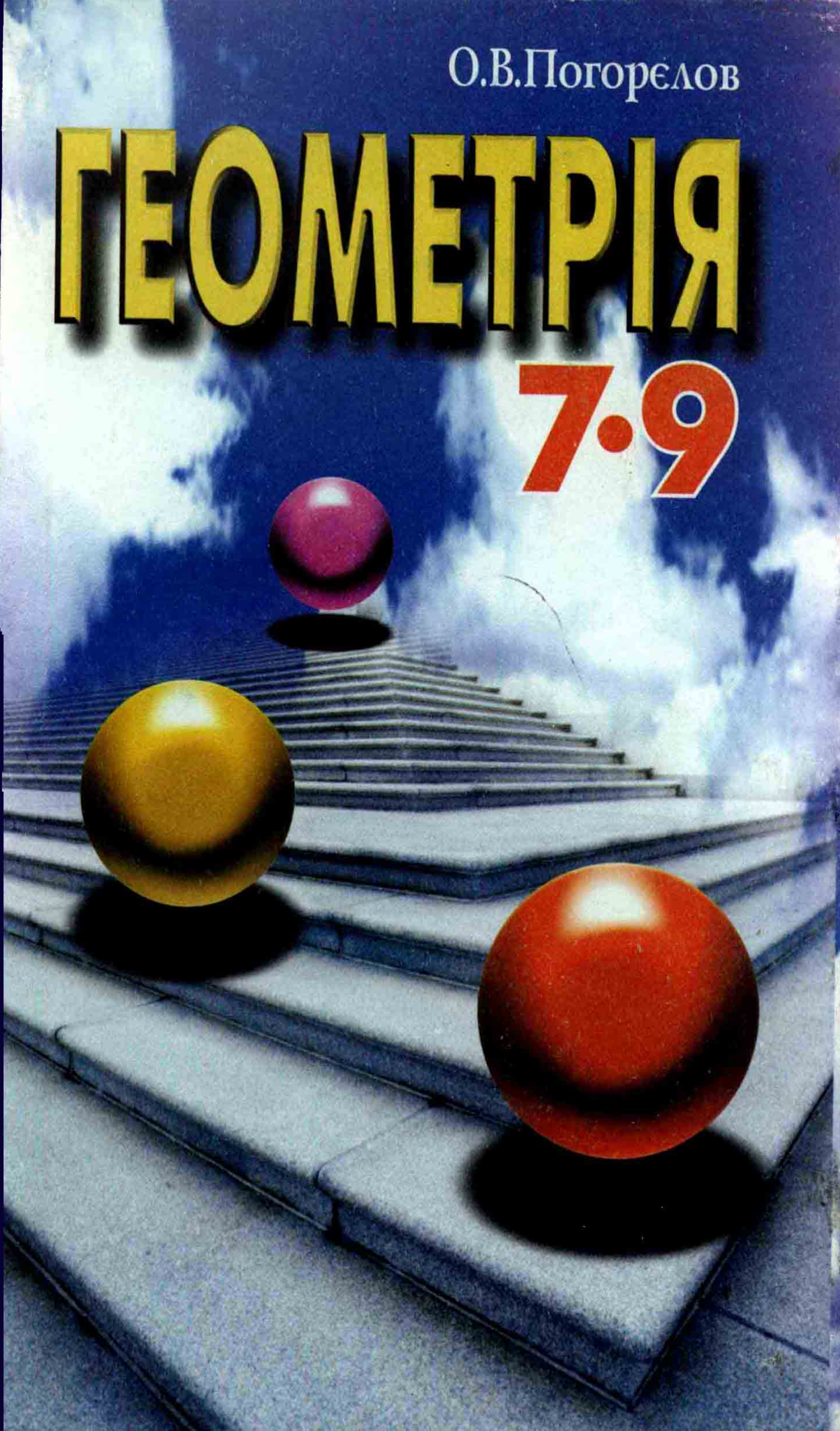
О.В.Погорелов

ГЕОМЕТРІЯ

7-9



О.В.Погорєлов

ГЕОМЕТРІЯ

ПЛАНІМЕТРІЯ

ПІДРУЧНИК
ДЛЯ 7-9 КЛАСІВ
ЗАГАЛЬНООСВІТНІХ
НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ

*Затверджено Міністерством
освіти і науки України*

КИЇВ
"ШКОЛЯР"
2004

ББК 22.151 я72
П43

Затверджено Міністерством освіти і науки України
(Лист Міністерства освіти і науки України № 1/11–3801 від 17.09.2001)

**Продажа примірників цього видання
без голограми на обкладинці є незаконною.**

Навчальне видання

ПОГОРЄЛОВ Олексій Васильович

ГЕОМЕТРІЯ

Планіметрія
Підручник для 7–9 класів
загальноосвітніх навчальних закладів

Затверджено Міністерством освіти і науки України

Відповідальний за випуск Ю. О. Корбуш.
Художнє оформлення А. А. Зінченка.

