$\Gamma \vdash \ldots$

Домен (domain) $\Gamma := x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n$, $dom(\Gamma) := (x_1, \ldots, x_n)$

Подконтекст (subcontext) $\Gamma := x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n$, $\Gamma' \subseteq \Gamma$ с точностью до порядка

Перестановка Γ, $\Gamma' \subseteq \Gamma$ без порядка,

Проекция $\upharpoonright \Gamma$, подконтекст Γ' $dom(\Gamma') = dom(\Gamma) \cap \Phi$

1. $dom(\varnothing) = ()$

2. $\Gamma := x_1 : \sigma, x_2 : \sigma_2, x_3 : \sigma_3$ $\Gamma' = x_1 : \sigma_1$, $\Gamma' = \phi$

3. $\Phi = \{x_1, x_3, x_4\}$ $\Gamma \upharpoonright \Phi = x_1 : \sigma_1, x_3 : \sigma_3$

Л. $\Gamma \vdash M:\sigma \Rightarrow FV(M) \subseteq dom(\Gamma)$

Л. (о разбавлении, thining)

Γ, Δ – контексты и $\Delta \supseteq \Gamma$, то тогда

$\Gamma \vdash M:\sigma \Rightarrow \Delta \vdash M:\sigma$

Л (о типизируемости подтерма)

M' – это подтерм M $\qquad M, N \Rightarrow MN$

$\Gamma \vdash M:\sigma \Rightarrow \Gamma' \vdash M':\sigma'$

Л (о сужении контекста)

$\Gamma \vdash M:\sigma \Rightarrow \Gamma\restriction FV(M) \vdash M:\sigma$

$\lambda_{\to}$ $\underline{F}$ $\underline{M}$ F F

$\Gamma \nvdash (x\,x) : \sigma$

1. $x\,x : \sigma \Rightarrow \underline{\exists\, \tau}$, что левый $x : \tau \to \sigma$, правый $x : \tau$
2. $x \in dom(\Gamma)$ $\tau \to \sigma = \tau$

$x : \tau \nvdash (x\,x) : \sigma$

$\nvdash \omega : \sigma$

$\nvdash \Omega : \sigma$

$\nvdash Y : \sigma$

$\vdash M : \sigma\ ?$ $\quad$ $(M^* N^*) : \sigma\ ? \Rightarrow N : ?$

$\vdash M : ?$

$\vdash ? : \sigma$

$M \in \Lambda_{\to}$ слабо нормализуемый (WN), если $\exists$ посл-ть редукций, приводящая его к β-НФ

$M \in \Lambda_{\to}$ сильно нормализуемый (SN), если $\forall$ посл-ть редукций приводят его к β-НФ.

KII - SN

KIΩ - WN

Система типов WN $\forall$ термы WN

SN $\forall$ термы SN

$\lambda_{\to}$ - SN

Что может случиться „плохого" при редукции?

Терм может увеличиться

$$(\lambda fx.\, f(fx))\, M \to_\beta \lambda x.\, M(Mx)$$

Редекс может размножиться

$$(\lambda fx.\, f(fx))\, ((\lambda y.\, M)\, N) \to_\beta \lambda x.\, [(\lambda y.\, M)\, N]\, ([(\lambda y.\, M)\, N]\, x)$$

Могут появиться новые редексы

$$(\lambda fx.\, f(fx))\, (\lambda y.\, M) \to_\beta \lambda x.\, (\lambda y.\, M)\, ((\lambda y.\, M)\, x)$$

2 О появлении редексов

- создание

$$(\lambda x. \dots (x N) \dots)(\lambda y. M) \to_\beta \dots ((\lambda y. M) N) \dots$$

- размножение

- спрятанный редекс

$$(\lambda x. (\lambda y. M)) N P \to_\beta (\lambda y. M[x := N]) P$$

- редукция тождества

$$((\lambda x. x)(\lambda y. M)) N \to_\beta (\lambda y. M) N$$

$\sigma : T \Rightarrow$ $len(\sigma)$ - количество стрелок

$\sigma : T \Rightarrow$ $ord(\sigma)$:

- $ord(\sigma) = 0$
- $ord(\alpha_1 \to \alpha_2 \to \ldots \to \alpha_n) = max(ord(\alpha_1), \ldots, ord(\alpha_n)) + 1$

