Correctievoorschrift VWO

2011

tijdvak 1

wiskunde B

Het correctievoorschrift bestaat uit:

- 1 Regels voor de beoordeling
- 2 Algemene regels
- 3 Vakspecifieke regels
- 4 Beoordelingsmodel
- 5 Inzenden scores

1 Regels voor de beoordeling

Het werk van de kandidaten wordt beoordeeld met inachtneming van de artikelen 41 en 42 van het Eindexamenbesluit v.w.o.-h.a.v.o.-m.a.v.o.-v.b.o.

Voorts heeft het College voor Examens (CvE) op grond van artikel 2 lid 2d van de Wet CvE de Regeling beoordelingsnormen en bijbehorende scores centraal examen vastgesteld.

Voor de beoordeling zijn de volgende passages van de artikelen 36, 41, 41a en 42 van het Eindexamenbesluit van belang:

- De directeur doet het gemaakte werk met een exemplaar van de opgaven, de beoordelingsnormen en het proces-verbaal van het examen toekomen aan de examinator. Deze kijkt het werk na en zendt het met zijn beoordeling aan de directeur. De examinator past de beoordelingsnormen en de regels voor het toekennen van scorepunten toe die zijn gegeven door het College voor Examens.
- 2 De directeur doet de van de examinator ontvangen stukken met een exemplaar van de opgaven, de beoordelingsnormen, het proces-verbaal en de regels voor het bepalen van de score onverwijld aan de gecommitteerde toekomen.
- 3 De gecommitteerde beoordeelt het werk zo spoedig mogelijk en past de beoordelingsnormen en de regels voor het bepalen van de score toe die zijn gegeven door het College voor Examens.

- De gecommitteerde voegt bij het gecorrigeerde werk een verklaring betreffende de verrichte correctie. Deze verklaring wordt mede ondertekend door het bevoegd gezag van de gecommitteerde.
- 4 De examinator en de gecommitteerde stellen in onderling overleg het aantal scorepunten voor het centraal examen vast.
- Indien de examinator en de gecommitteerde daarbij niet tot overeenstemming komen, wordt het geschil voorgelegd aan het bevoegd gezag van de gecommitteerde. Dit bevoegd gezag kan hierover in overleg treden met het bevoegd gezag van de examinator. Indien het geschil niet kan worden beslecht, wordt hiervan melding gemaakt aan de inspectie. De inspectie kan een derde onafhankelijke gecommitteerde aanwijzen. De beoordeling van de derde gecommitteerde komt in de plaats van de eerdere beoordelingen.

2 Algemene regels

Voor de beoordeling van het examenwerk zijn de volgende bepalingen uit de regeling van het College voor Examens van toepassing:

- De examinator vermeldt op een lijst de namen en/of nummers van de kandidaten, het aan iedere kandidaat voor iedere vraag toegekende aantal scorepunten en het totaal aantal scorepunten van iedere kandidaat.
- Voor het antwoord op een vraag worden door de examinator en door de gecommitteerde scorepunten toegekend, in overeenstemming met het beoordelingsmodel. Scorepunten zijn de getallen 0, 1, 2, ..., n, waarbij n het maximaal te behalen aantal scorepunten voor een vraag is. Andere scorepunten die geen gehele getallen zijn, of een score minder dan 0 zijn niet geoorloofd.
- 3 Scorepunten worden toegekend met inachtneming van de volgende regels:
 - 3.1 indien een vraag volledig juist is beantwoord, wordt het maximaal te behalen aantal scorepunten toegekend:
 - 3.2 indien een vraag gedeeltelijk juist is beantwoord, wordt een deel van de te behalen scorepunten toegekend, in overeenstemming met het beoordelingsmodel:
 - 3.3 indien een antwoord op een open vraag niet in het beoordelingsmodel voorkomt en dit antwoord op grond van aantoonbare, vakinhoudelijke argumenten als juist of gedeeltelijk juist aangemerkt kan worden, moeten scorepunten worden toegekend naar analogie of in de geest van het beoordelingsmodel;
 - 3.4 indien slechts één voorbeeld, reden, uitwerking, citaat of andersoortig antwoord gevraagd wordt, wordt uitsluitend het eerstgegeven antwoord beoordeeld;
 - 3.5 indien meer dan één voorbeeld, reden, uitwerking, citaat of andersoortig antwoord gevraagd wordt, worden uitsluitend de eerstgegeven antwoorden beoordeeld, tot maximaal het gevraagde aantal;
 - 3.6 indien in een antwoord een gevraagde verklaring of uitleg of afleiding of berekening ontbreekt dan wel foutief is, worden 0 scorepunten toegekend, tenzij in het beoordelingsmodel anders is aangegeven;
 - 3.7 indien in het beoordelingsmodel verschillende mogelijkheden zijn opgenomen, gescheiden door het teken /, gelden deze mogelijkheden als verschillende formuleringen van hetzelfde antwoord of onderdeel van dat antwoord;
 - 3.8 indien in het beoordelingsmodel een gedeelte van het antwoord tussen haakjes staat, behoeft dit gedeelte niet in het antwoord van de kandidaat voor te komen;

