Rekursion

- Sie wissen wie man Programme rekursiv entwickelt
- Sie kennen typische Beispiele von rekursiven Algorithmen
- Sie kennen die Vor-/Nachteile von rekursiven Algorithmen

Basiert auf Material von:

Kurt Bleisch
Stephan Neuhaus
Karl Rege
Marcela Ruiz
Jürgen Spielberger

Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften
zhaw School of Engineering

Einführung Rekursion

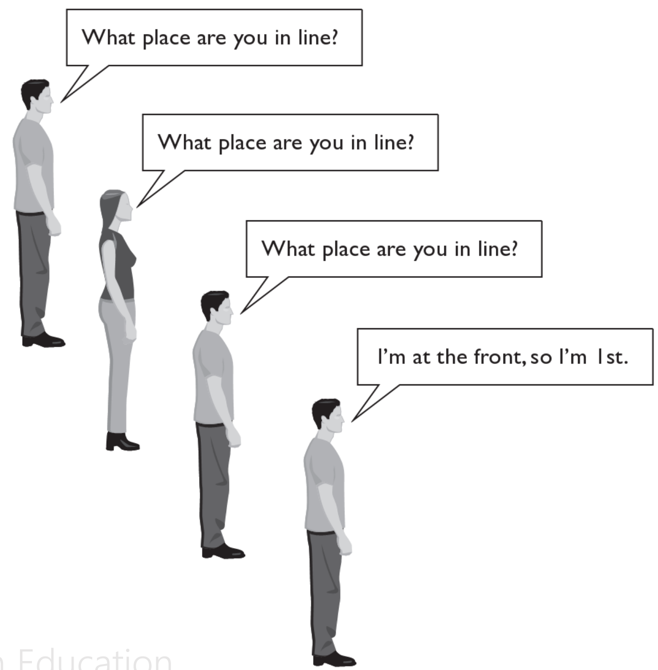
Rekursiver Algorithmus

- Rekursiver Algorithmus:
  - Lösungsbeschrieb, der sich selber enthält.
  - Z.B. in der Mathematik sehr beliebt: Fakultät, Algorithmus nach Euklid

- Beispiel:
  - An welcher Position in der Schlange stehe ich?
  - Den Anfang der Schlange sieht man nicht.

Rekursiver Algorithmus

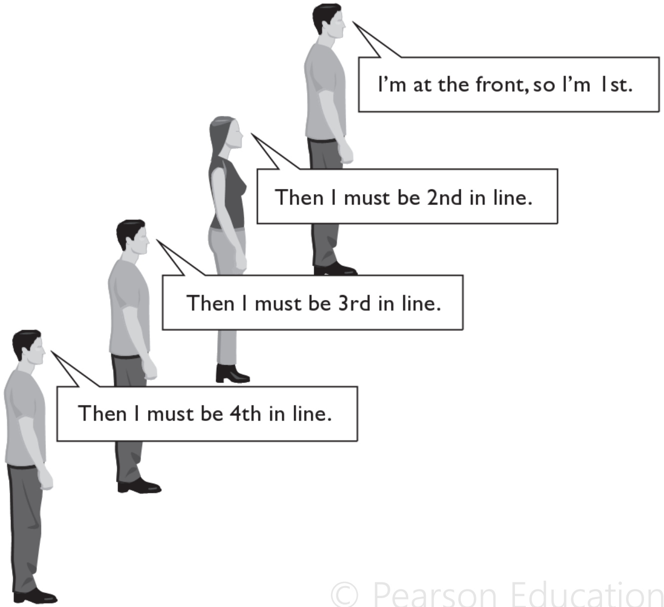
1. Frage Person vor dir, welche Position sie hat:
   - Falls sie zuvorderst steht, wird sie direkt antworten können,
   - sonst fragt sie einfach die Person vor sich.



Rekursiver Algorithmus

2. Sobald die Person an der ersten Stelle geantwortet hat
   - wird der Zweitvordersten geantwortet, usw.

Essenz eines Rekursiven Algorithmus:
Wiederholter Aufruf desselben Algorithmus (Methode), welcher das Problem zum Teil löst und dann zu einem Ganzen zusammengefügt wird



