Прикладная теория типов

Домашнее задание 1 (нетипизированное λ-исчисление)

6 сентября 2025 г.

Домашняя работа принимается до 23:59 6 октября 2025, кроме задач, помеченных звёздочкой, которые принимаются до конца семестра. Решения можно набрать в TeX или написать разборчивым текстом на бумаге и отсканировать. Домашняя работа принимается в виде **одного** PDF-файла на почту m.voronov@gse.cs.msu.ru. Вопросы по домашнему заданию можно задавать или по почте, или в ТГ-группе курса.

1. (2 балла) Запишите приведённые термы в соответствии с (обще)принятыми правилами опускания скобок:
   - $(\lambda x.(((xz)y)(xx)))$
   - $((\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.(z((xy)z)))))(\lambda u.u))$
2. (3 балла) Для каждого из приведённых ниже термов определите, является ли он α-эквивалентным терму $\lambda x.x(\lambda x.x)$, если не является, то почему?
   - $\lambda y.y(\lambda x.x)$
   - $\lambda y.y(\lambda x.y)$
   - $\lambda y.y(\lambda y.x)$
3. (5 баллов) Выделите свободные и связанные переменные в термах и выполните указанные подстановки:
   - $(\lambda yp.xyw(px))[x := \lambda w.yw]$
   - $((xyz)[x := y])[y := z]$
   - $((\lambda x.xyz)[x := y])[y := z]$
   - $(\lambda y.yyx)[x := yz]$
   - $(xy(\lambda xz, xyz)y)[y := xz]$
4. (10 баллов) Покажите, расписывая все шаги α, β преобразований, что $\forall P, Q, R \in \Lambda:$
   - $SKK \twoheadrightarrow_\beta I$
   - $KPQ \twoheadrightarrow_\beta P$
   - $SPQR \twoheadrightarrow_\beta PR(QR)$
   - $(S(KS)K)PQR \twoheadrightarrow_\beta P(QR)$
   - * $SSSKK =_\beta SKKK$
5. (2 балла) Приведите пример замкнутого λ-терма, находящегося в
   - в слабой головной нормальной форме, но не в головной нормальной форме;
   - в головной нормальной форме, но не в нормальной форме.
6. (4 балла) Пусть задан список натуральных чисел с помощью списка пар $pair$, где конец списка определяется с помощью терма nil:
   - $pair = \lambda xyf.fxy$
   - $nil = \lambda f.true$

   Постройте терм $fold$, который бы суммировал числа в списке, например:
   - $fold\, nil = 0$
   - $fold\, (pair\, 1\, nil) = 1$
   - $fold\, (pair\, 1\, (pair\, 2\, (pair\, 3\, nil))) = 6$

7. (4 балла) Постройте терм $isPrime$, принимающий число в кодировке Чёрча и возвращающий $true$, если число простое, и $false$ в противном случае.

8. (2 балла) Покажите, что данное утверждение не всегда верно:

$$M[x := N, y := L] = M[x := N][y := L];$$

Здесь запись $M[x := N, y := L]$ означает, что подстановка x и y в терм M происходит одновременно, т.е. все свободные x и y заменяются вместе за один шаг.

9. (2 балла) Докажите, что если MN сильно нормализуемо, то M и N сильно нормализуемо.

10. (2 балла) Покажите, что хотя для комбинатора неподвижной точки Карри Y выполняется $YF =_\beta F(YF)$, но при этом неверно ни $YF \twoheadrightarrow_\beta F(YF)$, ни $F(YF) \twoheadrightarrow_\beta YF$

11. (6 баллов) Постройте термы M такие, что
    - $M =_\beta \lambda xy.xMx$
    - $Mxyz =_\beta xyzM$

12. (6 баллов) Постройте функции (можно считать, что задан терм $pred$):
    - **minus**, вычитающую числа в кодировке Чёрча (можно считать, что в выражении `minus a b` всегда $a \geq b$);
    - **equals**, сравнивающую числа в кодировке Чёрча;
    - **lt**, реализующую операцию $<$ для чисел в кодировке Чёрча;
    - **gt**, реализующую операцию $>$ для чисел в кодировке Чёрча;
    - **min**, возвращающую минимум двух чисел в кодировке Чёрча;
    - **max**, возвращающую максимум двух чисел в кодировке Чёрча.

13. (2 балла) Пусть $U := \lambda zx.x(zzx)$ и $Z := UU$, докажите, что Z - это комбинатор неподвижной точки, т.е. ZM является неподвижной точкой для любого λ-терма M: $M(ZM) = ZM$. Более того, покажите, что выполняется $ZM \twoheadrightarrow_\beta M(ZM)$

14. Опишите словами и понятиями, понятными семилетнему ребёнку,
    - (3 балла) теорему Чёрча-Россера и основные следствия из неё;
    - (4 балла) что такое неподвижная точка функции и Y-комбинатор в λ-исчислении, приведите бытовую аналогию его применения.

15. (5 баллов)* Задайте терм $pred$:

$$pred\, n = \begin{cases} n-1, & n > 0 \\ 0, & n == 0 \end{cases}$$

и приведите объяснение, почему именно он имеет такой вид.

16. (6 баллов)* Определите трансляцию $\mathrm{db} : \Lambda \to \Lambda_{\mathrm{db}}$ в нотацию де Брейна и обратную undb. Докажите: $M =_\alpha N \iff \mathrm{db}(M) = \mathrm{db}(N)$. Используйте эти две взаимно обратные функции и α-инвариантность.

Формально, λ-термы $(M, N, \ldots)$, записанные с использованием индексов де Брейна, имеют следующую синтаксическую форму:

$$M, N, \ldots ::= n \mid M\, N \mid \lambda\, M$$

где n — натуральные числа, большие 0, — это переменные. Переменная n является связанной, если она находится в области действия как минимум n связываний (λ); иначе она свободна. Место связывания переменной n — это n-е связывание, в области действия которого она находится, считая от самого внутреннего.

Примеры (1-based индексация):

- $\mathrm{K} \equiv \lambda xy.\, x \;\mapsto\; \lambda\,\lambda\, 2.$

- $\mathrm{S} \equiv \lambda xyz.\, x\, z\, (y\, z) \;\mapsto\; \lambda\, \lambda\, \lambda\, 3\, 1\, (2\, 1)$.
- $\lambda z.(\lambda y.\, y\, (\lambda x.\, x))\, (\lambda x.\, z\, x) \;\mapsto\; \lambda\, (\lambda\, 1\, (\lambda\, 1))\, (\lambda\, 2\, 1)$.

17. (6 баллов)* Дерево Бёма. Для каждой пары ниже нарисуйте первые три уровня дерева Бёма и кратко объясните различия:

    - $(\lambda x.\, x)(\lambda x.\, x)$ и $(\lambda x.\, x\, x)(\lambda x.\, x\, x)$;
    - $I \equiv \lambda x.\, x$ и $K\, I \equiv (\lambda xy.\, x)(\lambda z.\, z)$;
    - $\lambda xy.\, x\, y$ и $\lambda xy.\, x\, (x\, y)$.

    Дерево Бёма терма M (обозначение $BT(M)$) строится по β-эквивалентности. Если у M нет головной нормальной формы, то $BT(M) = \bot$. Если $M \twoheadrightarrow_\beta \lambda x_1 \ldots x_n.\, y\, M_1 \ldots M_k$ (ГНФ), то корень помечается $\lambda x_1 \ldots x_n.\, y$, а у него k поддеревьев: $BT(M_1), \ldots, BT(M_k)$. Уровни считаются по глубине от корня.