Практическая теория типов

Лекция 7: Соответствие Карри-Ховарда для λ2,
система типов λω

План лекции

1. Соответствие λ2 <-> PROP2

2. Дополнительные свойства λ2

3. Вселенные типов

4. Исчисление λω

5. Практические применения λω

6. MLTT

Соответствие λ2 <-> PROP2

Выразимость λ2

Теорема

В λ2 типизируемы все примитивно-рекурсивные функции

➡ неформально, почти все значимые программы типизируемы в λ2

Но, например, не типизируема (не примитивно-) рекурсивная функция Аккермана

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}(0, n) &= n + 1 \\
\mathrm{A}(m + 1, 0) &= \mathrm{A}(m, 1) \\
\mathrm{A}(m + 1, n + 1) &= \mathrm{A}(m, \mathrm{A}(m + 1, n))
\end{aligned}
$$

PROP2

λ2 ~ PROP2

Тип ~ Теорема

программа ~ док-во

PROP2 - это пропозициональная логика, расширенная следующими правилами вывода

$$\frac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \forall\alpha.\sigma}\ \alpha \notin \mathsf{FV}(\Gamma) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall\alpha.\sigma}{\Gamma \vdash \sigma[\tau/\alpha]}$$

Она сохраняет свойство конструктивности, например, в ней не доказуем закон Пирса (соответствующий тип в λ2) необитаем

$(((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A)$

$$\nvdash M : \forall\alpha.\forall\beta.((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$$

Соответствие PROP2 <-> λ2

Теорема (Girard, Reynolds, Curry-Howard)

$$\vdash \sigma \; (PROP2) \quad \Leftrightarrow \quad \vdash M : \sigma \; (\lambda 2)$$

Связки определяются следующим образом:

$$\bot := \forall \alpha . \alpha$$

$$\sigma \wedge \tau := \forall \alpha . \overbrace{(\sigma \to \tau \to \alpha)}^{f} \to \alpha$$

$$\sigma \vee \tau := \forall \alpha . (\sigma \xrightarrow{f} \alpha) \to (\tau \xrightarrow{g} \alpha) \to \alpha$$

$$\exists \alpha . \sigma := \forall \beta . (\forall \alpha . \sigma \to \beta) \to \beta$$

Соответствие PROP2 <-> λ2

Теорема

В сильном λ2 задачи проверки типа, вывода типов, обитаемости типа являются неразрешимыми

- обитаемость типа эквивалентна задачи доказуемости в PROP2 по соответствию Карри-Ховарда. А задача доказуемости является неразрешимой
- задачи проверки и вывода типов были доказаны Wells в 1990 году

Соответствие PROP2 <-> λ2

Теорема

- сильное λ2 а-ля Карри, **ЗСТ**, **ЗПТ**, **ЗОТ** неразрешимы

- сильное λ2 а-ля Чёрч, **ЗСТ**, **ЗПТ** разрешимы, **ЗОТ** разрешима

- слабое λ2 а-ля Карри, **ЗСТ**, **ЗПТ**, **ЗОТ** разрешимы

- слабое λ2 а-ля Чёрч, **ЗСТ**, **ЗПТ**, **ЗОТ** разрешимы

Соответствие PROP2 <-> λ2

- ЗОТ в сильном λ2 эквивалентна задачи доказуемости в PROP2 по соответствию Карри-Ховарда. А задача доказуемости является неразрешимой
- разрешимость ЗПТ и ЗСТ были доказаны Wells в 1990 году (для а-ля Чёрч они являются разрешимыми)

Соответствие PROP2 <-> λ2

- Тип ложь позволяет порождать терм любого типа

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}(\bot_{\mathrm{E}})$$

$$\bot \equiv \forall\alpha.\ \alpha.$$

$$\sigma{:}*,\ x{:}\bot \quad \vdash \quad (x\,\sigma) : \sigma$$

$$\sigma{:}* \quad \vdash \quad \lambda x^{\bot}.\,(x\,\sigma) : \bot \to \sigma$$

- но данный тип не населён в λ2

Соответствие PROP2 <-> λ2

- В λ2 отрицание может быть определено следующим образом

$$\neg\sigma \;\equiv\; \sigma \to \bot$$

σ	$\neg\sigma$	$\sigma \to \bot$
0	1	1
1	0	0

- удаление

$$\sigma \to \neg\sigma \to \tau \equiv \sigma \to (\sigma \to \bot) \to \tau \equiv \sigma \to (\sigma \to \forall\alpha.\, \alpha) \to \tau$$

- введение

$$(\sigma \to \tau) \to (\sigma \to \neg\tau) \to \neg\sigma \equiv \overset{f}{(\sigma \to \tau)} \to \overset{g}{(\sigma \to \tau \to \bot)} \to \overset{x}{\sigma} \to \bot$$

