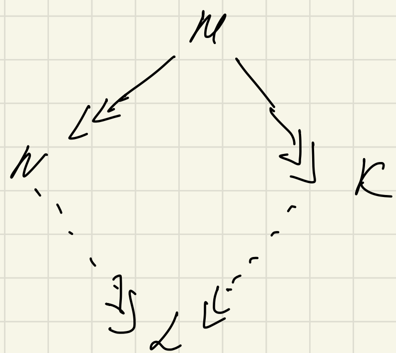
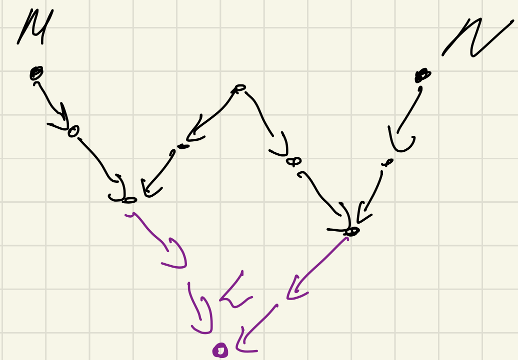
Чёрч – Россер (Confluence, CR, diamond property)

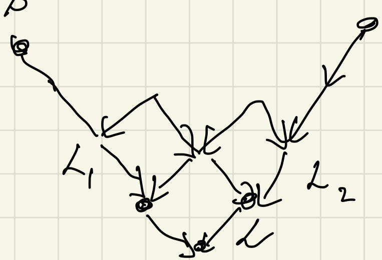
$$\left.\begin{array}{l} M \twoheadrightarrow_\beta N \\ M \twoheadrightarrow_\beta K \end{array}\right. \Rightarrow \exists L \in \Lambda \quad N \twoheadrightarrow_\beta L, \; K \twoheadrightarrow_\beta L$$

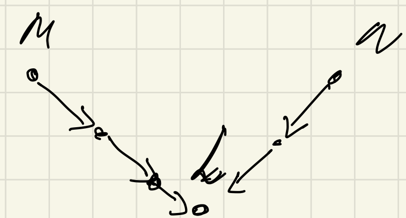




Th о $\exists$ общего редукта

$$M =_\beta N \Rightarrow \exists L \in \Lambda : \quad M \twoheadrightarrow_\beta L \quad N \twoheadrightarrow_\beta L$$

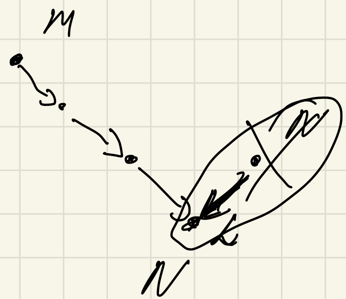




Th о редуцируемости к β-NF

Если $M \in \Lambda$ имеет N - β-NF, то $M \twoheadrightarrow_\beta N$

Док-во: $M =_\beta N \Rightarrow L \in \Lambda$ $M \twoheadrightarrow_\beta L$, $N \twoheadrightarrow_\beta L$. Но в таком случае $N \equiv L$

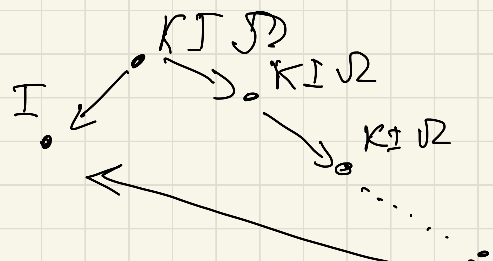


$$\Omega_2 = \omega\omega = (\lambda x.\, xx)(\lambda x.\, xx)$$

$K\ I\ \Omega$

$I = \lambda x.x$

$K = \lambda xy.x$



Th о единственности β-NF

$\forall M \in \Lambda$ имеет не более одной β-NF.

Док-во:

$M =_\beta N_1$

$M =_\beta N_2$

$N_1 =_\beta N_2$

$\exists$ M имеет N_1, N_2 в качестве β-NF, тогда $\therefore N_1 =_\beta M =_\beta N_2$.

