

Практическая теория типов

Лекция 7: Соответствие Карри-Ховарда для $\lambda 2$,
система типов $\lambda \omega$



План лекции

- 1. Соответствие $\lambda 2 \leftrightarrow \text{PROP}2$**
- 2. Дополнительные свойства $\lambda 2$**
- 3. Вселенные типов**
- 4. Исчисление $\lambda\omega$**
- 5. Практические применения $\lambda\omega$**
- 6. ИСТТ**



Соответствие $\lambda 2 \leftrightarrow \text{PROP2}$



Выразимость λ2

Теорема

В $\lambda 2$ типизируемы все примитивно-рекурсивные функции

→ неформально, почти все значимые программы типизируемы в $\lambda 2$

Но, например, не типизируема (не примитивно-) рекурсивная
функция Аккермана

$$A(0, n) = n + 1$$

$$A(m + 1, 0) = A(m, 1)$$

$$A(m + 1, n + 1) = A(m, A(m + 1, n))$$



PROP2

$\frac{\lambda 2}{\text{Тип}} \sim \frac{\text{PROP2}}{\text{Георгии}}$
программа ~ функция

PROP2 - это пропозициональная логика, расширенная следующими правилами вывода

$$\frac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \forall \alpha. \sigma} \alpha \notin FV(\Gamma) \quad \frac{\Gamma \vdash \forall \alpha. \sigma}{\Gamma \vdash \sigma[\tau/\alpha]}$$

Она сохраняет свойство конструктивности, например, в ней не доказуем закон Пирса (соответствующий тип в $\lambda 2$) необитаем

$$((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A \\ \nexists M : \forall \alpha. \forall \beta. ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$$



Соответствие PROP2 \leftrightarrow $\lambda 2$

Теорема (Girard, Reynolds, Curry-Howard)

$$\vdash \sigma \text{ (PROP2)} \Leftrightarrow \vdash M : \sigma \text{ (\lambda2)}$$

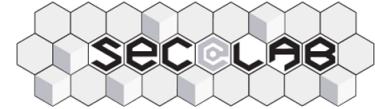
Связки определяются следующим образом:

$$\perp := \forall \alpha. \alpha$$

$$\sigma \wedge \tau := \forall \alpha. (\sigma \xrightarrow{f} \tau \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$$

$$\sigma \vee \tau := \forall \alpha. (\sigma \xrightarrow{f} \alpha) \rightarrow (\tau \xrightarrow{g} \alpha) \rightarrow \alpha$$

$$\exists \alpha. \sigma := \forall \beta. (\forall \alpha. \sigma \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$$



Соответствие PROP2 \leftrightarrow λ 2

Теорема

В сильном λ 2 задачи проверки типа, вывода типов, обитаемости типа являются неразрешимыми

- обитаемость типа эквивалентна задачи доказуемости в PROP2 по соответству Карри-Ховарда. А задача доказуемости является неразрешимой
- задачи проверки и вывода типов были доказаны Wells в 1990 году



Соответствие PROP2 \leftrightarrow λ 2

Теорема

- сильное λ 2 а-ля Карри, ЗСТ, ЗПТ, ЗОТ неразрешимы
- сильное λ 2 а-ля Чёрч, ЗСТ, ЗПТ разрешимы, ЗОТ разрешима
- слабое λ 2 а-ля Карри, ЗСТ, ЗПТ, ЗОТ разрешимы
- слабое λ 2 а-ля Чёрч, ЗСТ, ЗПТ, ЗОТ разрешимы



Соответствие PROP2 \leftrightarrow λ 2

- ЗОТ в сильном λ 2 эквивалентна задачи доказуемости в PROP2 по соответствуию Карри-Ховарда. А задача доказуемости является неразрешимой
- разрешимость ЗПТ и ЗСТ были доказаны Wells в 1990 году (для а-ля Чёрч они являются разрешимыми)



Соответствие PROP2 \leftrightarrow $\lambda 2$

- Тип ложь позволяет порождать терм любого типа

$$\perp \equiv \forall \alpha. \alpha$$

$$\sigma : *, x : \perp \vdash (x \sigma) : \sigma$$

$$\sigma : * \vdash \lambda x^\perp. (x \sigma) : \perp \rightarrow \sigma$$

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} (\perp_E)$$

- но данный тип не населён в $\lambda 2$



Соответствие PROP2 \leftrightarrow λ2

- В λ2 отрицание может быть определено следующим образом

$$\neg\sigma \equiv \sigma \rightarrow \perp$$

$$\frac{\begin{array}{c|cc} \sigma & \neg\sigma \\ \hline 0 & 1 \\ \end{array}}{\begin{array}{c|cc} \sigma & \neg\sigma \\ \hline 1 & 0 \\ \end{array}} \quad \frac{\sigma \rightarrow \perp}{\perp}$$