iTempel vs Tempel

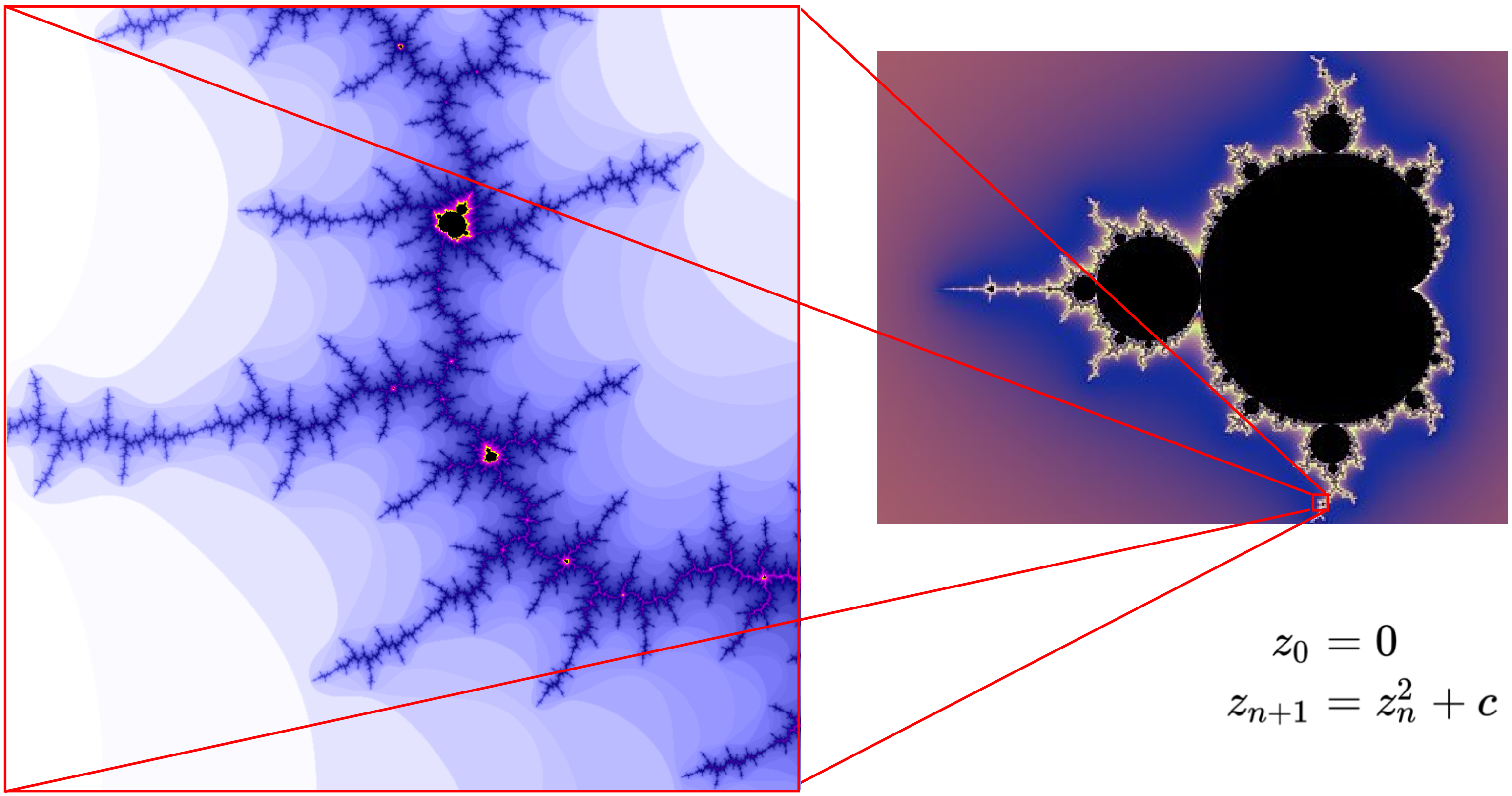
Übereinstimmung der aktivierten Hirn-Regionen bei *überzeugten (!)* Apple-Benutzer und stark religiösen Menschen festgestellt.

Beispiele

- Natur
  - Blätter des Farnstrauches
  - Fraktale Kurven
  - Schneeflocken
- Mathematik
  - Positive Ganzzahl:
    - 1 sei eine positive Ganzzahl
    - Der Nachfolger einer positive Ganzzahl ist wieder eine positive Ganzzahl
  - Fakultät:
    - fak(0) = 1
    - Wenn n >0, dann gilt fak(n) = n * fak(n -1)
- Informatik
  - Liste kann als Sequenz oder rekursiv definiert werden
  - Baumstrukturen
    - Ein Baum ist entweder leer,
    - oder besteht aus einer Wurzel und zwei disjunkten Teilbäumen.

Beispiel: Fraktale Kurven

Figuren bei denen man beliebig hinein zoomen kann und immer wieder ähnliche Muster entdeckt: z.B. Mandelbrot's «Apfelmännchen».



$$z_0 = 0$$
$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

https://de.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot-Menge

Beispiel der Fakultät

n! = 1*2*3...(n-1)*n   1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, ...

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{falls } n=0 \\ n*(n-1)! & \text{sonst} \end{cases}$$

```
fak(3) = 3 * fak(2)
             2 * fak(1)
                 1 * fak(0)
                       1
                 1 * 1
             2 * 1
         3 * 2
           6
```

Fakultätsberechnung mit Rekursion:

```
int fak(int n) {
    if (n == 0) return 1;
    else return n * fak(n-1);
}
```

Verankerung

Rekursiver Aufruf

Rekursive Algorithmen und Datenstrukturen

Rekursion

Definition:

Ein Algorithmus/Datenstruktur heisst rekursiv definiert, wenn er/sie sich selbst als Teil enthält oder mit Hilfe von sich selbst definiert ist.

