

ÁLGEBRA LINEAL:

TEORÍA, INTUICIÓN, PROGRAMACIÓN

Escrito por Mike X Cohen
Traducción de Diana Llorente

Esta página contiene algunos detalles importantes sobre el libro que, aunque normalmente nadie lee, por alguna extraña razón siempre están al principio.

0.1 Créditos

© 2021 Michael X Cohen sobre el texto original

© 2024 Diana Llorente sobre la traducción al español

Todos los derechos reservados. Queda rigurosamente prohibida la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, sea electrónico o mecánico. Esto incluye la realización de fotocopias, grabación o cualquier otro sistema de almacenamiento y recuperación de información sin el permiso por escrito del autor, excepto en los casos permitidos por la ley.

ISBN: 9798333398703

Este libro está escrito y formateado en LaTeX por Mike X Cohen. (Mike X Cohen es la versión más simpática del profesor universitario Dr. Michael X Cohen; Michael gestiona los aspectos legales y económicos mientras Mike se divierte escribiendo).

La traducción al español es de Diana Llorente, que de pequeña estaba fascinada por los libros de paradojas matemáticas de M. Gardner. Ahora, con una licenciatura en físicas y conocimientos de álgebra, análisis matemático y estadística, traduce libros de matemáticas; este es el cuarto.

Mike y Diana han colaborado a lo largo de un año para que esta traducción al español sea igual de rigurosa matemáticamente que la versión original sin perder el tono relajado y ameno del autor.

Primera edición

0.2 Dedicatoria

Si estás leyendo estas líneas, es porque el libro está dedicado a ti. He escrito este libro para *ti*. ¡Ahora pasa la página y empieza a aprender matemáticas!

Índice de contenidos

0.1	Créditos	2
0.2	Dedicatoria	2
1	Introducción	11
1.1	¿Qué es el álgebra lineal y por qué estudiarla?	12
1.2	Sobre este libro	13
1.3	Requisitos previos	16
1.4	Ejercicios y retos de programación	18
1.5	Internet y otros recursos	19
2	Vectores	21
2.1	Escalares	22
2.2	Vectores: Geometría y álgebra	23
2.3	Operación de trasposición	30
2.4	Suma y resta de vectores	31
2.5	Multiplicación de un vector por un escalar	34
2.6	Ejercicios	38
2.7	Respuestas	40
2.8	Retos de programación	42
2.9	Soluciones de programación	43
3	Multiplicación de vectores	45
3.1	Producto escalar de vectores: álgebra	46
3.2	Propiedades del producto escalar	48
3.3	Producto escalar de vectores: geometría	53
3.4	Álgebra y geometría	56
3.5	Combinación lineal de vectores	60
3.6	Producto exterior	62
3.7	Producto de Hadamard	65
3.8	Producto vectorial	67
3.9	Vectores unitarios	68
3.10	Ejercicios	71

3.11	Respuestas	74
3.12	Retos de programación	76
3.13	Soluciones de programación	77
4	Espacios vectoriales	79
4.1	Dimensiones y campos en el álgebra lineal	80
4.2	Espacios vectoriales	82
4.3	Subespacios y espacios ambiente	83
4.4	Subconjuntos	90
4.5	Espacios generados	91
4.6	Independencia lineal	95
4.7	Bases	103
4.8	Ejercicios	108
4.9	Respuestas	111
5	Matrices	113
5.1	Interpretaciones de las matrices	114
5.2	Nomenclatura y notación de las matrices	115
5.3	Dimensiones de las matrices	116
5.4	Trasposición	117
5.5	Zoología de las matrices	119
5.6	Suma y resta de matrices	132
5.7	Multiplicación de una matriz por un escalar	133
5.8	"Inflar" una matriz	134
5.9	Diagonal y traza	136
5.10	Ejercicios	139
5.11	Respuestas	142
5.12	Retos de programación	144
5.13	Soluciones de programación	145
6	Multiplicación de matrices	147
6.1	Multiplicación de matrices "estándar"	148
6.2	Multiplicación y ecuaciones	156
6.3	Multiplicación por una matriz diagonal	159
6.4	ATAR a la RATA	160
6.5	Multiplicación de una matriz por un vector	163
6.6	Creación de matrices simétricas	166
6.7	Multiplicación de matrices simétricas	169
6.8	Producto de Hadamard	171
6.9	Producto escalar de Frobenius	173

