x
- De oppervlakte van V is $(8\frac{2}{3} + 16\frac{2}{3} 20 =) 5\frac{1}{3}$

of

- De raakpunten liggen bij x = 1 en x = 5
- De x-coördinaat van S_4 is (het gemiddelde van 1 en 5, dus) 3
- De oppervlakte van V is $\int_{1}^{3} (f_0(x) (2x-1)) dx + \int_{3}^{5} (f_4(x) (2x-1)) dx$
- $f_0(x) (2x-1) = x^2 2x + 1$ en $f_4(x) (2x-1) = x^2 10x + 25$
- Een primitieve van x^2-2x+1 is $\frac{1}{3}x^3-x^2+x$ en een primitieve van $x^2-10x+25$ is $\frac{1}{3}x^3-5x^2+25x$
- De oppervlakte van *V* is $(2\frac{2}{3} + 2\frac{2}{3} =) 5\frac{1}{3}$

of

- De raakpunten liggen bij x = 1 en x = 5
- De x-coördinaat van S_4 is (het gemiddelde van 1 en 5, dus) 3
- De oppervlakte van V is $\int_{1}^{3} f_0(x) dx + \int_{3}^{5} f_4(x) dx$ verminderd met de
- oppervlakte van de rechthoek en driehoek onder de raaklijn
- Een primitieve van f_0 is $\frac{1}{3}x^3$ en een primitieve van f_4 is $\frac{1}{3}x^3 4x^2 + 24x$
- De oppervlakte van de rechthoek en de driehoek samen is $4 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 20$
- De oppervlakte van V is $(8\frac{2}{3} + 16\frac{2}{3} 20 =) 5\frac{1}{3}$

Spots

5 maximumscore 4

•
$$r^2 = x^2 + d^2$$
 (en dus $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{x^2 + d^2}$)

•
$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\bullet \quad \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}}$$

•
$$E = \frac{I_{\text{spot}}}{4\pi} \cdot \frac{1}{x^2 + d^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}} = \frac{I_{\text{spot}}}{4\pi} \cdot \frac{x}{\left(x^2 + d^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

6 maximumscore 7

•
$$\frac{dE}{dx} = \frac{I_{\text{spot}}}{4\pi} \cdot \frac{1 \cdot \left(x^2 + 100\right)^{\frac{3}{2}} - x \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(x^2 + 100\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x}{\left(\left(x^2 + 100\right)^{\frac{3}{2}}\right)^2}$$

•
$$\frac{dE}{dx} = 0$$
 geeft $(x^2 + 100)^{\frac{3}{2}} - 3x^2(x^2 + 100)^{\frac{1}{2}} = 0$

•
$$\left(x^2 + 100\right)^{\frac{1}{2}} \left(x^2 + 100 - 3x^2\right) = 0$$

•
$$x^2 + 100 - 3x^2 = 0 \text{ (omdat } (x^2 + 100)^{\frac{1}{2}} \neq 0)$$

•
$$x^2 = 50$$
 dus (omdat $x > 0$) $x = \sqrt{50}$

7 maximumscore 5

• De totale verlichtingssterkte in *P* is

$$\frac{500}{4\pi} \cdot \frac{25}{\left(25^2 + d^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{500}{4\pi} \cdot \frac{25}{\left(25^2 + (40 - d)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

- Beschrijven hoe het maximum 0,074 (of nauwkeuriger) gevonden kan worden
- Beschrijven hoe het minimum 0,061 (of nauwkeuriger) gevonden kan worden
- Het minimum is 82% (of nauwkeuriger) van het maximum (of: 80% van het maximum is 0,059), dus het deel van het werkoppervlak tussen de spots wordt voldoende gelijkmatig belicht

Opmerkingen:

- De factor $\frac{500}{4\pi}$ mag, mits toegelicht, in de berekening buiten beschouwing worden gelaten.
- Als wordt aangenomen dat $E_{\rm totaal} = 2E$, voor deze vraag geen scorepunten toekennen.

Buiten en binnen de cirkel

8 maximumscore 4

- Uit $MP' \cdot MP = MQ' \cdot MQ$ volgt $\frac{MQ'}{MP'} = \frac{MP}{MQ}$
- $\angle Q'MP' = \angle PMQ$
- Dus de driehoeken MP'Q' en MQP zijn gelijkvormig; zhz 1

9 maximumscore 3

- De driehoeken *MB'A'* en *MAB* zijn gelijkvormig; zie vorige vraag
- Hieruit volgt $\angle MB'A' = \angle MAB = 90^{\circ}$
- Dus B' ligt op de cirkel met middellijn MA'; Thales

1

Getransformeerde grafiek

10 maximumscore 3

•
$$AP = \ln(p^2 + 1) - 1$$
 en $BP = 1 - \ln(\frac{e^2}{p^2 + 1})$

•
$$BP = 1 - \left(\ln \left(e^2 \right) - \ln \left(p^2 + 1 \right) \right)$$

•
$$BP = 1 - 2 + \ln(p^2 + 1) = \ln(p^2 + 1) - 1 \ (= AP)$$

of

• De y-coördinaat van het midden van lijnstuk
$$AB$$
 is $\frac{f(p)+g(p)}{2}$

•
$$\frac{f(p) + g(p)}{2} = \frac{\ln(p^2 + 1) + \ln(\frac{e^2}{p^2 + 1})}{2} = \frac{\ln(p^2 + 1) + 2 - \ln(p^2 + 1)}{2}$$

$$(\text{of } \frac{\ln(e^2)}{2})$$

•
$$\frac{f(p)+g(p)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$
, dus het midden van lijnstuk AB is P, dus $AP = BP$

