Schnelles Suchen und Hashing



- Sie kennen die Begriffe: Vor-/Nachbedingung und Invariante
- Sie wissen, wie schnell gesucht werden kann
- Sie wissen, wie binäres Suchen funktioniert
- Sie wissen, wie Hashing funktioniert
- Sie kennen die Java Datenstruktur Map und HashMap

Basiert auf Material von:

Kurt Bleisch Stephan Neuhaus Karl Rege Marcela Ruiz Jürgen Spielberger





Suchen: Beispiele



- Prüfen ob ein Wort in einem Text vorkommt.
- Zählen wie oft ein Wort in einem Text vorkommt.
- Überprüfen ob alle Worte korrekt geschrieben sind
- Finden einer Telefonnummer in einer Telefonbuch
- Prüfen ob die richtige Zahlenkombination im Lotto gewählt wurde
- Prüfen ob eine Kreditkartennummer gesperrt ist
- Prüfen ob in zwei Listen die gleichen Elemente vorkommen
- Usw.

Suchen: Vor-, Nachbedingung und Invariante

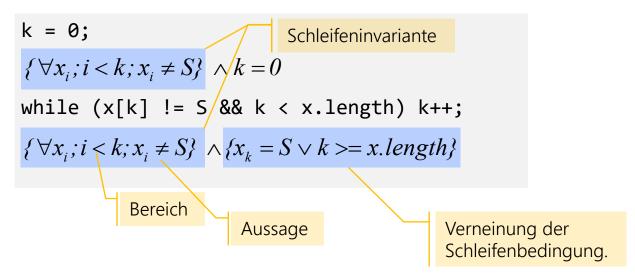


Vorbedingung: Aussage, die vor dem Ausführen der Programmsequenz gilt.

Nachbedingung: Aussage, die nach dem Ausführen der Programmsequenz gilt.

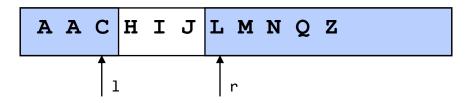
$$\{x \ge 0\}$$
 y = sqrt(x) $\{y = \sqrt{x}, x \ge 0\}$
Vorbedingung Nachbedingung

Invariante: Aussage, die über die Ausführung hinweg gültig bleibt.



Suchen: Binäres Suchen im sortierten Array





Gegeben sei ein sortiertes Array von Werten (Buchstaben). Wie kann ein Wert S in so einem Array effizient gesucht werden?

• Führe zwei Indizes ein: 1 und r

Invariante:

So lange die Invariante gilt, so lange haben wir S nicht gefunden, liegt S «zwischen» I und r.

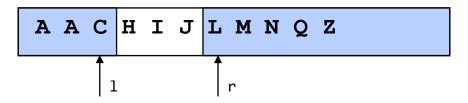
$$\forall$$
k, n; k \leq l, n \geq r; a[k] $<$ S \land a[n] $>$ S

Verwendung:

- Invarianten können zum Beweis der Korrektheit von Algorithmen verwendet werden.
- Verwendung im Design By Contract: Für eine Methode werden alle Vor- und Nachbedingungen und Invarianten in ihrem Ablauf beschrieben.

Suchen: Binäres Suchen im sortierten Array





Wiederhole bis S gefunden oder nicht gefunden:

- 1. nehme m als Index zwischen 1 und r
- 2. falls $a[m] < S \rightarrow 1 = m$
- 3. falls $a[m] > S \rightarrow r = m$
- 4. falls $a[m] == S \rightarrow gefunden$
- 5. falls $1 + 1 >= r \rightarrow$ nicht gefunden, keine Elemente mehr zwischen I und r

$$\forall k, n; k \leq l, n \geq r; a[k] < S \land a[n] > S$$

Invariante: Bleibt gültig, auch wenn wir S gefunden haben.

Suchen: Binäres Suchen im sortierten Array



In jedem Durchgang wird r - 1 halbiert $\rightarrow \log_2$ Schritte

```
static int binary(int[] a, int s) {
   int l = -1;
   int r = a.length;
  int m = (1 + r) / 2;
  // Invariante && l == -1 && r == a.length
  while (1 != r && a[m] != s) {
      if (a[m] < s) 1 = m;
      else r = m;
      m = (1 + r) / 2;
   }
  // Invariante && (1 == r || a[m] == s)
   return (a[m] == s)?m:-1;
```

l und r nach der Initialisierung ausserhalb der Arraygrenzen, daher ist die Invariante auch zu Beginn gültig.

Aufwand: $O(log_2 n) - aber$?

