

# Прикладная теория типов

Домашнее задание 2 (просто типизированное  $\lambda$ -исчисление, алгебра типов)

12 октября 2024 г.

Домашняя работа принимается до 23:59 9 ноября 2023, кроме задач, помеченных звёздочкой, которые принимаются до конца семестра. Решения можно набрать в TeX или написать разборчивым текстом на бумаге и отсканировать. Домашняя работа принимается в виде **одного** pdf файла на почту [m.voronov@gse.cs.msu.ru](mailto:m.voronov@gse.cs.msu.ru). Вопросы по домашнему заданию можно задавать или по почте, или в ТГ-группе курса.

1. (10 баллов) Найдите типы а-ля Карри и а-ля Чёрч для

- $\mathbf{zero} = \lambda f x. x$
- $\mathbf{one} = \lambda f x. f x$
- $\mathbf{two} = \lambda f x. f(f x)$
- $\mathbf{K} = \lambda x y. x$
- $\mathbf{S} = \lambda f g x. f x (g x)$

2. (3 балла) Постройте замкнутый терм типа  $(\gamma \rightarrow \epsilon) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \epsilon) \rightarrow \epsilon) \rightarrow \epsilon$ , которому было бы нельзя приписать тип  $\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \epsilon) \rightarrow \epsilon$ .

3. Определите, обитаемы ли данные типы в пустом контексте, если да, то приведите пример с соответствующими выводом а-ля Карри:

- (1 балла)  $(\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$
- (1 балла)  $((\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$
- (2 балла)\*  $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha$
- (2 балла)\*  $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$

4. (3 балла) Найдите терм типа  $\tau$  в контексте  $\Gamma$  с соответствующим выводом а-ля Карри:

- $\tau = (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma, \Gamma \equiv x : \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$
- $\tau = \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \gamma, \Gamma \equiv x : \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$
- $\tau = (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \gamma, \Gamma \equiv x : (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma$

5. (2 балла) Для любого типа  $\alpha$  определим тип  $Option(\alpha)$ , который удовлетворяет следующим правилам:

- в любом контексте справедливо следующее утверждение о типизации  $None : Option(\alpha)$
- если  $x : \alpha$  задан в контексте  $\Gamma$ , то справедливо  $Some(x) : Option(\alpha)$
- если
  - $e1 : \sigma$  в контексте  $\Gamma$
  - $e2 : \sigma$  в контексте  $\Gamma, x : \alpha$
  - $opt : Option(\alpha)$  в контексте  $\Gamma$ ,

то тогда выражение

**match**  $opt$

$$\begin{aligned} None &\Rightarrow e1, \\ Some(x) &\Rightarrow e2 \end{aligned} \tag{1}$$

имеет тип  $\sigma$  в контексте  $\Gamma$ .

Запишите эти правила, как формальные правила вывода

6. (5 баллов) Чему равна кардинальность следующих типов, в соответствии с принятыми на лекции обозначениями

- $\text{Either } \alpha, \text{Maybe } \beta$
- $(\text{Bool}, \text{Bool}) \rightarrow \text{Either } \alpha, \beta$
- $\text{Either } \text{Maybe } \alpha, (\text{Either } \beta, \text{Maybe } (\alpha \rightarrow \beta))$
- $\text{Void} \rightarrow \text{Bool}$ , приведите также неалгебраическое обоснование
- $\text{Bool} \rightarrow \text{Void}$ , приведите также неалгебраическое обоснование

7. (4 балла) Докажите, что в заданном на лекции полукольце алгебраических типов,  $|\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)| = |\alpha * \beta \rightarrow \gamma|$ , т.е. что кардинальность составной функции слева равна кардинальности функции из произведения типов справа. Приведите неалгебраическое обоснование, почему это так.

8. (2 балла) Приведите алгебраическое представление для следующих типов, где  $(\_, \_, \dots, \_)$  считаются кортежем (типом-произведением):

- $\text{data } F \alpha = A \mid B (F \alpha, F \alpha)$
- $\text{data } F \alpha = A \mid F \alpha \mid C (F \alpha, F \alpha, F \alpha)$

9. (4 балла) Какая распространённая структура данных может быть представлена следующей производящей функцией  $F$ :

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= 1 + \alpha * G(\alpha) \\ G(\alpha) &= 1 + F(\alpha) * G(\alpha) \end{aligned} \tag{2}$$

10. Зададим бинарное дерево

**data**  $\text{BinTree } \alpha = \text{Leaf} \mid \text{Branch } \alpha (\text{BinTree } \alpha) (\text{BinTree } \alpha),$

докажите, что существует биективная функция

$f : (\text{BinTree}, \text{BinTree}, \text{BinTree}, \text{BinTree}, \text{BinTree}, \text{BinTree}, \text{BinTree}) \rightarrow \text{BinTree},$

которая переводит кортеж из семи бинарных деревьев в одно бинарное дерево. Данная функция может использовать строение каждого дерева из домена только до глубины не больше 4 (в противном случае, существование такой функции доказать тривиально, потому что домен и кодомен функции - счётное множество). Это означает, что паттерн-матчинг любого дерева из домена при построении данной функции можно использовать только для глубины не более 4.

Данную задачу можно решить двумя способами:

- (5 баллов) непосредственно предъявив функцию, которая удовлетворяет этим условиям с обоснованием, почему она будет биективной. Функция может быть записана на любом распространённом языке программирования (удобнее использовать языки с паттерн-матчингом) или некотором понятном псевдо-коде. Указание: в этом варианте решения рассмотрите два случая, когда первые четыре дерева являются пустыми и нет.
- (5 баллов) алгебраическим, доказав, что в полукольце  $\frac{N}{x^2-x+1}$  минимальная степень  $n > 2$ , такая, что  $x^n = x$ , равна 7. Данное полукольцо является полукольцом, образованным алгебраическим представлением бинарного дерева с помощью производящей функции  $F(\alpha) = 1 + F(\alpha)^2$ .

11. (5 баллов)\* Докажите, что любой комбинатор может быть выражен из двух комбинаторов  $S$  и  $K$ .