

# Прикладная теория типов

## Домашнее задание 1 (нетипизированное $\lambda$ -исчисление)

6 сентября 2025 г.

Домашняя работа принимается до 23:59 6 октября 2025, кроме задач, помеченных звёздочкой, которые принимаются до конца семестра. Решения можно набрать в TeX или написать разборчивым текстом на бумаге и отсканировать. Домашняя работа принимается в виде **одного** PDF-файла на почту [m.voronov@gse.cs.msu.ru](mailto:m.voronov@gse.cs.msu.ru). Вопросы по домашнему заданию можно задавать или по почте, или в ТГ-группе курса.

1. (2 балла) Запишите приведённые термы в соответствии с (обще)принятыми правилами опускания скобок:

- $(\lambda x.(((xz)y)(xx)))$
- $((\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.(z((xy)z)))))(\lambda u.u))$

2. (3 балла) Для каждого из приведённых ниже термов определите, является ли он  $\alpha$ -эквивалентным терму  $\lambda x.x(\lambda x.x)$ , если не является, то почему?

- $\lambda y.y(\lambda x.x)$
- $\lambda y.y(\lambda x.y)$
- $\lambda y.y(\lambda y.x)$

3. (5 баллов) Выделите свободные и связанные переменные в термах и выполните указанные подстановки:

- $(\lambda y p.x y w(p x))[x := \lambda w.y w]$
- $((x y z)[x := y])[y := z]$
- $((\lambda x.x y z)[x := y])[y := z]$
- $(\lambda y.y y x)[x := y z]$
- $(x y(\lambda x z, x y z) y)[y := x z]$

4. (10 баллов) Покажите, расписывая все шаги  $\alpha$ ,  $\beta$  преобразований, что  $\forall P, Q, R \in \Lambda :$

- $S K K \rightarrow_{\beta} I$
- $K P Q \rightarrow_{\beta} P$
- $S P Q R \rightarrow_{\beta} P R(Q R)$
- $(S(K S) K) P Q R \rightarrow_{\beta} P(Q R)$
- $* S S S K K =_{\beta} S K K K$

5. (2 балла) Приведите пример замкнутого  $\lambda$ -терма, находящегося в

- в слабой головной нормальной форме, но не в головной нормальной форме;
- в головной нормальной форме, но не в нормальной форме.

6. (4 балла) Пусть задан список натуральных чисел с помощью списка пар *pair*, где конец списка определяется с помощью терма *nil*:

- $pair = \lambda x y f.f x y$
- $nil = \lambda f.true$

Постройте терм *fold*, который бы суммировал числа в списке, например:

- $fold\ nil = 0$
- $fold\ (pair\ 1\ nil) = 1$
- $fold\ (pair\ 1\ (pair\ 2\ (pair\ 3\ nil))) = 6$

7. (4 балла) Постройте терм *isPrime*, принимающий число в кодировке Чёрча и возвращающий *true*, если число простое, и *false* в противном случае.
8. (2 балла) Покажите, что данное утверждение не всегда верно:

$$M[x := N, y := L] = M[x := N][y := L];$$

Здесь запись  $M[x := N, y := L]$  означает, что подстановка  $x$  и  $y$  в терм  $M$  происходит одновременно, т.е. все свободные  $x$  и  $y$  заменяются вместе за один шаг.

9. (2 балла) Докажите, что если  $MN$  сильно нормализуемо, то  $M$  и  $N$  сильно нормализуемо.
10. (2 балла) Покажите, что хотя для комбинатора неподвижной точки Карри  $Y$  выполняется  $YF =_\beta F(YF)$ , но при этом неверно ни  $YF \twoheadrightarrow_\beta F(YF)$ , ни  $F(YF) \twoheadrightarrow_\beta YF$
11. (2 баллов) Постройте термы  $M$  такие, что
- $M =_\beta \lambda xy. xMx$
  - $Mxyz =_\beta xyzM$
12. (6 баллов) Постройте функции (можно считать, что задан терм *pred*):