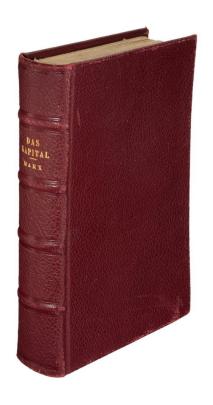
Das Finden ist mit wenigen Schritten getan. Das Array muss aber sortiert sein (kostet etwas), sonst funktioniert das nicht!

 \forall k, n; k \leq l, n \geq r; a[k] < S \land a[n] > S

Invariante

Suchen: In mehreren Listen







Fragen:

- Welche der 300 Reichsten der Schweiz beziehen Krankenkassenvergünstigung?
- Welcher Student, dessen Eltern reich sind, bekommt ein Stipendium?
- Welcher LinkedIn-User hat «Das Kapital» von Karl Marx gekauft?

Suchen: In mehreren Listen Einfacher Algorithmus

```
Zincher Hochschule
für Angewardte Wissenschaften

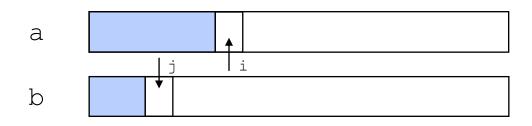
School of
Engineering
```

```
static int indexOf(String[] a, String[] b) {
   for (int i = 0; i < a.length; i++) {
      for (int j = 0; j < b.length; j++) {
        if(a[i].equals(b[j])) return i;
      }
   }
  return -1;
}</pre>
```

- Doppelt geschachtelte Schleife.
- Aufwand O($n \cdot m$), bei 2 · 10'000 Elementen \rightarrow 10⁸

Suchen: In mehreren Listen Besserer Algorithmus wenn a und b sortiert





$$\forall k, n; k < j, n < i; b[k] \neq a[n]$$

Invariante

Bereich, für den die Invariante gilt, sukzessive erweitern:

$$b[j] < a[i] \rightarrow \forall k; k \le j; b[k] < a[i] \rightarrow j \text{ um 1 erh\"ohen}$$

$$b[j] > a[i] \rightarrow \forall n; n \le i; b[j] > a[n] \rightarrow i \text{ um 1 erh\"{o}hen}$$

$$b[j] = a[i] \rightarrow gefunden Wert zurückgeben.$$

Suchen: In mehreren Listen



```
static int indexOf(String[] a, String[] b) {
                                                         Schleife wird verlassen wenn
                                                         diese Bedingung nicht mehr gilt
   int i = 0, i = 0;
                                                         → Negation der Bedingung gilt
   // Invariante && i == 0 && j == 0
                                                         am Schluss.
  while (!a[i].equals(b[j]) && (i < a.length-1 || j < b.length-1)) {
      int c = a[i].compareTo(b[j]);
      if (c < 0 | j == b.length-1) i++;
      else if (c > 0 \mid | i == a.length-1) j++;
   }
   // Invariante && (i == a.length-1 && j == b.length-1) || (a[i] == b[j])
   if (a[i].equals(b[j])) return i; else return -1;
```

- i und j werden erhöht, so dass die Invariante erhalten bleibt.
- Am Schluss gilt: Invariante & Abbruchbedingung der Schleife.
- Aufwand: O(n) aber?

 \forall k, n; k < j, n < i; b[k] \neq a[n]

Invariante

Suchen: Aufwand für Suchen und Einfügen



Sortierter Array

- Einfügen: $O(n/2) \rightarrow O(n)$
- Binäres Suchen: $O(\log_2(n)) \rightarrow O(\log(n))$

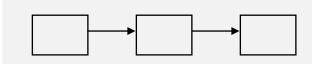
Lineare sortierte Liste

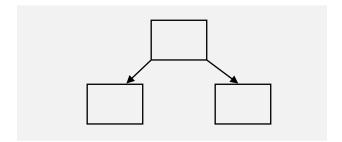
- Einfügen: $O(n/2) \rightarrow O(n)$
- Suchen: $O(n/2) \rightarrow O(n)$

Sortierter Binärbaum

- Einfügen: $O(\log_2(n)) \rightarrow O(\log(n))$
- Suchen: $O(\log_2(n)) \rightarrow O(\log(n))$







Frage:

Gibt es ein «Such-Verfahren», dessen Aufwand unabhängig von der Anz. Elemente ist?

16 1011 17





Hashing: Schlüssel → Inhalt



Gegeben sei eine Menge von Datensätzen der Form:

Schlüssel Inhalt

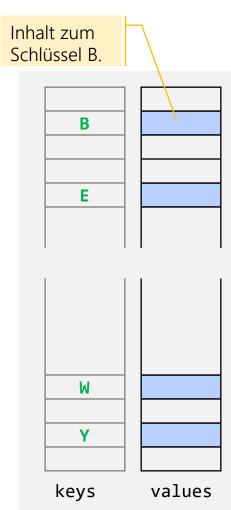
- Der Schlüssel kann ein Teil des Inhalts sein.
- Der Schlüssel besteht im einfachsten Fall aus einem String oder einem numerischen Wert.
- Mittels des Schlüssels kann der Datensatz wiedergefunden werden. Bsp:
 - AHV-Nummer → Personen
 - Matrikel-Nummer → Studenten
- Aufgabe: Es sollen Daten (Objekte) in einen Behälter eingefügt und mittels ihres Schlüssels wiedergefunden werden.

