$\lambda_{\to}$

$\lambda x^{\tau}. y : \tau \to \sigma$

перем-я $a : \sigma$

абстр-я $\lambda x. y : \sigma \to \tau$

апп-я $MN : \alpha$

где M-функция, N-арг

Лемма о инверсии

- $\Gamma \vdash x : \sigma \Rightarrow (x : \sigma) \in \Gamma$
- $\Gamma \vdash (MN) : \tau \Rightarrow \exists \sigma \, [\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \ \& \ \Gamma \vdash N : \sigma]$
- $\Gamma \vdash (\lambda x. M) : \tau \Rightarrow \exists \sigma, \rho \, [\Gamma, x : \sigma \vdash M : \rho \ \& \ \tau \equiv \sigma \to \rho]$

а-ля Карри

- $\Gamma \vdash (\lambda x^{\sigma}. M) : \tau \Rightarrow \exists \rho \, [\Gamma, x : \sigma \vdash M : \rho \ \& \ \tau \equiv \sigma \to \rho]$

а-ля Чёрч

Лемма о типизируемости подтерма

$\Gamma \vdash M : \sigma$, M' подтерм $M \Rightarrow \exists \sigma' \ \Gamma' \vdash M' : \sigma'$

Контексты

$\Gamma = \{x_1 : \sigma_1, \dots, x_n : \sigma_n\}$ $\qquad \Gamma : V \rightarrow \Theta$

Домен $dom(\Gamma) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

$\sigma_i = \Gamma(x_i)$

Сужение контекста $\restriction$

$\exists V'$, $\quad \Gamma \restriction V' = \{x_i : \sigma_i \mid x_i \in V' \wedge \sigma_i = \Gamma(x_i)\}$

Леммы о контекстах

$\exists \Gamma, \Delta, \quad \Delta \supseteq \Gamma$, тогда

1. $\Gamma \vdash M : \sigma \Rightarrow \Delta \vdash M : \sigma$

2. $\Gamma \vdash M : \sigma \Rightarrow FV(M) \subseteq dom(\Gamma)$

3. $\Gamma \vdash M : \sigma \Rightarrow \underbrace{\Gamma \restriction FV(M)}_{\text{контекст}} \vdash M : \sigma$

$x x \in \Lambda$

$\nexists\, \Gamma, \tau \qquad \Gamma \vdash (xx) : \tau$

Доказываем от противного

– по лемме об инверсии $\quad \exists\, \sigma \quad x : \sigma \to \tau$

$x : \sigma$

– по 2-й лемме о контекстах $\quad FV(xx) \subseteq dom(\Gamma)$ ■

Из леммы о сил-ти нормализации $\Rightarrow$

$\lambda_{\to} \nvdash \Omega : \sigma \qquad \Omega = \omega\omega = (\lambda x . xx)(\lambda x . xx)$

$\lambda_{\to} \nvdash Y : \sigma$

Лемма о подстановке типа

Подстановка типа $\sigma, \tau \in \Theta$ $\quad \sigma[\alpha := \tau]$

$$(\alpha \to \beta \to \alpha \to \beta)[\alpha := \gamma \to \gamma] = (\gamma \to \gamma) \to \beta \to (\gamma \to \gamma) \to \beta$$

Лемма

- $\Gamma \vdash M : \sigma \Rightarrow \Gamma[\alpha := \tau] \vdash M : \sigma[\alpha := \tau]$
- $\Gamma \vdash M : \sigma \Rightarrow \Gamma[\alpha := \tau] \vdash M[\alpha := \tau] : \sigma[\alpha := \tau]$

Лемма о подстановке терма

$$\begin{cases} \Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau \\ \Gamma \vdash N : \sigma \end{cases} \Rightarrow \Gamma \vdash M[x := N] : \tau$$

$$x : \alpha \to \alpha \vdash \lambda z^{\beta} y^{\gamma} . x : \beta \to \gamma \to \alpha \to \alpha$$

$$Id \equiv \lambda x . x : \alpha \to \alpha$$

$$\Rightarrow \quad \vdash \lambda z^{\beta} y^{\gamma} . (\lambda x^{\alpha} . x) : \beta \to \gamma \to \alpha \to \alpha$$

$$\equiv \lambda z^{\beta} y^{\gamma} x^{\alpha} . x : \beta \to \gamma \to \alpha \to \alpha$$

Теорема о редукции субъекта

$\exists\ M \twoheadrightarrow_\beta N$, тогда $\Gamma \vdash M:\sigma \Rightarrow \Gamma \vdash N:\sigma$

β-редукция терма не меняет тип(!)

Док-во

$M \equiv (\lambda x.P)\,Q \qquad N \equiv P[x:=Q]$

Пусть $\Gamma \vdash M:\sigma$, т.е.