Підписано до друку 10.09.04. Формат 60x90/16. Папір офс. Гарнітура шкільна.
Друк офс. Ум. друк. арк. 15. Ум. фарбовідб. 15,5. Обл.-вид. арк. 15,48.
Тираж 10 000 пр. Зам. № 4-492.

УВЦ «Школяр»,
02094, Київ, вул. Сергієнка, 18.
Свідоцтво ДК № 360 від 14.03.2001 р.

Видруковано на ВАТ «Білоцерківська книжкова фабрика»,
09117, м. Біла Церква, вул. Леся Курбаса, 4.

Погорєлов О. В.
П43 Геометрія: Планіметрія: Підруч. для 7–9 кл. загальноосвіт. навч. закл.– 7-ме вид.– К.: Школяр, 2004. – 240 с.

ISBN 966-7117-65-0

ББК 22.151я72

ISBN 966-7117-65-0

7 клас

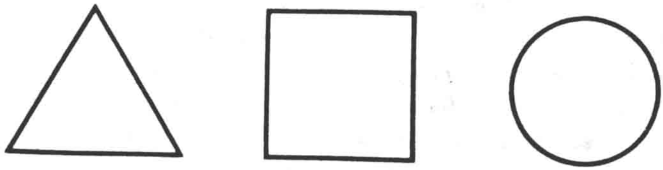
§ 1. ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ НАЙПРОСТІШИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР

1. ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ

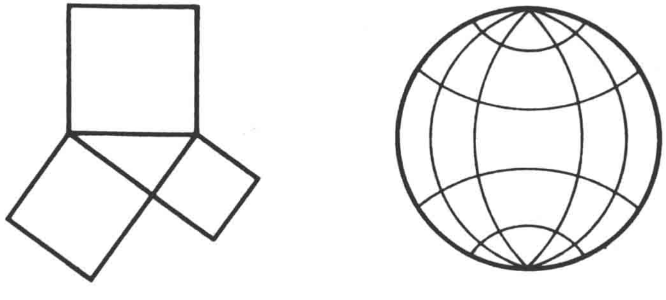
Геометрія — це наука про властивості геометричних фігур. Слово «геометрія» — грецьке, у перекладі на українську мову означає «землемірство». Така назва зумовлена застосуванням геометрії до вимірювань на місцевості.

Приклади геометричних фігур: трикутник, квадрат, коло (мал. 1).

Геометричні фігури бувають досить різноманітні. Частина будь-якої геометричної фігури є геометричною фігурою. Об'єднання кількох геометричних фігур є знову геометричною фігурою. На малюнку 2 фігура зліва складається з трикутника і трьох квадратів, а фігура справа — з кола і частини кола. Кожну геометричну фігуру можна уявити складеною з точок.



Мал. 1



Мал. 2

Евклід — давньогрецький учений (III ст. до н. е.)

Геометрія широко застосовується на практиці. Її треба знати і робітнику, і інженеру, і архітектору, і художнику. Одним словом, геометрію слід знати всім.

Геометрія, що вивчається у школі, називається евклідовою, за ім'ям давньогрецького вченого Евкліда, який створив посібник з математики під назвою «Начала». Тривалий час геометрію вивчали за цією книжкою.

Ми починаємо вивчення геометрії з планіметрії. *Планіметрія* — це розділ геометрії, в якому вивчаються фігури на площині.

2. ТОЧКА І ПРЯМА

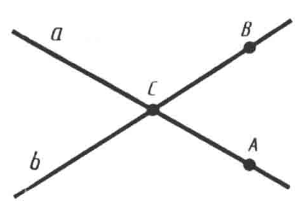
Основними геометричними фігурами на площині є *точка* і *пряма*. Точки прийнято позначати великими латинськими буквами A, B, C, D, ... Прямі позначаються малими латинськими буквами a, b, c, d, ...

На малюнку 3 ви бачите точку A і пряму a.

Пряма нескінченна. На малюнку зображуємо лише частину прямої, але уявляємо її необмежено продовженою в обидва боки.

Подивіться на малюнок 4. Ви бачите прямі a, b і точки A, B, C. Точки A і C *лежать* на прямій a. Можна сказати також, що точки A і C *належать* прямій a, або пряма a *проходить* через точки A і C.