- 3.9 indien een kandidaat op grond van een algemeen geldende woordbetekenis, zoals bijvoorbeeld vermeld in een woordenboek, een antwoord geeft dat vakinhoudelijk onjuist is, worden aan dat antwoord geen scorepunten toegekend, of tenminste niet de scorepunten die met de vakinhoudelijke onjuistheid gemoeid zijn.
- 4 Het juiste antwoord op een meerkeuzevraag is de hoofdletter die behoort bij de juiste keuzemogelijkheid. Voor een juist antwoord op een meerkeuzevraag wordt het in het beoordelingsmodel vermelde aantal punten toegekend. Voor elk ander antwoord worden geen scorepunten toegekend. Indien meer dan één antwoord gegeven is, worden eveneens geen scorepunten toegekend.
- 5 Een fout mag in de uitwerking van een vraag maar één keer worden aangerekend, tenzij daardoor de vraag aanzienlijk vereenvoudigd wordt en/of tenzij in het beoordelingsmodel anders is vermeld.
- 6 Een zelfde fout in de beantwoording van verschillende vragen moet steeds opnieuw worden aangerekend, tenzij in het beoordelingsmodel anders is vermeld.
- Indien de examinator of de gecommitteerde meent dat in een examen of in het beoordelingsmodel bij dat examen een fout of onvolkomenheid zit, beoordeelt hij het werk van de kandidaten alsof examen en beoordelingsmodel juist zijn. Hij kan de fout of onvolkomenheid mededelen aan het College voor Examens. Het is niet toegestaan zelfstandig af te wijken van het beoordelingsmodel. Met een eventuele fout wordt bij de definitieve normering van het examen rekening gehouden.
- 8 Scorepunten worden toegekend op grond van het door de kandidaat gegeven antwoord op iedere vraag. Er worden geen scorepunten vooraf gegeven.
- 9 Het cijfer voor het centraal examen wordt als volgt verkregen. Eerste en tweede corrector stellen de score voor iedere kandidaat vast. Deze score wordt meegedeeld aan de directeur. De directeur stelt het cijfer voor het centraal examen vast op basis van de regels voor omzetting van score naar cijfer.
- NB Het aangeven van de onvolkomenheden op het werk en/of het noteren van de behaalde scores bij de vraag is toegestaan, maar niet verplicht.

Evenmin is er een standaardformulier voorgeschreven voor de vermelding van de scores van de kandidaten.

Het vermelden van het schoolexamencijfer is toegestaan, maar niet verplicht. Binnen de ruimte die de regelgeving biedt, kunnen scholen afzonderlijk of in gezamenlijk overleg keuzes maken.

3 Vakspecifieke regels

Voor dit examen kunnen maximaal 81 scorepunten worden behaald.

Voor dit examen zijn de volgende vakspecifieke regels vastgesteld:

- 1 Voor elke rekenfout of verschrijving in de berekening wordt één punt afgetrokken tot het maximum van het aantal punten dat voor dat deel van die vraag kan worden gegeven.
- 2 De algemene regel 3.6 geldt ook bij de vragen waarbij de kandidaten de Grafische rekenmachine (GR) gebruiken. Bij de betreffende vragen doen de kandidaten er verslag van hoe zij de GR gebruiken.