- удаление

$$\sigma \rightarrow \neg\sigma \rightarrow \tau \equiv \sigma \rightarrow (\sigma \rightarrow \perp) \rightarrow \tau \equiv \sigma \rightarrow (\sigma \rightarrow \forall \alpha. \alpha) \rightarrow \tau$$

- введение

$$(\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow (\sigma \rightarrow \neg\tau) \rightarrow \neg\sigma \equiv (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow (\sigma \rightarrow \tau \rightarrow \perp) \rightarrow \sigma \rightarrow \perp$$

$$y = f \times g : \Sigma$$
$$g \times y : \perp$$



Соответствие PROP2 $\leftrightarrow \lambda 2$

$$\begin{array}{c} (0 \rightarrow 0 \rightarrow 0) \rightarrow 0 \\ (0 \rightarrow 0 \rightarrow 1) \rightarrow 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 1 \\ (\overbrace{1 \rightarrow 1 \rightarrow 0}) \rightarrow 0 \equiv 1 \\ (\overbrace{1 \rightarrow 1 \rightarrow 1}) \rightarrow 1 \equiv 1 \end{array}$$

- В $\lambda 2$ конъюнкция может быть введена (сравните с типом пары)

$$\sigma \wedge \tau \equiv \forall \alpha. (\sigma \rightarrow \tau \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$$

- введение

$$\sigma \rightarrow \tau \rightarrow (\sigma \wedge \tau) \equiv \sigma \rightarrow \tau \rightarrow (\forall \alpha. (\sigma \rightarrow \tau \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$$

- терм этого типа

$$\lambda x^\sigma y^\tau. \Lambda \alpha. \lambda f^{\sigma \rightarrow \tau \rightarrow \alpha}. f x y$$

$$\begin{array}{c} (\emptyset \rightarrow \emptyset \rightarrow \lambda) \rightarrow \lambda \\ (\emptyset \rightarrow \emptyset \rightarrow p) \rightarrow p \end{array}$$

σ	τ	$\sigma \wedge \tau$	$\forall \alpha. (\sigma \rightarrow \tau \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$
0	0	0	0
1	1	1	1
0	1	0	

$$\frac{\emptyset \vdash \emptyset \quad \emptyset \vdash \emptyset}{\emptyset \vdash \emptyset} \quad \frac{}{f : A \rightarrow B} \quad \frac{}{(\lambda x : A. x)} \quad \emptyset \rightarrow \emptyset$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A \quad \Gamma \vdash u : B}{\Gamma \vdash \langle t, u \rangle : A \times B} (x_1)$$



Соответствие PROP2 \leftrightarrow $\lambda 2$

- удаление (деструктор 1)

$$(\sigma \wedge \tau) \rightarrow \sigma \equiv (\forall \alpha. (\sigma \rightarrow \tau \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow \sigma$$

- удаление (деструктор 2)

$$(\sigma \wedge \tau) \rightarrow \tau \equiv (\forall \alpha. (\sigma \rightarrow \tau \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow \tau$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A \times B}{\Gamma \vdash \pi_l(t) : A} (\times_E^l)$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A \times B}{\Gamma \vdash \pi_r(t) : B} (\times_E^r)$$



Соответствие PROP2 <-> λ2

- В λ2 дизъюнкция может быть введена

$$\sigma \vee \tau \equiv \forall \alpha. (\sigma \rightarrow \alpha) \rightarrow (\tau \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$$

- введение (конструктор 1)

$$(\lambda x^{\sigma}. \lambda d. \lambda f g. \frac{\sigma \rightarrow t}{\sigma \rightarrow d} \frac{d \rightarrow f}{f \rightarrow g} f \rightarrow g)$$

$$\sigma \rightarrow (\sigma \vee \tau) = \sigma \rightarrow (\forall \alpha. (\sigma \rightarrow \alpha) \rightarrow (\tau \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$$

