

Министерство науки и высшего образования  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
“Московский государственный технический университет  
имени Н.Э. Баумана  
(национальный исследовательский университет)”  
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

---



Факультет “Фундаментальные науки”  
Кафедра “Высшая математика”

**ОТЧЁТ**  
**по учебной практике**  
**за 3 семестр 2020—2021 гг.**

Руководитель практики, ст. преп. кафедры ФН1	_____	Кравченко О.В.
	(подпись)	
студент группы ФН1–31	_____	Зиновенков М.В.
	(подпись)	

Москва,  
2020 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Цели и задачи практики</b>	<b>3</b>
1.1	Цели . . . . .	3
1.2	Задачи . . . . .	3
1.3	Индивидуальное задание . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Отчёт</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Индивидуальное задание</b>	<b>5</b>
3.1	Ряды Фурье и интегральное уравнение Вольтерры. . . . .	5
	<b>Список литературы</b>	<b>9</b>

# 1 Цели и задачи практики

## 1.1 Цели

— развитие компетенций, способствующих успешному освоению материала бакалавриата и необходимых в будущей профессиональной деятельности.

## 1.2 Задачи

1. Знакомство с теорией рядов Фурье, и теорией интегральных уравнений.
2. Развитие умения поиска необходимой информации в специальной литературе и других источниках.
3. Развитие навыков составления отчётов и презентации результатов.

## 1.3 Индивидуальное задание

1. Изучить способы отображения математической информации в системе  $\text{\LaTeX}$ .
2. Изучить возможности системы контроля версий `Git`.
3. Научиться верстать математические тексты, содержащие формулы и графики в системе  $\text{\LaTeX}$ . Для этого, выполнить установку свободно распространяемого дистрибутива `TeXLive` и оболочки `TeXStudio`.
4. Оформить в системе  $\text{\LaTeX}$  типовые расчёты по курсу математического анализа согласно своему варианту.
5. Создать аккаунт на онлайн ресурсе `GitHub` и загрузить исходные `tex`-файлы и результат компиляции в формате `pdf`.
6. Решить индивидуальное домашнее задание согласно своему варианту, и оформить решение с учётов пп. 1—4.

## 2 Отчёт

Интегральные уравнения имеют большое прикладное значение, являясь мощным орудием исследования многих задач естествознания и техники: они широко используются в механике, астрономии, физике, во многих задачах химии и биологии. Теория линейных интегральных уравнений представляет собой важный раздел современной математики, имеющий широкие приложения в теории дифференциальных уравнений, математической физике, в задачах естествознания и техники. Отсюда владение методами теории дифференциальных и интегральных уравнений необходимо прикладному математику, при решении задач механики и физики.

### 3 Индивидуальное задание

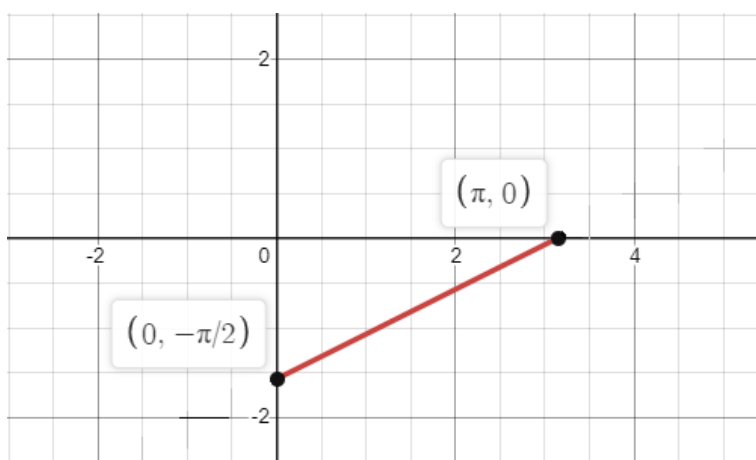
#### 3.1 Ряды Фурье и интегральное уравнение Вольтерры.

