

Прикладная теория типов

Домашнее задание 3 (полиморфное λ -исчисление)

9 декабря 2022 г.

Домашняя работа принимается до 23:59 10 декабря 2022, кроме задач, помеченных звёздочкой, которые принимаются до конца семестра. Решения можно набрать в TeX или написать разборчивым текстом на бумаге и отсканировать. Домашняя работа принимается в виде **одного** pdf файла на почту m.voronov@gse.cs.msu.ru. Вопросы по домашнему заданию можно задавать или по почте, в ТГ-группе курса или в личном сообщении в ТГ.

- (2 баллов) Как много $\lambda 2$ контекстов существует для следующего списка деклараций: $\alpha : *, \beta : *, \gamma : *, f : \alpha \rightarrow \beta, g : \gamma \rightarrow \beta, x : \beta$. Приведите обоснование.
- (3 баллов) Приведите вывод со всеми шагами во флаговой нотации, который показывает, что следующий терм возможен в $\lambda 2$:
 $M \equiv \Lambda \alpha \beta \gamma. \lambda f^{\alpha \rightarrow \beta} g^{\beta \rightarrow \gamma} x^{\alpha}. g(fx)$
- (3 балла) Для терма M , определённого в предыдущем упражнении, покажите, что терм $M \text{ nat nat bool succ even}$ является корректно заданным в сильном $\lambda 2$ при следующих объявлениях $\text{nat} : *, \text{bool} : *, \text{succ} : \text{nat} \rightarrow \text{nat}, \text{even} : \text{nat} \rightarrow \text{bool}$
- (2 балла) Покажите, что в контексте $\Gamma \equiv \text{nat} : *, \text{bool} : *$ следующий терм является корректно заданным в сильном $\lambda 2$:
 $(\Lambda \alpha \beta. \lambda f^{\alpha \rightarrow \alpha} g^{\alpha \rightarrow \beta} x^{\alpha}. g(f(fx))) \text{ nat bool}.$
- (6 баллов) Найдите тип а-ля Карри и а-ля Чёрч для следующих предтермов в сильном $\lambda 2$:
 - $\lambda x. xxx$
 - $\lambda x. (xx)(xx)$
- (9 баллов) Найдите термы, которые являются обитателями следующего типа в контексте Γ :
 - $\Gamma \equiv \text{nat} : *;$
 $\forall \alpha \beta. (\text{nat} \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \text{nat} \rightarrow \beta) \rightarrow \text{nat} \rightarrow \beta$
 - $\Gamma \equiv \alpha : *, \beta : *, \gamma : *;$
 $\forall \sigma. ((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \sigma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \sigma$
 - $\Gamma \equiv \emptyset;$
 $\forall \alpha \beta \gamma. (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \gamma) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$
- (6 баллов) Типизируем ли данный терм в сильном и слабом $\lambda 2$:
 $(\lambda x. xx)(\lambda z. zyz)$
- (3 балла) Типизируйте а-ля Чёрч терм $S \equiv \lambda xyz. xz(yz)$ в сильном $\lambda 2$.
- (6 баллов) Найдите обитателей следующих типов:
 - $\forall \alpha \beta. \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
 - $\forall \alpha. \alpha \rightarrow (\forall \beta. \beta \rightarrow \alpha)$

Данные термы могут быть рассмотрены, как разные версии комбинатора K .

- (6 баллов)* Покажите, что следующие термы не типизируемы в сильном $\lambda 2$, где I, K - комбинаторы:
 - $(\lambda sz. s(sz))(\lambda sz. s(sz))K$
 - $(\lambda zy. y(zI)(zK))(\lambda x. xx)$

В сильном λ 2 типизируются только нормализуемые термы (т.к. данная система типов является сильно нормализуемой), а данные термы представляют собой примеры нормализуемых термов, которые тем не менее не типизируются.

11. (6 баллов)* Существует ли предтерм, типизируемый а-ля Карри, но не типизируемый а-ля Чёрч в λ , λ_{\rightarrow} и в сильном $\lambda 2$. Если нет, приведите обоснование, если да, то терм.
12. (6 баллов)* Существует ли предтерм, типизируемый а-ля Чёрч, но не типизируемый а-ля Карри в λ , λ_{\rightarrow} и в сильном $\lambda 2$. Если нет, приведите обоснование, если да, то терм.