- введение (конструктор 2)

$$\tau \rightarrow (\sigma \vee \tau) = \tau \rightarrow (\forall \alpha. (\sigma \rightarrow \alpha) \rightarrow (\tau \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A}{\Gamma \vdash \iota_1^B(t) : A + B} (+_l^l) \quad \frac{\Gamma \vdash t : B}{\Gamma \vdash \iota_r^A(t) : A + B} (+_r^r)$$



Соответствие PROP2 \leftrightarrow $\lambda 2$

- удаление

$$\begin{aligned} & (\sigma \vee \tau) \rightarrow (\sigma \rightarrow \rho) \rightarrow (\tau \rightarrow \rho) \rightarrow \rho \\ = & (\forall \alpha. (\sigma \rightarrow \alpha) \rightarrow (\tau \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\sigma \rightarrow \rho) \rightarrow (\tau \rightarrow \rho) \rightarrow \rho \end{aligned}$$

- терм (доказательство разбором случаев)

$$\lambda h^{\sigma \vee \tau} f^{\sigma \rightarrow \rho} g^{\tau \rightarrow \rho}. h \rho f g$$

$$h = \bigwedge \lambda. \lambda f^{\sigma \rightarrow \rho} g^{\tau \rightarrow \rho}. \vdash$$

$\sigma \Rightarrow \rho$ $\tau \Rightarrow \rho$

$$\lambda f^{\sigma \rightarrow \rho} g^{\tau \rightarrow \rho}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A + B \quad \Gamma, x : A \vdash u : C \quad \Gamma, y : B \vdash v : C}{\Gamma \vdash \text{case}(t, x \mapsto u, y \mapsto v) : C} (+_E)$$



Экзистенциальные типы

- Согласно ВНК нотации, квантор всеобщности можно трактовать, как **функцию**, которая любому типу τ ставит в соответствие терм с типом $\sigma[\alpha := \tau]$

$$\forall \cdot \sigma \equiv \lambda z. z \rightarrow \sigma[z := \cdot]$$

$$\lambda \alpha. \lambda x^\alpha. x : \forall \alpha. \alpha \rightarrow \alpha$$

$$(\lambda \alpha. \lambda x^\alpha. x) \tau \rightarrow \beta \lambda x^\tau. x : \tau \rightarrow \tau$$

- Согласно ВНК нотации, квантор существования можно трактовать, как пару из некоторого типа τ и терма, имеющего тип $\sigma[\alpha := \tau]$.

для $\sigma = \underline{\alpha \rightarrow \gamma}$ $\langle \gamma, \lambda x^\gamma. x \rangle : \exists \alpha. \alpha \rightarrow \gamma$

$$\forall d. \sigma \equiv \forall d. d \rightarrow \gamma$$

$$\begin{aligned} \exists d. \sigma &\rightarrow (\underline{\alpha_i}, +), \tau^2 \\ P \quad \gamma & \\ + : \sigma \sqcup \underline{\alpha = \alpha_i} & \end{aligned}$$



Соответствие PROP2 <-> λ2

- В λ2 квантор существования может быть введен

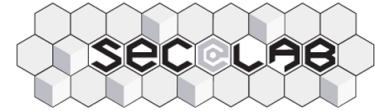
$$\exists \alpha. \sigma \equiv \forall \beta. (\forall \alpha. \sigma \rightarrow \beta) \rightarrow \beta \quad \beta \notin FV(\sigma)$$

- введение

$$\sigma[\alpha := \tau] \rightarrow \exists \alpha. \sigma = \sigma[\alpha := \tau] \rightarrow \forall \beta. (\forall \alpha. \sigma \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$$