6.10	Normas de las matrices	176
6.11	Índice de asimetría de una matriz	179
6.12	¿Y la división de matrices?	183
6.13	Ejercicios	184
6.14	Respuestas	187
6.15	Retos de programación	189
6.16	Soluciones de programación	190
7	Rango de matrices	193
7.1	Seis cosas importantes sobre el rango	194
7.2	Interpretaciones del rango	196
7.3	Cálculo del rango	198
7.4	Rango y multiplicación por un escalar	199
7.5	Rango de la suma de matrices	201
7.6	Rango de la multiplicación de matrices	203
7.7	Rango de \mathbf{A} , \mathbf{A}^T , $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$	205
7.8	Rango de matrices aleatorias	208
7.9	Aumentar el rango "inflando" la matriz	209
7.10	Dificultades con el rango	212
7.11	Rango y espacio generado	214
7.12	Ejercicios	216
7.13	Respuestas	217
7.14	Retos de programación	218
7.15	Soluciones de programación	219
8	Espacios matriciales	221
8.1	Espacio columna de una matriz	222
8.2	Espacio columna: \mathbf{A} y $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$	225
8.3	Cómo saber si $\mathbf{v} \in \text{Col}(\mathbf{A})$	226
8.4	Espacio fila de una matriz	229
8.5	Espacios fila de \mathbf{A} y $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$	230
8.6	Núcleo o espacio nulo de una matriz	231
8.7	Geometría del espacio nulo	236
8.8	Subespacios ortogonales	238
8.9	Ortogonalidades de los espacios matriciales	241
8.10	Dimensión de los espacios matriciales	245
8.11	Más cosas sobre $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{0}$	247
8.12	Ejercicios	250
8.13	Respuestas	252

8.14	Retos de programación	254
8.15	Soluciones de programación	255
9	Los números complejos en el álgebra lineal	257
9.1	Los números complejos y \mathbb{C}	258
9.2	¿Qué son los números complejos?	259
9.3	Conjugado de un número complejo	262
9.4	Aritmética de los números complejos	265
9.5	Producto escalar de vectores complejos	267
9.6	Matrices complejas especiales	270
9.7	Ejercicios	272
9.8	Respuestas	273
9.9	Retos de programación	274
9.10	Soluciones de programación	275
10	Sistemas de ecuaciones	277
10.1	Álgebra y geometría de las ecuaciones	278
10.2	De sistemas a matrices	282
10.3	Reducción por filas	287
10.4	Eliminación gaussiana	298
10.5	Forma escalonada reducida por filas	301
10.6	Eliminación de Gauss-Jordan	304
10.7	Número de soluciones de los sistemas	305
10.8	Espacios matriciales, reducción por filas	308
10.9	Ejercicios	312
10.10	Respuestas	314
10.11	Retos de programación	315
10.12	Soluciones de programación	316
11	Determinante de matrices	317
11.1	Características de los determinantes	318
11.2	Determinante de una matriz 2×2	319
11.3	Polinomio característico	321
11.4	Determinante de una matriz 3×3	324
11.5	Procedimiento completo	327
11.6	Determinante de una matriz triangular	329
11.7	Determinante y reducción por filas	331
11.8	Determinante y multiplicación de matriz por escalar	336
11.9	Teoría vs. práctica	337
11.10	Ejercicios	339