4 Beoordelingsmodel

Vraag

Antwoord

Scores

Tussen twee grafieken

maximumscore 3 1

• Voor de *x*-coördinaat van *Q* geldt:
$$\sqrt{1-x} = p$$

• Dus
$$1-x=p^2$$

• De x-coördinaat van Q is dus
$$1-p^2$$

of

• Er moet gelden:
$$f(1-p^2) = p$$

• Er moet gelden:
$$f(1-p^2) = p$$
• $f(1-p^2) = \sqrt{1-(1-p^2)}$
1

• Dus
$$f(1-p^2) = \sqrt{p^2}$$
 en dit is (omdat $p > 0$) gelijk aan p

•
$$PQ = 1 - p^2 - p$$

• De oppervlakte van de rechthoek is
$$p(1-p^2-p) = p - p^3 - p^2$$

• De afgeleide hiervan is
$$1-3p^2-2p$$

•
$$-3p^2 - 2p + 1 = 0$$
 geeft $p = \frac{2 + \sqrt{16}}{-6}$ of $p = \frac{2 - \sqrt{16}}{-6}$

(of:
$$p^2 + \frac{2}{3}p - \frac{1}{3} = 0$$
, dus $(p - \frac{1}{3})(p+1) = 0$)

•
$$(p > 0, \text{ dus})$$
 het antwoord is $p = \frac{1}{3}$

3 maximumscore 6

• De inhoud is
$$\pi \int_{0}^{\frac{1}{2}} (1-x) dx - \pi \int_{0}^{\frac{1}{2}} x^{2} dx$$

• Een primitieve van
$$1-x$$
 is $x-\frac{1}{2}x^2$

• Een primitieve van
$$x^2$$
 is $\frac{1}{3}x^3$

• De inhoud van het omwentelingslichaam is
$$\frac{3}{8}\pi - \frac{1}{24}\pi = \frac{1}{3}\pi$$

of

• De inhoud is
$$\pi \int_{0}^{\frac{1}{2}} (1-x) dx$$
 verminderd met de inhoud van een kegel 2

• Een primitieve van
$$1-x$$
 is $x-\frac{1}{2}x^2$

•
$$\pi \int_{0}^{\frac{1}{2}} (1-x) dx = \frac{3}{8} \pi$$

• De inhoud van de kegel is
$$\frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}\pi$$

• De inhoud van het omwentelingslichaam is
$$\frac{3}{8}\pi - \frac{1}{24}\pi = \frac{1}{3}\pi$$

Opmerking

Als de inhoud (foutief) berekend is met $\pi \int_{0}^{\frac{1}{2}} (\sqrt{1-x}-x)^2 dx$, voor deze vraag geen scorepunten toekennen.

Raakcirkels aan een lijn

ma •	eximumscore 4 $\angle GFR = \angle HFS \text{ (of: } \angle FRG = \angle FSH \text{ ; } F\text{-}hoeken)$ $\text{Verder } \angle FGR = \angle FHS \text{ (= 90°), dus } \Delta FRG \sim \Delta FSH \text{ ; } hh$	1
•	Uit ($FG = GH$, dus) $FH = 2 \cdot FG$ volgt nu $FS = 2 \cdot FR$ Dus $FR = RS$	1 1
of		
•	Noem de loodrechte projectie van S op k T . Dan geldt: $\angle SRT = \angle FRG$; overstaande hoeken	1
•	SHGT is een rechthoek, dus $ST = GH$; (rechthoek), en $FG = GH$, dus $ST = FG$	1
•	Verder is $\angle STR = \angle FGR$ (= 90°), dus $\Delta SRT \cong \Delta FRG$; ZHH Dus $FR = RS$	1 1
of		
•	Noem de loodrechte projectie van R op m U . Dan is RU evenwijdig met FH ; $(F$ -hoeken), dus $\angle SRU = \angle RFG$; F -hoeken	1
•	HGRU is een rechthoek, dus $RU = GH$; (rechthoek), en $FG = GH$, dus $RU = FG$	1
•	Verder is $\angle RUS = \angle FGR \ (= 90^{\circ})$, dus $\Delta SUR \cong \Delta RGF$; HZH Dus $FR = RS$	1 1
of		
•	Noem de lijn door F evenwijdig met k en m : n . Dan is (omdat de loodlijn vanuit F op k en m ook loodrecht staat op n ; F -hoeken (of Z -hoeken) en $FG = GH$) k de middenparallel van m en n ; (afstand punt tot lijn, middenparallel)	1
•	Hieruit volgt: (R heeft gelijke afstanden tot m en n , dus) $RU = RV$ met U en V de loodrechte projecties van R op respectievelijk m en n ;	·
	middenparallel, (afstand punt tot lijn)	1
•	Verder geldt $\angle RUS = \angle RVF$ (90°) en $\angle SRU = \angle FRV$; overstaande hoeken, dus $\Delta SRU \cong \Delta FRV$; HZH (of: $\angle RSU = \angle RFV$; Z -hoeken, dus	,
•	$\Delta SRU \cong \Delta FRV$; ZHH) Dus $FR = RS$	1 1