- Vorteil der rekursiven Beschreibung ist die Möglichkeit, eine unendliche Menge durch eine endliche Aussage zu beschreiben
  - z.B. Objekt x enthält wieder Objekt x, Algorithmus a ruft sich selber auf.
- In Java Programmen wird Rekursion durch Methoden implementiert, die sich selbst aufrufen
  - z.B. Methode p ruft Methode p auf.

Eine rekursiv definierte Datenstruktur

Liste nicht rekursiv definiert:

- Liste = (ListNode)*

```
ArrayList<T> liste =
   new ArrayList<>(n);
```

```
p = first;
while (p != null) {p = p.next;}
```

Liste rekursiv definiert:

- Liste = leer
- Liste = ListNode (Liste)?

```
class ListNode<T> {
    T element;
    ListNode<T> next;
}
```

```
void traverse(ListNode<T> p) {
     if (p == null) // Abbruch
     else traverse(p.next);
};
```

Regex Notation
= definiert
()* beliebig oft, 0..∞
()? optional, 0..1

Übung

Schreiben Sie eine rekursive Methode, welche die Elemente einer einfach verketteten Liste der Reihe nach ausgibt (println). Sie können direkt auf die Felder zugreifen.

```
class ListNode<T> {
    T element;
    ListNode<T> next;
}
```

```
private void printListForward(ListNode<T> n) {
```

Übung

Schreiben Sie eine rekursive Methode, welche die Elemente einer einfach verketteten Liste in umgekehrter Reihenfolge ausgibt.

```
class ListNode<T> {
    T element;
    ListNode<T> next;
}
```

```
private void printListReverse(ListNode n) {
```

Generelle Vorlage für rekursive Programme

Rekursive Programme sind das Programmäquivalent der vollständigen Induktion. Wesentlich ist somit, dass man zwischen zwei Fällen unterscheidet (wie bei den Beweisen):

1. Basis Fall («Verankerung»):
   Man weiss z.B., dass fak(0) = 1 ist.

2. Allgemeiner Fall («Induktionsschritt»):
   Für alle anderen Fälle (z.B. n>0) weiss man, dass sich die Lösung des Problems X(n) zusammensetzt aus einigen Operationen und einem Problem X(n-1), was eine Dimension kleiner als X(n) ist.

   Z.B. fak(n) = n * fak(n-1) für n>0

   Man zerlegt also das Problem für den allgemeinen Fall so lange, bis man auf den Basis Fall kommt.

Vorlage für rekursive Programme

- Damit muss eine allgemeine Vorlage für rekursive Programme diese **beiden Fälle unterscheiden**.
- Der **Basis Fall** stellt sicher, dass die rekursiven Programme endlich sind und **terminieren** (d.h. die Anzahl der rekursiven Aufrufe ist begrenzt).
- Vergisst man den Basis Fall, so werden im allgemeinen so viele rekursive Aufrufe durchgeführt, bis der Stack überläuft (Abbruch mit StackOverflow).

```java
public int p(int n) {
   if (basecase) {
      // behandelt Basis Fall
   } else {
      p(n-1); // behandelt allg. Fall
   }
}
```

Führt sicher zum Basis-Fall, da jetzt ein kleineres Problem gelöst wird.

Übung

Schleifen: Operationen werden endlich oft wiederholt.

```
public void p() {
   int i = 0;
   while (i < 10)
      System.out.println(i++);
   }
}
```

Ausgabe auf Console von p():

Übung

Schleifen: Operationen werden endlich oft wiederholt.

```
public void p(int i) {
   if (i < 10) {
      System.out.println(i);
      p(i+1);
   }
}
```

Lösung mit rekursivem Aufruf.

Ausgabe auf Console von p(0):

Übung

Schleifen: Operationen werden endlich oft wiederholt.

```
public void p(int i) {
   if (i < 10) {
      p(i+1);
      System.out.println(i);
   }
}
```

Lösung mit rekursivem Aufruf.

Ausgabe auf Console von p(0):

Direkte und indirekte Rekursion

- Direkte Rekursion:
  Bei der direkten Rekursion ruft eine Methode sich selber wieder auf.

```
public int p(int a) {
   int x = p(a1);
}
```

- Indirekte Rekursion:
  Bei der indirekten Rekursion rufen sich 2 oder mehrere Methoden gegenseitig auf (häufig ungewollte Fehlerquelle beim Programmieren, insb. bei Events)

```
public int p(int a) {
   int x = q(a1);
}
```

```
public int q(int a) {
   int x = p(a-1);
}
```

Endrekursion (tail rekusion)→ Schleife

Programm mit Rekursion:

```
int fak(int n) {
   if (n == 0) return 1;
   else
      return n * fak(n-1);
}
```

Programm mit Iteration:

```
int fak(int n) {
   if (n == 0) return 1;
   else {
      int res = n;
      while (n > 1) {
         n--; res = n* res;
      }
      return res;
   }
}
```

Programme, bei denen der rekursive Aufruf die allerletzte Aktion im ELSE-Zweig, bzw. Im allgemeinen Fall ist, werden endrekursiv bezeichnet.