11.11 Respuestas	340
11.12 Retos de programación	341
11.13 Soluciones de programación	343
12 La matriz inversa	345
12.1 Conceptos y aplicaciones	346
12.2 Inversa de una matriz diagonal	351
12.3 Inversa de una matriz 2×2	353
12.4 El algoritmo MCAI	355
12.5 Inversa mediante reducción por filas	361
12.6 Inversa por la izquierda	365
12.7 Inversa por la derecha	368
12.8 La pseudoinversa, parte 1	372
12.9 Ejercicios	375
12.10 Respuestas	377
12.11 Retos de programación	379
12.12 Soluciones de programación	380
13 Proyección y ortogonalización	383
13.1 Proyecciones en \mathbb{R}^2	384
13.2 Proyecciones en \mathbb{R}^n	388
13.3 Componentes paralelo y ortogonal	392
13.4 Matrices ortogonales	397
13.5 Ortogonalización de Gram-Schmidt	401
13.6 Factorización QR	405
13.7 Cálculo de la inversa mediante factorización QR	409
13.8 Ejercicios	411
13.9 Respuestas	412
13.10 Retos de programación	413
13.11 Soluciones de programación	414
14 Mínimos cuadrados	417
14.1 Introducción	418
14.2 Los cinco pasos del ajuste de modelos	420
14.3 Terminología	422
14.4 Mínimos cuadrados mediante inversa	423
14.5 Mínimos cuadrados por proyección	425
14.6 Mínimos cuad. por reducción por filas	427
14.7 Predicciones y residuales	430
14.8 Ejemplo de mínimos cuadrados	431

14.9 Retos de programación	439
14.10 Soluciones de programación	441
15 Descomposición en valores y vectores propios	445
15.1 Valores y vectores propios	446
15.2 Cómo hallar los valores propios	451
15.3 Cómo hallar los vectores propios	457
15.4 Diagonalización	461
15.5 Condiciones para poder diagonalizar	465
15.6 Valores propios distintos vs. repetidos	466
15.7 Soluciones complejas	473
15.8 Matrices simétricas	474
15.9 Valores propios de las matrices singulares	478
15.10 "Capas propias" de una matriz	481
15.11 Potencias de matrices e inversa	484
15.12 Problema generalizado	488
15.13 Ejercicios	491
15.14 Respuestas	492
15.15 Retos de programación	493
15.16 Soluciones de programación	494
16 Descomposición en valores singulares	499
16.1 Descomposición en valores singulares	500
16.2 Cálculo de la DVS	502
16.3 Valores singulares vs. valores propios	506
16.4 DVS de una matriz simétrica	510
16.5 La DVS y los cuatro subespacios	511
16.6 DVS y rango de las matrices	514
16.7 Teoría espectral de la DVS	517
16.8 Aproximaciones de bajo rango	521
16.9 Normalización de valores singulares	524
16.10 Condicionamiento de una matriz	527
16.11 DVS y matriz inversa	529
16.12 Pseudoinversa de MP, parte 2	530
16.13 Retos de programación	534
16.14 Soluciones de programación	538
17 Formas cuadráticas y definitud	553
17.1 Enfoque algebraico	554
17.2 Enfoque geométrico	559

17.3	Forma cuadrática normalizada	563
17.4	Vectores propios y superficie de la forma cuadrática .	567
17.5	Definitud, geometría y valores propios	570
17.6	La matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$	572
17.7	Relación con las λ	574
17.8	Retos de programación	577
17.9	Soluciones de programación	578
18	Matrices de datos y covarianzas	583
18.1	Correlación	584
18.2	Varianza y desviación típica	586
18.3	Covarianza	587
18.4	Coefficiente de correlación	589
18.5	Matrices de covarianzas	591
18.6	De correlación a covarianza	592
18.7	Retos de programación	594
18.8	Soluciones de programación	595
19	Análisis de componentes principales	597
19.1	Interpretaciones y aplicaciones del ACP	598
19.2	Cómo hacer un ACP	601
19.3	Álgebra del ACP	604
19.4	Regularización	606
19.5	¿Es el ACP siempre lo más adecuado?	609
19.6	Retos de programación	611
19.7	Soluciones de programación	613
20	¿Y ahora qué?	617
20.1	El final...¡del principio!	618
20.2	¡Gracias!	619

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1

¿Qué es el álgebra lineal y por qué estudiarla?