5	 maximumscore 3 Uit ΔFXS ~ ΔFMR volgt ∠FXS = ∠FMR (of ∠FSX = ∠FRM), dus XS //MR; F-hoeken MR staat loodrecht op k; raaklijn, dus XS staat loodrecht op k; (F-hoeken) Bovendien m//k, dus XS staat loodrecht op m; (F-hoeken) 	1 1 1
	 Uit ΔFXS ~ ΔFMR volgt ∠FSX = ∠FRM. Verder geldt ∠FSH = ∠FRG; F-hoeken Dus ∠XSH = ∠FSX + ∠FSH = ∠FRM + ∠FRG = ∠MRG ∠MRG = 90°; raaklijn, dus ook ∠XSH = 90° (ofwel XS staat loodrecht op m) 	1 1
6	 maximumscore 3 Uit ΔFXS ~ ΔFMR en FX = 2·FM (of FS = 2·FR) volgt XS = 2·MR FM = MR; (cirkel) en FX = 2·FM geeft FX = 2·MR, dus FX = XS Hieruit en uit XS ⊥ m volgt dat XF gelijk is aan de afstand van X tot m, dus X ligt op de parabool met brandpunt F en richtlijn m; (afstand punt tot lijn, parabool) of 	1 1
	 ∠FRX = 90°; Thales en FR = RS, dus RX is middelloodlijn van FS; (middelloodlijn) Dit geeft XF = XS; middelloodlijn Hieruit en uit XS ⊥ m volgt dat XF gelijk is aan de afstand van X tot m, dus X ligt op de parabool met brandpunt F en richtlijn m; (afstand punt tot lijn, parabool) 	1 1

Extrusie

7 maximumscore 3

- De omtrek van de grote opening is k keer zo groot als die van de kleine
 De oppervlakte van de grote opening is k² keer zo groot als die van de kleine
 Voor de grote opening is √A dus k keer zo groot als voor de kleine,
 dus (wogens k 1) het gwetiënt P is woor heide openingen even
 - dus (wegens $\frac{k}{k} = 1$) het quotiënt $\frac{P}{\sqrt{A}}$ is voor beide openingen even groot

8 maximumscore 8

	2	2	
•	$P = 4 + \int \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$	$x = 4 + \int_{1}^{2} \sqrt{1 + (-1\frac{1}{2}x)^2} dx$	2
	-2	-2	

- Beschrijven hoe de integraal kan worden berekend 1
- $P \approx 11,54 \text{ (cm)}$ 1

•
$$A = \int_{-2}^{2} (3 - \frac{3}{4}x^2) dx$$
 1

- Beschrijven hoe de integraal kan worden berekend
 A = 8 (cm²) 1
- $\frac{P}{\sqrt{4}} \approx \frac{11,54}{\sqrt{8}}$, dus het antwoord is 4,1 1