$y = fx : \tau$

$g\,x\,y : \bot$

Соответствие PROP2 <-> λ2

$(0\to 0\to 0)\to 0$

$(0\to 0\to 1)\to 1$

$(1\to 1\to 0)\to 0 \equiv 1$

$(1\to 1\to 1)\to 1 \equiv 1$

- В λ2 конъюнкция может быть введена (сравните с типом пары)

$$\sigma \wedge \tau \;\equiv\; \forall\alpha.\,(\sigma\to\tau\to\alpha)\to\alpha$$

σ	τ	$\sigma\wedge\tau$	$\forall\alpha.(\sigma\to\tau\to\alpha)\to\alpha$
0	0	0	0
1	1	1	1
0	1	0	

- введение

$$\sigma\to\tau\to(\sigma\wedge\tau) \equiv \sigma\to\tau\to(\forall\alpha.\,(\sigma\to\tau\to\alpha)\to\alpha)$$

- терм этого типа

$$\lambda x^{\sigma} y^{\tau}.\,\Lambda\alpha.\,\lambda f^{\sigma\to\tau\to\alpha}.\,f\,x\,y$$

σ	τ
$\emptyset$	$\cancel{\emptyset}$

$\emptyset\to\emptyset$

$f : A\to B$ $\quad |B|^{|A|}$

$(\emptyset\to\emptyset\to\alpha)\to\alpha$

$(\emptyset\to\emptyset\to\emptyset)\to\emptyset$

$$\frac{\Gamma\vdash t : A \qquad \Gamma\vdash u : B}{\Gamma\vdash\langle t,u\rangle : A\times B}\,(\times_{\mathrm{I}})$$

Соответствие PROP2 <-> λ2

- удаление (деструктор 1)

$$(\sigma \wedge \tau) \to \sigma \equiv (\forall \alpha.\, (\sigma \to \tau \to \alpha) \to \alpha) \to \sigma$$

- удаление (деструктор 2)

$$(\sigma \wedge \tau) \to \tau \equiv (\forall \alpha.\, (\sigma \to \tau \to \alpha) \to \alpha) \to \tau$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A \times B}{\Gamma \vdash \pi_1(t) : A}\ (\times^{\mathrm{l}}_{\mathrm{E}}) \qquad \frac{\Gamma \vdash t : A \times B}{\Gamma \vdash \pi_{\mathrm{r}}(t) : B}\ (\times^{\mathrm{r}}_{\mathrm{E}})$$

Соответствие PROP2 <-> λ2

- В λ2 дизъюнкция может быть введена

$$\sigma \vee \tau \;\equiv\; \forall\alpha.\,(\sigma\to\alpha)\to(\tau\to\alpha)\to\alpha$$

$(\lambda x^{\sigma}.\ \Lambda\alpha.\ \lambda f^{\sigma\to\alpha} g^{\tau\to\alpha}.\ f\,x)$

- введение (конструктор 1)

$$\sigma\to(\sigma\vee\tau) = \sigma\to(\forall\alpha.\,(\sigma\to\alpha)\to(\tau\to\alpha)\to\alpha)$$

- введение (конструктор 2)

$$\tau\to(\sigma\vee\tau) = \tau\to(\forall\alpha.\,(\sigma\to\alpha)\to(\tau\to\alpha)\to\alpha)$$

$$\frac{\Gamma\vdash t : A}{\Gamma\vdash \iota_{\mathrm{l}}^{B}(t) : A+B}\,(+_{\mathrm{I}}^{\mathrm{l}}) \qquad \frac{\Gamma\vdash t : B}{\Gamma\vdash \iota_{\mathrm{r}}^{A}(t) : A+B}\,(+_{\mathrm{I}}^{\mathrm{r}})$$

Соответствие PROP2 <-> λ2

- удаление

$$
\begin{aligned}
& (\sigma \vee \tau) \to (\sigma \to \rho) \to (\tau \to \rho) \to \rho \\
= \quad & (\forall \alpha.\, (\sigma \to \alpha) \to (\tau \to \alpha) \to \alpha) \to (\sigma \to \rho) \to (\tau \to \rho) \to \rho
\end{aligned}
$$

- терм (доказательство разбором случаев)

$$\lambda\, h^{\sigma \vee \tau}\, f^{\sigma \to \rho}\, g^{\tau \to \rho}.\; h\, \rho\, f\, g$$

$$h = \Lambda \alpha.\ \lambda f^{\sigma \to \alpha} g^{\tau \to \alpha}.\ \sqcup$$

$$\lambda f^{\sigma \to \rho} g^{\tau \to \rho}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t : A + B \qquad \Gamma, x : A \vdash u : C \qquad \Gamma, y : B \vdash v : C}{\Gamma \vdash \mathrm{case}(t, x \mapsto u, y \mapsto v) : C}\ (+_{\mathrm{E}})$$