HECHO:
¡¡El álgebra lineal es
superimportante!!

El álgebra lineal es la rama de las matemáticas que trata de los vectores y las matrices, sus combinaciones lineales y operaciones. El álgebra lineal tiene una larga historia como parte de las matemáticas puras. Esto es, en parte, porque proporciona una notación compacta, potente y suficientemente general como para usarla en geometría, análisis matemático, ecuaciones diferenciales, física, economía y muchas otras áreas.

Pero la importancia y el uso del álgebra lineal están aumentando rápidamente en las aplicaciones modernas. Muchas áreas de la ciencia, tecnología, finanzas y medicina se encaminan hacia la recogida y el análisis de datos a gran escala. A menudo, los datos se almacenan en matrices y el tratamiento de estos datos (desde estadísticas hasta gráficos por computadora, pasando por el filtrado y compresión de los datos o el aprendizaje automático) normalmente requiere del álgebra lineal. De hecho, esta materia probablemente ha superado a la estadística y al análisis de series temporales como la rama de las matemáticas que es más importante dominar en las áreas de la ciencia y la industria centradas en los datos.

La civilización se mueve hacia una digitalización cada vez mayor, que cada vez emplea más datos y métodos cuantitativos. Por tanto, cada vez es más importante conocer las materias sobre las que se apoyan, como el álgebra lineal. Podríamos (de hecho, *deberíamos*) cuestionarnos si la tendencia hacia los "macrodatos", y nuestra excesiva dependencia de los algoritmos para la toma de decisiones, es adecuada y útil. Pero es indiscutible que actualmente, en cualquier trabajo relacionado con datos, sea del ámbito académico como en la empresa privada, resulta esencial estar familiarizado con el análisis de matrices, la estadística y los métodos multivariados.

1.2

Sobre este libro

El objetivo de este libro es enseñarte cómo pensar y trabajar con matrices, enfocándonos en sus aplicaciones para el aprendizaje automático, la estadística multivariada, las series temporales y el procesamiento de imágenes. Si te interesa la ciencia de datos, la biología cuantitativa, la estadística, el aprendizaje automático o la inteligencia artificial, este libro es para ti. Y, si todavía no tienes muchos conocimientos de matemáticas, no te preocupes: para aprender álgebra lineal con este libro, solo necesitarás saber matemáticas a nivel de secundaria y algo de dedicación.

He escrito este libro pensando en aquellas personas que quieren aprender de forma independiente. Mucha gente no se da cuenta de lo importante que es el álgebra lineal hasta después de acabar la universidad, o quizá no cumplan con los requisitos para poder estudiar álgebra lineal a nivel universitario. A menudo, los libros de álgebra lineal se utilizan como complemento para seguir las clases de una asignatura impartida por un profesor de forma tradicional y puede resultar difícil usarlos por tu cuenta. Espero que este libro sea un recurso completo y exhaustivo, útil tanto para acompañar a una asignatura formal como para su estudio independiente.

Muchos de los libros de texto existentes están orientados a la teoría y ponen más énfasis en los conceptos abstractos que en las aplicaciones prácticas. Quizá te hayas encontrado con este tipo de libros: no dan ejemplos numéricos y prefieren las generalizaciones; las demostraciones importantes se dejan como "ejercicio para el lector", los enunciados matemáticos se mencionan sin comentar su relevancia, importancia o aplicaciones; y no se indica si las operaciones pueden realizarse con una computadora (ni cómo).

