Identity

Definitional eq - это "=", который обычно ставится в разных нотациях эквивалентности (β, α - эквивалентность, η)

Propositional eq - это тип, который выражает то, что два объекта равны

Равенство Лейбница ⟹ два объекта считаются равными, т.т.т.к. свойство, выполняющееся для одного объекта, выполняется и для другого

$$x = y \overset{def}{=} \forall P,\ P(x) \iff P(y) \qquad (1)$$

Принцип неотличимости одинаковости

Два равных объекта имеют одинаковые свойства

Принцип равенства неотличимости

Если два объекта имеют одинаковые свойства, то тогда они равны

Аксиоматизация

рефл-ть $\forall x,\ x = x$

основная аксиома $\forall x\,y\quad x = y \Rightarrow (P(x) \Leftrightarrow P(y))$ (для каждого P)

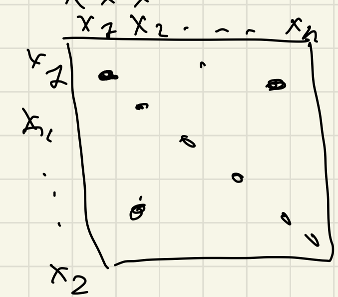
Чтобы получить (1), $P \equiv \lambda z.(x = z)$ $\quad x = x \Leftrightarrow x = y$

Свойства отн-я эквивалентности R

- рефлексивно $\forall x,\ x R y$
- симметричность $\forall x, y\quad xRy \Rightarrow yRx$
- Транзитивность $\forall x, y, z\quad xRy, yRz \Rightarrow xRz$

$R(x, y)$

$X \times X$



MLTT equality

$x =_A y$ - тип равенства между $x, y : A$

φ:

$p : \; x =_A y$

$\to$ доказательство $x = y$

· Конструктор

$A \to x : A \to x : A \to Prop$

$refl_A : \; \forall x : A \,.\; x =_A x$

Inductive eq (A: Type) (x : A) : A → Prop
| eq_refl : eq A x x

Элиминатор

$x : A \to y : A \to x =_A y \to Set$

$J_A : \; \forall C : (\forall x y : A .\; x =_A y \to Set).$

$(\forall z : A .\; C z z \,(refl_A\, z)) \to (\forall x y : A \;\forall s : x =_A y .\; C x y s)$

Такой, что $J_A \; C \; d a a \; (refl_A (a)) = d a : C a a (refl_A (a))$

$P : A \to Set$

$C\,x\,y\,s = P_x \to P_y \qquad C\,z\,z\,(refl_A(z)) = P_z \to P_z$

$x =_A y \Rightarrow P_x \to P_y$

list Nat $\Longleftrightarrow$ Vect Nat

Экстенсиональное равенство – две структуры данных равны, т.т.т.к. все их компоненты равны

$(\text{fun } x \Rightarrow 1 + x) =_\beta (\text{fun } x \Rightarrow S\,x) =_\eta S$

FE (function extensionality)

$\forall A, B : Type.\ \forall f, g : A \to B.\ (\forall x : A,\ f x = g x) \to f = g$

DFE (dependent FE)

$\forall A : Type.\ \forall B : A \to Type.\ \forall f, g : \prod_{x:A} B\,x.\ (\forall x : A,\ f x = g x) \to f x = g x$

Coinductive data type

data Stream a = S a (Stream a)

Деструкторы:

head (S a astream) = a

tail (S a astream) = astream

$$head(tail^n(s_1)) = head(tail^n(s_2)) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\nRightarrow$ s_1, s_2 равны (в общем случае)

Бисимуляция

<u>Nat</u>

$(0, a)$ $+$
$(a, 0)$ $-$

$\mathbb{Z} := \{\ p : Nat \times Nat \mid fst\ p = 0 \lor snd\ p = 0\}$

or_introl

or_intror

Proof irrelevance (PE)

$\forall P : Prop \quad \forall p, q : P. \quad p = q$

Uniqueness of identity proofs (UIP)

$\forall x, y : A \quad \forall p, q : x =_A y . \quad p = q$

Подходы интерпретации равенства

- на основе теории множеств
- на основе добавления аксиом
- HoTT (Cubical)

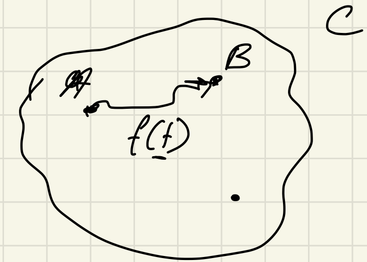
Тип - это пространство *

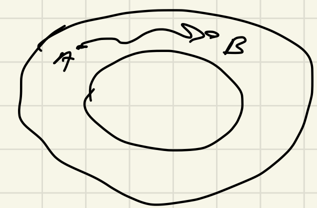
f - **путь**, если

$f: [0,1] \to C$, т.ч.