Endrekursive Programme lassen sich einfach in iterative Form überführen.

- Frage: lässt sich jedes Programm in eine nichtrekursive Form überführen?

Rekursive Algorithmen sind weniger effizient als iterative Algorithmen → überlegen Sie sich ob Sie den Algorithmus iterativ schreiben.

Gewisse Compiler optimieren Endrekursion und erzeugen automatisch einen iterativen Code (Java nicht).

Schleife & Endrekursion

- Schleifen (Iterationen) lassen sich in Endrekursion überführen:

```
void p(int i) {
   while (<Bedingung>; i++)
      <Anweisung>
}
```

```
void p1(int i) {
   if (<Bedingung>) {
      <Anweisung>; i++;
      while ( <Bedingung>, i++ )
         <Anweisung>
   }
}
```

```
void p2(int i) {
   if (<Bedingung>) {
      <Anweisung>; i++;
      if (<Bedingung>) {
         <Anweisung>; i++;
         while (<Bedingung>; i++)
            <Anweisung>
      }
   }
}
```

```
void pRekursiv(int i) {
  if (<Bedingung>) {
    <Anweisung>
    pRekursiv(i+1);
  }
}
```

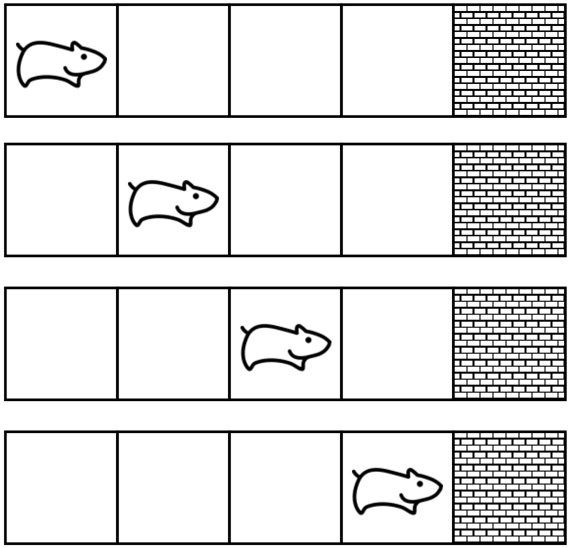
Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften

School of
Engineering

Entwicklung von rekursiven Algorithmen

Hamster: Beispiel 1

Ein Hamster soll bis zur nächsten Wand laufen.



Iterative Lösung:

```
void zurMauer() {
   while (vorn_frei())
     vor();
}
```

Direkt rekursive Lösung:

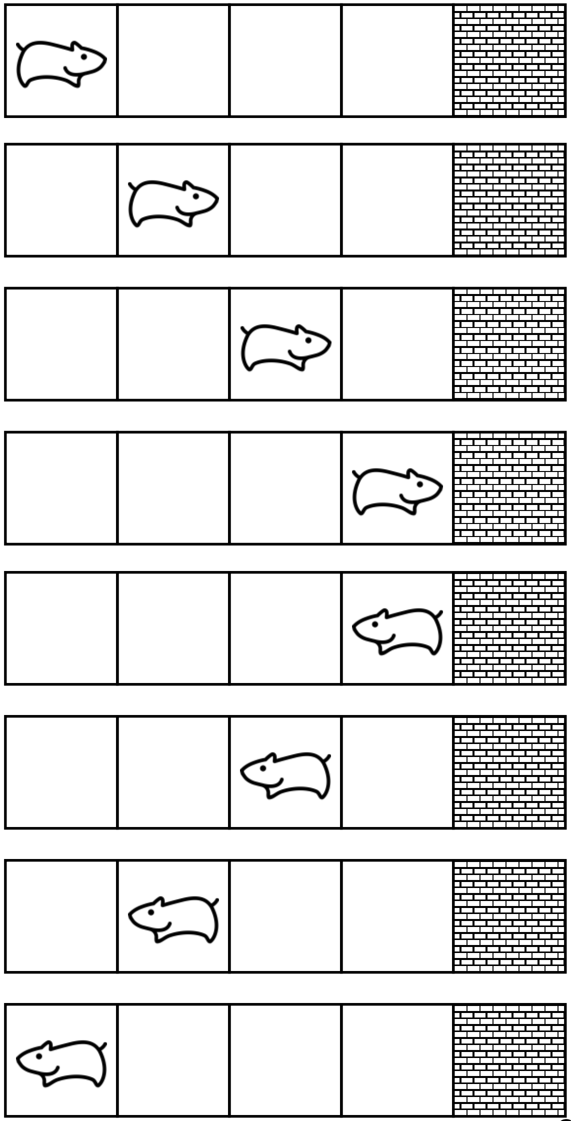
```
void zurMauerRekursiv() {
```

Hamster: Beispiel 2

Der Hamster soll bis zur nächsten Wand und dann zurück zur Ausgangsposition laufen!