No escribo estos comentarios como crítica, el álgebra lineal es una materia muy interesante, al igual que los espacios vectoriales de infinitas dimensiones. Pero quienes estén interesados en usar el álgebra lineal (y en general las matemáticas) como una herramienta para entender los datos, generar estadísticas, utilizarlos en deep learning, etc., el tratamiento abstracto del álgebra lineal podría

parecerles una frustrante pérdida de tiempo. Mi objetivo es presentarte el álgebra lineal de una forma accesible y comprensible, sin entrar mucho en conceptos abstractos que no estén relacionados de forma directa con aplicaciones.

Versión de ebook La versión digital de este libro es idéntica a la del libro en papel en cuanto a texto, fórmulas, imágenes y líneas de código. No obstante, el formato es (inevitablemente) bastante diferente. Este libro se ha diseñado para publicarse como un libro *físico*, por lo que los márgenes, fuentes, texto y posición de las figuras, así como las líneas de código, están optimizados para páginas en papel, no para lectores de libros electrónicos.

Por tanto, si puedes, te recomiendo que compres el libro en papel. Y si te decides por el libro electrónico, te pido de antemano disculpas por los formatos extraños que te puedas encontrar. Si tienes alguna dificultad para leer las líneas de código, te las puedes descargar en github.com/mikexcohen/LinAlgBook.

Ecuaciones Este es un libro de matemáticas, así que cabe esperar encontrarse ecuaciones. Pero las matemáticas no son solo ecuaciones: en mi opinión, el objetivo de las matemáticas es comprender conceptos. Las ecuaciones son una forma de presentar estos conceptos, pero las palabras, imágenes y programación también son importantes. Hay que intentar encontrar un equilibrio entre lo siguiente:

1. Las ecuaciones proporcionan rigor y formalismo, pero pocas veces son intuitivas.
2. Las descripciones, analogías, visualizaciones y líneas de código son intuitivos, pero muchas veces no tienen suficiente rigor.

Este equilibrio es el que intento conseguir: las ecuaciones no sirven para nada si no van acompañadas de descripciones y visualizaciones, pero las palabras y las imágenes sin ecuaciones pueden quedar incompletas o interpretarse de forma incorrecta.

Así que: sí, el libro contiene una cantidad respetable de ecuaciones. Las encontrarás con una *jerarquía* de tres niveles. Algunas son simples recordatorios de otras ya estudiadas anteriormente; son las de menor importancia y se escriben en línea con el texto: $x(yz) = (xy)z$.

Otras ecuaciones son más importantes y se separan en una línea independiente. Los números entre paréntesis de la derecha sirven para poder referenciar esa ecuación más adelante (el número delante del punto indica el capítulo, mientras que el posterior es el correspondiente a esa ecuación concreta).

$$\sigma = x(yz) = (xy)z \quad (1.1)$$

Finalmente, las ecuaciones más importantes, las que tienes que asegurarte de entender y de saber usar y escribir bien, se presentan dentro de un recuadro con un título:

¡Esto es importante!

$$\sigma = x(yz) = (xy)z \quad (1.2)$$

Bloque de código 1.1. Python

```
1 import numpy as np
2 v1 = np.array([2, 5, 4, 7])
3 v2 = np.array([4, 1, 0, 2])
4 v3 = 4*v1 - 2*v2
```

Enfoque algebraico y geométrico de las matrices En el álgebra lineal, muchos conceptos pueden formularse utilizando tanto métodos geométricos como algebraicos (analíticos). Este dualismo permite una mejor comprensión, así que intento utilizarlo a menudo. El enfoque geométrico permite visualizar los conceptos y es más intuitivo, aunque normalmente solo sirve en 2D o 3D. El algebraico permite hacer demostraciones rigurosas y utilizar métodos computacionales, además de poderse ampliar fácilmente a n dimensiones. Para resolver problemas en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 , recomiendo hacer un esquema en papel del problema o utilizar un programa informático de creación de gráficos.

