

Прикладная теория типов

Домашнее задание 2 (просто типизированное λ -исчисление, алгебра типов)

2 октября 2023 г.

Домашняя работа принимается до 23:59 3 ноября 2023, кроме задач, помеченных звёздочкой, которые принимаются до конца семестра. Решения можно набрать в TeX или написать разборчивым текстом на бумаге и отсканировать. Домашняя работа принимается в виде **одного** pdf файла на почту m.voronov@gse.cs.msu.ru. Вопросы по домашнему заданию можно задавать или по почте, или в ТГ-группе курса.

1. (10 баллов) Найдите типы а-ля Карри и а-ля Чёрч для

- $\mathbf{zero} = \lambda f x. x$
- $\mathbf{one} = \lambda f x. f x$
- $\mathbf{two} = \lambda f x. f(f x)$
- $\mathbf{K} = \lambda x y. x$
- $\mathbf{S} = \lambda f g x. f x (g x)$

2. (3 балла) Постройте замкнутый терм типа $(\gamma \rightarrow \epsilon) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \epsilon) \rightarrow \epsilon) \rightarrow \epsilon$, которому было бы нельзя приписать тип $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \epsilon) \rightarrow \epsilon$.

3. Определите, обитаемы ли данные типы в пустом контексте, если да, то приведите пример с соответствующими выводом а-ля Карри:

- (1 балла) $(\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$
- (1 балла) $((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$
- (2 балла)* $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha$
- (2 балла)* $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$

4. (3 балла) Найдите терм типа τ в контексте Γ с соответствующим выводом а-ля Карри:

- $\tau = (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma, \Gamma \equiv x : \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$
- $\tau = \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma, \Gamma \equiv x : \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$
- $\tau = (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \gamma, \Gamma \equiv x : (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma$

5. (2 балла) Для любого типа α определим тип $\mathit{Option}(\alpha)$, который удовлетворяет следующим правилам:

- в любом контексте справедливо следующее утверждение о типизации $\mathit{None} : \mathit{Option}(\alpha)$
- если $x : \alpha$ задан в контексте Γ , то справедливо $\mathit{Some}(x) : \mathit{Option}(\alpha)$
- если
 - $e1 : \sigma$ в контексте Γ
 - $e2 : \sigma$ в контексте $\Gamma, x : \alpha$
 - $\mathit{opt} : \mathit{Option}(\alpha)$ в контексте Γ ,

то тогда выражение

$\mathbf{match\ opt}$

$$\begin{aligned} \mathit{None} &\Rightarrow e1, \\ \mathit{Some}(x) &\Rightarrow e2 \end{aligned} \tag{1}$$

имеет тип σ в контексте Γ .

Запишите эти правила, как формальные правила вывода

6. (5 баллов) Чему равна кардинальность следующих типов, в соответствии с принятыми на лекции обозначениями

- $Maybe \alpha, Option \beta$
- $(Bool, Bool) \rightarrow Maybe \alpha, \beta$
- $Maybe Option \alpha, (Maybe \beta, Option \alpha \rightarrow \beta)$
- $Void \rightarrow Bool$, приведите также неалгебраическое обоснование
- $Bool \rightarrow Void$, приведите также неалгебраическое обоснование

7. (4 балла) Докажите, что в заданном на лекции полукольце алгебраических типов, $|\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)| = |\alpha * \beta \rightarrow \gamma|$, т.е. что кардинальность составной функции слева равна кардинальности функции из произведения типов справа. Приведите неалгебраическое обоснование, почему это так.

8. (2 балла) Приведите алгебраическое представление для следующих типов, где $(_, _, \dots, _)$ считаются кортежем (типом-произведением):

- $\mathbf{data} F \alpha = A \mid B (F \alpha, F \alpha)$
- $\mathbf{data} F \alpha = A \mid F \alpha \mid C (F \alpha, F \alpha, F \alpha)$

9. (3 балла) Какая распространённая структура данных может быть представлена следующей производящей функцией F :

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= 1 + \alpha * G(\alpha) \\ G(\alpha) &= 1 + F(\alpha) * G(\alpha) \end{aligned} \tag{2}$$

10. Задим бинарное дерево

$\mathbf{data} BinTree \alpha = Leaf \alpha \mid Branch (BinTree \alpha) (BinTree \alpha),$

докажите, что существует биективная функция

$f : (BinTree, BinTree, BinTree, BinTree, BinTree, BinTree, BinTree) \rightarrow BinTree,$

которая переводит кортеж из семи бинарных деревьев в одно бинарное дерево. Данная функция может использовать строение каждого дерева из домена только до глубины не больше 4 (в противном случае, существование такой функции доказать тривиально, потому что домен и кодомен функции - счётное множество). Это означает, что паттерн-матчинг любого дерева из домена при построении данной функции можно использовать только для глубины не более 4.

Данную задачу можно решить двумя способами:

- (5 баллов) непосредственно предъявив функцию, которая удовлетворяет этим условиям с обоснованием, почему она будет биективной. Функция может быть записана на любом распространённом языке программирования (удобнее использовать языки с паттерн-матчингом) или некотором понятном псевдо-коде. Указание: в этом варианте решения рассмотрите два случая, когда первые четыре дерева являются пустыми и нет.
- (5 баллов) алгебраическим, доказав, что в полукольце $\frac{N}{x^2-x+1}$ минимальная степень $n > 2$, такая, что $x^n = x$, равна 7. Данное полукольцо является полукольцом, образованным алгебраическим представлением бинарного дерева с помощью производящей функции $F(\alpha) = 1 + F(\alpha)^2$.

11. (5 баллов)* Докажите, что любой комбинатор может быть выражен из двух комбинаторов S и K .