Прикладная теория типов

Домашнее задание 2 (просто типизированное λ-исчисление, алгебра типов)

5 ноября 2023 г.

Домашняя работа принимается до 23:59 3 ноября 2023, кроме задач, помеченных звёздочкой, которые принимаются до конца семестра. Решения можно набрать в TeX или написать разборчивым текстом на бумаге и отсканировать. Домашняя работа принимается в виде **одного** pdf файла на почту m.voronov@gse.cs.msu.ru. Вопросы по домашнему заданию можно задавать или по почте, или в ТГ-группе курса.

1. (10 баллов) Найдите типы а-ля Карри и а-ля Чёрч для
   - $\mathbf{zero} = \lambda fx.x$
   - $\mathbf{one} = \lambda fx.fx$
   - $\mathbf{two} = \lambda fx.f(fx)$
   - $\mathbf{K} = \lambda xy.x$
   - $\mathbf{S} = \lambda fgx.fx(gx)$
2. (3 балла) Постройте замкнутый терм типа $(\gamma \to \epsilon) \to ((\gamma \to \epsilon) \to \epsilon) \to \epsilon$, которому было бы нельзя приписать тип $\alpha \to (\alpha \to \epsilon) \to \epsilon$.
3. Определите, обитаемы ли данные типы в пустом контексте, если да, то приведите пример с соответствующими выводом а-ля Карри:
   - (1 балла) $(\alpha \to \alpha \to \gamma) \to \alpha \to \beta \to \gamma$
   - (1 балла) $((\alpha \to \gamma) \to \alpha) \to (\alpha \to \gamma) \to \beta \to \gamma$
   - (2 балла)* $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha \to \beta) \to \alpha$
   - (2 балла)* $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha \to \beta) \to \beta$
4. (3 балла) Найдите терм типа τ в контексте Γ с соответствующим выводом а-ля Карри:
   - $\tau = (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma$, $\Gamma \equiv x : \alpha \to \beta \to \gamma$
   - $\tau = \alpha \to (\alpha \to \beta) \to \gamma$, $\Gamma \equiv x : \alpha \to \beta \to \alpha \to \gamma$
   - $\tau = (\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \alpha) \to \gamma$, $\Gamma \equiv x : (\beta \to \gamma) \to \gamma$
5. (2 балла) Для любого типа α определим тип $Option(\alpha)$, который удовлетворяет следующим правилам:
   - в любом контексте справедливо следующее утверждение о типизации $None : Option(\alpha)$
   - если $x : \alpha$ задан в контексте Γ, то справедливо $Some(x) : Option(\alpha)$
   - если
     - $e1 : \sigma$ в контексте Γ
     - $e2 : \sigma$ в контексте $\Gamma, x : \alpha$
     - $opt : Option(\alpha)$ в контексте Γ,

     то тогда выражение

$$\begin{aligned} &\mathbf{match}\, opt \\ &\qquad None \Rightarrow e1, \\ &\qquad Some(x) \Rightarrow e2 \end{aligned} \tag{1}$$

   имеет тип σ в контексте Γ.
   Запишите эти правила, как формальные правила вывода

6. (5 баллов) Чему равна кардинальность следующих типов, в соответствии с принятыми на лекции обозначениями
   - $Either\,\alpha, Maybe\,\beta$
   - $(Bool,\, Bool) \to Either\,\alpha,\, \beta$
   - $Either\, Maybe\,\alpha,\, (Either\,\beta, Maybe\,\alpha \to \beta)$
   - $Void\ \to Bool$, приведите также неалгебраическое обоснование
   - $Bool\ \to Void$, приведите также неалгебраическое обоснование
7. (4 балла) Докажите, что в заданном на лекции полукольце алгебраических типов, $|\alpha \to (\beta \to \gamma)|= |\alpha * \beta \to \gamma|$, т.е. что кардинальность составной функции слева равна кардинальности функции из произведения типов справа. Приведите неалгебраическое обоснование, почему это так.
8. (2 балла) Приведите алгебраическое представление для следующих типов, где (_, _, ..., _) считаются кортежем (типом-произведением):
   - $\mathbf{data}\, F\,\alpha = A \,|\, B\,(F\,\alpha, F\,\alpha)$
   - $\mathbf{data}\, F\,\alpha = A \,|\, F\,\alpha \,|\, C\,(F\,\alpha, F\,\alpha, F\,\alpha)$
9. (3 балла) Какая распространённая структура данных может быть представлена следующей производящей функцией F:
$$\begin{aligned} F(\alpha) &= 1 + \alpha * G(\alpha) \\ G(\alpha) &= 1 + F(\alpha) * G(\alpha) \end{aligned} \tag{2}$$
10. Задим бинарное дерево

    $\mathbf{data}\, BinTree\,\alpha = Leaf \,|\, Branch\,\alpha\ (BinTree\,\alpha)\,(BinTree\,\alpha)$,

    докажите, что существует биективная функция

    $\mathbf{f} : (BinTree, BinTree, BinTree, BinTree, BinTree, BinTree, BinTree) \to BinTree$,

    которая переводит кортеж из семи бинарных деревьев в одно бинарное дерево. Данная функция может использовать строение каждого дерево из домена только до глубины не больше 4 (в противном случае, существование такой функции доказать тривиально, потому что домен и кодомен функции - счётное множество). Это означает, что паттерн-матчинг любого дерева из домена при построении данной функции можно использовать только для глубины не более 4.

    Данную задачу можно решить двумя способами:
   - (5 баллов) непосредственно предъявив функцию, которая удовлетворяет этим условиям с обоснованием, почему она будет биективной. Функция может быть записана на любом распространённом языке программирования (удобнее использовать языки с паттерн-матчингом) или некотором понятном псевдо-коде. Указание: в этом варианте решения рассмотрите два случая, когда первые четыре дерева являются пустыми и нет.
   - (5 баллов) алгебраическим, доказав, что в полукольце $\frac{N}{x^2-x+1}$ минимальная степень $n > 2$, такая, что $x^n = x$, равна 7. Данное полукольцо является полукольцом, образованным алгебраическим представлением бинарного дерева с помощью производящей функции $F(\alpha) = 1 + F(\alpha)^2$.
11. (5 баллов)* Докажите, что любой комбинатор может быть выражен из двух комбинаторов S и K.