Hashing: Idee



Werte in Array an ihrer Indexposition (z.B. bestimmt durch ASCII-Code) speichern.

- Wertebereich: Alle Schlüsselwerte A...Z
- Schlüsselwerte im Beispiel: B, E, W, Y
- Array: char[] values = new char[256]
- Einfügen: values[key] = value
- Suchen: value = values[key]
- Aufwand:
 - Einfügen O(1)
 - Suchen O(1)



Hashing: Idee

1. $h(k) = k \mod M$

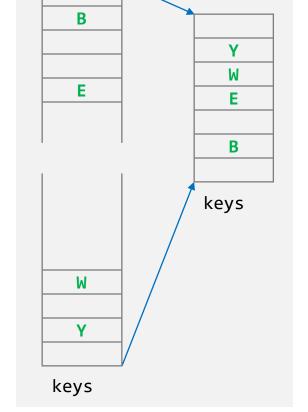


- Probleme:
 - Der Array ist nur schwach belegt.
 - Geht noch für Buchstaben, was aber bei Zahlen (>2³²) oder Strings?
- Lösung:
 - Es wird eine Funktion verwendet, welche den grossen Wertebereich auf einen kleineren Bereich abbildet.
 - Einfache Funktion: X mod tableSize → Zahl zwischen 0 und tableSize-1
 - Eine solche Funktion nennt man Hash-Funktion.
- Wirklich gute Hashfunktionen sind nicht immer einfach zu finden (gleichmässige Verteilung), zwei gebräuchliche Hashfunktionen:

Divisonsrest-

M ist häufig Primzahl

2. $h(k) = [m \cdot ((k \cdot c) \mod 1)]$ m = Anz. Hashadressen, 0 < c < 1; c = z.B. goldener Schnitt (0,618033...)



Hashing: Algorithmus, Kollision vernachlässigt



```
public class Hashtable {
   final int MAX = 97;
   final int INVALID = Integer.MINVALUE;
   int[] keys = new int[MAX];
   int[] vals = new int[MAX];
   private void init()
      for (int i = 0; i < MAX; i++) {
         key[i] = INVALID;
                          Hash-Funktion
   private int h(int key) {
      return key % MAX;
```

```
public void put(int key, int val) {
                                Überprüfe
      int h = h(key);
                                ob Feld frei.
      if (keys[h] == INVALID)
         keys[h] = key;
         vals[h] = val;
                          Speichere Wert.
      else {/* COLLISION */}
   public int get(int key) {
                                 Schlüssel
      int h = h(key);
                                vorhanden?
      if (keys[h] = key) {
         return vals[h];
                           Hole Wert.
      else return INVALID;
}
```

Hashing: Probleme



Problem 1:

Aus dem Hash-Wert kann der ursprüngliche Wert nicht mehr bestimmt werden.

Lösung:

⇒ Originalwert ebenfalls in Tabelle (z.B. zusätzlicher Array) speichern.

Problem 2:

Suche einer geeigneten Hash-Funktion.

Lösung:

⇒ Schwierig, Kenntnisse der zu erwarteten Schlüssel sinnvoll.

Problem 3:

Twei unterschiedliche Objekte können den gleichen Hash-Wert haben, d.h. sie müssten an der gleichen Stelle (Massierungen / Clustering) gespeichert werden ⇒ Kollision.

Lösung:

- ⇒ Kollisionen werden vermieden (Bildbereich gleich gross wie Ur-Bildbereich) oder verringert (suche einer geeigneten Hash-Funktion).
- ⇒ Kollision wird aufgelöst, verschiedene Verfahren zur Auflösung (später): linear / quadratic probing, ...

Hashing: Problem Hash-Funktion



Hashfunktion: ASCII-Wert × 256^{Position-1}

_	*1	*256	*256 ²	*256 ³
	В	Α	U	М

• Es entstehen sehr grosse Zahlen

Ein vier Zeichen langer ASCII-String führt bereits zu einer Zahl in der Grössenordnung von $256^4 = 2^{32}$. Falls das Zeichen 32-Bit verwendet, dann sogar 4'294'967'296⁴ = 2^{128} = $3.4*10^{38}$.