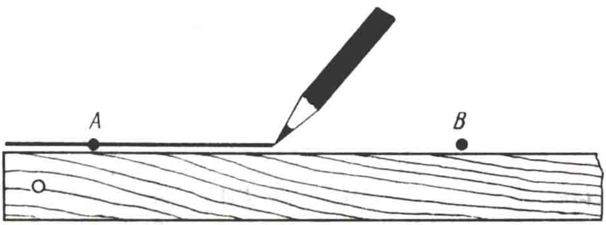
Мал. 3



Мал. 4

Точка B лежить на прямій b. Вона не лежить на прямій a. Точка C лежить і на прямій a, і на прямій b. Прямі a і b *перетинаються* в точці C. Точка C є *точкою перетину* прямих a і b.

На малюнку 5 ви бачите, як за допомогою лінійки можна побудувати пряму, що проходить через дві точки A і B.



Мал. 5

Основними властивостями належності точок і прямих на площині назвемо такі властивості:

I. Яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй.

Через будь-які дві точки можна провести пряму і тільки одну.

Пряму можна позначати двома точками, що лежать на ній. Наприклад, пряму a на малюнку 4 можна позначити AC, а пряму b — BC.

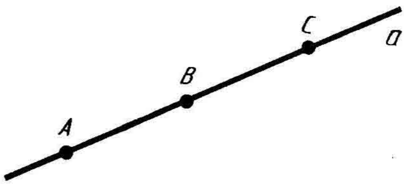
Задача (3) [1]. Чи можуть дві прямі перетинатися у двох точках? Відповідь поясніть.

Розв'язання. Якби дві прямі мали дві точки перетину, то через ці точки проходили б дві прямі. А це неможливо, оскільки через дві точки можна провести тільки одну пряму. Отже, дві прямі не можуть мати двох точок перетину.

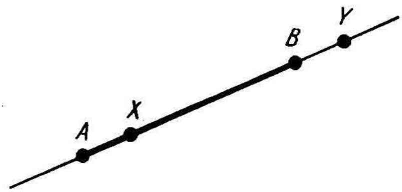
3. ВІДРІЗОК

Подивіться на малюнок 6. Ви бачите пряму a і три точки A, B, C на цій прямій. Точка B лежить *між* точками A і C, вона *розділяє* точки A і C. Можна також сказати, що точки A і C ле-

[1] Число в дужках означає номер задачі в списку задач, наведених у кінці параграфа.



Мал. 6



Мал. 7

жать *по різні боки* від точки B. Точки B і C лежать *по один бік* від точки A, вони не розділяються точкою A. Точки A і B лежать по один бік від точки C.

Відрізком називається частина прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать між двома даними її точками. Ці точки називаються *кінцями відрізка*. Відрізок позначають, записуючи його кінці. Коли говорять або пишуть «відрізок AB», то мають на увазі відрізок з кінцями в точках A і B.

На малюнку 7 бачимо відрізок AB. Він є частиною прямої AB. Цю частину прямої виділено жирною лінією. Точка X прямої лежить між точками A і B, тому вона належить відрізку AB. Точка Y не лежить між точками A і B, тому вона не належить відрізку AB.

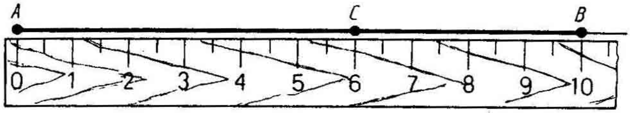
Основною властивістю розміщення точок на прямій назвемо таку властивість:

II. З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

4. ВИМІРЮВАННЯ ВІДРІЗКІВ

Для вимірювання відрізків користуються різними вимірювальними інструментами. Найпростішим таким інструментом є лінійка з поділками на ній. На малюнку 8 відрізок AB дорівнює 10 см, відрізок AC дорівнює 6 см, а відрізок BC дорівнює 4 см. Довжина відрізка AB дорівнює сумі довжин відрізків AC і BC.

Основними властивостями вимірювання відрізків назвемо такі властивості:



Мал. 8

III. Кожний відрізок має певну довжину, більшу від нуля. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його точкою.

Це означає, що коли на відрізку AB взяти будь-яку точку C, то довжина відрізка AB дорівнює сумі довжин відрізків AC і BC. Довжину відрізка AB називають також *відстанню* між точками A і B.

З а д а ч а (9). Три точки A, B, C лежать на одній прямій. Відомо, що $AB = 4{,}3$ см, $AC = 7{,}5$ см, $BC = 3{,}2$ см. Чи може точка A лежати між точками B і C? Чи може точка C лежати між точками A і B? Яка з трьох точок A, B, C лежить між двома іншими?

Р о з в' я з а н н я. Якщо точка A лежить між точками B і C, то за властивістю вимірювання відрізків має бути $AB + AC = BC$. Але $4{,}3 + 7{,}5 \neq 3{,}2$. Отже, точка A не лежить між точками B і C.

