Практическая теория типов

Лекция 7: Соответствие Карри-Ховарда для λ2,
система типов λω

План лекции

1. Соответствие λ2 <-> PROP2

2. Дополнительные свойства λ2

3. Вселенные типов

4. Исчисление λω

5. Практические применения λω

Соответствие λ2 <-> PROP2

Выразимость λ2

Теорема

В λ2 типизируемы все примитивно-рекурсивные функции

➡ неформально, почти все значимые программы типизируемы в λ2

Но, например, не типизируема (не примитивно-) рекурсивная функция Аккермана

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}(0, n) &= n + 1 \\
\mathrm{A}(m+1, 0) &= \mathrm{A}(m, 1) \\
\mathrm{A}(m+1, n+1) &= \mathrm{A}(m, \mathrm{A}(m+1, n))
\end{aligned}
$$

PROP2

PROP2 - это пропозициональная логика, расширенная следующими правилами вывода

$$\frac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \forall\alpha.\sigma}\ \alpha \notin \mathsf{FV}(\Gamma) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall\alpha.\sigma}{\Gamma \vdash \sigma[\tau/\alpha]}$$

Она сохраняет свойство конструктивности, например, в ней не доказуем закон Пирса (соответствующий тип в λ2) необитаем

$$\nvdash M : \forall\alpha.\forall\beta.((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$$

Соответствие PROP2 <-> λ2

Теорема (Girard, Reynolds, Curry-Howard)

$$\vdash \sigma \; (\mathit{PROP2}) \quad \Leftrightarrow \quad \vdash M : \sigma \; (\lambda 2)$$

Связки определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\bot &:= \forall\alpha.\alpha \\
\sigma \wedge \tau &:= \forall\alpha.(\sigma \to \tau \to \alpha) \to \alpha \\
\sigma \vee \tau &:= \forall\alpha.(\sigma \to \alpha) \to (\tau \to \alpha) \to \alpha \\
\exists\alpha.\sigma &:= \forall\beta.(\forall\alpha.\sigma \to \beta) \to \beta
\end{aligned}$$

Соответствие PROP2 <-> λ2

Теорема

В сильном λ2 задачи проверки типа, вывода типов, обитаемости типа являются неразрешимыми

- обитаемость типа эквивалентна задачи доказуемости в PROP2 по соответствию Карри-Ховарда. А задача доказуемости является неразрешимой
- задачи проверки и вывода типов были доказаны Wells в 1990 году

Соответствие PROP2 <-> λ2

Теорема

- сильное λ2 а-ля Карри, **ЗСТ**, **ЗПТ**, **ЗОТ** неразрешимы

- сильное λ2 а-ля Чёрч, **ЗСТ**, **ЗПТ** разрешимы, **ЗОТ** разрешима

- слабое λ2 а-ля Карри, **ЗСТ**, **ЗПТ**, **ЗОТ** разрешимы

- слабое λ2 а-ля Чёрч, **ЗСТ**, **ЗПТ**, **ЗОТ** разрешимы

Соответствие PROP2 <-> λ2

- ЗОТ в сильном λ2 эквивалентна задачи доказуемости в PROP2 по соответствию Карри-Ховарда. А задача доказуемости является неразрешимой
- разрешимость ЗПТ и ЗСТ были доказаны Wells в 1990 году (для а-ля Чёрч они являются разрешимыми)

Соответствие PROP2 <-> λ2

- Тип ложь позволяет порождать терм любого типа

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}(\bot_{\mathrm{E}})$$

$$\bot \equiv \forall \alpha.\, \alpha.$$

$$\sigma : *,\, x : \bot \quad \vdash \quad (x\,\sigma) : \sigma$$

$$\sigma : * \quad \vdash \quad \lambda x^{\bot}.\, (x\,\sigma) : \bot \to \sigma$$

- но данный тип не населён в λ2

Соответствие PROP2 <-> λ2

- В λ2 отрицание может быть определено следующим образом

$$\neg\sigma \equiv \sigma \to \bot$$

- удаление

$$\sigma \to \neg\sigma \to \tau \equiv \sigma \to (\sigma \to \bot) \to \tau \equiv \sigma \to (\sigma \to \forall\alpha.\, \alpha) \to \tau$$

- введение

$$(\sigma \to \tau) \to (\sigma \to \neg\tau) \to \neg\sigma \equiv (\sigma \to \tau) \to (\sigma \to \tau \to \bot) \to \sigma \to \bot$$

Соответствие PROP2 <-> λ2

- В λ2 конъюнкция может быть введена (сравните с типом пары)

$$\sigma \wedge \tau \equiv \forall\alpha.\,(\sigma \to \tau \to \alpha) \to \alpha$$

- введение

$$\sigma \to \tau \to (\sigma \wedge \tau) \equiv \sigma \to \tau \to (\forall\alpha.\,(\sigma \to \tau \to \alpha) \to \alpha)$$