Pero ten en cuenta que *no todos* los conceptos del álgebra lineal pueden plantearse desde los dos puntos de vista, geométrico y algebraico. Esta dualidad es útil en muchos casos, pero no es algo fundamental que necesariamente aplique a todos los conceptos del álgebra lineal.

1.3 Requisitos previos

Lo obvio. ¡No sé si atreverme a escribirlo por lo evidente que es! Para aprender álgebra lineal, has de estar motivado. No es una materia tan difícil como podría parecer, pero tampoco es fácil. Por eso, el requisito más importante es que tengas el deseo y la intención de aprender álgebra lineal y de dedicar energía mental a conseguirlo. Los requisitos que indico a continuación son mucho menos importantes en comparación.

Matemáticas de secundaria. Has de sentirte cómodo con la aritmética y el álgebra básica. ¿Sabrías despejar x en $4x^2 = 9$? Entonces sabes suficiente álgebra para seguir leyendo. En el libro irán apareciendo otros conceptos de geometría, trigonometría y números complejos ($a + ib, e^{i\theta}$), pero los iré introduciendo a medida que sea necesario.

Análisis matemático. En pocas palabras: no necesitarás ningún conocimiento. Me opongo firmemente a que el análisis matemático, o cálculo, se enseñe antes que el álgebra lineal. Tampoco tengo nada en contra del análisis, por supuesto, es una materia rica, interesante y muy importante. Pero se puede aprender álgebra sin ningún tipo de conocimientos de análisis, mientras que muchos temas de análisis requieren de algo de álgebra. Es más, en muchas aplicaciones modernas del álgebra lineal no se utiliza ningún concepto de análisis matemático. Por tanto, el álgebra lineal debería enseñarse sin asumir unos conocimientos previos de análisis matemático.

Vectores, matrices e <introducir aquí cualquier otro término de álgebra lineal que suene sofisticado>. Para que este libro pueda considerarse realmente bueno, no tendría que hacerte falta saber nada de álgebra lineal antes de leerlo. Dicho esto, sí te ayudará tener algunos conocimientos sobre matrices y sus operaciones.

Programación. Antes de existir las computadoras, solo los matemáticos brillantes, con excelentes habilidades artísticas y talento para visualizar ecuaciones, eran capaces de entender los conceptos matemáticos avanzados. La llegada de las computadoras cambió esta situación. Ahora, un estudiante razonablemente bueno, algo perseverante y con ciertas habilidades informáticas puede utilizar y visualizar ecuaciones y otros conceptos matemáticos. La computadora se ocupa de la aritmética y de los gráficos de bajo nivel, mientras que tú te dedicas a los conceptos y la intuición.

Esto no significa que tengas que dejar de hacer problemas a mano; al contrario, resolver laboriosamente muchísimos problemas en papel es lo que te permitirá asimilar bien y usar con flexibilidad el álgebra lineal. Lo que ocurre es que, en realidad, solo pueden resolverse a mano las matrices sencillas (normalmente de números enteros). Además, cuando la visión de un conjunto de letras y símbolos griegos no te diga nada, las simulaciones y los gráficos por ordenador te permitirán entender visualmente la ecuación. Así que, si realmente quieres aprender álgebra lineal moderna y aplicada, te será útil saber programar en un lenguaje que interactúe con un motor de visualización.

Para todos los conceptos y problemas del libro, te doy el código tanto en MATLAB como en Python. En mi opinión, es más cómodo usar los conceptos de álgebra lineal con MATLAB. Si no tienes MATLAB, puedes usar Octave, un programa multiplataforma que prácticamente replica todas las funcionalidades de MATLAB. Pero la popularidad de Python es incuestionable y en cualquier caso, deberías utilizar el programa, sea cual sea, que 1) te resulte más cómodo utilizar o 2) creas que usarás en el futuro. Por supuesto, puedes emplear cualquier otro lenguaje de programación que te guste, pero tendrás que transformar las líneas de código a tu lenguaje

preferido.