$f(0) = A$, $f(1) = B$

f - непрерывная ф-я





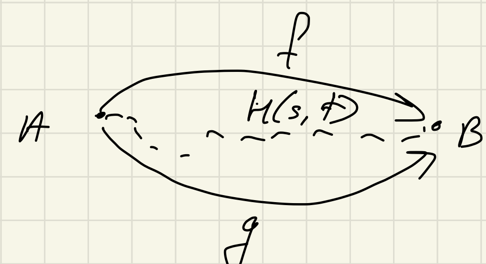
$f, g : A \to B$ (пути)

f, g **гомотопные**, если $\exists$ непрерывная ф-я

$H : [0,1] \times [0,1] \to C$:

$H(0,t) = f(t)$, $H(1,t) = g(t)$,

$H(s,0) = A$, $H(s,1) = B$



– Рефлексивность

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop right, "id_A"] \end{tikzcd}$$

$id_A = t \in [0,1] \Rightarrow A$

– Симметричность

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] & B \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$f^{-1} = t \in [0,1] \Rightarrow f(1-t)$

– Транзитивность

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & B \arrow[r, bend left, "g"] & C \end{tikzcd}$$

$$g \circ f = \begin{cases} f(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2t-1), & t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Группоид

$f \circ f^{-1} = id \qquad f^{-1} \circ f = id$

$f \circ id = f \qquad id \circ f = f$

$(f \circ h) \circ g = f \circ (h \circ g)$

Группа (алгебра)

