

Прикладная теория типов

Домашнее задание 1 (нетипизированное λ -исчисление)

15 сентября 2024 г.

Домашняя работа принимается до 23:59 6 октября 2024, кроме задач, помеченных звёздочкой, которые принимаются до конца семестра. Решения можно набрать в TeX или написать разборчивым текстом на бумаге и отсканировать. Домашняя работа принимается в виде **одного** pdf файла на почту m.voronov@gse.cs.msu.ru. Вопросы по домашнему заданию можно задавать или по почте, или в ТГ-группе курса.

1. (2 балла) Запишите приведённые термы в соответствии с (обще)принятыми правилами опускания скобок:

- $(\lambda x.(((xz)y)(xx)))$
- $((\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.(z((xy)z)))))(\lambda u.u))$

2. (3 балла) Для каждого из приведённых ниже термов определите, является ли он α -эквивалентным терму $\lambda x.x(\lambda x.x)$, если не является, то почему?

- $\lambda y.y(\lambda x.x)$
- $\lambda y.y(\lambda x.y)$
- $\lambda y.y(\lambda y.x)$

3. (5 баллов) Выделите свободные и связанные переменные в термах и выполните указанные подстановки:

- $(\lambda y p.x y w(p x))[x := \lambda w.y w]$
- $((x y z)[x := y])[y := z]$
- $((\lambda x.x y z)[x := y])[y := z]$
- $(\lambda y.y y x)[x := y z]$
- $(x y(\lambda x z, x y z) y)[y := x z]$

4. (10 баллов) Покажите, расписывая все шаги преобразований с их названиями, что $\forall P, Q, R \in \Lambda :$

- $SKK \rightarrow_{\beta} I$
- $KPQ \rightarrow_{\beta} P$
- $SPQR \rightarrow_{\beta} PR(QR)$
- $(S(KS)K)PQR \rightarrow_{\beta} P(QR)$
- $* SSSKK =_{\beta} SKKK$

5. (2 балла) Приведите пример замкнутого λ -терма, находящегося в

- в слабой головной нормальной форме, но не в головной нормальной форме;
- в головной нормальной форме, но не в нормальной форме.

6. (4 балла) Пусть задан список натуральных чисел с помощью списка пар *pair*, где конец списка определяется с помощью терма *nil*:

- $pair = \lambda x y f.f x y$
- $nil = \lambda f.true$

Постройте терм *fold*, который бы суммировал числа в списке, например:

- $fold\ nil = 0$
- $fold\ (pair\ 1\ nil) = 1$

- $fold(pair\ 1\ (pair\ 2\ (pair\ 3\ nil))) = 6$

- (4 балла) Постройте терм $isPrime$, принимающий число в кодировке Чёрча и возвращающий $true$, если число простое, и $false$ в противном случае.
- (2 балла) Покажите, что данное утверждение не всегда верно:

$$M[x := N, y := L] = M[x := N][y := L];$$

Здесь запись $M[x := N, y := L]$ означает, что подстановка x и y в терм M происходит одновременно, т.е. все свободные x и y заменяются вместе за один шаг.

- (2 баллов) Докажите, что если MN сильно нормализуемо, то M и N сильно нормализуемо.
- (2 балл) Покажите, что хотя для комбинатора неподвижной точки Карри Y выполняется $YF =_{\beta} F(YF)$, но при этом неверно ни $YF \rightarrow_{\beta} F(YF)$, ни $F(YF) \rightarrow_{\beta} YF$
- (6 баллов) Постройте термы M такие, что
 - $M =_{\beta} \lambda xy.xMx$
 - $Mxyz =_{\beta} xyzM$
- (6 баллов) Постройте функции (можно считать, что задан терм $pred$):

- **minus**, вычитающую числа в кодировке Чёрча (можно считать, что в выражении " $minus\ a\ b$ " всегда $a \geq b$);
- **equals**, сравнивающую числа в кодировке Чёрча;
- **lt**, реализующую операцию $<$ для чисел в кодировке Чёрча;
- **gt**, реализующую операцию $>$ для чисел в кодировке Чёрча;
- **leq**, реализующую операцию \leq для чисел в кодировке Чёрча;
- **geq**, реализующую операцию \geq для чисел в кодировке Чёрча;

- (2 балла) Пусть $U := \lambda zx.x(zzx)$ и $Z := UU$, докажите, что Z - это комбинатор неподвижной точки, т.е. ZM является неподвижной точкой для любого λ -терма M : $M(ZM) = ZM$. Более того, покажите, что выполняется $ZM \rightarrow_{\beta} M(ZM)$
- (5 баллов)* Задайте терм $pred$:

$$pred\ n = \begin{cases} n - 1, & n > 0 \\ 0, & n == 0 \end{cases}$$

и приведите объяснение, почему именно он имеет такой вид.

- (4 балла)* Реализуйте функцию возведения в степень для чисел в кодировке Чёрча. Проверьте её работоспособность со всеми преобразованиями для $0^2, 1^2, 2^2$.