Экзистенциальные типы

- Согласно ВНК нотации, квантор всеобщности можно трактовать, как **функцию**, которая любому типу τ ставит в соответствие терм с типом $\sigma[\alpha := \tau]$

$\forall\alpha.\,\sigma \equiv \forall\tau.\,\tau \to \sigma[\alpha := \tau]$

$$\Lambda\alpha.\,\lambda x^{\alpha}.\,x : \forall\alpha.\,\alpha \to \alpha$$

$$(\Lambda\alpha.\,\lambda x^{\alpha}.\,x)\tau \to_{\beta} \lambda x^{\tau}.\,x : \tau \to \tau$$

- Согласно ВНК нотации, квантор существования можно трактовать, как пару из некоторого типа τ и терма, имеющего тип $\sigma[\alpha := \tau]$.

для $\sigma = \underbrace{\alpha \to \gamma}$ $\quad \langle\gamma, \lambda x^{\gamma}.\,x\rangle : \exists\alpha.\,\alpha \to \gamma$

$\forall\alpha.\sigma \equiv \forall\alpha.\,\alpha \to \gamma$

$\exists\alpha.\,\sigma \Rightarrow (\alpha_i, t)$ т.ч.

$t : \sigma[\alpha := \alpha_i]$

Соответствие PROP2 <-> λ2

- В λ2 квантор существования может быть введен

$$\exists\alpha\,.\,\sigma \;\equiv\; \forall\beta.\,(\forall\alpha.\,\sigma\to\beta)\to\beta \qquad \beta\notin \mathsf{FV}(\sigma)$$

γ

- введение

$$\sigma[\alpha:=\tau]\to\exists\alpha.\,\sigma = \sigma[\alpha:=\tau]\to\forall\beta.\,(\forall\alpha.\,\sigma\to\beta)\to\beta$$

- удаление

$$\exists\alpha.\,\sigma\to(\sigma\to\rho)\to\rho = (\forall\beta.\,(\forall\alpha.\,\sigma\to\beta)\to\beta)\to(\sigma\to\rho)\to\rho$$

Исчисление λω

Лямбда-куб

CoC + inductive types ⇒ CiC

$$
\begin{tikzcd}
 & \lambda\omega \arrow[rr] & & \lambda P\omega \\
\lambda 2 \arrow[ur] \arrow[rr] & & \lambda P2 \arrow[ur] & \\
 & \lambda\overline{\omega} \arrow[uu] \arrow[rr] & & \lambda P\overline{\omega} \arrow[uu] \\
\lambda\!\rightarrow \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr] & & \lambda P \arrow[uu] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\text{add (Type, Prop)} & & \\
 & \text{add (Type, Type)} & \\
\text{(Prop, Prop)} \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr] & & \text{add (Prop, Type)}
\end{tikzcd}
$$

$\lambda x. x : \alpha \to \alpha$

$\lambda y. y : \alpha \to \alpha$

λω

$\lambda \to$ Kind

$\alpha : *$

λ $\lambda\to$ $\lambda\omega$ $\lambda\omega$

Термы : Типы : kinds : $\square$

$\alpha \to \forall\beta \Rightarrow \gamma$

$\beta \to \forall\beta \Rightarrow \gamma$

$\lambda \sigma . \sigma \to \forall\beta \Rightarrow \gamma$

- введём понятие sorts

  $\{\star, \square\} = \mathcal{S}$

- sorts представляет собой 3-е и 4-е систему зависимости для типов
- система типов расширяется понятием конструктора типа
- конструкторы типов бывают точными и нет
- sorts классифицируют типы

Result x y = |x| + |y|

Maybe x y = |x| + |y|

λω: уровни лямбда термов

L1	L2	L3	L4
$\underbrace{(\lambda x : \alpha . x)}_{\text{term}}$:	$\underbrace{\alpha \to \alpha}_{\text{type/constructor}}$:	$\underbrace{*}_{\text{kind}}$:	$\square$
	$\underbrace{\lambda \beta : * . \beta \to \beta}_{\text{proper constructor}}$:	$\underbrace{* \to *}_{\text{kind}}$:	$\square$

λω: правила вывода

(ax/sort) $\vdash \star : \square$

(var) $$\frac{\Gamma \vdash A : s}{\Gamma, x : A \vdash x : A} \text{ if } x \notin \Gamma$$

(weak) $$\frac{\Gamma \vdash M : B \quad \Gamma \vdash A : s}{\Gamma, x : A \vdash M : B} \text{ if } x \notin \Gamma$$