$ord((\sigma_1 \to \sigma_2) \to \sigma_3) = 2$

$ord(((\sigma_1 \to \sigma_2) \to \sigma_3) \to \sigma_2) = 3$

Высота дерева h

$M : \varepsilon$, $N : \sigma$ $\quad h((\lambda x^\sigma . M) N) = len(\sigma \to \varepsilon)$

$M \in \Lambda \quad \mu(M) = (h_r(M), \# M)$

$(h_1, n_1) < (h_2, n_2) \Rightarrow \begin{cases} h_1 < h_2 \\ h_1 = h_2, \quad n_1 < n_2 \end{cases}$

WN: теорема о слабой нормализации $\lambda_{\to}$

Th. $M : \sigma \in \lambda_{\to}$, то $\exists$ завершающаяся редук-я стратег-я.

Док-во: $h_n(M)$

$$M \to_\beta N \Rightarrow \mu(M) < \mu(N)$$

$$(6, 2) > (6, 1)$$

$M[x := N]$

Подстановка типа

$\sigma, \tau \in \mathbb{T}$, тогда $[\alpha := \tau]\sigma$ — подстановка типа τ вместо типа α в тип σ.

1. $[\alpha := \gamma \to \gamma](\alpha \to \beta) = (\gamma \to \gamma) \to \beta$
2. $[\alpha := \gamma \to \gamma]\, \alpha \to \beta \to (\alpha \to \alpha) = (\gamma \to \gamma) \to \beta \to ((\gamma \to \gamma) \to (\gamma \to \gamma))$

Лемма о подстановке типа

$\Gamma \vdash M : \sigma \Rightarrow [\alpha := \tau]\Gamma \vdash M : [\alpha := \tau]\sigma$ (а ля Карри)

$\Gamma \vdash M : \sigma \Rightarrow [\alpha := \tau]\Gamma \vdash [\alpha := \tau]M : [\alpha := \tau]$ (а ля Чёрч)

$x : \alpha \vdash (\lambda y^{\alpha} z^{\beta} . x) : \alpha \to \beta \to \alpha$

$[\alpha := \tau \to \tau]$

$\Downarrow$

$x : \tau \to \tau \vdash (\lambda y^{\tau \to \tau} z^{\beta} . x) : (\tau \to \tau) \to \beta \to (\tau \to \tau)$

Лемма о подстановке терма

$\Gamma, x:\sigma \vdash M:\tau$ и пусть $\Gamma \vdash N:\sigma \Rightarrow \Gamma \vdash M[x^{\sigma} := N^{\sigma}] : \tau$

$$\frac{\Gamma, x:\tau\to\tau \vdash (\lambda y^{\beta}. x) : \beta\to\tau\to\tau \qquad \Gamma \vdash \lambda t^{\tau}. t : \tau\to\tau}{}$$

$$\Downarrow$$

$$\Gamma \vdash (\lambda y^{\beta} t^{\tau}. t) : \beta\to\tau\to\tau$$

Th о редукции субъекта

$M \twoheadrightarrow_{\beta} N$, тогда $\forall \Gamma \vdash M:\sigma \Rightarrow \Gamma \vdash N:\sigma$

$$(\underbrace{\lambda z^{\sigma} u^{\beta}.\, z}_{\text{1.}})\,(y\, x) \;:\; \beta \to \gamma$$

1. $\alpha \to \beta \to \alpha$

$y\,x : \gamma$

$x : \sigma$

$y : \sigma \to \gamma$

$z : \alpha$

$u : \beta$

2. $\underbrace{\lambda u^{\beta}.}\; y\, x \;:\; \beta \to \gamma$

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\beta"] & \\
N_1 \arrow[dr, dashed, "\beta"'] & & N_2 \arrow[dl, dashed, "\beta"] \\
 & h &
\end{tikzcd}$$

$\underline{\lambda}(\underline{C}) ::= C \mid V \mid \Lambda(C)\,\Lambda(C) \mid \lambda x.\, \Lambda(C)$

$C = \{\, true,\ false,\ not,\ and,\ if,\ \dots \,\}$

δ- редукция

$not\ true \to_\delta false$

$\vdots$

$C = \{ Y \}$

δ_Y:

$$Y f \to_\delta f(Y f)$$

$$Y : (\sigma \to \sigma) \to \sigma$$

$\lambda_{\to} Y \delta$

α

$\underline{Id} : \forall \alpha : \alpha \to \alpha$

$\lambda x.\, x :$