$IPC(\to) \sim \lambda\to$

$IPC \sim \lambda 2$

$\bot$ не населён $\lambda 2$

$\neg\alpha = \alpha \to \bot = \forall\alpha.\alpha$

$\lambda 2$

$\neg\sigma = \sigma \to \bot$

(elim $\neg$) $\sigma \to \neg\sigma \to \tau \equiv$

$\equiv \sigma \to (\sigma \to \forall\alpha.\alpha) \to \tau$

$\lambda x^{\sigma} f^{\sigma\to\bot}.\ \underbrace{f x}\ \tau$

$\bot \equiv \forall\alpha.\alpha$

$\Gamma \equiv \sigma{:}*,\ \tau{:}*$

Из противоречия следует всё, что угодно

IPC

$$\dfrac{\sigma \qquad \neg\sigma}{\tau}\ (\text{elim}\ \neg)$$

$$\dfrac{\begin{matrix}[\sigma] \\ \vdots \\ \tau\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\sigma] \\ \vdots \\ \neg\tau\end{matrix}}{\neg\sigma}\ (\text{intro}\ \neg)$$

$\lambda 2$

(intro $\neg$) $(\sigma \to \tau) \to (\sigma \to \neg\tau) \to \neg\sigma$

$\equiv (\sigma \to \tau) \to (\sigma \to \tau \to \bot) \to \sigma \to \bot$

$\lambda f^{\sigma\to\tau}\, g^{\sigma\to\tau\to\bot}\, x^{\sigma}.\ \underbrace{g x}_{\tau\to\bot}\ \underbrace{(f x)}_{\tau}$

Док-во приведением к абсурду

$\sigma \wedge \tau \equiv \forall \alpha. (\sigma \to \tau \to \alpha) \to \alpha \quad (\alpha \notin FV(\sigma), \alpha \notin FV(\tau))$

$\lambda 2$

(intro $\wedge$)

$\sigma \to \tau \to (\sigma \wedge \tau) \equiv$

$\sigma \to \tau \to (\forall \alpha. (\sigma \to \tau \to \alpha) \to \alpha)$

$\lambda x^{\sigma} y^{\tau} \Lambda \alpha . \lambda f^{\sigma \to \tau \to \alpha} . f x y$

IPC

$$\frac{\sigma \wedge \tau}{\sigma} (\text{elim}) \qquad \frac{\sigma \wedge \tau}{\tau} (\text{elim } \wedge) \qquad \frac{\sigma \quad \tau}{\sigma \wedge \tau} \text{intro}$$

$\langle \sigma, \tau \rangle : P \times Q$

$\forall \alpha. \sigma \to \tau \to \alpha$

$\Lambda \alpha . \lambda f . \ldots$

σ

(elim $\wedge$)

$(\sigma \wedge \tau) \to \sigma \equiv (\forall \alpha. (\sigma \to \tau \to \alpha) \to \alpha) \to \sigma$

$\lambda f^{\sigma \wedge \tau} . f \sigma (\lambda x^{\sigma} y^{\tau} . x)$

$\sigma \to \tau \to \sigma$

(intro $\vee$)

$$\sigma \Rightarrow (\sigma \vee \tau) \equiv$$

$$\equiv \sigma \Rightarrow (\forall\alpha.\ (\sigma \Rightarrow \alpha) \Rightarrow (\tau \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha)$$

$$\lambda x^{\sigma}.\ \boxed{\Lambda\alpha}\ \lambda f^{\sigma\Rightarrow\alpha}\, g^{\tau\Rightarrow\alpha}.\ \underbrace{f\,x}_{\alpha}$$

(elim $\vee$)

$$(\sigma \vee \tau) \Rightarrow (\sigma \Rightarrow \rho) \Rightarrow (\tau \Rightarrow \rho) \Rightarrow \rho$$

$$= \underbrace{(\forall\alpha.\ (\sigma \Rightarrow \alpha) \Rightarrow (\tau \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha)}_{} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sigma \Rightarrow \rho) \Rightarrow (\tau \Rightarrow \rho) \Rightarrow \rho$$

$$\lambda \underbrace{h}_{\Lambda\alpha.\ f_1^{\sigma\Rightarrow\alpha}\ f_2^{\tau\Rightarrow\alpha}.\ \dots}^{\sigma\vee\tau}\ f^{\sigma\Rightarrow\rho}\ g^{\tau\Rightarrow\rho}.\ \underbrace{h\,\rho\,f\,g}_{\rho}$$

IPC

$$\dfrac{\sigma \vee \tau \qquad \begin{array}{c}[\sigma]\\ \vdots \\ \rho\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\tau]\\ \vdots \\ \rho\end{array}}{\rho}\ (\text{elim } \vee)$$

$$\dfrac{\sigma}{\sigma \vee \tau}\ (\text{intro } \vee) \qquad \dfrac{\tau}{\sigma \vee \tau}\ (\text{intro } \vee)$$

$\lambda 2$:

$$\sigma \vee \tau \equiv \forall\alpha.\ (\sigma \Rightarrow \alpha) \Rightarrow (\tau \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha$$