##### Задача № 1.

**Условие.** Разложить в ряд Фурье заданную функцию  $f(x)$ , построить графики  $f(x)$  и суммы ее ряда Фурье. Если не указывается, какой вид разложения в ряд необходимо представить, то требуется разложить функцию либо в общий тригонометрический ряд Фурье, либо следует выбрать оптимальный вид разложения в зависимости от данной функции.

$$f(x) = \frac{x-\pi}{2}, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad \text{по косинусам.}$$

**Решение.**



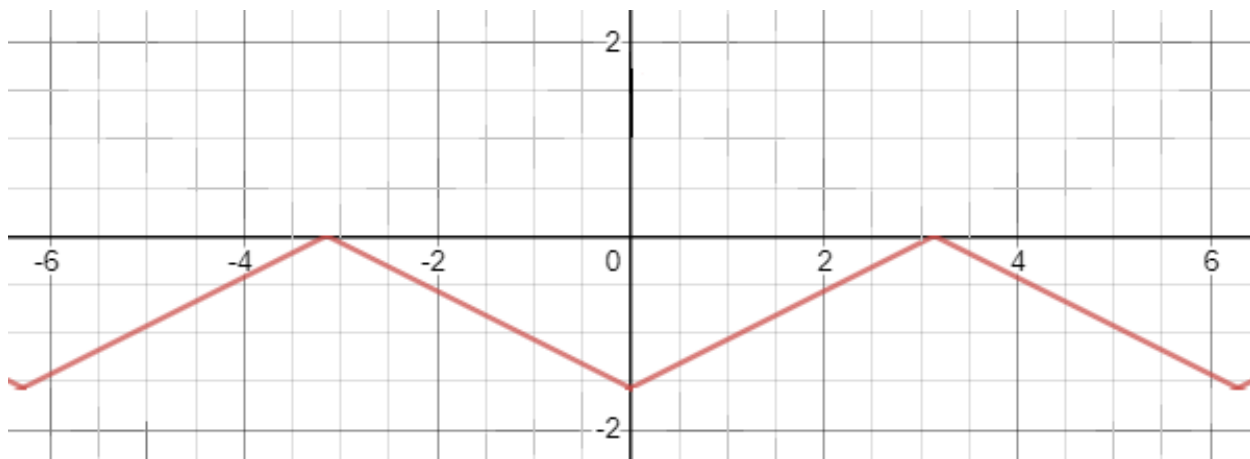
Построим общий тригонометрический ряд Фурье вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x)), \quad \text{где } \omega = \frac{\pi}{T}, \quad T = \pi.$$

Вычислим коэффициенты

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \left( \int_0^{\pi} \frac{x-\pi}{2} dx \right) = -\frac{\pi}{2}, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \left( - \int_0^{\pi} \frac{\pi}{2} \cos(nx) dx + \int_0^{\pi} \frac{x}{2} \cos(nx) dx \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left( -\pi * \frac{\sin(nx)}{2n} \Big|_0^{\pi} + \frac{x \sin(nx)}{2n} \Big|_0^{\pi} + \frac{\cos(nx)}{2n^2} \Big|_0^{\pi} \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left( \frac{\cos(\pi n)}{2n^2} - \left( \frac{1}{2n^2} \right) \right) \\ &= \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}, \end{aligned}$$

Применив теорему Дирихле о поточечной сходимости ряда Фурье, видим, что построенный ряд Фурье сходится к периодическому (с периодом  $T = \pi$ ) продолжению исходной функции при всех  $x$ . График функции  $S(x)$  имеет следующий вид

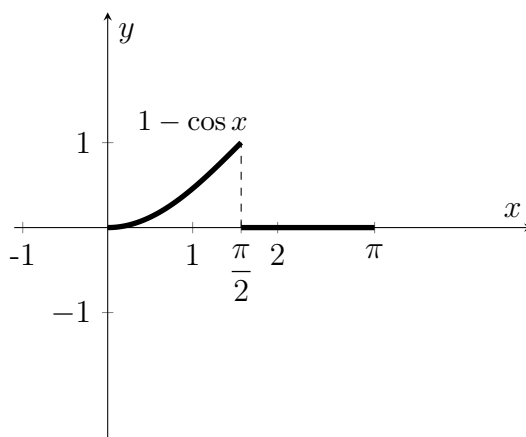


**Ответ:**

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \right) \cos(nx) \right)$$

### Задача № 2.

**Условие.** Для заданной графически функции  $y(x)$  построить ряд Фурье в комплексной форме, изобразить график суммы построенного ряда