В этом случае $\exists$ $\underline{L} \in \Lambda$: $N_1 \twoheadrightarrow_\beta L$, $N_2 \twoheadrightarrow_\beta L$. Но тогда

$M \twoheadrightarrow_\beta L$

$N_1 \equiv L \equiv N_2$.

$true \equiv \lambda tf.t$

$false \equiv \lambda tf.f$

$true \neq false$

головная переменная

$\lambda \vec{x} . y \vec{N} = \lambda x_1 \dots x_n . y N_1 \dots N_2$ ← головная нормальная форма HNF

$\lambda \vec{x} . (\lambda z . M) \vec{N} = \lambda x_1 \dots x_n . \underline{(\lambda z . M)} N_1 \dots N_2$

головной редекс

Слабая HNF (WHNF):

или HNF

или λ-абстракция на верхнем уровне, которая не явл-ся редексом

$a, b, c \in V$

$N, M \in \Lambda \Rightarrow (MN) \in \Lambda$

$x \in V, M \in \Lambda \Rightarrow (\lambda x . M) \in \Lambda$

$\lambda x .$ ШНФС

$\lambda_{\to}$ $\quad /\lambda_{\to}$ $\quad /$ STC

$M \in \Lambda$ $\qquad MM$

Тип — синтаксическая метка, которая приписывается терму по опр-м правилам

$M : \sigma$

$(\lambda x .\ M N) : \alpha$ — в стиле Карри

$(\lambda x : \beta .\ MN) : \alpha$ — в стиле Чёрча

$(\lambda x^{\beta} .\ MN) : \alpha$

$\lambda_{\to}$:

Мн-во типов T

$\alpha, \beta, \ldots \in T$ (переменные типа)

$\sigma, \tau \in T \Rightarrow (\sigma \to \tau) \in T$ (тип пр-ва ф-й)

$T ::= V \mid T \to T$

$(\sigma \to \tau) \to \alpha \to \beta$

$(((\sigma \to \tau) \to \alpha) \to \beta)$

$\sigma_1 \to \sigma_2 \to \sigma_3 = (\sigma_1 \to (\sigma_2 \to \sigma_2))$

$((\alpha \to \beta) \to \gamma) \equiv (\alpha \to \beta) \to \gamma$

$$\frac{(\lambda x^{\sigma}. M^{\tau}) : \sigma \to \tau}{(\lambda x^{\sigma}. M^{\tau})\, \psi^{\sigma} : \tau}$$

$$((\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))) \equiv \overset{f}{(\alpha \to \beta)} \to \overset{g}{(\beta \to \gamma)} \to \overset{x}{\alpha} \to \gamma$$

$f\,x : \beta$

$\underbrace{g(\underline{f\,x})}$:

Приписывание типа терму:

- Переменная

$x : \alpha$, $y : \alpha \to \beta$, $z : \alpha \to (\beta \to \gamma) \to \alpha$

- Аппликация

$M, N \in \Lambda \Rightarrow (MN) \in \Lambda$;

M - должно быть ф-й $M : \sigma \to \tau$

N - аргумент, должен быть соответствующим $N : \sigma$

$M^{\sigma \to \tau} N^{\sigma} : \tau$

$\underbrace{x\,(y\,x)} : \gamma$

$\underline{x : \sigma \to \tau}$ $\quad yx : \sigma$

$y : (\sigma \to \tau) \to \sigma$

$y : type(x) \to \sigma$

Абстракция

$(\lambda x. M)$:

- тип ф-и $\lambda x^{\sigma}. M : \sigma \Rightarrow \tau$
- тип аргумента $x : \sigma$
- тип абстракции $(\lambda x. M) : \tau$

$\lambda x^{?}. \lambda y^{?}. x(yx) : \alpha \Rightarrow \beta \Rightarrow \gamma$

$x(yx) : \gamma$

$x : \gamma \Rightarrow \varepsilon \qquad y : (\gamma \Rightarrow \varepsilon) \Rightarrow \gamma$