- терм этого типа

$$\lambda x^{\sigma} y^{\tau}.\, \Lambda\alpha.\, \lambda f^{\sigma \to \tau \to \alpha}.\, f\, x\, y$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A \qquad \Gamma \vdash u : B}{\Gamma \vdash \langle t, u \rangle : A \times B}\ (\times_{\mathrm{I}})$$

Соответствие PROP2 <-> λ2

- удаление (деструктор 1)

$$(\sigma \wedge \tau) \to \sigma \equiv (\forall \alpha.\, (\sigma \to \tau \to \alpha) \to \alpha) \to \sigma$$

- удаление (деструктор 2)

$$(\sigma \wedge \tau) \to \tau \equiv (\forall \alpha.\, (\sigma \to \tau \to \alpha) \to \alpha) \to \tau$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A \times B}{\Gamma \vdash \pi_1(t) : A}\ (\times^{\mathrm{l}}_{\mathrm{E}}) \qquad \frac{\Gamma \vdash t : A \times B}{\Gamma \vdash \pi_{\mathrm{r}}(t) : B}\ (\times^{\mathrm{r}}_{\mathrm{E}})$$

Соответствие PROP2 <-> λ2

- В λ2 дизъюнкция может быть введена

$$\sigma \vee \tau \equiv \forall\alpha.\,(\sigma \to \alpha) \to (\tau \to \alpha) \to \alpha$$

- введение (конструктор 1)

$$\sigma \to (\sigma \vee \tau) = \sigma \to (\forall\alpha.\,(\sigma \to \alpha) \to (\tau \to \alpha) \to \alpha)$$

- введение (конструктор 2)

$$\tau \to (\sigma \vee \tau) = \tau \to (\forall\alpha.\,(\sigma \to \alpha) \to (\tau \to \alpha) \to \alpha)$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A}{\Gamma \vdash \iota_{\mathrm{l}}^{B}(t) : A + B}\,(+_{\mathrm{I}}^{\mathrm{l}}) \qquad \frac{\Gamma \vdash t : B}{\Gamma \vdash \iota_{\mathrm{r}}^{A}(t) : A + B}\,(+_{\mathrm{I}}^{\mathrm{r}})$$

Соответствие PROP2 <-> λ2

- удаление

$$
\begin{aligned}
& (\sigma \vee \tau) \to (\sigma \to \rho) \to (\tau \to \rho) \to \rho \\
= \quad & (\forall \alpha.\, (\sigma \to \alpha) \to (\tau \to \alpha) \to \alpha) \to (\sigma \to \rho) \to (\tau \to \rho) \to \rho
\end{aligned}
$$

- терм (доказательство разбором случаев)

$$\lambda\, h^{\sigma \vee \tau}\, f^{\sigma \to \rho}\, g^{\tau \to \rho}.\, h\, \rho\, f\, g$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A + B \qquad \Gamma, x : A \vdash u : C \qquad \Gamma, y : B \vdash v : C}{\Gamma \vdash \mathrm{case}(t, x \mapsto u, y \mapsto v) : C}\ (+_{\mathrm{E}})$$

Экзистенциальные типы

- Согласно ВНК нотации, квантор всеобщности можно трактовать, как **функцию**, которая любому типу τ ставит в соответствие терм с типом $\sigma[\alpha := \tau]$

$$\Lambda\alpha.\, \lambda x^{\alpha}.\, x : \forall\alpha.\, \alpha \to \alpha$$

$$(\Lambda\alpha.\, \lambda x^{\alpha}.\, x)\tau \to_{\beta} \lambda x^{\tau}.\, x : \tau \to \tau$$

- Согласно ВНК нотации, квантор существования можно трактовать, как пару из некоторого типа τ и терма, имеющего тип $\sigma[\alpha := \tau]$.

для $\sigma = \alpha \to \gamma$ $\quad \langle \gamma, \lambda x^{\gamma}.\, x \rangle : \exists\alpha.\, \alpha \to \gamma$

Соответствие PROP2 <-> λ2

- В λ2 квантор существования может быть введен

$$\exists\alpha\,.\,\sigma \;\equiv\; \forall\beta.\,(\forall\alpha.\,\sigma\to\beta)\to\beta \qquad \beta\notin \mathsf{FV}(\sigma)$$