**Решение.**

Ряд Фурье в комплексной форме имеет следующий вид

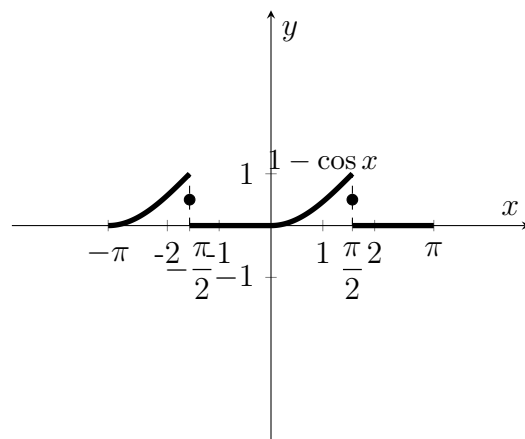
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega n x}, \quad c_n = \frac{1}{T} \int_a^b f(x) e^{-i\omega n x} dx, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

В нашем примере  $a = 0, b = \pi, T = \pi, \omega = 2$ , найдем коэффициенты  $c_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

где  $\omega = 2$ ,  $T = \pi$ .

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} = \frac{\pi + 2}{4\pi}, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{\sin(\frac{\pi n}{2})}{n} + \frac{\cos(\frac{\pi n}{2})}{n^2 - 1} \right), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{1 - \cos(\frac{\pi n}{2})}{n} + \frac{n - \sin(\frac{\pi n}{2})}{1 - n^2} \right), \\ c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\sin(\frac{\pi n}{2})}{n} + \frac{\cos(\frac{\pi n}{2})}{n^2 - 1} - i \left( \frac{1 - \cos(\frac{\pi n}{2})}{n} + \frac{n - \sin(\frac{\pi n}{2})}{1 - n^2} \right) \right) \end{aligned}$$

Применив теорему Дирихле о поточечной сходимости ряда Фурье, видим, что построенный ряд Фурье сходится к периодическому (с периодом  $T = \pi$ ) продолжению исходной функции при всех  $x \neq \frac{\pi n}{2}$ , и  $S(\frac{\pi n}{2}) = 1/2$  при  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , где  $S(x)$  — сумма ряда Фурье. График функции  $S(x)$  имеет вид



**Ответ:**

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\sin(\frac{\pi n}{2})}{n} + \frac{\cos(\frac{\pi n}{2})}{n^2 - 1} - i \left( \frac{1 - \cos(\frac{\pi n}{2})}{n} + \frac{n - \sin(\frac{\pi n}{2})}{1 - n^2} \right) \right) \right] e^{i2nx}, \quad x \neq \frac{\pi n}{2}; \\ S\left(\frac{\pi n}{2}\right) &= \frac{1}{2}, \quad \text{при } n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

### Задача № 3.

**Условие.**

Найти резольвенту для интегрального уравнения Вольтерры со следующим ядром

$$K(x, t) = (t - x)7^{(\sin t - \sin x)}, \quad \lambda = 49.$$

**Решение.**

Из рекуррентных соотношений  $K_j(x, t) = \int_t^x K(x, s)K_{j-1}(s, t)ds$  получаем

$$K_1(x, t) = (t - x)7^{(\sin t - \sin x)},$$

$$\begin{aligned} K_2(x, t) &= \int_t^x K(x, s)K_1(s, t)ds = \int_t^x (s - x)7^{(\sin s - \sin x)}(t - s)7^{(\sin t - \sin s)}ds = \\ &= 7^{(\sin t - \sin x)} \cdot \frac{x^3 - 3x^2t + 3xt^2 - t^3}{6} = 7^{(\sin t - \sin x)} \cdot \frac{(x - t)^3}{6}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_3(x, t) &= \int_t^x K(x, s)K_2(s, t)ds = \int_t^x (s - x)7^{(\sin s - \sin x)}7^{(\sin t - \sin s)} \cdot \frac{(s - t)^3}{6}ds = \\ &= 7^{(\sin t - \sin x)} \cdot \frac{(t - x)^5}{120}. \end{aligned}$$

$$K_j(x, t) = \frac{(t - x)^{j+2} \cdot (-1)^{j+1} \cdot 7^{\sin(t) - \sin(x)}}{(2j - 1)!}, \quad j = \mathbb{N}.$$

Подставляя это выражение для итерированных ядер, найдем резольвенту

$$R(x, t, \lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} K_j(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} 49^{j-1} \frac{(t - x)^{j+2} \cdot (-1)^{j+1} \cdot 7^{\sin(t) - \sin(x)}}{(2j - 1)!} \quad j = 1, 2, \dots$$



## Список литературы

- [1] Львовский С.М. Набор и вёрстка в системе  $\text{\LaTeX}$ , 2003.
- [2] Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1976.
- [3] Васильева А. Б., Тихонов Н. А. Интегральные уравнения. — 2-е изд., стереотип. — М: ФИЗМАТЛИТ, 2002.