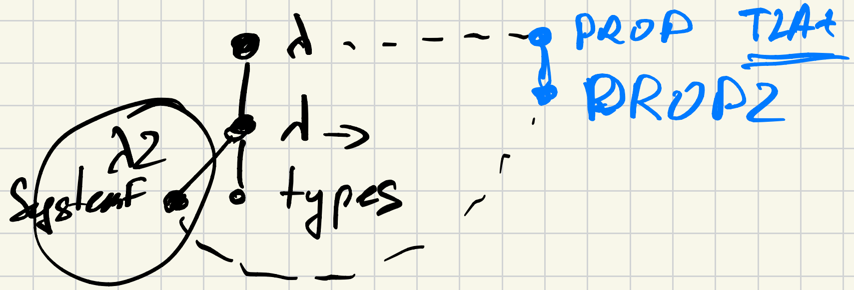

λω λC

$\lambda_\to$

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

σ, τ

$\alpha \quad \alpha \to \alpha$

$\lambda x^{\alpha}.x : \alpha \to \alpha$

$\lambda x^{\gamma}.x : \gamma \to \gamma$

$\lambda x^{\beta \to \beta}.x : (\beta \to \beta) \to \beta \to \beta$

$\lambda 2$

$(\lambda x.x) : \forall \alpha. \alpha \to \alpha$

$(\lambda x z.x) : \forall \alpha. \forall \beta. \alpha \to \beta \to \alpha$

Сильный полиморфизм (System F) Слабый полим-зм (ML)

V – мн-во типовых переменных

$\Theta = V \mid \Theta \to \Theta \mid \forall V.\Theta$

$\Theta_\to = V \mid \Theta_\to \to \Theta_\to$

$\forall \alpha. \alpha \to (\forall \gamma. \forall \beta. \gamma \to \beta) \to \alpha$

$\Theta = \forall V. \Theta_\to \mid \Theta_\to$

Контексты в λ2

Типовая переменная может быть свободной и связанной ($\forall$)

должны быть в контексте

$\alpha \in \mathbb{V} \Leftrightarrow \alpha : *$ kind

$\Gamma \equiv \{ \alpha : * ,\ x : \alpha \to \alpha \}$

упорядочен (исп-е типовой переменной идёт перед объявлением)

λ2

$\alpha : *,\ x : \alpha \to \alpha,\ y : \alpha \vdash M : \sigma$

$\alpha : *, \beta : *, x : \alpha \vdash \lambda f . f x : (\alpha \to \beta) \to \beta$

$\alpha : *,\ x : \alpha \vdash \lambda f . f x : \forall \beta . (\alpha \to \beta) \to \beta$

$\beta : *,\ \alpha : * \vdash \lambda x y . x : \forall \gamma . \gamma \to \beta \to \gamma$

$\beta : *,\ \alpha : * \vdash \lambda x y . x : \alpha \to \beta \to \alpha$

$\beta : *,\ \alpha : * \vdash \lambda x y . x : (\alpha \to \beta \to \alpha) \to \beta \to (\alpha \to \beta \to \alpha)$

$$\frac{\Gamma, \alpha : * \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash M : \forall \alpha . \sigma} \ (\text{intro } \forall)$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \forall \alpha . \sigma \qquad \Gamma \vdash \tau : *}{\Gamma \vdash M : \sigma[\alpha := \tau]} \ (\text{el } \forall)$$

Выводимость типа из контекста

$\Gamma \vdash \sigma : *$

тип выводим из Γ, если $FV(\sigma) \in \Gamma$

Допустимость контекста

$\Gamma \vdash$

Γ - допустим, если

$$\emptyset \vdash$$

$$\frac{\Gamma \vdash}{\Gamma, \alpha : * \vdash} \quad \alpha \notin dom(\Gamma)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \sigma : *}{\Gamma, x : \sigma \vdash} \quad x \notin dom(\Gamma)$$

$$\text{(аксиома)}\ \frac{x:\sigma \in \Gamma}{\Gamma \vdash x:\sigma}$$

$$(\text{elim}\to)\ \frac{\Gamma \vdash M:\sigma\to\tau \qquad \Gamma \vdash N:\sigma}{\Gamma \vdash MN:\tau}$$

$$(\text{intro}\to)\ \frac{\Gamma, x:\sigma \vdash M:\tau}{\Gamma \vdash \lambda x.M:\sigma\to\tau}$$

$\tau \in \Theta_{\to}$ для $\lambda2(\Theta_w)$

$\tau \in \Theta$ для $\lambda2(\Theta)$

$$(\text{elim}\forall)\ \frac{\Gamma \vdash M:\forall\alpha.\sigma \qquad \Gamma \vdash \tau:*}{\Gamma \vdash M:\sigma[\alpha:=\tau]}$$

$\tau \in \Theta_{\to}$ для $\lambda2(\Theta_w)$

$\tau \in \Theta$ для $\lambda2(\Theta)$

$$(\text{intro}\forall)\ \frac{\Gamma, \alpha:* \vdash M:\sigma}{\Gamma \vdash M:\forall\alpha.\sigma}$$

$(f\ f)$ — типизируем самоприменение

$\Gamma \equiv f : \forall\alpha.\ \alpha \to \alpha,\ \beta : *$

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash f : \forall\alpha.\alpha\to\alpha \qquad \Gamma \vdash \beta \to \beta : *}{\Gamma \vdash f : (\beta\to\beta)\to\beta\to\beta}\,(\text{elim}\ \forall) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash f : \forall\alpha.\alpha\to\alpha \qquad \Gamma \vdash \beta : *}{\Gamma \vdash f : \beta\to\beta}}{\dfrac{f : \forall\alpha.\alpha\to\alpha,\ \beta : * \vdash (f f) : \beta \to \beta}{\dfrac{f : \forall\alpha.\alpha\to\alpha \vdash (f f) : \forall\beta.\ \beta\to\beta}{\vdash \lambda f.\ f f : (\forall\alpha.\alpha\to\alpha) \to (\forall\beta.\beta\to\beta)}\,(\text{intro} \to)}\,(\text{intro}\ \forall)}\,(\text{elim} \to)$$

