$\lambda 2$

- сильная — Haskell — $\forall$ везде
  - Чёрч
  - Карри
- слабая — ML — $\forall$ в начале типа
  - Чёрч
  - Карри

$$\alpha : * \vdash M : \sigma$$

$$\vdash (\Lambda \alpha . M) : \forall \alpha . \sigma \leftarrow \text{Чёрч}$$

$$\vdash M : \forall \alpha . \sigma \leftarrow \text{Карри}$$

β- редукция

$(\lambda x^{\sigma}. M)\, N \to_{\beta} M[x := N]$ ← редукция терма (объекта)

$(\Lambda \alpha. M)\, \tau \to_{\beta} M[\alpha := \tau]$

$\gamma \to \beta \to \gamma [\beta := \sigma \to \sigma]$

$(\Lambda \beta. \lambda x^{\gamma}. \lambda y^{\beta}. x) : \forall \beta. \gamma \to \beta \to \gamma$

$(\Lambda \beta. \lambda x^{\gamma} y^{\sigma \to \sigma}. x)\, (\sigma \to \sigma) : \gamma \to (\sigma \to \sigma) \to \gamma$

$\forall$- elim

$$\frac{\Gamma \vdash M : \forall \alpha. \sigma \qquad \Gamma \vdash \tau : *}{\Gamma \vdash M \tau : \sigma[\alpha := \tau]}$$

$$K = \lambda x y.\ x \ :\ \forall \alpha \beta.\ \alpha \to \beta \to \alpha$$

$$K\,\gamma\,(\sigma \to \sigma) : \gamma \to (\sigma \to \sigma) \to \gamma$$

Проблемы разрешимости $\lambda 2$ а-ля Чёрч

$\vdash M : \sigma$?
$\vdash M : ?$
— разрешимы (Карри - нет)

$\vdash ? : \sigma$ — неразрешима (Карри - нет)

$\Lambda\alpha.\ \lambda f^{\alpha\to\alpha} x^{\alpha}.\ f(fx)$

аксиома
$$\frac{x:\sigma\in\Gamma}{\Gamma\vdash x:\sigma}$$

Тут:

(elim $\to$)
$$\frac{\Gamma\vdash M:\sigma\to\tau \qquad \Gamma\vdash N:\sigma}{\Gamma\vdash MN:\tau}$$

(intro $\to$)
$$\frac{\Gamma, x:\sigma\vdash M:\tau}{\Gamma\vdash \lambda x^{\underline{\sigma}}.\ M:\sigma\to\tau}$$

(elim $\forall$)
$$\frac{\Gamma\vdash M:\forall\alpha.\sigma \qquad \Gamma\vdash\tau:*}{\Gamma\vdash M\underline{\tau}:\sigma[\alpha:=\tau]}$$

(intro $\forall$)
$$\frac{\Gamma, \alpha:*\vdash M:\sigma}{\Gamma\vdash \underline{\Lambda\alpha}.M:\forall\alpha.\sigma}$$

— отличие в Карри

(a) $\boxed{\alpha:*}$

(b) $\boxed{f:\alpha\to\alpha}$

(c) $\boxed{x:\alpha}$

(3) $f(fx):\alpha$

(2) $\lambda x^{\alpha}.\ f(fx):\alpha\to\alpha$ (intro → 3)

(1) $\lambda f^{\alpha\to\alpha} x^{\alpha}.\ f(fx):(\alpha\to\alpha)\to\alpha\to\alpha$ (intro → 2)

$\Lambda\alpha.\ \lambda f^{\alpha\to\alpha} x^{\alpha}.\ f(fx):\forall\alpha.(\alpha\to\alpha)\to\alpha\to\alpha$ (intro ∀ (1))

(b) $\boxed{f:\alpha\to\alpha}$

(c) $\boxed{x:\alpha}$

(5) $fx:\alpha$ (elim → b, c)

(4) $f(fx):\alpha$ (elim → b, 5)

$\Lambda\alpha.\lambda fx.\ fx:\forall\alpha(\alpha\to\alpha)\to\alpha\to\alpha$

$\Lambda\alpha.\lambda fx.\ f(f(fx)):$

$$\Gamma \vdash \underbrace{\Lambda\alpha.\ \lambda f^{\alpha\to\alpha}\, x^{\alpha}.\ f(f\,x)}_{=T} : \forall\alpha.\ (\alpha\to\alpha)\to\alpha\to\alpha$$

$$\Gamma \vdash nat : *$$

$$\Gamma \vdash T\,nat : (nat\to nat)\to nat\to nat$$

$$\Gamma \vdash suc : nat \to nat$$

$$T\,nat\ suc : nat\to nat$$

$$\Gamma \vdash two : nat$$

$$T\,nat\ suc\ two : nat$$

$f(f \dots\dots x) \sim \mathbb{N}$

$\downarrow \mathbb{N}$

$1 = \lambda f x.\ f x$

$3 = \lambda f x.\ f(f(f x))$

$S \equiv \lambda xyz.\ xz(yz)$; $\alpha \to \beta \to \gamma \to \sigma$

Λ

$\Lambda\alpha\Lambda\beta\lambda x^{\alpha\to\beta\to\alpha}\ y^{\alpha\to\beta}\ z^{\alpha}.\ xyz : \forall\alpha.\forall\beta.(\alpha\to\beta\to\alpha)\to(\alpha\to\beta)\to\alpha\to\alpha$