Direkt rekursive Lösung:

```
void hinUndZurueckRekursiv() {
```

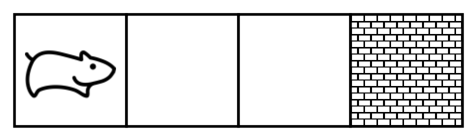


Hamster: Beispiel 2 im Detail

```
main:       hUZR (1.)     hUZR (2.)     hUZR (3.)

hUZR();     vorn_frei() {true}
            vor();
            hUZR(); -----> vorn_frei() {true}
                           vor();
                           hUZR(); -----> vorn_frei() {false}
                                          kehrt();
                                   <-----
                           vor();
                    <-----
            vor();
     <-----
```

Schrittfolge: `vor(); vor(); kehrt(); vor(); vor();`



Hamster: Beispiel 3

Der Hamster soll die Anzahl Schritte bis zur nächsten Mauer zählen.

Iterative Lösung

```
int anzahlSchritte() {
```

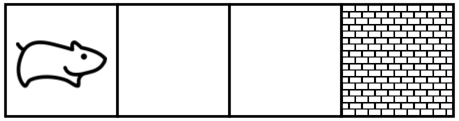
Rekursive Lösung

```
int anzahlSchritteRekursiv() {
```

Hamster: Beispiel 3 im Detail

```
main:          aSR (1.)          aSR (2.)          aSR (3.)

i=aSR();       vorn_frei {true}
               vor();
               aSR()   -----> vorn_frei() {true}
                              vor();
                              aSR()   -----> vorn_frei() {false}
                                             return 1;
                                         1
                                      <-----
                              return 1 + 1;
                          2
                       <-----
               return 2 + 1;
           3
        <-----
i=3;
```

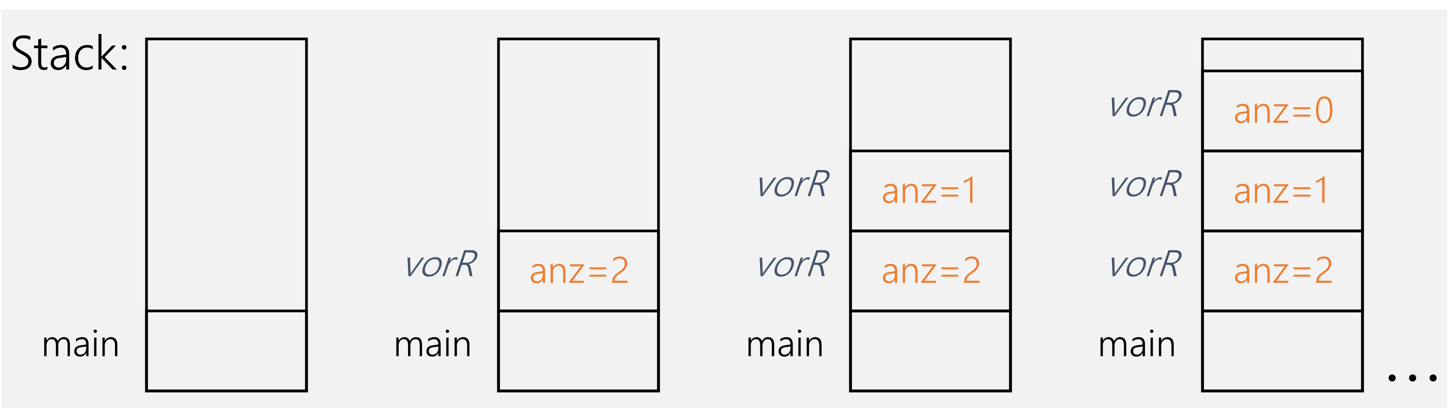


Hamster: Beispiel 4

Der Hamster soll «anz» Schritte nach vorne gehen.

Parameter

```
void vorRekursiv(int anz) {
   if ((anz > 0) && vorn_frei()) {
      vor();
      vorRekursiv(anz-1);
   }
}
```



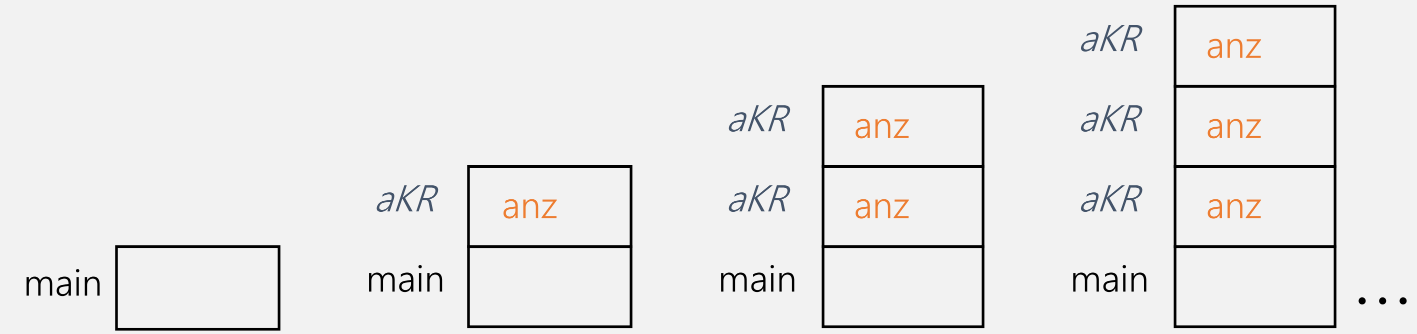
Hamster: Beispiel 5

Der Hamster soll die Anzahl Körner zählen.

```
int anzahlKörnerRekursiv() {
    int anz;
    anz = körner();
    if (vorn_frei()) {
        vor();
        return anz + anzahlKörnerRekursiv();
    } else
        return anz;
}
```

Lokale Variable

Stack:



Hamster: Beispiel 6

Der Hamster soll die Anzahl Körner zählen.