- In der Praxis wird zur Umwandlung von Strings das Horner-Schema verwendet: $A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x^1 + A_0x^0 = (((A_3)x + A_2)x + A_1)x + A_0$, trotzdem bleibt das Overflow-Problem.
- Mit dem Modulo-Operator wird die Menge der verschiedenen Hashwerte eingeschränkt: $(A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x^1 + A_0x^0)$ mod n Da (a + b) mod n = (a mod n + b mod n) mod n \rightarrow $((A_3x^3) \text{ mod } n + (A_2x^2) \text{ mod } n + (A_1x^1) \text{ mod } n + (A_0x^0)$ mod n) mod n. Trotzdem bleibt Problem mit dem grössten Term.

Hashing: hashCode()-Methode in Java



Hashwerte und equals müssen folgenden «Vertrag» (Contract) einhalten

- Ein Objekt muss während seiner Lebensdauer immer denselben Hashwert zurückliefern, solange der Zustand (Wert) des Objekts nicht verändert wurde.
 Wenn aber die JVM neu gestartet oder eine andere JVM verwendet wird, dann darf der Hashwert ändern!
- 2. wenn equals() == true, dann müssen die Objekte denselben Hashwert liefern
- 3. wenn equals() == false, dann sollten die Objekte unterschiedliche Hashwerte liefern (d.h. Haswerte müssen nicht eindeutig sein).

Zusätzlich:

- wenn equals() == true, dann muss compareTo() == 0 liefern
- wenn equals() == false, dann muss compareTo() != 0 liefern

Immer equals, compareTo und hashCode zusammen überschreiben.

Hashing: hashCode-Implementierung in Java



Bei Klassen kann der Hashcode z.B. aus den Werten der Felder berechnet werden.

```
public class Employee {
   int employeeId;
   String name;
                                      Ohne Modulo, da noch
   Department dept;
                                      unabhängig von der Anwendung (d.h. Grösse) der Hashtabelle.
   @Override
   public int hashCode() {
      int hash = 1;
      hash = hash * 13 + employeeId;
      hash = hash * 17 + name.hashCode();
      hash = hash * 31 + (dept == null ? 0 : dept.hashCode());
      return hash;
                                      Primzahlen
```

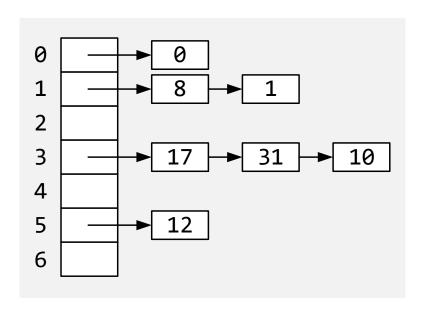




Kollisionsauflösung 1: Überlauflisten



Hashtable lediglich als Ankerpunkt für Listen aller Objekte, die den gleichen HashWert haben: Überlauflisten (Separate Chaining).



- Nachteil: Overhead durch Verwendung einer weiteren Datenstruktur.
- Vorteil: Funktioniert auch noch bei Load-Faktor λ nahe oder gleich 1.

Anzahl Einträge / Anzahl Plätze

Kollisionsauflösung 1: Übung



Gegeben sind:

- Eine Hashtabelle der Grösse 10.
- Eine Hash-Funktion h(x) = x mod 10.
- Input: 4371, 1323, 6173, 4199, 4344, 9679, 1989.

Wie sieht die Tabelle aus, nachdem der Input unter Verwendung von Separate Chaining Hashing (Überlaufliste) verarbeitet wurde?

```
1 4371
3 1323 6173
4 4344
9 4199, 9679, 1989
```

Kollisionsauflösung 2: Open Addressing



Open Addressing: Techniken, bei welchen bei einer Kollision eine freie Zelle sonst wo in der HashTable gesucht wird ⇒ setzt einen Load-Faktor < ~0.8 voraus.

Lineares Sondieren (Linear Probing):

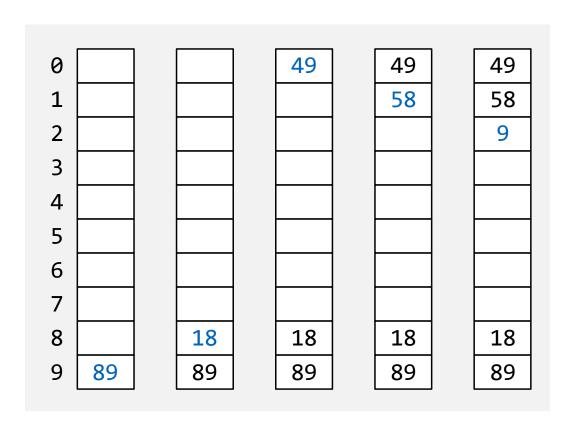
Sequentiell nach nächster freier Zelle F+1, F+2, F+3, ..., F+i suchen (mit Wrap around). **Quadratisches Sondieren** (Quadratic Probing):

In wachsenden Schritten der Reihe nach F+1, F+4, F+9, . . . , F+i² prüfen (mit Wrap around).

