

# Прикладная теория типов

## Домашнее задание 1 (нетипизированное $\lambda$ -исчисление)

3 октября 2022 г.

Домашняя работа принимается до 23:59 3 ноября 2022, кроме задач, помеченных звёздочкой, которые принимаются до конца семестра. Решения можно набрать в TeX или написать разборчивым текстом на бумаге и отсканировать. Домашняя работа принимается в виде **одного** pdf файла на почту [m.voronov@gse.cs.msu.ru](mailto:m.voronov@gse.cs.msu.ru). Вопросы по домашнему заданию можно задавать или по почте, или в ТГ-группе курса.

1. (2 балла) Запишите приведённые термы в соответствии с (обще)принятыми правилами опускания скобок:

- $(\lambda x.(((xz)y)(xx)))$
- $((\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.(z((xy)z)))))(\lambda u.u))$

2. (3 балла) Для каждого из приведённых ниже термов определите, является ли он  $\alpha$ -эквивалентным терму  $\lambda x.x(x.x)$ , если не является, то почему?

- $\lambda y.y(\lambda x.x)$
- $\lambda y.y(\lambda x.y)$
- $\lambda y.y(\lambda y.x)$

3. (5 баллов) Выделите свободные и связанные переменные в термах и выполните указанные подстановки:

- $(\lambda y p.x y w(p x))[x := \lambda w.y w]$
- $((x y z)[x := y])[y := z]$
- $((\lambda x.x y z)[x := y])[y := z]$
- $(\lambda y.y y x)[x := y z]$
- $(x y(\lambda x z, x y z) y)[y := x z]$

4. (10 баллов) Покажите, расписывая все шаги преобразований с их названиями, что  $\forall P, Q, R \in \Lambda :$

- $S K K \rightarrow_{\beta} I$
- $K P Q \rightarrow_{\beta} P$
- $S P Q R \rightarrow_{\beta} P R(Q R)$
- $(S(K S)K)P Q R \rightarrow_{\beta} P(Q R)$
- $S S S K K \rightarrow_{\beta} S K K K$

5. (2 балла) Приведите пример замкнутого  $\lambda$ -терма, находящегося в

- в слабой головной нормальной форме, но не в головной нормальной форме;
- в головной нормальной форме, но не в нормальной форме.

6. (4 балла) Покажите, что данное утверждение не всегда верно:

$$M[x := N, y := L] = M[x := N][y := L];$$

Здесь запись  $M[x := N, y := L]$  означает, что подстановка  $x$  и  $y$  в терм  $M$  происходит одновременно, т.е. все свободные  $x$  и  $y$  заменяются вместе за один шаг.

7. (6 баллов) Докажите, что если  $MN$  строго нормализуемо, то  $M$  и  $N$  строго нормализуемо.

8. (2 балл) Покажите, что хотя для комбинатора неподвижной точки Карри  $Y$  выполняется  $Y F =_{\beta} F(Y F)$ , но при этом неверно ни  $Y F \rightarrow_{\beta} F(Y F)$ , ни  $F(Y F) \rightarrow_{\beta} Y F$

9. (6 баллов) Постройте термы  $M$  такие, что
- $M =_{\beta} xy.xMx$
  - $Mxyz =_{\beta} xyzM$
10. (6 баллов) Постройте функции:
- **minus**, вычитающую числа в кодировке Чёрча;
  - **equals**, сравнивающую числа в кодировке Чёрча;
  - **lt**, реализующую операцию  $<$  для чисел в кодировке Чёрча;
  - **gt**, реализующую операцию  $>$  для чисел в кодировке Чёрча;
  - **leq**, реализующую операцию  $\leq$  для чисел в кодировке Чёрча;
  - **geq**, реализующую операцию  $\geq$  для чисел в кодировке Чёрча;
11. (4 балла)\* Реализуйте функцию возведения в степень для чисел в кодировке Чёрча. Проверьте её работоспособность со всеми преобразованиями для  $0^2, 1^2, 2^2$ .
12. (10 баллов)\* Пусть  $U := \lambda zx.x(zzx)$  и  $Z := UU$ , докажите, что  $Z$  - это комбинатор неподвижной точки, т.е.  $ZM$  является неподвижной точкой для любого  $\lambda$ -терма  $M$ :  $M(ZM) = ZM$ . Более того, покажите, что выполняется  $ZM \rightarrow_{\beta} M(ZM)$