Экзистенциальные типы

$\forall \alpha.\ \sigma$

функция из типов в термы, которая $\forall$ типу τ ставит в соответствие терм с типом $\sigma[\alpha := \tau]$

$$\underbrace{(\Lambda\alpha.\ \lambda x^{\alpha}.\ x)}_{\forall\alpha.\ \alpha\to\alpha}\ \tau \to_{\beta} \underbrace{\lambda x^{\tau}.\ x}_{\tau\to\tau}$$

$\exists \alpha.\ \sigma$:

Пара типа τ и терма, который имеет тип $\sigma[\alpha := \tau]$

$$\langle \gamma,\ \lambda x^{\gamma}.\ x \rangle : \exists \alpha.\ \alpha \to \gamma$$

$$\exists \alpha.\, \sigma \equiv \forall \beta (\forall \alpha.\, \sigma \Rightarrow \beta) \Rightarrow \beta$$

$$\sigma[\alpha := \varepsilon] \to \exists \alpha.\, \sigma \equiv$$

$$\sigma[\alpha := \varepsilon] \to (\forall \beta (\forall \alpha.\, \sigma \Rightarrow \beta) \Rightarrow \beta)$$

IPC

$$\frac{\sigma[\alpha := \varepsilon]}{\exists \alpha.\, \sigma}\ (\text{indro } \exists)$$

$$Bool \equiv \forall \alpha . \alpha \to \alpha \to \alpha$$

$$True \equiv \Lambda \alpha . \lambda t^{\alpha} f^{\alpha} . t \quad : \quad Bool$$

$$False \equiv \Lambda \alpha . \lambda t^{\alpha} f^{\alpha} . f \quad : \quad Bool$$

$$IF : Bool \to p \to p \to p$$

$$Bool \to p \to q \to p \vee q$$

$$IF \equiv \lambda c^{Bool} x^{p} y^{p} . \, c \, p \, x \, y$$

$$IF \, c = \lambda x^{p} y^{p} . \, c \, p \, x \, y$$

$$IF \, c \, x \, y = c \, p \, x \, y$$

$$AND : Bool \to Bool \to Bool$$

$$\sigma \times \tau \equiv \forall \alpha . (\sigma \to \tau \to \alpha) \to \alpha \leftarrow \text{пара} \qquad \lambda f . f a b$$

$$\sigma \wedge \tau$$

$$\text{PAIR } a\, b \equiv \langle a, b \rangle \equiv \Lambda \alpha . \lambda f^{\sigma \to \tau \to \alpha} . f a b$$

$$\text{PAIR} : \sigma \to \tau \to \sigma \times \tau$$

$$\text{FST} : \sigma \times \tau \to \sigma$$

$$\text{SND} : \sigma \times \tau \to \tau$$

Сумма

$\sigma + \tau \equiv \forall \alpha.(\sigma \to \alpha) \to (\tau \to \alpha) \to \alpha$

std::variant

std::visit

$CASES : (\sigma \to \rho) \to (\tau \to \rho) \to (\sigma + \tau) \to \rho$

$CASES \equiv \lambda f^{\sigma \to \rho}\ g^{\tau \to \rho}\ h^{\sigma + \tau}.\ h \rho f g$

$LEFT : \sigma \to \sigma + \tau$ (Ok (...))

$RIGHT : \tau \to \sigma + \tau$ (Err (...))

$$2 = \lambda z^{\alpha} s^{\alpha \to \alpha}.\ s(sz)$$

$$Nat = \forall \alpha.\ \alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha$$

$$ZERO : Nat$$

$$ZERO \equiv \Lambda \alpha.\ \lambda z^{\alpha} s^{\alpha \to \alpha}.\ z$$

$$SUCC : Nat \to Nat$$

$$SUCC\ n \equiv \Lambda \alpha.\ \lambda z^{\alpha} s^{\alpha \to \alpha}.\ s(n\ \alpha\ z\ s)$$

«перевычисление индуктивного пар-ра»

$$\bar{n} = \Lambda \alpha.\ \lambda z^{\alpha} s^{\alpha \to \alpha}.\ s^{n}(z) = SUCC^{n}(ZERO)$$

$$data\ Nat = ZERO \mid SUCC\ Nat$$

Индуктивный тип - это тип, который свободно генерируется каноничными термами

конструкторами

$$SUCC(ZERO)$$

$$IT : p \to (p \to p) \to Nat \to p$$

$$IT \equiv \lambda x^{p}\, f^{p \to p}\, n^{Nat}.\; n p x f$$

$$IT\, x f n \equiv n p x f \qquad f(f(f \ldots f(x)))$$

$$IT\, x f\, ZERO \equiv (\Lambda \alpha.\, \lambda z^{\alpha} s^{\alpha \to \alpha}.\, z)\, p x f$$

$$\to_\beta (\lambda z^{p} s^{p \to p}.\, z)\, x f$$

$$\to_\beta x$$

$$IT\, x f\, (SUCC\, n) \equiv (\Lambda \alpha.\, \lambda z^{\alpha} s^{\alpha \to \alpha}.\, s\, (n \alpha z s))\, p x f \to_\beta f(n p x f)$$

$$\to_\beta f(IT\, x f n)$$

$[\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}] \equiv \lambda n c.\, c\,\bar{1}\,(c\,\bar{2}\,(\bar{c}\,\bar{3}\,n))$