Kollisionsauflösung 2: Lineares Sondieren



In eine Hash-Tabelle mit 10 Feldern werden der Reihe nach 89, 18, 49, 58 und 9 eingefügt.



- Hash-Funktion: Input modulo Tabellengrösse.
- Bei zunehmendem Load-Faktor dauert es immer länger bis eine Zelle gefunden wird (Einfügen und Suchen).
- find funktioniert wie insert: Element wird in Tabelle ausgehend vom Hash-Wert gesucht bis Wert oder leere Zelle gefunden wird.

Kollisionsauflösung 2: Lineares Sondieren



Performance:

Ziemlich schwierig zu bestimmen, da der Aufwand nicht nur vom Load-Faktor, sondern auch von der Verteilung der belegten Zellen abhängt, aber i.d.R. O(1).

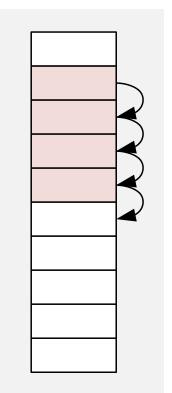
- Phänomen des Primary-Clustering:
 Mussten einmal freie Zellen neben dem Hash-Wert belegt werden, steigt die Wahrscheinlichkeit, dass weiter gesucht werden muss für:
 - alle Ausgangswerte mit gleichem Hash-Wert
 - all jene, deren Hash-Wert in eine der nachfolgenden Zellen verweist.

Folge:

- Verlängerung des durchschnittlichen Zeitaufwandes zum Sondieren.
- Erhöhte Wahrscheinlichkeit, dass weiteres Sondieren nötig wird.
- ⇒ Bei hohem Load-Faktor oder ungünstigen Daten bricht die Performance ein!

Kollisionsauflösung 2: Lineares Sondieren





Kollisionsauflösung 2: Übung



Gegeben sind:

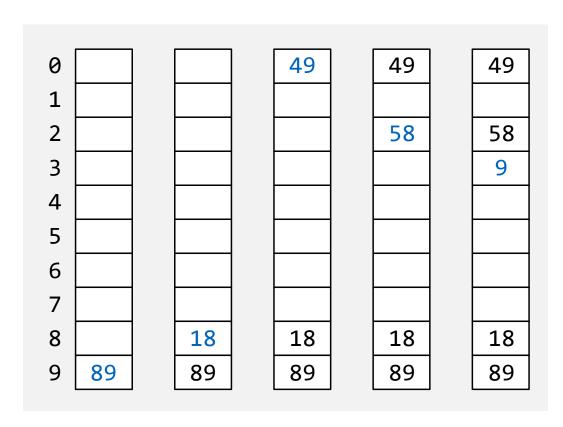
- Eine Hashtabelle der Grösse 10
- Eine Hash-Funktion h(x) = x mod 10
- Input: 4371, 1323, 6173, 4199, 4344, 9679, 1989.

Wie sieht die Tabelle aus, nachdem der Input unter Verwendung einer linearen Sondiermethode verarbeitet wurde?

Kollisionsauflösung 2: Quadratisches Sondieren



In eine Hash-Tabelle mit 10 Feldern werden der Reihe nach 89, 18, 49, 58 und 9 eingefügt.

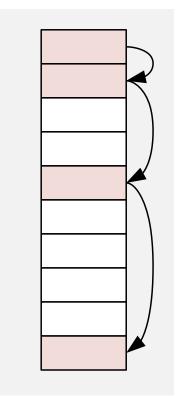


- Hash-Funktion: Input modulo Tabellengrösse.
- Jetzt bleiben Lücken in der Hash-Tabelle offen.
- Die zuletzt eingefügte 9 findet ihren Platz unbeeinflusst von der zuvor eingefügten 58.

Kollisionsauflösung 2: Quadratisches Sondieren



```
int findPos( Object x ) {
    int collisionNum = 0;
    int currentPos = hash(x);
   while (array[currentPos] != null &&
       !array[currentPos].element.equals(x))
    {
       currentPos += 2 * ++collisionNum - 1;
       currentPos = currentPos % array.length;
    return currentPos;
```



Bessere Performance als lineares Probing weil weniger Primary-Clustering auftritt.

Kollisionsauflösung 2: Übung



Gegeben sind:

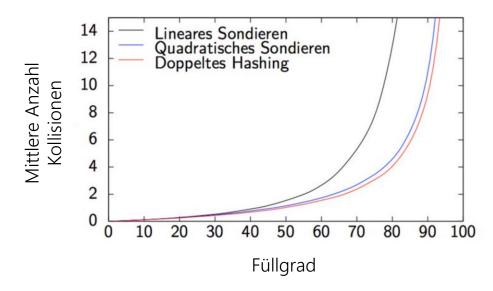
- Eine Hashtabelle der Grösse 10
- Eine Hash-Funktion $h(x) = x \mod 10$
- Input: 4371, 1323, 6173, 4199, 4344, 9679, 1989.