11 maximumscore 5

• (Vanwege de symmetrie in de lijn met vergelijking y = 1 geldt) de inhoud is gelijk aan $2 \cdot \pi \int_{0}^{1} x^{2} dy$ met $y = \ln(x^{2} + 1)$

inhoud is gelijk aan
$$2 \cdot \pi \int_{0}^{1} x^{2} dy$$
, met $y = \ln(x^{2} + 1)$

•
$$y = \ln(x^2 + 1)$$
 herleiden tot $x^2 = e^y - 1$

• Een primitieve van
$$e^y - 1$$
 is $e^y - y$

• De inhoud is
$$2\pi(e-2)$$

12 maximumscore 8

- Een vergelijking van de verschoven grafiek is $y = \ln((x-2)^2 + 1)$
- Voor de x-coördinaat van het snijpunt geldt $x^2 + 1 = (x-2)^2 + 1$
- Hieruit volgt x = 1
- $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$
- De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f in het snijpunt is f'(1) = 1
- De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de verschoven grafiek is $f'(-1) = -1 \text{ (of } \frac{2(1-2)}{(1-2)^2 + 1} = -1)$
- Het product van de richtingscoëfficiënten is -1 (dus de grafieken snijden elkaar loodrecht)

of

- Een vergelijking van de verschoven grafiek is $y = \ln((x-2)^2 + 1)$
- Voor de x-coördinaat van het snijpunt geldt $x^2 + 1 = (x-2)^2 + 1$
- Hieruit volgt x=1
- $\bullet \qquad f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$
- De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f in het snijpunt is f'(1) = 1
- De afgeleide die hoort bij de verschoven grafiek is $\frac{dy}{dx} = \frac{2(x-2)}{(x-2)^2 + 1}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking)
- De richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de verschoven grafiek is $\frac{2(1-2)}{(1-2)^2+1} = -1$
- Het product van de richtingscoëfficiënten is -1 (dus de grafieken snijden elkaar loodrecht)

of

Het product van de richtingscoëfficiënten is −1 (dus de grafieken

Droogligtijd

snijden elkaar loodrecht)

13 maximumscore 4

- De vergelijking $125\cos\left(\frac{2\pi}{745}t\right) = 40$ moet worden opgelost
- Beschrijven hoe deze vergelijking opgelost kan worden
 t₁ ≈ 147,6 en t₂ ≈ 597,4
 1
- Het antwoord: 450 (minuten)

14 maximumscore 5

- Op $t = t_1$ is h = z, dus $z = 125 \cos(\frac{2\pi}{745}t_1)$
- Een redenering waaruit volgt dat $t_1 = \frac{745}{2} \frac{1}{2}D$
- Substitutie van $t_1 = \frac{745}{2} \frac{1}{2}D$ in $z = 125\cos\left(\frac{2\pi}{745}t_1\right)$ geeft $z = 125\cos\left(\frac{2\pi}{745}\left(\frac{745}{2} \frac{1}{2}D\right)\right)$
- Hieruit volgt $z = 125\cos\left(\pi \frac{\pi}{745}D\right)$

15 maximumscore 5

• Voor de formule van de grafiek van figuur 2 geldt

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}D} = -125\sin\left(\pi - \frac{\pi}{745}D\right) \cdot -\frac{\pi}{745}$$

- D = 372,5 geeft $\frac{dz}{dD} = \frac{125\pi}{745}$ (of (ongeveer) 0,53)
- Dus de helling bij de grafiek van figuur 3 is $\frac{745}{125\pi} \approx 1.9$
- Voor de formule van de grafiek van figuur 4 geldt $\frac{dD}{dz} = 2,4 \cdot 10^{-4} z^2 + 1,7 \text{ (of een gelijkwaardige uitdrukking)}$
- De helling bij de grafiek van figuur 4 voor z = 0 is 1,7

1

Driehoek, cirkel en koordenvierhoek

maximumscore 4		
•	$\angle A = \angle BDE$; F-hoeken	1
•	$\angle BDE = \angle DFE$; hoek tussen koorde en raaklijn	1
•	$\angle CFD = 180^{\circ} - \angle DFE$; gestrekte hoek	1
•	$\angle A + \angle CFD = \angle A + 180^{\circ} - \angle A = 180^{\circ}$, dus vierhoek <i>ADFC</i> is een	
	koordenvierhoek (; koordenvierhoek)	1
of		
•	$\angle ADF = \angle DEF$; hoek tussen koorde en raaklijn	1
•	$\angle ACB = \angle DEB$; F-hoeken	1
•	$\angle DEF + \angle DEB = 180^{\circ}$; gestrekte hoek	1
•	$\angle ADF + \angle ACF = \angle DEF + \angle DEB = 180^{\circ}$, dus vierhoek $ADFC$ is een	
	koordenvierhoek (; koordenvierhoek)	1

5 Inzenden scores

16

Verwerk de scores van alle kandidaten per examinator in het programma WOLF. Zend de gegevens uiterlijk op 28 juni naar Cito.