- Voor een opening van x bij 1 is P = 2x + 2 en A = x1
- Het quotiënt $\frac{P}{\sqrt{A}}$ is dus $\frac{2x+2}{\sqrt{x}}$ 1
- $\frac{2x+2}{\sqrt{x}} = 2x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}} \text{ (of } \frac{2x+2}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}})$ 1
- De afgeleide hiervan is $x^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}}$ (of $\frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{x\sqrt{x}}$) 1
- Deze is 0 als x = 1 (dus de x-coördinaat van de top is 1) 1 of
- Voor een opening van x bij 1 is P = 2x + 2 en A = x1
- Het quotiënt $\frac{P}{\sqrt{A}}$ is dus $\frac{2x+2}{\sqrt{x}}$ 1
- De afgeleide hiervan is $\frac{2 \cdot \sqrt{x} (2x+2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$ 1
- Dit is gelijk aan $\frac{x-1}{r\sqrt{r}}$ 1
- Deze is 0 als x = 1 (dus de x-coördinaat van de top is 1) 1

De formule van Gompertz

10	maximumscore	4

- Dan moet gelden P(t) = 50
- Beschrijven hoe de vergelijking $119 \cdot e^{-0.0161 \cdot e^{0.0595t}} = 50$ kan worden opgelost
- *t* ≈ 67
- Dus 27 jaar na afsluiten van de polis is de helft overleden

11 maximumscore 3

- $119 = 100 \cdot 1,19 = 100 \cdot e^{\ln 1,19} \approx 100 \cdot e^{0,1740}$
- $P(t) \approx 100 \cdot e^{0.1740} \cdot e^{-0.0161 \cdot e^{0.0595t}} = 100 \cdot e^{0.1740 0.0161 \cdot e^{0.0595t}}$, dus $m \approx 0.17$

of

- $100 \cdot e^{m-0.0161 \cdot e^{0.0595t}} = 100 \cdot e^m \cdot e^{-0.0161 \cdot e^{0.0595t}}$
- $100 \cdot e^m \cdot e^{-0.0161 \cdot e^{0.0595t}} = 119 \cdot e^{-0.0161 \cdot e^{0.0595t}}$ geldt als $100 \cdot e^m = 119$
- Dus $m = \ln 1,19 \approx 0,17$

12 maximumscore 4

- $P'(t) = a \cdot e^{-b \cdot e^{kt}} \cdot -b \cdot e^{kt} \cdot k$
- $\frac{P'(t)}{P(t)} = \frac{a \cdot e^{-b \cdot e^{kt}} \cdot -b \cdot e^{kt} \cdot k}{a \cdot e^{-b \cdot e^{kt}}} = -b \cdot e^{kt} \cdot k$
- Dus c = -bk

1

Goniometrische functies

13 maximumscore 4

- $\sin x + \sin(2x) = \sin x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$
- $\sin x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 0$ geeft $\sin x \cdot (1 + 2 \cdot \cos x) = 0$
 - Dus $\sin x = 0$ of $\cos x = -\frac{1}{2}$
- De x-coördinaat van punt B is $\frac{2}{3}\pi$

of

- $\sin x + \sin(2x) = \sin x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$
- $\sin x + 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 0$ geeft, omdat $\sin x > 0$ op $[0, \pi]$, $1 + 2 \cdot \cos x = 0$
- Dus $\cos x = -\frac{1}{2}$
- De x-coördinaat van punt B is $\frac{2}{3}\pi$

of

- $\sin x + \sin(2x) = 2 \cdot \sin(1\frac{1}{2}x) \cdot \cos(\frac{1}{2}x)$ $(\text{of } \sin x + \sin(2x) = 2 \cdot \sin(1\frac{1}{2}x) \cdot \cos(-\frac{1}{2}x))$ 1
- $2 \cdot \sin(1\frac{1}{2}x) \cdot \cos(\frac{1}{2}x) = 0$ geeft $\sin(1\frac{1}{2}x) = 0$ of $\cos(\frac{1}{2}x) = 0$
- $1\frac{1}{2}x = k \cdot \pi$ of $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ (met k geheel)
- De x-coördinaat van punt B is $\frac{2}{3}\pi$

of

- $\sin x + \sin(2x) = 0$ geeft $\sin(2x) = \sin(-x)$
- Dus $2x = -x + k \cdot 2\pi$ of $2x = \pi + x + k \cdot 2\pi$ (met k geheel)
- Dus $x = k \cdot \frac{2}{3}\pi$ of $x = \pi + k \cdot 2\pi$ (met k geheel)
- De x-coördinaat van punt B is $\frac{2}{3}\pi$

