

# Прикладная теория типов

Домашнее задание 3 (полиморфное  $\lambda$ -исчисление, соответствие Карри-Ховарда)

29 октября 2023 г.

Домашняя работа принимается до 23:59 30 ноября 2023, кроме задач, помеченных звёздочкой, которые принимаются до конца семестра. Решения "теоретических" задач можно набрать в TeX или написать разборчивым текстом на бумаге и отсканировать. Домашняя работа принимается в виде **двух** файлов (pdf и ml) на почту [m.voronov@gse.cs.msu.ru](mailto:m.voronov@gse.cs.msu.ru). Вопросы по домашнему заданию можно задавать или по почте, в ТГ-группе курса или в личном сообщении в ТГ.

1. (1 балл) Как много  $\lambda 2$  контекстов существует для следующего списка деклараций:  $\alpha : *, \beta : *, \gamma : *, f : \alpha \rightarrow \beta, g : \gamma \rightarrow \beta, x : \beta$ . Приведите обоснование.
2. (2 балла) Приведите вывод со всеми шагами во флаговой нотации, который показывает, что следующий терм возможен в *System F*:  
 $M \equiv \Lambda \alpha \beta \gamma. \lambda f^{\alpha \rightarrow \beta} g^{\beta \rightarrow \gamma} x^{\alpha}. g(fx)$
3. (6 баллов) Найдите тип а-ля Карри и а-ля Чёрч для следующих предтермов в *System F*:
  - $\lambda x. xxx$
  - $\lambda x. (xx)(xx)$
  - $S \equiv \lambda xyz. xz(yz)$
4. (12 баллов) Найдите все термы с точностью до  $\beta$ -редукции, которые являются обитателями следующих типов в контексте  $\Gamma$ :
  - $\Gamma \equiv \text{nat} : *;$   
 $\forall \alpha \beta. (\text{nat} \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \text{nat} \rightarrow \beta) \rightarrow \text{nat} \rightarrow \beta$
  - $\Gamma \equiv \alpha : *, \beta : *, \gamma : *;$   
 $\forall \sigma. ((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \sigma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \sigma$
  - $\Gamma \equiv \emptyset;$   
 $\forall \alpha \beta \gamma. (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \gamma) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$
  - $\Gamma \equiv \emptyset;$   
 $\forall \alpha. \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$
  - $\Gamma \equiv \emptyset;$   
 $\forall \alpha \beta. \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
  - $\Gamma \equiv \emptyset;$   
 $\forall \alpha. \alpha \rightarrow (\forall \beta. \beta \rightarrow \alpha)$
5. (6 баллов) Используя соответствие Карри-Ховарда и OCaml, докажите следующие логические утверждения пропозициональной логики
  - $A \vee B \implies B \vee A$
  - $(A \wedge B) \implies (D \vee C) \implies (D \implies F) \implies (C \implies G) \implies ((A \wedge F) \vee (B \wedge G))$
  - $((C \implies A) \wedge (C \implies B)) \implies (C \implies (A \wedge B))$
6. (18 баллов) Используя соответствие Карри-Ховарда и OCaml, покажите, что (под  $a \sim b$  понимается изоморфизм, т.е. наличие прямой ( $a \implies b$ ) и обратной ( $b \implies a$ ) импликаций)
  - $0^0 \sim 1$
  - $0^1 \sim 0$
  - $1^a \sim 1$

- $a^{b+c} \sim a^b * a^c$
- $(a^b)^c \sim a^{b*c}$
- $SKK \sim I$ , где  $S, K, I$  - соответствующие комбинаторы (аналогичное утверждение доказывалось в первой домашней работе в нетипизированном лямбда-исчислении)

7. (6 баллов)\* Покажите, что следующие термы не типизируемы в *System F*, где  $I, K$  - комбинаторы:

- $(\lambda sz.s(sz))(\lambda sz.s(sz))K$
- $(\lambda zy.y(zI)(zK))(\lambda x.xx)$

В *System F* типизируются только нормализуемые термы (т.к. данная система типов является сильно нормализуемой), а данные термы представляют собой примеры нормализуемых термов, которые тем не менее не типизируются.

8. (4 баллов)\* Существует ли предтерм, типизируемый а-ля Карри, но не типизируемый а-ля Чёрч в  $\lambda$ ,  $\lambda_{\rightarrow}$  и в *System F*. Если нет, приведите обоснование, если да, то терм.
9. (4 баллов)\* Существует ли предтерм, типизируемый а-ля Чёрч, но не типизируемый а-ля Карри в  $\lambda$ ,  $\lambda_{\rightarrow}$  и в *System F*. Если нет, приведите обоснование, если да, то терм.