Wie sieht die Tabelle aus, nachdem der Input unter Verwendung einer quadr. Sondiermethode verarbeitet wurde?

Kollisionen: Load-Faktor



- Anzahl Kollisionen hängt von der Güte der Hash-Funktion und der Belegung der Zellen ab.
- Der Load-Faktor λ (Anzahl Einträge / Anzahl Plätze):
 - Sagt wie stark der Hash-Bereich belegt ist.
 - Bewegt sich zwischen 0 und 1.
 - Die Anzahl Kollisionen ist abhängig vom Load-Faktor λ und der Hash-Funktion h: f(h, λ)

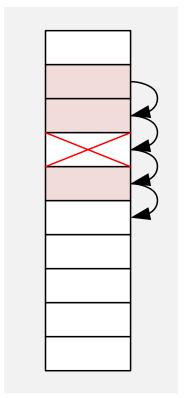


Joost-Pieter Katoen RWTH Aachen

Kollisionsauflösung: Löschen



- Werte können nicht einfach gelöscht werden, da sie die Folge der Ausweichzellen unterbrechen.
- Wenn ein Wert gelöscht wird, müssen alle Werte, die potentielle Ausweichzellen sind, gelöscht und wieder eingefügt werden (rehashing).
- Zweite Möglichkeit: gelöschte Zelle lediglich als «gelöscht» markieren.



Hashing: Vor- und Nachteile



Vorteile:

- Suchen Einfügen in Hash-Tabellen sehr effizient.
- «Einfache» binäre Bäume können bei ungünstigen Inputdaten degenerieren, Hash-Tabellen kaum.
- Der Implementationsaufwand für Hash-Tabellen ist geringer als derjenige für ausgeglichene, binäre Bäume.

Nachteile:

- Das kleinste oder grösste Element lässt sich nicht einfach finden.
- Geordnete Ausgabe ist nicht möglich.
- Die Suche nach Werten in einem bestimmten Bereich oder das Finden z.B. eines Strings, wenn nur der Anfang bekannt ist, ist nicht möglich.

Hash-Tabellen sind geeignet wenn: die Reihenfolge nicht von Bedeutung ist, nicht nach Bereichen gesucht werden muss und die ungefähre (maximale) Anzahl bekannt ist.





Extendible Hashing: Auslöser



Was tun, wenn die Hashtabelle überläuft oder sogar nicht mehr in den Hauptspeicher passt?

Hashtabelle passt noch in den Hauptspeicher:

- Überlaufketten → Performance beim Zugriff wird schlechter.
- In neue, genügend grosse Hashtabelle umkopieren (rehashing mit neuer Hashfunktion) → relativ teure Operation.

Hashtabelle passt nicht mehr in den Hauptspeicher:

- Extendible Hashings:
 - Der Schlüsselwertebereich kann nachträglich vergrössert werden.
 - Funktioniert mit Files/Blockstruktur (wie B-Bäume).

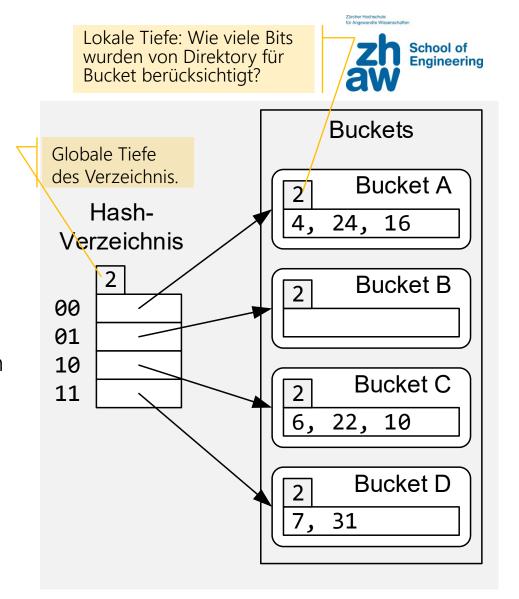
Extendible Hashing: Grundidee



- Naive Implementation einer grossen Hashtabelle als File festgelegter Grösse
 - Rehashing würde bedeuten, dass sämtliche Schlüssel bzw. das ganze File neu geschrieben/umorganisiert werden muss.
- Idee: verwende Hash-Verzeichnis von Verweisen zu «Buckets» (= Behälter)
 - Ein Bucket enthält mehrere Einträge.
 - Die Buckets müssen nicht mehr hintereinander auf der Disk liegen.
 - Grosse Buckets (z.B. Bucket-Size = Disk-Block) haben kleine Schlüssel im Verzeichnis zur Folge.
- Hash-Verzeichnis enthält lediglich (die letzten) n-Bits des Schlüssels und ist wesentlich kleiner (als die Daten selbst)
 - Das Verzeichnis kann in den Hauptspeicher geladen werden.
 - Es kann einfacher verdoppelt werden.
- Hashfunktion wird entsprechend der berücksichtigten Bits im Verzeichnis angepasst.