$\lambda x^{\gamma \Rightarrow \varepsilon}. \lambda y^{(\gamma \Rightarrow \varepsilon) \Rightarrow \gamma}. x(yx) : (\gamma \Rightarrow \varepsilon) \Rightarrow ((\gamma \Rightarrow \varepsilon) \Rightarrow \gamma) \Rightarrow \gamma$

Предтерм Λ_{Cu}: $\quad \Lambda_{Cu} \equiv \Lambda$

Предтерм Λ_{T}:

$$x \in V \Rightarrow x \in \Lambda_T$$

$$M, N \in \Lambda_T \Rightarrow (MN) \in \Lambda_T$$

$$M \in \Lambda_T,\ x \in V,\ \sigma \in T \Rightarrow (\lambda x^{\sigma}.\ M) \in \Lambda_T$$

$$(\lambda x : \sigma .\ M) \in \Lambda_T$$

Утверждение о типизации

Карри $\quad M : \sigma \quad , \quad M \in \Lambda_{Cu},\ \sigma \in T$

Чёрча $\quad M : \sigma \quad , \quad M \in \Lambda_T,\ \sigma \in T$

Объявления

$$x : \alpha \qquad y : \alpha \to \beta \to (\gamma \to \delta) \Rightarrow \alpha$$

Контекст Γ — мн-во объявлений с различными переменными

$$\Gamma = \{x_1 : \sigma_1, \dots, x_n : \sigma_n\}$$

$\Gamma \vdash M : \sigma$ — выводимо в Γ

Вывод утверждения: (в стиле Карри

(аксиома) $\Gamma \vdash x : \sigma \iff x^\sigma \in \Gamma$

(→E)
$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau}$$

(→I)
$$\frac{\Gamma, x^\sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x^\sigma . M : \sigma \to \tau}$$

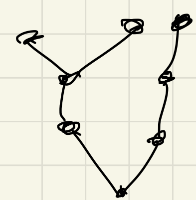
$\Gamma' = \Gamma \cup \{x^\sigma\}$

$x^{:\sigma} \vdash$

$$\frac{\text{пос-ка}}{\text{след-е}}$$

$\vdash x : \sigma$

$$\left(\frac{\dfrac{\text{посылки} \mid \text{условие}^*}{\text{следствие}}}{\text{следствие}} \right)$$



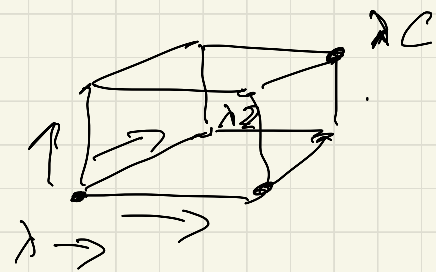
Терм $\lambda_\to$ — это предтерм, для которого $\exists\, \Gamma$ и α, такие что $\Gamma \vdash M : \alpha$

$$MM \in \Lambda$$

$$\underbrace{M}_{\alpha\to\beta}\underbrace{M}_{\alpha} \notin \Lambda_T^{?}$$

$$(\to I)\ \dfrac{(\to I)\ \dfrac{x^\alpha, y^\beta \vdash x : \alpha}{x^\alpha \vdash \lambda y. x : \beta \to \alpha}}{\vdash \lambda x y. x : \alpha \to \beta \to \alpha}$$

$$(\to I)\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{y^{\alpha\to\beta}, z^\alpha \vdash y : \overset{\alpha}{\sigma} \to \beta \qquad y^{\alpha\to\beta}, z^\alpha \vdash z : \overset{\alpha}{\sigma}}{y^{\alpha\to\beta}, z^\alpha \vdash yz : \beta}}{y^{\alpha\to\beta} \vdash \lambda z^\alpha . yz : \alpha \to \beta}}{\vdash \lambda y^{\alpha\to\beta} . \lambda z^\alpha . yz : (\alpha\to\beta) \to \alpha \to \beta}$$



Проблемы разрешимости

$\vdash M : \sigma\ ?$ — Type checking problem

$\vdash M : \ ?$ — Type synthesis problem

$\vdash \ ? : \sigma$ — Type inhabitation problem

$\lambda_{\to}$