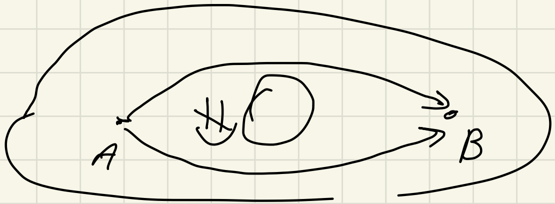
$(X, \circ)$

- ассоц
- inverce
- id

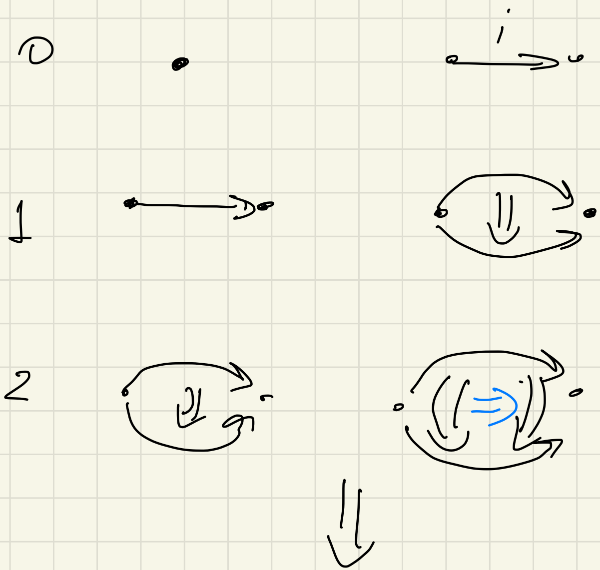
$\forall x, y \in X \quad x \circ y$

Представление $=_A$, refl, J_A

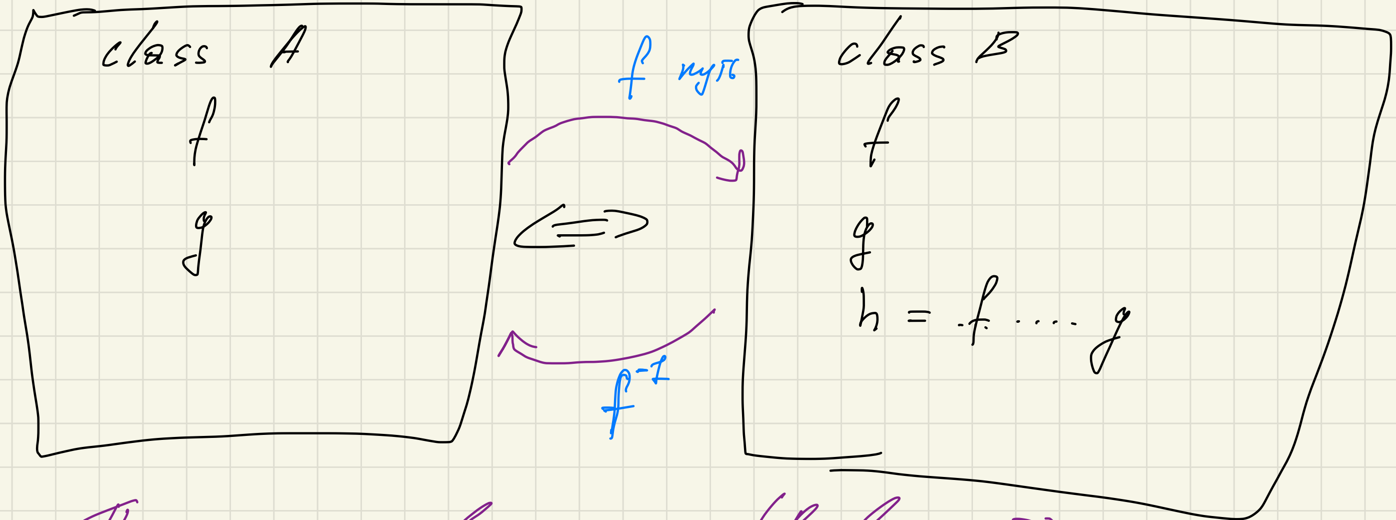
генерирует ∞-группоид



Объекты id(стрелки)



∞-группоид



Принцип унивалентности (Воеводский)

$f \circ f^{-1} = id$ - порождает биекцию между объектами

биекция между объектами порождает f, f^{-1}

$List\ A \simeq Tree / \{assoc, unit\}\ A$

Higher-inductive type

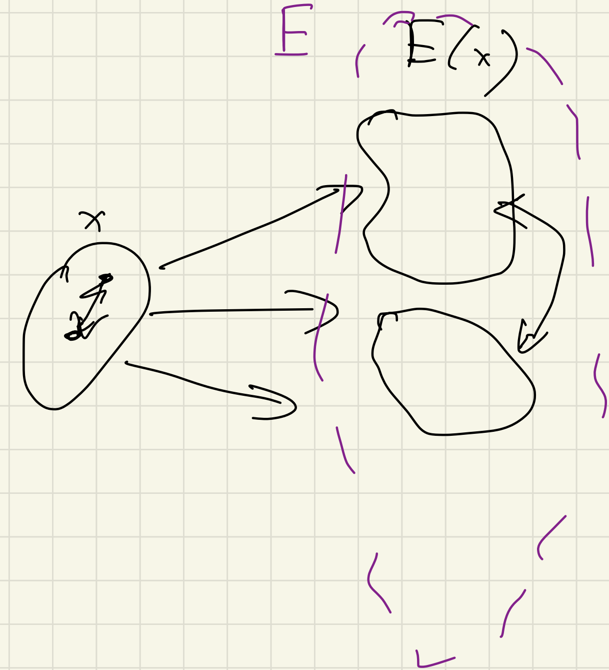
$$HIT = IT + \text{paths}$$

Inductive $Z4$: Type :=

| $0 : Z4$

| $S : Z4 \to Z4$

| mod4 : $S(S(S(S0))) = 0$



Транспорт

$$\frac{f : \mathrm{Path}\ A\ A' \qquad g : \mathrm{Path}\ B\ B'}{f \to g : \mathrm{Path}\ (A \to B)\ (A' \to B')}$$

$\forall\ x : B \vdash E(x)$ $\quad \forall\ b, b' : B$ $\quad p : b =_B b'$, то тогда

$$tr_p : E(b) \to E(b')$$

TT

Типы

Зав типы

Термы

HT (homotopy theory)

Пространства*

Расслоение

Точки пространства