- удаление

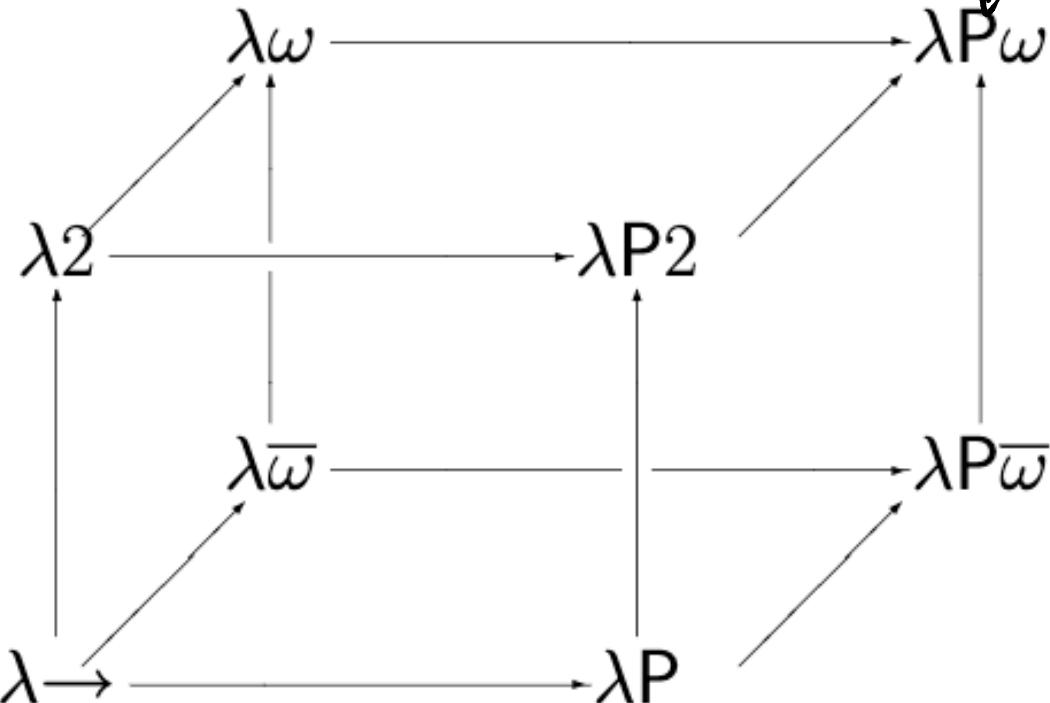
$$\exists \alpha. \sigma \rightarrow (\sigma \rightarrow \rho) \rightarrow \rho = (\forall \beta. (\forall \alpha. \sigma \rightarrow \beta) \rightarrow \beta) \rightarrow (\sigma \rightarrow \rho) \rightarrow \rho$$



Исчисление $\lambda\omega$



Лямбда-куб



add (Type, Prop)

add (Type, Type)

(Prop, Prop) → add (Prop, Type)



$\lambda\omega$

$$\begin{aligned}\lambda x. x : \omega &\rightarrow \omega \\ \lambda y. y : \omega &\rightarrow \omega\end{aligned}$$

- введём понятие sorts

$$\{\star, \square\} = S$$

- sorts представляет собой 3-е и 4-е систему зависимости для типов
- система типов расширяется понятием конструктора типа
- конструкторы типов бывают точными и нет
- sorts классифицируют типы



$\lambda \rightarrow$ kind

λ $\omega^* \rightarrow \lambda \omega$ $\lambda \omega$

Термы: Типы: kinds; \square

$x \rightarrow \forall \beta \rightarrow y$ $\lambda \beta. \beta \rightarrow \forall \beta \rightarrow y$

$\beta \rightarrow \forall \beta \rightarrow y$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Result } x y \equiv \lambda f (f y) \\ \text{May be } x y \equiv \lambda x (x y) \end{array} \right.$$



λω: уровни лямбда термов

L1

$$\underbrace{(\lambda x : \alpha. x)}_{term} : \quad \square$$

L2

$$\underbrace{\alpha \rightarrow \alpha}_{type/constructor} : \quad \square$$

L3

$$\underbrace{*}_{kind} : \quad \square$$

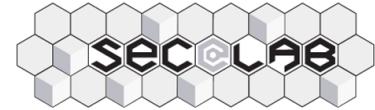
L4

$$\underbrace{\lambda\beta : *. \beta \rightarrow \beta}_{proper\ constructor} : \underbrace{* \rightarrow *}_{kind} : \quad \square$$



λω: правила вывода

(ax/sort)	$\vdash \star : \square$	(var) $\frac{\Gamma \vdash A : s}{\Gamma, x : A \vdash x : A}$ if $x \notin \Gamma$
(weak)	$\frac{\Gamma \vdash M : B \quad \Gamma \vdash A : s}{\Gamma, x : A \vdash M : B}$ if $x \notin \Gamma$	
(λ)		$\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B \quad \Gamma \vdash A \rightarrow B : s}{\Gamma \vdash \lambda x : A. M : A \rightarrow B}$
(app)	$\frac{\Gamma \vdash M : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : B}$	
(conv _β)	$\frac{\Gamma \vdash M : A \quad \Gamma \vdash B : s}{\Gamma \vdash M : B} \star \square$	$A =_{\beta} B$
(type/kind)	$\frac{\Gamma \vdash A : s \quad \Gamma \vdash B : s}{\Gamma \vdash A \rightarrow B : s}$	



$\lambda\omega$: ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Теорема

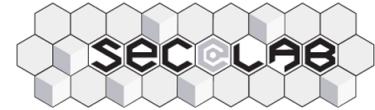
В $\lambda\omega$ выражимо всё, что выражимо в просто типизированном лямбда исчислении.