- **minus**, вычитающую числа в кодировке Чёрча (можно считать, что в выражении **minus a b** всегда  $a \geq b$ );
- **equals**, сравнивающую числа в кодировке Чёрча;
- **lt**, реализующую операцию  $<$  для чисел в кодировке Чёрча;
- **gt**, реализующую операцию  $>$  для чисел в кодировке Чёрча;
- **min**, возвращающую минимум двух чисел в кодировке Чёрча;
- **max**, возвращающую максимум двух чисел в кодировке Чёрча.

13. (2 балла) Пусть  $U := \lambda zx. x(zzx)$  и  $Z := UU$ , докажите, что  $Z$  - это комбинатор неподвижной точки, т.е.  $ZM$  является неподвижной точкой для любого  $\lambda$ -терма  $M$ :  $M(ZM) = ZM$ . Более того, покажите, что выполняется  $ZM \twoheadrightarrow_\beta M(ZM)$
14. Опишите словами и понятиями, понятными семилетнему ребёнку:
- (3 балла) теорему Чёрча-Россера и основные следствия из неё;
  - (4 балла) что такое неподвижная точка функции и  $Y$ -комбинатор в  $\lambda$ -исчислении, приведите бытовую аналогию его применения.
15. (5 баллов)\* Задайте терм *pred*:

$$\text{pred } n = \begin{cases} n - 1, & n > 0 \\ 0, & n == 0 \end{cases}$$

и приведите объяснение, почему именно он имеет такой вид.

16. (6 баллов)\* Определите трансляцию  $\text{db} : \Lambda \rightarrow \Lambda_{\text{db}}$  в нотацию де Брейна и обратную  $\text{undb}$ . Докажите:  $M =_\alpha N \iff \text{db}(M) = \text{db}(N)$ . Используйте эти две взаимно обратные функции и  $\alpha$ -инвариантность. Формально,  $\lambda$ -термы  $(M, N, \dots)$ , записанные с использованием индексов де Брейна, имеют следующую синтаксическую форму:

$$M, N, \dots ::= n \mid MN \mid \lambda M$$

где  $n$  — натуральные числа, большие 0, — это переменные. Переменная  $n$  является связанной, если она находится в области действия как минимум  $n$  связываний ( $\lambda$ ); иначе она свободна. Место связывания переменной  $n$  — это  $n$ -е связывание, в области действия которого она находится, считая от самого внутреннего.

Примеры (1-based индексация):

- $K \equiv \lambda xy. x \mapsto \lambda \lambda 2$ .

- $S \equiv \lambda x y z. x z (y z) \mapsto \lambda \lambda \lambda 3 1 (2 1).$
- $\lambda z. (\lambda y. y (\lambda x. x)) (\lambda x. z x) \mapsto \lambda (\lambda 1 (\lambda 1)) (\lambda 2 1).$

17. (6 баллов)\* Дерево Бёма. Для каждой пары ниже нарисуйте первые три уровня дерева Бёма и кратко объясните различия:

- $(\lambda x. x)(\lambda x. x)$  и  $(\lambda x. x x)(\lambda x. x x);$
- $I \equiv \lambda x. x$  и  $K I \equiv (\lambda x y. x)(\lambda z. z);$
- $\lambda x y. x y$  и  $\lambda x y. x (x y).$

Дерево Бёма терма  $M$  (обозначение  $BT(M)$ ) строится по  $\beta$ -эквивалентности. Если у  $M$  нет головной нормальной формы, то  $BT(M) = \perp$ . Если  $M \rightarrow_{\beta} \lambda x_1 \dots x_n. y M_1 \dots M_k$  (ГНФ), то корень помечается  $\lambda x_1 \dots x_n. y$ , а у него  $k$  поддеревьев:  $BT(M_1), \dots, BT(M_k)$ . Уровни считаются по глубине от корня.