- $f_a'(x) = \cos x + 2a \cdot \cos(2x)$
- Er moet gelden: $\cos(\frac{5}{6}\pi) + 2a \cdot \cos(\frac{5}{3}\pi) = 0$
- Dus $-\frac{1}{2}\sqrt{3} + 2a \cdot \frac{1}{2} = 0$ en hieruit volgt $a = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

(of
$$a = \frac{-\cos\frac{5}{6}\pi}{2\cdot\cos\frac{5}{3}\pi} \approx 0,866$$
)

- Beschrijven hoe de x-coördinaat van de andere top van de grafiek van $f_{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$ (of van $f_{0,866}$) gevonden kan worden
- Het antwoord is 0,96

15 maximumscore 5

- De oppervlakte is $\int_{0}^{\pi} (\sin x + a \cdot \sin(2x)) dx$ 1
- Een primitieve van $\sin x + a \cdot \sin(2x)$ is $-\cos x \frac{1}{2}a \cdot \cos(2x)$

2

2

2

• De oppervlakte is dus $(1-\frac{1}{2}a)-(-1-\frac{1}{2}a)=2$ (en dit is onafhankelijk van a)

of

- De oppervlakte is $\int_{0}^{\pi} (\sin x + a \cdot \sin(2x)) dx$
- De oppervlakte is dus $\int_{0}^{\pi} \sin x \, dx + a \cdot \int_{0}^{\pi} \sin(2x) dx$
- Aantonen dat $\int_{0}^{\pi} \sin(2x) dx = 0$ (met behulp van een primitieve of met behulp van symmetrie)
- De oppervlakte is dus $\int_{0}^{\pi} \sin x \, dx$ (en dit is onafhankelijk van a)

Opmerking

Als de oppervlakte van het vlakdeel voor een aantal waarden van a is berekend en daaruit is geconcludeerd dat deze onafhankelijk van a is, hiervoor geen scorepunten toekennen.

Cirkels bij een driehoek

16 maximumscore 3

- Het middelpunt van de cirkel door D die AB raakt in A, is het snijpunt van de middelloodlijn van AD en de loodlijn op AB door A; (cirkel, middelloodlijn, raaklijn)
- Het tekenen van (een deel van) deze cirkel met het snijpunt E

- $\angle ABD = \angle BFD$ en $\angle ACD = \angle CFD$; hoek tussen koorde en raaklijn
- Dit geeft $\angle BFC = \angle BFD + \angle CFD = \angle ABD + \angle ACD$
- Dus $\angle BFC + \angle BAC = \angle ABD + \angle ACD + \angle BAC = 180^{\circ}$; hoekensom driehoek
- Hieruit volgt dat *ABFC* een koordenvierhoek is; (*koordenvierhoek*)

Vierkant bij een derdegraadskromme

18 maximumscore 8

- f(x) = 0 geeft (behalve x = 0): $\frac{1}{3}x^2 = b$, dus de x-coördinaat van A is $\sqrt{3b}$
- $f'(x) = b x^2$
- Dus de x-coördinaat van T is \sqrt{b}
- De y-coördinaat van T is $b\sqrt{b} \frac{1}{3}(\sqrt{b})^3$
- Rechthoek *OABC* is een vierkant als $b\sqrt{b} \frac{1}{3}(\sqrt{b})^3 = \sqrt{3b}$
- $b\sqrt{b} \frac{1}{3}(\sqrt{b})^3$ herleiden tot $\frac{2}{3}b\sqrt{b}$
- $\frac{2}{3}b\sqrt{b} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{b}$ geeft (omdat b > 0) $b = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking)

5 Inzenden scores

Verwerk de scores van de alfabetisch eerste vijf kandidaten per school in het programma WOLF.

Zend de gegevens uiterlijk op 27 mei naar Cito.

1