Типы $\lambda\omega$ это расширенные многочлены.

Расширенные многочлены - это минимальный класс функций над N , который содержит:

- константные функции 0 и 1
- проекции
- сложения
- умножения
- ifzero (n,m,p) = if $n == 0$ then m else p

и замкнут относительно композиции



$\lambda\omega$: ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Теорема

В $\lambda\omega$ выражимо всё, что выражимо в просто типизированном лямбда исчислении.

Типы $\lambda\omega$ это расширенные многочлены.

Расширенные многочлены - это минимальный класс функций над N , который содержит:

- константные функции 0 и 1
- проекции
- сложения
- умножения
- ifzero (n,m,p) = if $n == 0$ then m else p

и замкнут относительно композиции

$$\begin{array}{lcl} \text{true} \equiv \lambda f. f & : & \lambda \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow \alpha} \mid \alpha^2 \\ \text{false} \equiv \lambda f. f & : & \lambda \rightarrow \beta \rightarrow \beta \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \lambda d. \lambda \rightarrow \lambda \rightarrow \lambda = \beta_{00} / \\ (\alpha) \\ (\alpha) \end{array}$$

$$\text{And} : \text{Bool} \rightarrow \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}$$

$$\text{And} = \lambda d. \lambda x y. t f . \quad x (g. t f) f$$

$$\text{And } x y = \lambda d. \lambda f^2. \quad x d (y d + f) f$$

$$\lambda d. \lambda f^2. +$$

$$\lambda d. \lambda f^2. f$$

$$\text{pair} \equiv \lambda d. \lambda x^{\sigma} \quad \tilde{y}^{\sigma \rightarrow \varepsilon \rightarrow \alpha} \quad f^{\sigma \rightarrow \varepsilon \rightarrow \alpha} - f x y$$

$$\sigma \times \varepsilon \equiv \sigma \wedge \varepsilon \equiv \lambda d. (\sigma \Rightarrow \varepsilon \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha$$

$$\text{pair } a b = \lambda d. \lambda f^{\sigma \rightarrow \varepsilon \rightarrow \alpha} . f^{\alpha} a b .$$

$$\rightarrow (\sigma \Rightarrow \varepsilon \rightarrow \lambda d. (\sigma \Rightarrow \varepsilon \Rightarrow \alpha) \Rightarrow \alpha)$$

MLTT

$\text{Typ}^c \equiv \forall d. z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow \dots \rightarrow z_n \rightarrow d$

z_i - константы

аргумент
функции

z_i забирает d , имена d как значения z_i

имеют значение

$\gamma_i = \dots \rightarrow d$

$\perp \equiv \forall d. d$

$\text{List} \equiv \forall d. d \rightarrow (\sigma \rightarrow d \rightarrow d) \rightarrow d$

$T \equiv \forall d. d \rightarrow d$

$\text{pair} \equiv$

$\text{Bool} \equiv \forall d. d \rightarrow d \rightarrow d$

$\sigma \times z \equiv \forall d. (\sigma \rightarrow z \rightarrow d) \rightarrow d$

$\sigma + z \equiv \forall d. (\sigma \rightarrow d) \rightarrow (z \rightarrow d) \rightarrow d$

Тип конструктора

Type = $\text{if } z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow \dots \rightarrow z_n \Rightarrow n$
 f_1, \dots, f_n - конструкторы

Ариада конструкто \equiv арифметика

Тип i конструктора $\equiv [z_i : \lambda := \text{Type}]$

$$f_i = \lambda x$$

$$f_i \cdot x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot x_2$$

$$f_i \cdot x_1 = \lambda t. \ x_1 \cdot t$$

$$\underline{f_i = \lambda t. f \cdot f \cdot t}$$