Sind die beiden Algorithmen korrekt?

falsch

```
int anz = 0;

void anzahlKörnerRekursiv() {
  if (vorn_frei()) {
    anzahlKörnerRekursiv();
    anz += körner();
    vor();
  }
}
```

korrekt

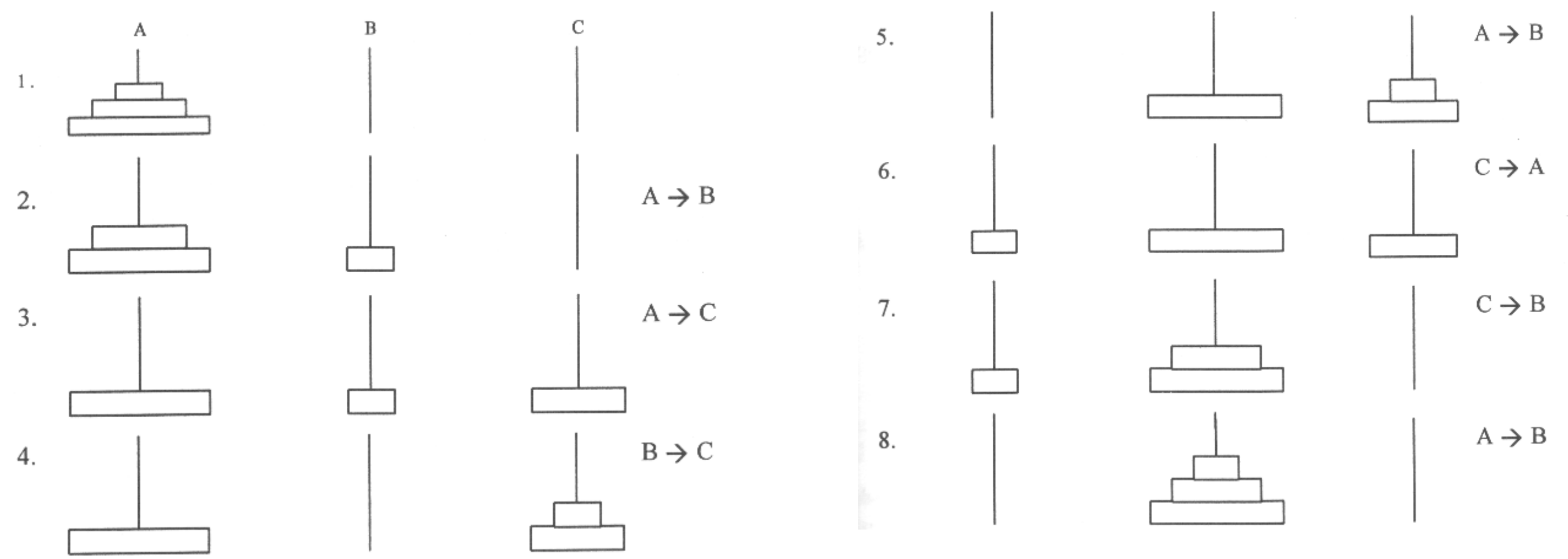
```
int anz = 0;

void anzahlKörnerRekursiv() {
  anz += körner();
  if (vorn_frei()) {
    vor();
    anzahlKörnerRekursiv();
  }
}
```