$\Gamma \vdash (\lambda x.P)\,Q : \sigma$

по лемме об инверсии $\exists\ \tau$

$\underbrace{\Gamma \vdash \lambda x.P : \tau \to \sigma} \qquad \Gamma \vdash Q : \tau$

по лемме об инверсии

$\Gamma, x:\tau \vdash P : \sigma \qquad \Gamma \vdash Q:\tau$

по лемме о подстановке типа:

$\Gamma \vdash P[x:=Q] : \sigma$ ∎

Экспансия субъекта

$$\begin{cases} M \to_\beta N \\ \Gamma \vdash N : \sigma \end{cases} \not\Rightarrow \quad \Gamma \vdash M : \sigma$$

$$M = (\lambda x.xx)\,Id \to_\beta \underbrace{Id\ Id}_{(\lambda x.x)(\lambda x.x)} \to_\beta Id \equiv N$$

$$M = K\ Id\ \Omega \to_\beta Id \equiv N$$

Теорема о единственности типа для $\lambda_\to$ а-ля Чёрч

– $$\begin{cases} \Gamma \vdash M : \sigma \\ \Gamma \vdash M : \tau \end{cases} \Rightarrow \quad \sigma \equiv \tau$$

– $$\begin{cases} \Gamma \vdash M : \sigma \\ \Gamma \vdash N : \tau \\ M \to_\beta N \end{cases} \Rightarrow \quad \sigma \equiv \tau$$

Th о редуцируемости субъекта

```
int square (int x) {
    return x*x;
}
int main (argc . argv) {
    square (2)
}
```

$square : Int \Rightarrow Int$

$main : Int \times Array[String] \times Array[String] \Rightarrow Int$

ADT (GADT)

Алгебра

Полугруппа

$(X, *)$ $\quad *: X \times X \to X$

$+$ ассоц

Моноид

$+ e$

Группа

$+ inv$

```
class Semigroup {
    ═
    public Semigroup
        op( a , b){
        }
}
```

op - ассоциативен

$op(a, op(b,c)) =$

$= op(op(a,b), c)$

Моноид $(X, *, \otimes)$

Полукольцо $(X, *, \circ)$

$+, \cdot$

$*: X \times X \to X$

$\circ: X \times X \to X$

data P a = C a | D
| (a,a)

C 1

ADT

Coproduct
(sum, enum)

data Bool = True | False

```
union {
    int type;
    value [2];
}
```

std::variant

Product
(struct)

```
struct sProd {
    int field_1;
    float field_2;
}
```

data Product = (Bool, Bool)

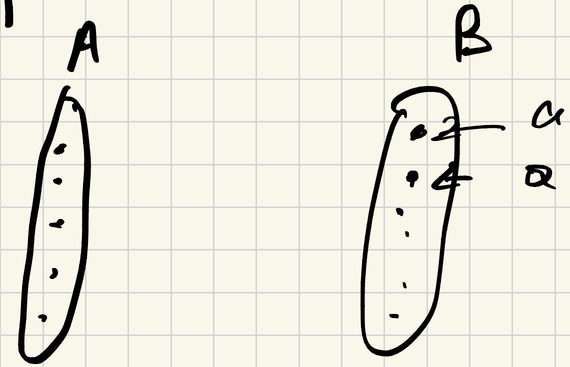
Inhabitants (количество термов, кот-ые можно придумать типу)

data Bool = True | False   2

Unit, (),   1

<table>
<tr><th>Name</th><th>#, card, $\lvert\ \rvert$</th><th>Math name</th></tr>
<tr><td>Void</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Unit</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Bool, Three, Four, ...</td><td>2, 3, 4, ...</td><td>2, 3, 4, ...</td></tr>
<tr><td>Maybe, Option, std::option
data Maybe a = Just a | Nothing</td><td>$\lvert a\rvert + 1$</td><td>Sum</td></tr>
<tr><td>Either, std::exceptional
Result
std::variant
data Either a b = Left a | Right b</td><td>$\lvert a\rvert + \lvert b\rvert$</td><td>Sum</td></tr>
<tr><td>pair
data (a, b) = (a, b)</td><td>$\lvert a\rvert \times \lvert b\rvert$</td><td>Product</td></tr>
<tr><td>a -> b</td><td>b^a</td><td>function</td></tr>
</table>

$f: A \to B$



$b \times b \times b \ldots = b^a$

$|\text{Either Bool} \to \text{Void}, \text{Option Unit}| =$

$$|\text{Void}|^{|\text{Bool}|} + (|\text{Unit}| + 1) = 0^2 + (1+1) = 2$$

$$\text{data List } a = \underbrace{\text{Nil}}_{1} \mid \underbrace{\text{Cons } a\ (\text{List } a)}_{|a| L}$$

$$|\text{data List } a| = L$$

$$L = 1 + aL = 1 + a(1 + aL) =$$

$$1 + a + a^2 L = 1 + a + a^2(1 + aL) =$$

$$1 + a + a^2 + a^3 L = \ldots$$

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \ldots + a^n L$$

$$L = 1 + aL$$

$$L(1 - a) = 1$$

$$L = \frac{1}{1-a} = \sum_{i=0}^{\infty} a^i$$

data Tree a = Leaf a | Branch (Tree a) (Tree a)

$$L = a + L^2 =$$

$$L = \frac{1 - \sqrt{1-4a}}{2}$$

$$L = a + a^2 + 2a^3 + 5a^4 + 14a^5 + \dots + C_n a^n$$

data Tree a = Leaf | Branch a (Tree a) (Tree a)

$$L = 1 + aL^2$$

data Nat = $\underbrace{0}_{1}$ | Succ Nat

$$L = 1 + L$$