- введение

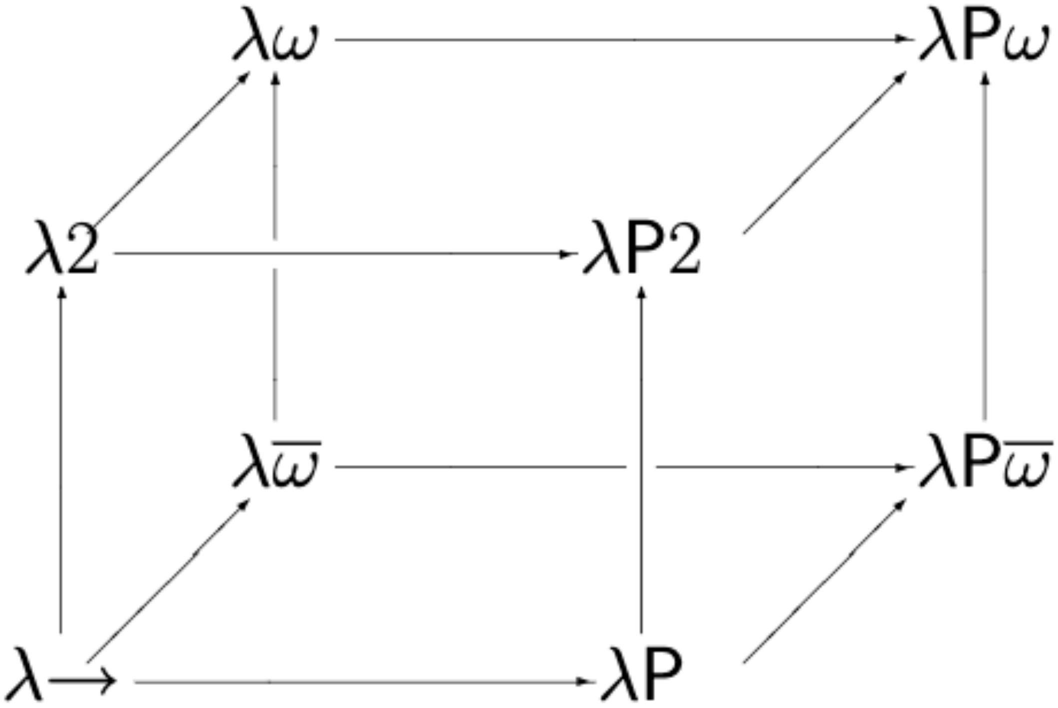
$$\sigma[\alpha:=\tau]\to\exists\alpha.\,\sigma = \sigma[\alpha:=\tau]\to\forall\beta.\,(\forall\alpha.\,\sigma\to\beta)\to\beta$$

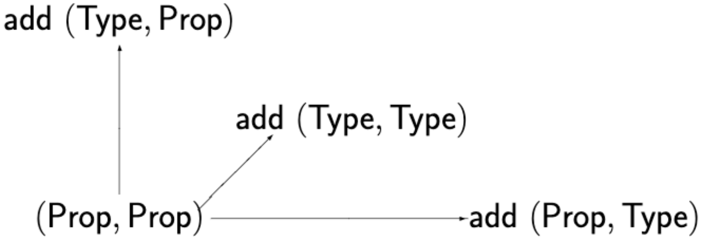
- удаление

$$\exists\alpha.\,\sigma\to(\sigma\to\rho)\to\rho = (\forall\beta.\,(\forall\alpha.\,\sigma\to\beta)\to\beta)\to(\sigma\to\rho)\to\rho$$

Исчисление λω

Лямбда-куб


λω
λPω
λ2
λP2
λω̄
λPω̄
λ→
λP


add (Type, Prop)
add (Type, Type)
(Prop, Prop)
add (Prop, Type)

λω

- введём понятие sorts

  $\{\star, \Box\} = \mathcal{S}$

- sorts представляет собой 3-е и 4-е систему зависимости для типов
- система типов расширяется понятием конструктора типа
- конструкторы типов бывают точными и нет
- sorts классифицируют типы

λω: уровни лямбда термов

L1	L2	L3	L4
$\underbrace{(\lambda x : \alpha . x)}_{\textit{term}}$:	$\underbrace{\alpha \to \alpha}_{\textit{type/constructor}}$:	$\underbrace{*}_{\textit{kind}}$:	$\square$
	$\underbrace{\lambda\beta : *. \beta \to \beta}_{\textit{proper constructor}}$:	$\underbrace{* \to *}_{\textit{kind}}$:	$\square$

λω: правила вывода

(ax/sort) $\vdash \star : \square$

(var) $$\frac{\Gamma \vdash A : s}{\Gamma, x : A \vdash x : A} \text{ if } x \notin \Gamma$$

(weak) $$\frac{\Gamma \vdash M : B \quad \Gamma \vdash A : s}{\Gamma, x : A \vdash M : B} \text{ if } x \notin \Gamma$$

(λ) $$\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B \quad \Gamma \vdash A \to B : s}{\Gamma \vdash \lambda x : A.M : A \to B}$$

(app) $$\frac{\Gamma \vdash M : A \to B \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : B}$$

(conv$_\beta$) $$\frac{\Gamma \vdash M : A \quad \Gamma \vdash B : s}{\Gamma \vdash M : B} A =_\beta B$$

(type/kind) $$\frac{\Gamma \vdash A : s \quad \Gamma \vdash B : s}{\Gamma \vdash A \to B : s}$$

λω: основные свойства

Теорема

В λω выразимо всё, что выразимо в просто типизированном лямбда исчислении.

Типы λω это расширенные многочлены.

Расширенные многочлены - это минимальный класс функций над N, который содержит:

- константные функции 0 и 1
- проекции
- сложения
- умножения
- ifzero (n,m,p) = if n == 0 then m else p

и замкнут относительно композиции