Прикладная теория типов

Домашнее задание 1 (нетипизированное λ-исчисление)

19 сентября 2023 г.

Домашняя работа принимается до 23:59 20 октября 2023, кроме задач, помеченных звёздочкой, которые принимаются до конца семестра. Решения можно набрать в TeX или написать разборчивым текстом на бумаге и отсканировать. Домашняя работа принимается в виде **одного** pdf файла на почту m.voronov@gse.cs.msu.ru. Вопросы по домашнему заданию можно задавать или по почте, или в ТГ-группе курса.

1. (2 балла) Запишите приведённые термы в соответствии с (обще)принятыми правилами опускания скобок:
   - $(\lambda x.(((xz)y)(xx)))$
   - $((\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.(z((xy)z)))))(\lambda u.u))$
2. (3 балла) Для каждого из приведённых ниже термов определите, является ли он α-эквивалентным терму $\lambda x.x(\lambda x.x)$, если не является, то почему?
   - $\lambda y.y(\lambda x.x)$
   - $\lambda y.y(\lambda x.y)$
   - $\lambda y.y(\lambda y.x)$
3. (5 баллов) Выделите свободные и связанные переменные в термах и выполните указанные подстановки:
   - $(\lambda yp.xyw(px))[x := \lambda w.yw]$
   - $((xyz)[x := y])[y := z]$
   - $((\lambda x.xyz)[x := y])[y := z]$
   - $(\lambda y.yyx)[x := yz]$
   - $(xy(\lambda xz, xyz)y)[y := xz]$
4. (10 баллов) Покажите, расписывая все шаги преобразований с их названиями, что $\forall P, Q, R \in \Lambda :$
   - $SKK \twoheadrightarrow_\beta I$
   - $KPQ \twoheadrightarrow_\beta P$
   - $SPQR \twoheadrightarrow_\beta PR(QR)$
   - $(S(KS)K)PQR \twoheadrightarrow_\beta P(QR)$
   - * $SSSKK =_\beta SKKK$
5. (2 балла) Приведите пример замкнутого λ -терма, находящегося в
   - в слабой головной нормальной форме, но не в головной нормальной форме;
   - в головной нормальной форме, но не в нормальной форме.
6. (5 баллов) Пусть задан список натуральных чисел с помощью списка пар $pair$, где конец списка определяется с помощью терма nil:
   - $pair = \lambda xyf.fxy$
   - $nil = \lambda tf.f$

   Постройте терм $fold$, который бы суммировал числа в списке, например:
   - $fold\,(pair\,nil\,nil) = 0$
   - $fold\,(pair\,1\,nil) = 1$

- $fold\,(pair\,1\,(pair\,2\,(pair\,3\,nil))) = 6$

7. (2 балла) Покажите, что данное утверждение не всегда верно:

$$M[x := N, y := L] = M[x := N][y := L];$$

Здесь запись $M[x := N, y := L]$ означает, что подстановка x и y в терм M происходит одновременно, т.е. все свободные x и y заменяются вместе за один шаг.

8. (4 баллов) Докажите, что если MN строго нормализуемо, то M и N строго нормализуемо.

9. (2 балл) Покажите, что хотя для комибнатора неподвижной точки Карри Y выполняется $YF =_\beta F(YF)$, но при этом неверно ни $YF \twoheadrightarrow_\beta F(YF)$, ни $F(YF) \twoheadrightarrow_\beta YF$

10. (6 баллов) Постройте термы M такие, что

    - $M =_\beta \lambda xy.xMx$
    - $Mxyz =_\beta xyzM$

11. (6 баллов) Постройте функции (можно считать, что задан терм $pred$):

    - **minus**, вычитающую числа в кодировке Чёрча (можно считать, что в выражении "$minus\ a\ b$" всегда $a \geq b$);
    - **equals**, сравнивающую числа в кодировке Чёрча;
    - **lt**, реализующую операцию $<$ для чисел в кодировке Чёрча;
    - **gt**, реализующую операцию $>$ для чисел в кодировке Чёрча;
    - **leq**, реализующую операцию $\leq$ для чисел в кодировке Чёрча;
    - **geq**, реализующую операцию $\geq$ для чисел в кодировке Чёрча;

12. (5 баллов)* Задайте терм $pred$:

$$pred\,n = \begin{cases} n-1, & n > 0 \\ 0, & n == 0 \end{cases}$$

и приведите объяснение, почему именно он имеет такой вид.

13. (4 балла)* Реализуйте функцию возведения в степень для чисел в кодировке Чёрча. Проверьте её работоспособность со всеми преобразованиями для 0^2, 1^2, 2^2.

14. (10 баллов)* Пусть $U := \lambda zx.x(zzx)$ и $Z := UU$, докажите, что Z - это комбинатор неподвижной точки, т.е. ZM является неподвижной точкой для любого λ-терма M: $M(ZM) = ZM$. Более того, покажите, что выполняется $ZM \twoheadrightarrow_\beta M(ZM)$