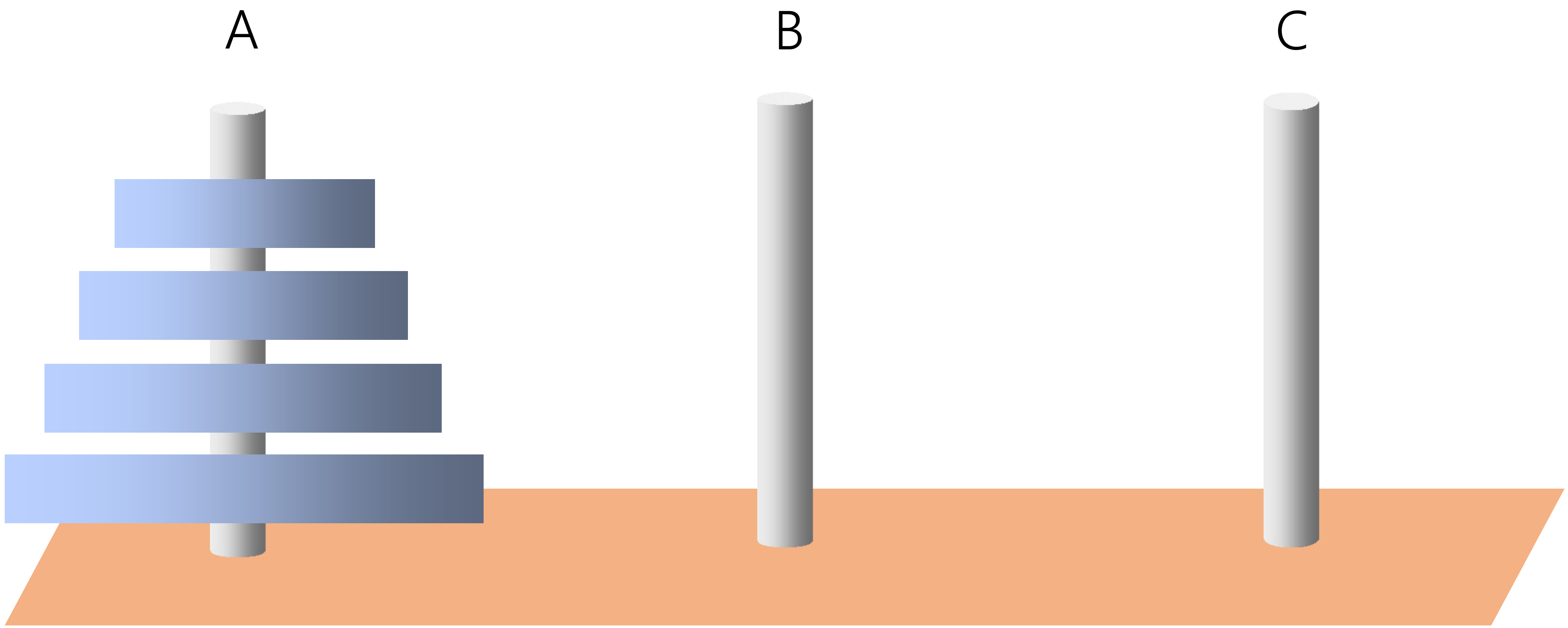
Rekursionstiefe «unendlich» (Endlosrekursion) erzeugt einen Laufzeitfehler: Stack Overflow.

Türme von Hanoi

Eine gegebene Anzahl von Scheiben unterschiedlicher Grösse soll von der Stange A nach Stange B bewegt werden, ohne dass eine grössere auf eine kleinere zu liegen kommt (Beispiel mit 3 Scheiben, C ist Hilfsstange):



Türme von Hanoi: Demo



Türme von Hanoi: Vorgehen

- Basisfall (n = 1)
  1. bewege Scheibe von A nach B

- Lösung für (n = 2);
  1. bewege kleinere Scheibe von A nach C (Hilfsstange)
  2. bewege grössere Scheibe von A nach B
  3. bewege kleinere Scheibe von C (Hilfsstange) nach B

- Lösung für allgemeine n
  1. bewege Stapel (n-1) von A nach C
  2. bewege grösste Scheibe von A nach B
  3. bewege Stapel (n-1) von C nach B

Türme von Hanoi: Programm

```
void hanoi (int n, char from, char to, char help) {
   if (n == 1) {
      // bewege von from nach to
   }
   else {
      // bewege Stapel n-1 von from auf help
      // bewege unterste Scheibe von from nach to
      // bewege Stapel n-1 von help auf to
   }
}
```

weitere Vereinfachung:

```
void hanoi (int n, char from, char to, char help) {
   if (n > 0) {
      // bewege Stapel n-1 von from auf help
      // bewege unterste Scheibe von from nach to
      // bewege Stapel n-1 von help auf to
   }
}
```

Türme von Hanoi: Java Programm

```
void hanoi (int n, char from, char to, char help) {
   if (n > 0) {
      // bewege Stapel n-1 von from auf help
      hanoi(n-1, from, help, to);
      // bewege von from nach to
      System.out.println("bewege " + from + " nach " + to);
      // bewege Stapel n-1 von help auf to
      hanoi(n-1, help, to, from);
   }
}
```

```
main {
   hanoi (3, 'A', 'B', 'C');
}
```

```
bewege A nach B
bewege A nach C
bewege B nach C
bewege A nach B
bewege C nach A
bewege C nach B
bewege A nach B
```

Türme von Hanoi: Rekursionstiefe, Speicherkomplexität, Zeitkomplexität

- Rekursionstiefe:
  - Maximale «Tiefe» der Aufrufe einer Methode minus 1
  - `hanoi(3)` → `hanoi(2)` → `hanoi(1)` → `hanoi(0)`: Rekursionstiefe = 3

- Zeitkomplexität (Rechenaufwand):

$T_n = 1 + 2 * T_{n-1}$
$T_n = 1 + 2 * (1 + 2 * T_{n-2}) = 3 + 2 * 2 * T_{n-2}$
$T_n = 3 + 2 * 2 * (1 + 2 * T_{n-3}) = 7 + 2 * 2 * 2 * T_{n-3}$

→ $T_n = (2^n - 1) + 2^n = 2^{n+1} - 1$
d.h. Verdoppelung mit jedem Schritt, ergibt → $\sim 2^n$

→ Der Aufwand der Zeitkomplexität ist exponentiell $O(2^n)$

- Speicherkomplexität: benötigter Speicher?