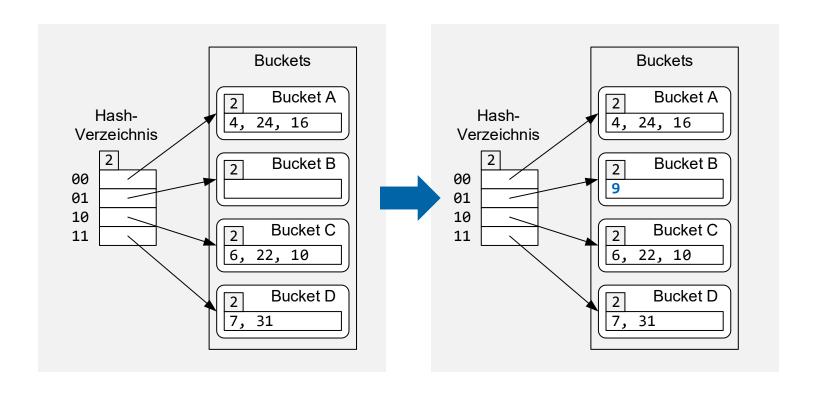
Extendible Hashing: Beispiel

- Hash-Verzeichnis ist ein Array der Grösse 4.
- Um einen Bucket zu finden, verwende die Anzahl Bits des Schlüssels gemäss globaler Tiefe.
 Bsp.: Gesuchter Wert = 6 (binär: 110); dann ist Zeiger auf Bucket im Verzeichniseintrag 6 % 4 = 2 (binär: 10).
- Insert: Falls ein Bucket voll ist, dann Bucket teilen. Falls not-wendig (globale Tiefe = lokale Tiefe), dann auch das Verzeichnis verdoppeln (siehe nächste Folien).



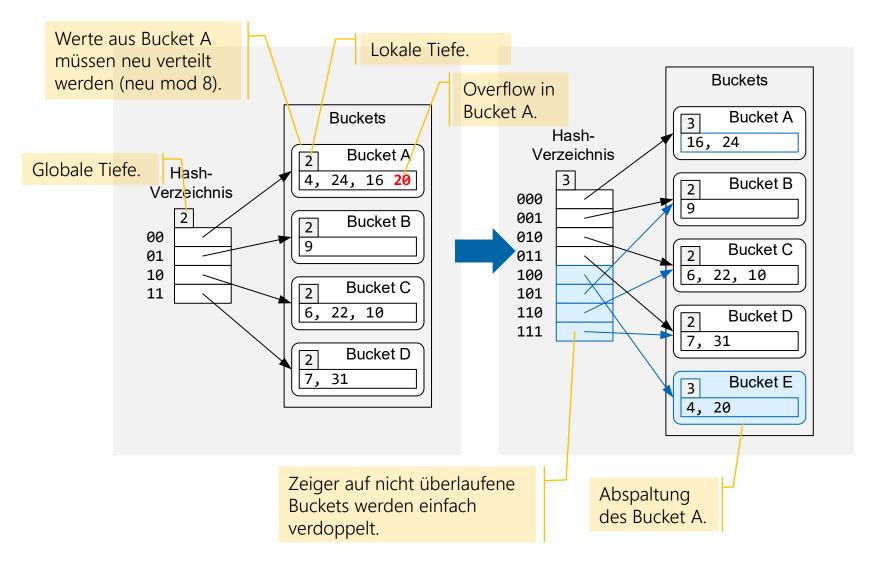
Extendible Hashing: Einfügen ohne Overflow





