$$(\lambda y p.\ x y w (p x)) \quad [x := \lambda w.\ y w]$$

$$FV(MN) = FV(M) \cup FV(N)$$

$$FV(\lambda x.\ M) = FV(M) \setminus \{x\}$$

$$FV(x) = \{x\}$$

$$(\lambda y p \ldots)(\lambda x \ldots)$$

$$\lambda x.\ x y \ [y := \lambda y.\ x]$$

$$(\lambda x.\ x(\lambda y.\ \overset{w}{\cancel{x}})) \qquad \lambda y.\ w$$

Att - 5

λ ~ Turing machine

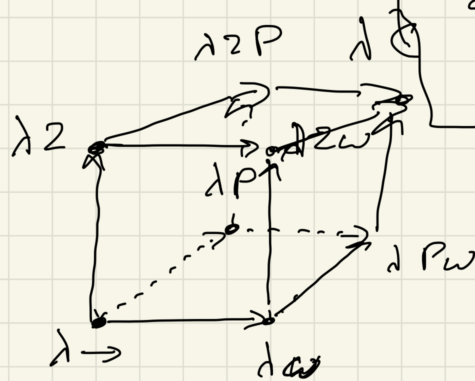
↓ *

λ→

↓

$\underline{\lambda Y\sigma}$

λ - куб



	Терм	Тип
λ→	Терм	<> Терм
λ2	Терм	<> Тип
λω	Тип	<> Тип
λP	Тип	<> Терм

Vect (n)

CoC = λ2Pω

⇓

CiC ≃ Coq

Curry-Howard correspondance

isomorphism

$\{$intuitionistic logic$\}$ $\xrightarrow{\text{add Propositions}}$ $\{$higher-order logic$\}$ $\forall, \in$

$\cong$

$\lambda \to$ $\{\lambda_{\to}\}$ $\xrightarrow{\text{add reasoning}}$ $\lambda 2$ / ... $\forall$

$\cong$

$\{$Cartesian-closed categories$\}$ $\xrightarrow{\text{add class. object}}$ $\{$Topoi$\}$

$\cong_c$ Set $\cong$

Cubic

HoTT

Univalence

Agda

CH correspondence:

type ~ theorems

term ~ proofs

ЗОП IP

$\Gamma \vdash ? : \beta$

$\Gamma \vdash M : ?$

$? \vdash M : \beta$

```
int foo (a: int){
}
```

int → int

$\lambda 2$

$\lambda x^{\alpha}.x : \alpha \to \alpha$

$\lambda x^{\beta}.x : \beta \to \beta$

$\lambda x^{\alpha\to\beta\to\gamma}.x : (\alpha\to\beta\to\gamma)\to(\alpha\to\beta\to\gamma)$

α, β, γ

$\delta, \tau.$

Типы

Термы

kinds

$\lambda x.x : \forall\alpha.\,\alpha\to\alpha$

System F

V — мн-во типовых переменных

Сильный полиморфизм (System F):

$$T := V \mid T\to T \mid \forall V.\,T$$

$$\forall\alpha.\alpha\to(\forall\beta.\alpha\to\beta)\to\alpha$$

Слабый полиморфизм (ML)

$$T_{\to} := V \mid T_{\to}\to T_{\to}$$

$$T_{W} := \forall V.\,T_{W} \mid T_{\to}$$

Контексты №2

$$BV(\forall \alpha . \alpha) = \{\alpha\}$$

Объявление типовых переменных

$$\alpha : * \quad (\alpha \in V)$$

kind

$$* \to *$$

Все свободные типовые переменные должны быть описаны в контексте

$$\Gamma = \langle \alpha : *, \; x : \alpha \to \alpha \rangle$$

! частично упорядоченный !

$$\alpha : *, \beta : *, f : \alpha \to \beta \vdash f : \alpha \to \beta$$

$$\alpha : *, f : \alpha, \beta : *, x : \beta \vdash \ldots$$

Правило введения $\forall$ в $\lambda 2$ (а-ля Карри)

(универсальная абстракция)

$$\frac{\Gamma, \alpha : * \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash M : \forall \alpha . \sigma}$$

$\lambda x.$

$$\frac{M : \alpha \to \beta \to \alpha}{\lambda x. y.}$$

$\Gamma, \alpha : *, \beta : * \vdash \lambda f x. f x : (\alpha \to \beta) \to \beta$

$\Gamma, \alpha : * \vdash \lambda f x. f x : \forall \beta . (\alpha \to \beta) \to \beta$

$\Gamma \vdash \lambda f x. f x : \forall \alpha \beta . (\alpha \to \beta) \to \beta$

$f : \underline{\alpha} \to \underline{\beta} \vdash$

$(* \to *) \to \cancel{*} \to \cancel{*}$

$\alpha : * \to$ не стрелочный $(\alpha \in V)$

$\alpha : * \to * \to$ стрелочный

Тип выводим из контекста Γ

$$\Gamma \vdash \sigma : *$$

если $FV(\sigma) \subset \Gamma$

$$\alpha : *,\ \beta : * \vdash (\alpha \to \beta) \to \beta : *$$

$$\vdash \forall \alpha\, \beta.\ (\alpha \to \beta) \to \beta : *$$

$\forall\alpha.$ – свобод

$$\beta : * \vdash (\forall \alpha.\ \alpha \to \beta) \to \beta : *$$

$$(\forall \alpha.\ \alpha \to \alpha) \to (\forall \alpha.\ \alpha \to \alpha \to \alpha) \to \beta$$

$$\forall \alpha.\ (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha \to \alpha) \to \beta$$