Fibonacci-Zahlen

$$\mathrm{fib}(n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n = 0 \\ 1 & \text{falls } n = 1 \\ \mathrm{fib}(n-1) + \mathrm{fib}(n-2) & \text{sonst} \end{cases}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	..
fn	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	..

```
public int fib(int n) {
   if (n == 0) return 0;
   else if (n == 1) return 1;
   else return fib(n-1) + fib(n-2);
}
```

Fibonacci-Zahlen: Übung

- Von welcher Ordnung ist dieser Algorithmus?

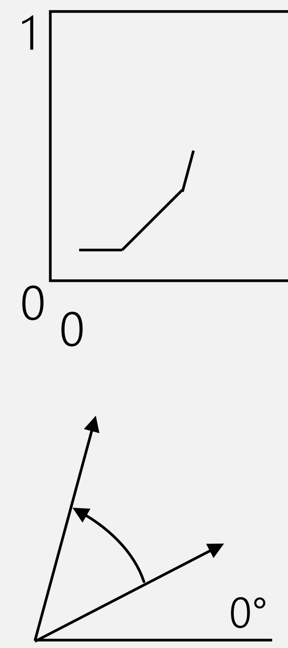
- Berechnen Sie die Fibonacci Zahlen iterativ

Rekursive Kurven

Einschub: Schildkröten-Graphik

- «Turtle» bewegt sich vorwärts
- «Turtle» dreht sich um Winkel

```
class Turtle
   double x, y;
   bewege(double distanz);
   drehe(double winkel):
}
```



in Grad

+ Gegenuhrzeigersinn

0° bei 3 Uhr

```
bewege(0.2);
drehe(45);
bewege(0.4);
drehe(30);
bewege(0.2);
```

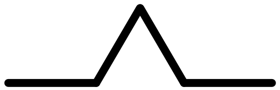
Achtung:
Drehungen der Schildkröte sind relativ, nicht absolut.

Rekursive Kurven: Schneeflockenkurve

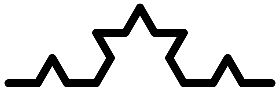
Die Strecke wird je Rekursionsstufe dreigeteilt, der mittlere Teil wird durch die zwei Seiten eines gleichseitigen Dreiecks ersetzt

Muss vier Mal wiederholt werden (plus Drehungen).

S(0)



S(1)



S(2)

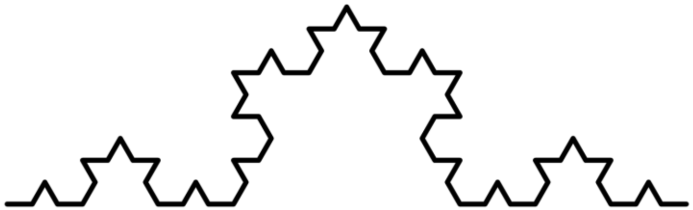
```
turte.strecke(dist);
```

```
dist = dist/3;
turtle.bewege(dist);
turtle.drehe(60);
turtle.bewege(dist);
turtle.drehe(-120);
turtle.bewege(dist);
turtle.drehe(60);
turtle.bewege(dist);
```

```
dist = dist/3/3;
turtle.bewege(dist);
turtle.drehe(60);
turtle.bewege(dist);
turtle.drehe(-120);
turtle.bewege(dist);
turtle.drehe(60);
turtle.bewege(dist);
...
```

Java Programm für Schneeflocke

```
void schneeflocke(int stufe, double dist) {
if (stufe == 0) {
   turtle.bewege(dist)
} else {
    stufe--;
   dist = dist/3;
   schneeflocke(stufe, dist);
   turtle.drehe(60);
   schneeflocke(stufe, dist);
   turtle.drehe(-120);
   schneeflocke(stufe, dist);
   turtle.drehe(60);
   schneeflocke(stufe, dist);
}
```



S(3)

Vollständige Implementation ist eine Praktikumsaufgabe.

Zusammenfassung

- Anmerkungen
  - zu jedem rekursiv formulierten Algorithmus gibt es einen äquivalenten iterativen Algorithmus

- Vorteile rekursiver Algorithmen
  - kürzere Formulierung
  - leicht verständliche Lösung
  - Einsparung von Variablen
  - teilweise sehr effiziente Problemlösungen (z.B. Quicksort, kommt später)

- Nachteile rekursiver Algorithmen
  - z.T. weniger effizientes Laufzeitverhalten (Overhead beim Methodenaufruf)
  - Konstruktion rekursiver Algorithmen «gewöhnungsbedürftig»

Kontrollfragen Lektion 4 nicht vergessen – heute mit Die Sterntaler