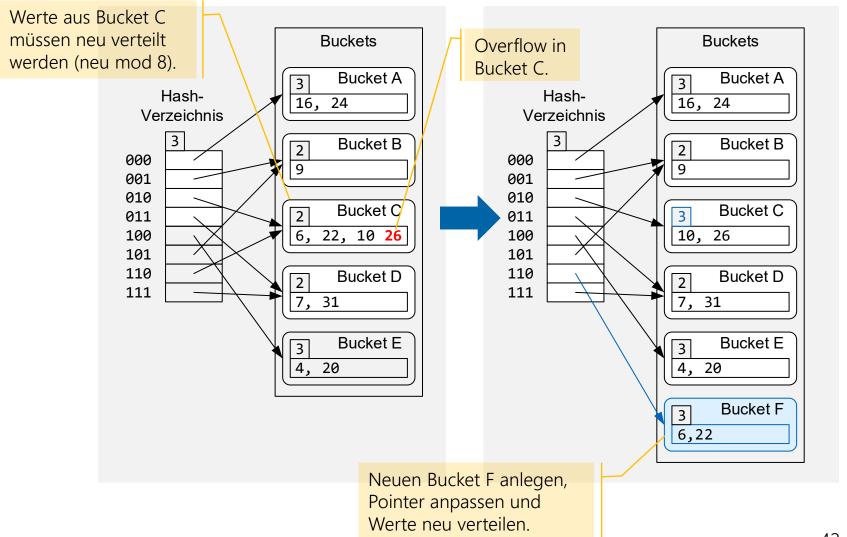
Extendible Hashing: Einfügen mit Overflow mit (globale Tiefe = lokale Tiefe)





Extendible Hashing: Einfügen mit Overflow mit (globale Tiefe > lokale Tiefe)

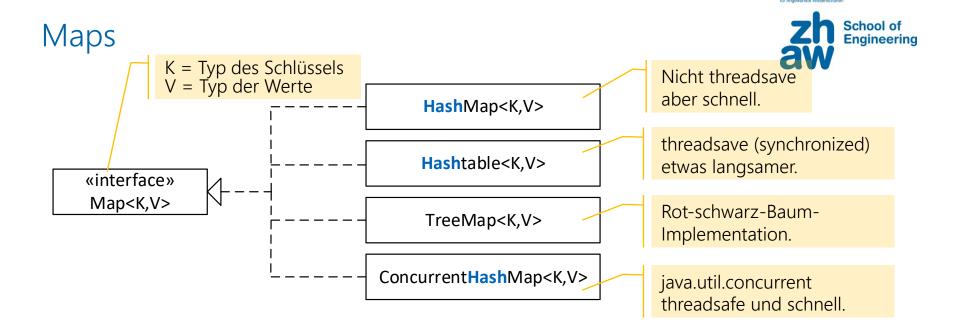








Implementationen in Java



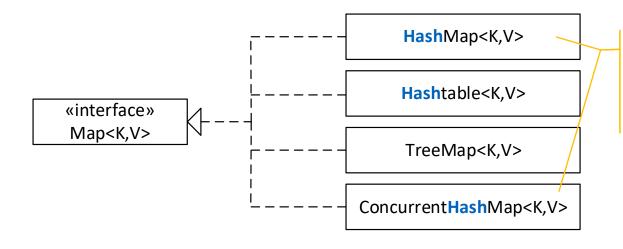
Die Default-Implementation der hashCode()-Methode liefert:

- Verschiedene Werte bei neuerlicher Codeausführung (vielleicht).
- Garantiert keine sinnvolle Verteilung der Werte.
- → Methode beim Einsatz von HashMap, etc. allenfalls geeignet überschreiben.

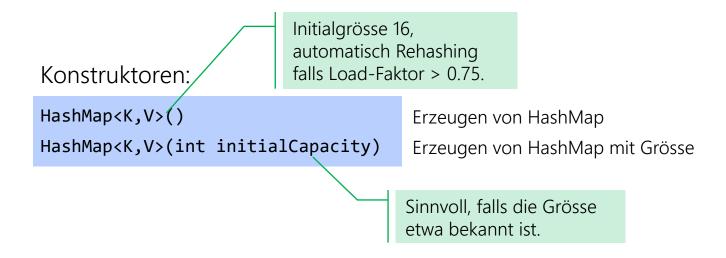
```
Object {
    ...
    public int hashCode();
    ...
}
```

Maps





Für neue Programme entweder HashMap oder ConcurrentHashMap verwenden.



Map<K, V> Interface



```
void clear()
int size()
V put(K key, V value)
V get(Object key)
V remove(Object key)
boolean containsKey(Object key)
boolean containsValue(Object value)

Collection<V> values()
Set<K> keySet()
```

Löschen aller Elemente
Anzahl Elemente
Einfügen eines Elementes
Finden eines Elementes
Löschen eines Elementes
ist Element mit Schlüssel in Tabelle
hat ein Element den Wert

alle Werte alle Schlüssel als Set

```
for (String elem : h.keySet())
   System.out.println(elem);
```

Zusammenfassung



- Suche
 - Einfache Suche
 - Invariante
 - Binäre Suchen
 - Suche in zwei Sammlungen
- Hashing
 - Idee
 - Hashfunktion
 - Gute Hashfunktionen
 - Kollisionsauflösung
 - Überlauflisten
 - Lineares Sondieren
 - Quadratisches Sondieren
 - Vor- und Nachteile
 - Extended Hashing
 - Implementationen in Java