) справедливо только в $\lambda 2(\Theta)$

$T \equiv \forall\alpha.\ \alpha \to \alpha$

$\lambda 2(\Theta_w)$ $\qquad f : T \vdash (f f) : T$

$\lambda 2(\Theta)$ $\qquad \vdash \lambda f.\ f f : T \to T$

$\Gamma \equiv f : \forall \alpha . \alpha \ , \ \beta : *$

$\bot \equiv \forall \alpha . \alpha$

$\lambda 2 (\Theta_\omega)$ $\quad f : \bot \nvdash (f f) : \bot$

$\lambda 2 (\Theta)$ $\quad \vdash \lambda f . f f : \bot \to \bot$

$$(\text{аксиома}) \ \frac{x : \sigma \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : \sigma}$$

$$(\text{elim} \to) \ \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M N : \tau}$$

$$(\text{intro} \to) \ \frac{\Gamma , x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x . M : \sigma \to \tau}$$

$$(\text{elim} \ \forall) \ \frac{\Gamma \vdash M : \forall \alpha . \sigma \qquad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash M : \sigma [\alpha := \tau]}$$

$$(\text{intro} \ \forall) \ \frac{\Gamma , \alpha : * \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash M : \forall \alpha . \sigma}$$

λ

- а-ия Карри
- а-ия Чёрч

λ2

- weak
  - а-ия Карри
  - а-ия Чёрч
- strong
  - Карри
  - Чёрч

Задача проверки типа $\vdash M : \sigma$?

Задача вывода типа $\vdash M : ?$

Задача обитаемости типа $\vdash ? : \sigma$

$\lambda 2(\Theta_\alpha)$ Карри	$\lambda 2(\Theta)$ Карри	$\lambda 2(\Theta_\alpha)$ Чёрч	$\lambda 2(\Theta)$ Чёрч
+	−	+	+
∓	−	+	+
+	−	−	−

Let - полиморфизм

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \qquad \Gamma, x : \sigma \vdash N : \tau}{\Gamma \vdash (\text{let } x = M \text{ in } N) : \tau}$$

$(\lambda x. N)\ M$

$\underline{\text{let } f = \lambda x. x \text{ in } f f}$

Типизация λ2 в стиле Чёрча

$$\frac{\Gamma, \alpha : * \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \Lambda \alpha . M : \forall \alpha . \sigma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \forall \alpha . \sigma \qquad \Gamma \vdash \tau : *}{\Gamma \vdash M \tau : \sigma[\alpha := \tau]}$$

$$\gamma : * \vdash (\Lambda \beta . \lambda x^{\gamma} y^{\beta} . y) : \forall \beta . \gamma \to \beta \to \beta$$

$$\vdash (\Lambda \beta . \lambda x^{\gamma} y^{\beta} . y)\, \gamma : \gamma \to \gamma \to \gamma$$

$$\vdash \lambda x^{\gamma} y^{\gamma} . y : \gamma \to \gamma \to \gamma$$

$$\Gamma \vdash \Lambda\alpha . M : \rho \implies \exists \sigma \left[\Gamma, \alpha : * \vdash M : \sigma \;\&\; \rho \equiv \forall \alpha . \sigma \right]$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash f : \forall\alpha.\alpha \qquad \Gamma \vdash \beta : *}{\Gamma \vdash f : \beta} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash f : \forall\alpha.\alpha \qquad \Gamma \vdash (\beta \Rightarrow \beta) : *}{\Gamma \vdash f : \beta \Rightarrow \beta}\ (\text{elim } \forall)}{f : \forall\alpha.\alpha,\ \beta : * \vdash (f f) : \beta}\ (\text{elim} \Rightarrow)}{f : \bot \vdash f\, f : \bot}\ (\text{intro } \forall)}{\vdash \lambda f.(f f) : \bot \Rightarrow \bot}\ (\text{intro} \Rightarrow)
$$

4. $\lambda x.\, xxx : ?$

1. $K = \lambda fgx.\, f(gx) : ?$

2. $? : \top = \forall\alpha.\,\alpha \to \alpha$

3. $? : \bot \quad \forall\alpha.\,\alpha$

$$\lambda x.xxx : (\forall\alpha.\alpha \to \forall\alpha.\alpha) \to (\forall\alpha.\alpha \to \forall\alpha.\alpha) \to \forall\alpha.\alpha$$

$$Id = \lambda x.x : \forall\alpha.\,\alpha \to \alpha$$

$$Id\, M = M \qquad f(x) = x$$

$\lambda 2\,(\Theta)$ а-ля Карри

$$(\text{аксиома})\ \frac{x:\sigma \in \Gamma}{\Gamma \vdash x:\sigma}$$

$$(elim \to)\ \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau}$$

$$(intro \to)\ \frac{\Gamma, x:\sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \sigma \to \tau}$$

$$(elim\ \forall)\ \frac{\Gamma \vdash M : \forall\alpha.\sigma \qquad \Gamma \vdash \tau : *}{\Gamma \vdash M : \sigma[\alpha := \tau]}$$

$$(intro\ \forall)\ \frac{\Gamma, \alpha : * \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash M : \forall\alpha.\sigma}$$