

Прикладная теория типов

Домашнее задание 3 (полиморфное λ -исчисление, соответствие Карри-Ховарда)

29 октября 2023 г.

Домашняя работа принимается до 23:59 30 ноября 2023, кроме задач, помеченных звёздочкой, которые принимаются до конца семестра. Решения "теоретических" задач можно набрать в TeX или написать разборчивым текстом на бумаге и отсканировать. Домашняя работа принимается в виде **двух** файлов (pdf и ml) на почту m.voronov@gse.cs.msu.ru. Вопросы по домашнему заданию можно задавать или по почте, в ТГ-группе курса или в личном сообщении в ТГ.

1. (1 балл) Как много $\lambda 2$ контекстов существует для следующего списка деклараций: $\alpha : *, \beta : *, \gamma : *, f : \alpha \rightarrow \beta, g : \gamma \rightarrow \beta, x : \beta$. Приведите обоснование.
2. (2 балла) Приведите вывод со всеми шагами во флаговой нотации, который показывает, что следующий терм возможен в $\lambda 2$:
 $M \equiv \Lambda \alpha \beta \gamma. \lambda f^{\alpha \rightarrow \beta} g^{\beta \rightarrow \gamma} x^{\alpha}. g(fx)$
3. (6 баллов) Найдите тип а-ля Карри и а-ля Чёрч для следующих предтермов в *System F*:
 - $\lambda x. xxx$
 - $\lambda x. (xx)(xx)$
 - $S \equiv \lambda xyz. xz(yz)$
4. (12 баллов) Найдите все термы с точностью до β -редукции, которые являются обитателями следующих типов в контексте Γ :
 - $\Gamma \equiv nat : *;$
 $\forall \alpha \beta. (nat \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow nat \rightarrow \beta) \rightarrow nat \rightarrow \beta$
 - $\Gamma \equiv \alpha : *, \beta : *, \gamma : *;$
 $\forall \sigma. ((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \sigma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \sigma$
 - $\Gamma \equiv \emptyset;$
 $\forall \alpha \beta \gamma. (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \gamma) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$
 - $\Gamma \equiv \emptyset;$
 $\forall \alpha. \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$
 - $\Gamma \equiv \emptyset;$
 $\forall \alpha \beta. \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
 - $\Gamma \equiv \emptyset;$
 $\forall \alpha. \alpha \rightarrow (\forall \beta. \beta \rightarrow \alpha)$
5. (6 баллов) Используя соответствие Карри-Ховарда и OCaml, докажите следующие логические утверждения пропозициональной логики
 - $A \vee B \implies B \vee A$
 - $(A \wedge B) \implies (D \vee C) \implies (D \implies F) \implies (C \implies G) \implies ((A \wedge F) \vee (B \wedge G))$
 - $((C \implies A) \wedge (C \implies B)) \implies (C \implies (A \wedge B))$
6. (18 баллов) Используя соответствие Карри-Ховарда и OCaml, покажите, что (под $a \sim b$ понимается изоморфизм, т.е. наличие прямой ($a \implies b$) и обратной ($b \implies a$) импликаций)
 - $0^0 \sim 1$
 - $0^1 \sim 0$
 - $1^a \sim 1$

- $a^{b+c} \sim a^b * a^c$
- $(a^b)^c \sim a^{b*c}$
- $SKK \sim I$, где S, K, I - соответствующие комбинаторы (аналогичное утверждение доказывалось в первой домашней работе в нетипизированном лямбда-исчислении)

7. (6 баллов)* Покажите, что следующие термы не типизируемы в $SystemF$, где I, K - комбинаторы:

- $(\lambda sz.s(sz))(\lambda sz.s(sz))K$
- $(\lambda zy.y(zI)(zK))(\lambda x.xx)$

В сильном $\lambda 2$ типизируются только нормализуемые термы (т.к. данная система типов является сильно нормализуемой), а данные термы представляют собой примеры нормализуемых термов, которые тем не менее не типизируются.

8. (4 баллов)* Существует ли предтерм, типизируемый а-ля Карри, но не типизируемый а-ля Чёрч в λ , λ_{\rightarrow} и в сильном $\lambda 2$. Если нет, приведите обоснование, если да, то терм.
9. (4 баллов)* Существует ли предтерм, типизируемый а-ля Чёрч, но не типизируемый а-ля Карри в λ , λ_{\rightarrow} и в сильном $\lambda 2$. Если нет, приведите обоснование, если да, то терм.