

# Прикладная теория типов

## Домашнее задание 1 (нетипизированное $\lambda$ -исчисление)

19 сентября 2023 г.

Домашняя работа принимается до 23:59 19 октября 2023, кроме задач, помеченных звёздочкой, которые принимаются до конца семестра. Решения можно набрать в TeX или написать разборчивым текстом на бумаге и отсканировать. Домашняя работа принимается в виде **одного** pdf файла на почту [m.voronov@gse.cs.msu.ru](mailto:m.voronov@gse.cs.msu.ru). Вопросы по домашнему заданию можно задавать или по почте, или в ТГ-группе курса.

1. (2 балла) Запишите приведённые термы в соответствии с (обще)принятыми правилами опускания скобок:

- $(\lambda x.(((xz)y)(xx)))$
- $((\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.(z((xy)z)))))(\lambda u.u))$

2. (3 балла) Для каждого из приведённых ниже термов определите, является ли он  $\alpha$ -эквивалентным терму  $\lambda x.x(\lambda x.x)$ , если не является, то почему?

- $\lambda y.y(\lambda x.x)$
- $\lambda y.y(\lambda x.y)$
- $\lambda y.y(\lambda y.x)$

3. (5 баллов) Выделите свободные и связанные переменные в термах и выполните указанные подстановки:

- $(\lambda y.r.xyw(px))[x := \lambda w.yw]$
- $((xyz)[x := y])[y := z]$
- $((\lambda x.xyz)[x := y])[y := z]$
- $(\lambda y.yyx)[x := yz]$
- $(xy(\lambda xz,xyz)y)[y := xz]$

4. (10 баллов) Покажите, расписывая все шаги преобразований с их названиями, что  $\forall P, Q, R \in \Lambda :$

- $SKK \rightarrow_{\beta} I$
- $KPQ \rightarrow_{\beta} P$
- $SPQR \rightarrow_{\beta} PR(QR)$
- $(S(KS)K)PQR \rightarrow_{\beta} P(QR)$
- $* SSSKK =_{\beta} SKKK$

5. (2 балла) Приведите пример замкнутого  $\lambda$ -терма, находящегося в

- в слабой головной нормальной форме, но не в головной нормальной форме;
- в головной нормальной форме, но не в нормальной форме.

6. (5 баллов) Пусть задан список натуральных чисел с помощью списка *pair*, где конец списка определяется с помощью терма *nil*:

- $pair = \lambda xyf.fxy$
- $nil = \lambda tf.f$

Постройте терм *fold*, который бы суммировал числа в списке, например:

- $fold(pair\ nil\ nil) = 0$
- $fold(pair\ 1\ nil) = 1$

- $fold(pair\ 1\ (pair\ 2\ (pair\ 3\ nil))) = 6$

7. (2 балла) Покажите, что данное утверждение не всегда верно:

$$M[x := N, y := L] = M[x := N][y := L];$$

Здесь запись  $M[x := N, y := L]$  означает, что подстановка  $x$  и  $y$  в терм  $M$  происходит одновременно, т.е. все свободные  $x$  и  $y$  заменяются вместе за один шаг.

8. (4 баллов) Докажите, что если  $MN$  строго нормализуемо, то  $M$  и  $N$  строго нормализуемо.

9. (2 балл) Покажите, что хотя для комбинатора неподвижной точки Карри  $Y$  выполняется  $YF =_{\beta} F(YF)$ , но при этом неверно ни  $YF \rightarrow_{\beta} F(YF)$ , ни  $F(YF) \rightarrow_{\beta} YF$

10. (6 баллов) Постройте термы  $M$  такие, что

- $M =_{\beta} \lambda xy.xMx$
- $Mxyz =_{\beta} xyzM$

11. (6 баллов) Постройте функции (можно считать, что задан терм  $pred$ ):

- **minus**, вычитающую числа в кодировке Чёрча (можно считать, что в выражении " $pred\ a\ b$ " всегда  $a \geq b$ );
- **equals**, сравнивающую числа в кодировке Чёрча;
- **lt**, реализующую операцию  $<$  для чисел в кодировке Чёрча;
- **gt**, реализующую операцию  $>$  для чисел в кодировке Чёрча;
- **leq**, реализующую операцию  $\leq$  для чисел в кодировке Чёрча;
- **geq**, реализующую операцию  $\geq$  для чисел в кодировке Чёрча;

12. (5 баллов)\* Задайте терм  $pred$ :

$$pred\ n = \begin{cases} n - 1, & n > 0 \\ 0, & n == 0 \end{cases}$$

и приведите объяснение, почему именно он имеет такой вид.

13. (4 балла)\* Реализуйте функцию возведения в степень для чисел в кодировке Чёрча. Проверьте её работоспособность со всеми преобразованиями для  $0^2, 1^2, 2^2$ .

14. (10 баллов)\* Пусть  $U := \lambda zx.x(zzx)$  и  $Z := UU$ , докажите, что  $Z$  - это комбинатор неподвижной точки, т.е.  $ZM$  является неподвижной точкой для любого  $\lambda$ -терма  $M$ :  $M(ZM) = ZM$ . Более того, покажите, что выполняется  $ZM \rightarrow_{\beta} M(ZM)$