(λ) $$\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B \quad \Gamma \vdash A \to B : s}{\Gamma \vdash \lambda x : A.M : A \to B}$$

(app) $$\frac{\Gamma \vdash M : A \to B \quad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash MN : B}$$

(conv_β) $$\frac{\Gamma \vdash M : A \quad \Gamma \vdash B : s^{\star \square}}{\Gamma \vdash M : B} \; A =_\beta B$$

(type/kind) $$\frac{\Gamma \vdash A : s \quad \Gamma \vdash B : s}{\Gamma \vdash A \to B : s}$$

λω: основные свойства

Теорема

В λω выразимо всё, что выразимо в просто типизированном лямбда исчислении.

Типы λω это расширенные многочлены.

Расширенные многочлены - это минимальный класс функций над N, который содержит:

- константные функции 0 и 1
- проекции
- сложения
- умножения
- ifzero (n,m,p) = if n == 0 then m else p

и замкнут относительно композиции

λω: основные свойства

Теорема

В λω выразимо всё, что выразимо в просто типизированном лямбда исчислении.

Типы λω это расширенные многочлены.

Расширенные многочлены - это минимальный класс функций над N, который содержит:

- константные функции 0 и 1
- проекции
- сложения
- умножения
- ifzero (n,m,p) = if n == 0 then m else p

и замкнут относительно композиции

$$\text{true} \equiv \lambda t f.\ t \quad : \alpha \to \beta \to \alpha$$

$$\text{false} \equiv \lambda t f.\ f \quad : \alpha \to \beta \to \beta$$

$\lambda 2$

$$\forall \alpha.\ \alpha \to \alpha \to \alpha \equiv \text{Bool}$$

(α)

(α)

$$\text{And} : \text{Bool} \to \text{Bool} \to \text{Bool}$$

$$\text{And} \equiv \Lambda\alpha.\lambda x^{\text{Bool}} y^{\text{Bool}}. \lambda t f.\ x\,(y\,.\,t f)\,f$$

$$\text{And}\ x\ y \equiv \Lambda\alpha.\ \lambda t^{\alpha} f^{\alpha}.\ x\alpha\,(y\alpha\ t f)\,f$$

$$\Lambda\alpha.\ \lambda t^{\alpha} f^{\alpha}.\ t$$

$$\Lambda\alpha.\ \lambda t^{\alpha} f^{\alpha}.\ f$$

$$\text{pair} \equiv \Lambda\alpha.\ \lambda x^{\sigma} y^{\tau} f^{\sigma \to \tau \to \alpha}.\ f x y$$

$$\sigma \times \tau \equiv \sigma \wedge \tau \equiv \forall \alpha.\ (\sigma \to \tau \to \alpha) \to \alpha$$

$$\text{pair}\ a\ b \equiv \Lambda\alpha.\ \lambda f^{\sigma \to \tau \to \alpha}.\ f a b \ :$$

$$\left(\sigma \to \tau \to \forall\alpha (\sigma \to \tau \to \alpha) \to \alpha\right)$$

MLTT

$$\text{Type} \equiv \forall \alpha.\ \underbrace{\tau_1 \to \tau_2 \to \ldots \to \tau_n}_{\text{арность типа}} \to \alpha$$

τ_i - конструктор

τ_i зависит от α, имеет α как минимум в самой правой позиции

$$\tau_i = \ldots \to \alpha$$

$$\bot \equiv \forall \alpha.\ \alpha$$

$$\top \equiv \forall \alpha.\ \alpha \to \alpha$$

$$\text{Bool} \equiv \forall \alpha.\ \alpha \to \alpha \to \alpha$$

$$\sigma \times \tau \equiv \forall \alpha.\ (\sigma \to \tau \to \alpha) \to \alpha$$

$$\sigma + \tau \equiv \forall \alpha.\ (\sigma \to \alpha) \to (\tau \to \alpha) \to \alpha$$

$$\text{List} \equiv \forall \alpha.\ \alpha \to (\sigma \to \alpha \to \alpha) \to \alpha$$

$$\text{pair} \equiv$$

Тип конструктора

$\text{Type} = \forall \alpha . \ \tau_1 \to \tau_2 \to \ldots \to \tau_n \to u$

$f_1, \ldots, f_n$ – конструкторы

Арность конструктора $\equiv$ арности τ

Тип i конструктора $\equiv \tau_i [\alpha := \text{Type}]$

$f_i = \lambda x$

$f_i \ x_1 x_2 = x_1 x \, x_2$

$f_i \ x_1 = \lambda \cancel{t} . \ \cancel{x_1} x \, t$

$f_i = \lambda t f . \ f x \, t$