He intentado que la programación sea lo más sencilla posible, así que solo necesitarás una experiencia mínima para entenderla. Por otra parte, este no es un libro de introducción a la programación, así que asumo que tienes unos ciertos conocimientos básicos. Si entiendes qué son: variables, bucles for, funciones y la representación gráfica básica, sabes suficiente para trabajar con la programación del libro.

Para ser claro: para estudiar este libro no *necesitas* usar las líneas de código. Son un material adicional que, en mi opinión, ayuda a afianzar los conceptos, así como a adaptarlos a aplicaciones concretas. Pero puedes aprender perfectamente con el libro obviando todo el código.

1.4 Práctica, ejercicios y retos de programación

Las matemáticas no son para contemplarlas. Si solo lees este libro sin resolver ninguno de los problemas, seguro, algo aprenderás y espero que disfrutes de su lectura. Pero si realmente quieres aprender álgebra lineal, necesitarás resolver problemas.

Algunos libros de texto incluyen una cantidad enorme de ejercicios. Mi estrategia consiste en darte una cantidad moderada, con la idea de que puedas resolverlos *todos*.

Los problemas de este libro siguen una jerarquía:

Problemas de práctica al final de cada una de las secciones que componen los capítulos. Son un número reducido y están pensados para que sean fáciles. Doy las soluciones inmediatamente después y la idea es que puedas confirmar que has entendido las ideas básicas de la sección. Si no eres capaz de resolver estos problemas, vuelve al principio de la sección.

Ejercicios al final de cada uno de los capítulos, diseñados para afianzar y practicar los conceptos más importantes. Doy las respuestas (sí, *todas*, ¡no solo las impares como ejemplo!) después de los ejercicios y en muchos casos también puedes comprobar tu respuesta es correcta resolviendo el problema informáticamente (con MATLAB o Python). Ten en cuenta que estos ejercicios están pensados para hacerlos a mano y aprenderás más haciéndolo así que con la computadora.

Retos de programación; requieren más implicación, esfuerzo y creatividad y solo pueden resolverse con la computadora. Son oportunidades para que explores conceptos, visualizaciones y espacios paramétricos en formas que sería difícil o imposible hacer a mano. Para todos los retos de programación te doy una solución posible, pero podrían resolverse de muchas maneras correctas; el objetivo es que tú explores y entiendas el álgebra lineal utilizando la programación, no que simplemente reproduzcas el código que te doy.

Si te interesan más los conceptos que su aplicación informática, puedes saltarte los retos de programación.

1.5 Internet y otros recursos

Aunque he intentado escribir este libro de forma que incluya todo lo que necesites y no tengas que buscar más recursos de álgebra, sería ingenuo pensar que a todo el mundo le parecerá el libro perfecto que me gustaría que fuera. Cada persona aprende de forma diferente y tiene maneras distintas de comprender y visualizar los conceptos matemáticos.

Si te topas con algo que te cuesta entender, no saltes inmediatamente a la conclusión de que el álgebra no es lo tuyo; lo más probable es que una explicación que a mí me parece intuitiva, para ti no lo sea. Por eso, intento explicar el mismo concepto de varias formas diferentes con la esperanza de que a todo el mundo le sirva

al menos una de ellas.

No dudes en buscar en Internet o en otros libros de texto si necesitas encontrar explicaciones diferentes, o si quieres repasar con más ejercicios.

Este libro está basado en uno de mis cursos por Internet. El libro y el curso son parecidos, pero no totalmente idénticos. No necesitas apuntarte al curso virtual para poder seguir este libro (ni al revés). Sé que hay gente que prefiere aprender con clases en vídeo, mientras que otras personas prefieren los libros de texto. Mi objetivo es cubrir las necesidades de ambos.

Puedes encontrar una lista de todos mis cursos online en sincxpress.com.