

Прикладная теория типов

Домашнее задание 3 (полиморфное λ -исчисление, соответствие Карри-Ховарда)

2 ноября 2024 г.

Домашняя работа принимается до 23:59 1 декабря 2024, кроме задач, помеченных звёздочкой, которые принимаются до конца семестра. Решения "теоретических" задач можно набрать в TeX или написать разборчивым текстом на бумаге и отсканировать. Домашняя работа принимается в виде **двух** файлов (pdf и ml) на почту m.voronov@gse.cs.msu.ru. Вопросы по домашнему заданию можно задавать или по почте, в ТГ-группе курса или в личном сообщении в ТГ.

- (1 балл) Как много $\lambda 2$ контекстов существует для следующего списка деклараций: $\alpha : *, \beta : *, \gamma : *, f : \alpha \rightarrow \beta, g : \gamma \rightarrow \beta, x : \beta$. Приведите обоснование.
- (2 балла) Приведите вывод со всеми шагами во флаговой нотации, который показывает, что следующий терм возможен в $System F$:
 $M \equiv \Lambda \alpha \beta \gamma. \lambda f^{\alpha \rightarrow \beta} g^{\beta \rightarrow \gamma} x^{\alpha}. g(fx)$
- (6 баллов) Найдите тип α -ля Карри и α -ля Чёрч для следующих предтермов в $System F$:
 - $\lambda x. xxx$
 - $\lambda x. (xx)(xx)$
 - $S \equiv \lambda xyz. xz(yz)$
- (10 баллов) С помощью TLA+ найдите решение следующей задачи на переливание (взята [отсюда](#)):

В лабораторной печи находится котел, в котором бурлит 9 литров расплавленного олова. В процессе эксперимента нужно через равные промежутки времени трижды добавлять в эликсир по 3 литра олова. Как осуществить это, если в наличии только три огнеупорных кубка объемом 5, 4 и 2 литра? (То есть нужно иметь в какой-то момент 3 порции по 3 литра.)

- (6 баллов) Используя соответствие Карри-Ховарда и OCaml, докажите следующие логические утверждения пропозициональной логики
 - $A \vee B \implies B \vee A$
 - $(A \wedge B) \implies (D \vee C) \implies (D \implies F) \implies (C \implies G) \implies ((A \wedge F) \vee (B \wedge G))$
 - $((C \implies A) \wedge (C \implies B)) \implies (C \implies (A \wedge B))$
- (18 баллов) Используя соответствие Карри-Ховарда и OCaml, покажите, что (под $a \sim b$ понимается изоморфизм, т.е. наличие прямой $(a \implies b)$ и обратной $(b \implies a)$ импликаций)
 - $0^0 \sim 1$
 - $0^1 \sim 0$
 - $1^a \sim 1$
 - $a^{b+c} \sim a^b * a^c$
 - $(a^b)^c \sim a^{b*c}$
 - $SKK \sim I$, где S, K, I - соответствующие комбинаторы (аналогичное утверждение доказывалось в первой домашней работе в нетипизированном лямбда-исчислении)
- (6 баллов)* Покажите, что следующие термы не типизируемы в $System F$, где I, K - комбинаторы:
 - $(\lambda sz. s(sz))(\lambda sz. s(sz))K$
 - $(\lambda zy. y(zI)(zK))(\lambda x. xx)$

В $System F$ типизируются только нормализуемые термы (т.к. данная система типов является сильно нормализуемой), а данные термы представляют собой примеры нормализуемых термов, которые тем не менее не типизируются.

8. (4 баллов)* Существует ли предтерм, типизируемый а-ля Карри, но не типизируемый а-ля Чёрч в λ , λ_{\rightarrow} и в $System F$. Если нет, приведите обоснование, если да, то терм.
9. (4 баллов)* Существует ли предтерм, типизируемый а-ля Чёрч, но не типизируемый а-ля Карри в λ , λ_{\rightarrow} и в $System F$. Если нет, приведите обоснование, если да, то терм.