Правило удаления $\forall$ в $\lambda 2$ (а-ия Карри)

$$\frac{\Gamma \vdash M : \forall \alpha . \sigma \qquad \Gamma \vdash \tau : *}{\Gamma \vdash M : \sigma[\alpha := \tau]}$$

$$\beta : *, \gamma : * \vdash \lambda x y . x : \forall \alpha . \alpha \to \beta \to \alpha$$

$$\beta : *, \gamma : \cancel{*} \vdash \lambda x y . x : \gamma \to \beta \to \gamma$$

$$(\beta \to \gamma \to \beta)$$

Правила для контекстов

Контекст считается допустимым

$\Gamma \vdash$ ← доп.-й контекст

если он построен по след-м правилам:

1. начальное $\quad \alpha : * \in \Gamma$

2. расширение типами $\quad \dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma, \alpha : * \vdash} \quad \alpha \notin dom(\Gamma)$

3. расширение термами $\quad \dfrac{\Gamma \vdash \sigma : *}{\Gamma, x : \sigma \vdash} \quad x \notin dom(\Gamma)$

Образование типов в λ2

1. начальная
$$\frac{\alpha : * \in \Gamma}{\Gamma \vdash \alpha : *}$$

2. введение →
$$\frac{\Gamma \vdash \sigma : * \qquad \Gamma \vdash \tau : *}{\Gamma \vdash \sigma \to \tau : *}$$

3. введение ∀
$$\frac{\Gamma, \alpha : * \vdash \sigma : *}{\Gamma \vdash \forall \alpha . \sigma : *}$$

сильный полиморфизм

Правила типизации λ2 а-ля Карри

(init)
$$\frac{x:\sigma \in \Gamma}{\Gamma \vdash x:\sigma}$$

(elim →)
$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N:\sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau}$$

(intro →)
$$\frac{\Gamma,\ x:\sigma \vdash M:\tau}{\Gamma \vdash \lambda x.\, M : \sigma \to \tau}$$

(elim ∀)
$$\frac{\Gamma \vdash M : \forall \alpha.\sigma \qquad \Gamma \vdash \tau : *}{\Gamma \vdash M : \sigma[\alpha := \tau]}$$

(intro ∀)
$$\frac{\Gamma,\ \alpha:* \vdash M:\sigma}{\Gamma \vdash M : \forall \alpha.\sigma}$$

$$\Gamma \equiv f : \forall\alpha.\alpha\to\alpha,\ \beta:*$$

$$\underbrace{ff},\quad \underbrace{\lambda f.\, ff}$$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma\vdash f:\forall\alpha.\alpha\to\alpha \qquad \Gamma\vdash\beta\to\beta:*}{\Gamma\vdash f:(\beta\to\beta)\to\beta\to\beta}\ (\text{elim }\forall) \qquad \dfrac{\Gamma\vdash f:\forall\alpha.\alpha\to\alpha \qquad \Gamma\vdash\beta:*}{\Gamma\vdash f:\beta\to\beta}\ (\text{elim }\forall)}{f:\forall\alpha.\alpha\to\alpha,\ \beta:*\ \vdash\ ff:\beta\to\beta}\ (\text{elim}\to)$$

$$\dfrac{f:\forall\alpha.\alpha\to\alpha,\ \beta:*\ \vdash\ ff:\beta\to\beta}{f:\forall\alpha.\alpha\to\alpha\ \vdash\ ff:\forall\beta.\,\beta\to\beta}\ (\text{intro }\forall)$$

$$\dfrac{f:\forall\alpha.\alpha\to\alpha\ \vdash\ ff:\forall\beta.\,\beta\to\beta}{\vdash\ \lambda f.\, ff:(\forall\alpha.\alpha\to\alpha)\to(\forall\beta.\,\beta\to\beta)}\ (\text{intro}\to)$$

intro ∀

∀

intro →

intro ∀

Сильный полиморфизм

$$T \equiv \forall\alpha.\alpha\to\alpha$$

$$\Gamma \equiv f : \forall\alpha.\,\alpha,\ \beta : *$$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash f : \forall\alpha.\,\alpha \qquad \Gamma \vdash \beta \to \beta : *}{\Gamma \vdash f : \beta \to \beta}\,(\mathrm{elim}\ \forall) \Rightarrow \qquad \dfrac{\Gamma \vdash f : \forall\alpha.\,\alpha \qquad \Gamma \vdash \beta : *}{\Gamma \vdash f : \beta}}{\dfrac{f : \forall\alpha.\,\alpha,\ \beta : * \vdash ff : \beta}{\dfrac{f : \forall\alpha.\,\alpha \vdash ff : \forall\beta.\,\beta}{\vdash \lambda f.\, ff : (\forall\alpha.\,\alpha) \to (\forall\beta.\,\beta)}\,(\mathrm{intro} \to)}\,(\mathrm{intro}\ \forall)}\,(\mathrm{elim} \to)$$

$$\bot \equiv \forall\alpha.\,\alpha$$

Сильный: $\vdash \lambda f.\,(ff) : \bot \to \bot$

$\vdash \lambda f.\,(ff) : \top \to \top$

Слабый: $f : \bot \vdash ff : \bot$

$f : \top \vdash ff : \top$

$L, T, n = V, \varepsilon$