$List \equiv \forall\sigma\,\forall\alpha.\ \alpha \Rightarrow (\sigma \Rightarrow \alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha$

$List\ Nat \equiv \forall\alpha.\ \alpha \Rightarrow (Nat \Rightarrow \alpha \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha$

$NIL : List\ \sigma$

$NIL \equiv \Lambda\alpha.\ \lambda n^{\alpha} c^{\sigma \Rightarrow \alpha \Rightarrow \alpha}.\ n$

$CONS : \sigma \Rightarrow List\ \sigma \Rightarrow List\ \sigma$

$CONS\ x\ l = \Lambda\alpha.\ \lambda n^{\alpha} c^{\sigma \Rightarrow \alpha \Rightarrow \alpha}.\ c\,\cancel{x}\,(l\,\alpha\,n\,c)$

$FOLD : \rho \Rightarrow (\rho \Rightarrow \rho \Rightarrow \rho) \Rightarrow List\ \sigma \Rightarrow \rho$

MLTT

$$Type = \forall \alpha.\ \tau_1 \to \tau_2 \to \ldots \to \tau_n \to \alpha$$

τ_i должны зависеть от α по крайней мере в самой правой позиции:

$$\tau_i = \ldots \to \alpha$$

кол-во конструкторов типа в MLTT явно отражено Type

$$\top \equiv \forall \alpha.\ \alpha \to \alpha$$

$$\sigma \times \tau \equiv \forall \alpha.\ (\sigma \to \tau \to \alpha) \to \alpha$$

$$\sigma + \tau \equiv \forall \alpha.\ (\sigma \to \alpha) \to (\tau \to \alpha) \to \alpha$$

$$Bool \equiv \forall \alpha.\ \alpha \to \alpha \to \alpha$$

$$Nat \equiv \forall \alpha.\ \alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha$$

$$List \equiv \forall \alpha.\ \alpha \to (\sigma \to \alpha \to \alpha) \to \alpha$$

Конструкторы в MLTT

$Type \equiv \forall \alpha.\ \tau_1 \to \tau_2 \to \ldots \to \alpha$

Арность i-го конструктора — арность τ_i

Тип i-го конструктора $f_i \equiv \tau_i [\alpha := Type]$

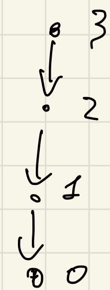
Итераторы в MLTT

$$Type \equiv \forall \alpha . \tau_1 \to \tau_2 \to \ldots \to \alpha$$

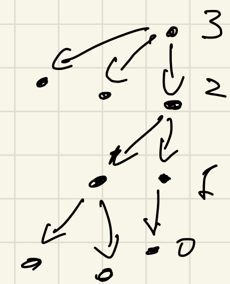
Тип итератора по Type

$$IT_{Type} : \tau_1[\alpha := \rho] \to \tau_2[\alpha := \rho] \to \ldots \to \tau_n[\alpha := \rho] \to Type \to \rho$$

$$IT = \lambda x_1^{\tau_1[\alpha:=\rho]} \ldots x_n^{\tau_n[\alpha:=\rho]} s^{Type} . \, s \rho \, x_1 \ldots x_n$$



$f(f(f(x))) : \rho$



λ → λF (system F) $\lambda F\omega$

$\lambda_{\to}$

$\lambda 2$

$\lambda\omega$

λP

λC Coq

$\lambda\omega$

$\beta \to \beta$

$\gamma \to \gamma$

$(\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$

$(\alpha \to \alpha) \to \alpha$ ...

$\square \to \square$

$(\square \to \square) \to \square$

$\alpha : * \vdash$ ....

$\mathbb{K}$ – мн-во всех кайндов (kind)

$\mathbb{K} = * \mid (\mathbb{K} \to \mathbb{K})$

Примеры: $*$, $* \to *$, $(* \to *) \to *$, $* \to (* \to *) \to *$

$\square$ — тип всех kinds.

$* : \square$

$* \to * : \square$

Sort → элементы мн-ва $\{*, \square\}$ → мн-во sorts

Конструктор

если $K : \square$ и $M : K$, то M — конструктор

если $K \not\equiv *$, то тогда M — точный конструктор (proper constructor)

s — резервируем как мета-переменную для сорта

$s \in \{*, \square\}$

$\alpha : *$

$\alpha \to \alpha : *$

$\lambda\alpha : *.\ \alpha \to \alpha : * \to *$

↑ конструктор типа

$(\lambda\alpha : *.\ \alpha \to \alpha)\ \beta = \beta \to \beta$

$(\lambda\alpha : *.\ \alpha \to \alpha)(\gamma \to \gamma) = (\gamma \to \gamma) \to (\gamma \to \gamma)$

Уровни записи типизации

1. Термы
2. Конструкторы (точные и не точные)
3. Kinds
4. $\square$

$$t : \sigma : * \to * : \square$$