$\Lambda\alpha.\ \lambda x^{\forall\alpha.\alpha\to\alpha}.\ x\,(\beta\to\beta)\,(x\,\beta) : ?$

$x : (\beta\to\beta)\to\beta\to\beta$ $\quad x : \beta\to\beta$

$(\forall\alpha.\ \alpha\to\alpha)\to(\forall\alpha.\ \alpha\to\alpha)$

$\forall\beta\ ((\forall\alpha.\ \alpha\to\alpha)\to\beta\to\beta)$

$? : (\beta \to \alpha) \to (\gamma \to \beta) \to \gamma \to \alpha$ $\lambda \to$

$? : \forall \alpha \beta . \, ((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$ — закон Пирса $\lambda 2$

$\lambda \underset{\beta \to \alpha}{f} \; \underset{\gamma \to \beta}{g} \; \underset{\gamma}{x} . \; f(g x) : (\beta \to \alpha) \to (\gamma \to \beta) \to \gamma \to \alpha$

$? : \forall \alpha . \alpha = \bot$ → тип в $\lambda 2$, который не населён

$$\dfrac{\dfrac{x : (\alpha \to \beta) \to \alpha \vdash x : (\alpha \to \beta) \to \alpha \qquad \dfrac{x : (\alpha \to \beta) \to \alpha, \; y : \alpha \vdash M : \beta}{x : (\alpha \to \beta) \to \alpha \vdash \lambda y . M : \alpha \to \beta}}{x : (\alpha \to \beta) \to \alpha \vdash x \, (\lambda y . M) : \alpha}}{\lambda x . \, (x \, (\lambda y . M)) : ((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha}$$

X

$$((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$$

$$\boxed{x : (\alpha \to \beta) \to \alpha}$$

$$\lambda z.\ z\,n$$

$$\lambda n\ ? \quad : ((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$$

$$\perp = \forall \alpha . \alpha$$

$$\sigma : * \,,\; x : \perp \;\vdash\; (x\,\sigma) : \sigma$$

$$\vdash\; \lambda x^{\perp} .\; x\,\sigma : \perp \to \sigma$$

$P \vee \neg P$

$\exists\ x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\ ,\ x^y \in \mathbb{Q}$

Если $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ – рац-е число, то $x = y = \sqrt{2}$, но $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $y = \sqrt{2}$

BHK – интерпретация

Proof $P \wedge Q$ – это (p, q), p – это proof P, q – это proof Q

Proof $P \vee Q$ – это $(0, p)$
$(1, q)$

Proof $P \Rightarrow Q$ – это ф-я, кот-я конвертирует proof P в proof Q

$(\exists x \in S)\ P$ – это (x, p), $x \in S$, p – proof P

$(\forall x \in S)\ P$ – это ф-я, которая конвертирует $x \in S$ в proof P

$\forall x \to P$

$\neg P$ — это

$$\begin{array}{c|c} P & \to 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 0 \\ \nearrow 1 \end{array}$$

$\lambda 2^*$ $\langle M, N \rangle$ - пара

$\alpha \times \beta$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \alpha \qquad \Gamma \vdash N : \beta}{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle : \alpha \times \beta} \text{(intro-pair)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle : \alpha \times \beta}{\Gamma \vdash \pi_1(\langle M, N \rangle) : \alpha} \text{(elim-pair)}_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle : \alpha \times \beta}{\Gamma \vdash \pi_2(\langle M, N \rangle) : \beta}$$

Π $\forall$ $\Rightarrow$

```
struct A {
    M: int;
    N: float;
}
```

Σ

union

```
enum A {
    M(int),
    N(float),
}
```

CH - соответствие:

$\lambda_{\to}$ / $\lambda 2$

Терм

Тип

$x : \alpha$
термовая переменная

next

IPC($\to$) / IPC

доказательство (proof)

теорема (формула)

assumption

дерево вывода, в котором можно сократить какую-то часть

IPC

$\neg\neg p \not\equiv p$

$\wedge, \ \vee, \ \to, \ \neg$

$A \to (A \vee B)$

$1 \qquad 0 \qquad = 0$

$A \to (B \to A)$

$1 \qquad 0 \qquad = 0$

$\qquad 1 \qquad 0$

$$\frac{A \qquad A \to B}{B}$$ (Modus ponens)

$$\frac{C \to A(x)}{C \to \forall x A(x)} \qquad x \notin FV(C)$$

$a \wedge b \vee c \to x$

a, b, c, x

$x \to \forall x \, (x \to a)$

$$\frac{A(x) \to C}{\exists x A(x) \to C} \qquad x \notin FV(C)$$

$$a \wedge [(a \to b) \wedge (a \to c)] \to b \wedge c$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[a] \quad \dfrac{(a \to b) \wedge (a \to c)}{a \to b}}{b} \qquad \dfrac{[a] \quad \dfrac{(a \to b) \wedge (a \to c)}{a \to c}}{c}}{a \wedge b}\ (\text{intro } \wedge)}{a \to a \wedge b}$$

$$\dfrac{\begin{array}{c}[a] \\ \vdots \\ b\end{array}}{a \to b}\ (\text{intro } \to) \quad \equiv \quad \dfrac{\Gamma, x : a \vdash M : b}{\Gamma \vdash \lambda x^{\sigma}. M : a \to b}$$