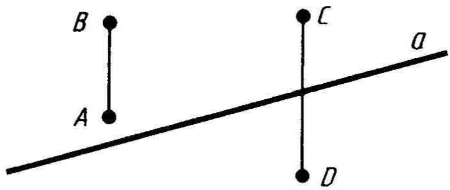
Якщо точка C лежить між точками A і B, то має бути $AC + BC = AB$. Але $7{,}5 + 3{,}2 \neq 4{,}3$. Отже, точка C не лежить між точками A і B.

З трьох точок на прямій A, B, C одна лежить між двома іншими. Отже, цією точкою є точка B.

5. ПІВПЛОЩИНИ

Подивіться на малюнок 9. Пряма a розбиває площину на дві півплощини. Це розбиття має таку властивість. Якщо кінці якого-небудь відрізка належать одній півплощині, то відрізок не перетинає пряму. Якщо кінці відрізка належать різним півплощинам, то відрізок перетинає пряму.

На малюнку 9 точки A і B лежать в одній з півплощин, на які пряма a розбиває площину. Тому відрізок AB не перетинає пряму a. Точки C і D лежать у різних півплощинах. Тому відрізок CD перетинає пряму a.



Мал. 9

Основною властивістю розміщення точок відносно прямої на площині назвемо таку властивість:

IV. Пряма розбиває площину на дві півплощини.

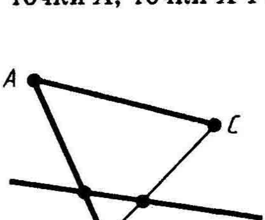
Задача (17). Дано пряму і три точки A, B, C, що не лежать на ній. Відомо, що відрізок AB перетинає пряму, а відрізок AC не перетинає її. Чи перетинає пряму відрізок BC? Відповідь поясніть.

Розв'язання. Пряма розбиває площину на дві півплощини (мал. 10). Точка A належить одній з них. Відрізок AC не перетинає пряму. Отже, точка C лежить у тій самій півплощині, що й точка A.

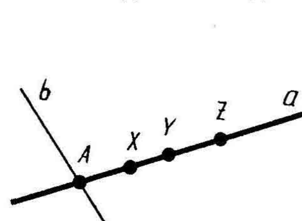
Відрізок AB перетинає пряму. Значить, точка B лежить в іншій півплощині. Таким чином, точки B і C лежать у різних півплощинах. А це означає, що відрізок BC перетинає дану пряму.

6. ПІВПРЯМА

Задача (20). Дано пряму a і точки A, X, Y, Z на ній (мал. 11). Відомо, що точки X і Y лежать по один бік від точки A, точки X і Z теж лежать по один бік від точки A.



Мал. 10



Мал. 11

Як розміщені точки Y і Z відносно точки A: по один бік, чи по різні боки? Поясніть відповідь.

Р о з в' я з а н н я. Проведемо через точку A довільну пряму b, відмінну від a. Вона розіб'є площину на дві півплощини. Одній з них належить точка X. У тій самій півплощині лежать точки Y і Z, бо відрізки XY і XZ не перетинають пряму b. Оскільки точки X і Z лежать в одній півплощині, то відрізок YZ не перетинає пряму b, а отже, не містить точку A. Тобто точки Y і Z лежать по один бік від точки A.

Півпрямою або *променем* називають частину прямої, яка складається з усіх точок цієї прямої, що лежать по один бік від даної на ній точки. Ця точка називається *початковою точкою* півпрямої. Різні півпрямі однієї й тієї самої прямої із спільною початковою точкою називаються *доповняльними*.

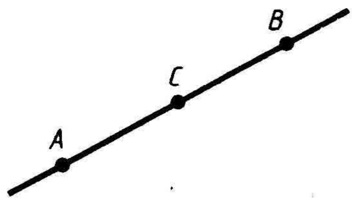
Півпрямі так само, як і прямі, позначаються малими латинськими буквами. Можна позначати півпряму двома точками: початковою і ще якою-небудь точкою, яка належить півпрямій. Початкову точку ставлять на першому місці. Наприклад, півпряму, наведену жирною лінією на малюнку 12, можна позначити AB.

Мал. 12

З а д а ч а (22). На відрізку AB взято точку C. Серед півпрямих AB, AC, CA і CB назвіть пару півпрямих, що збігаються, і пару доповняльних півпрямих. Відповідь поясніть.

Р о з в' я з а н н я (мал. 13). Дані півпрямі мають початковою точкою або точку A, або точку C.

Розглянемо спочатку півпрямі з початковою точкою A (півпрямі AB і AC). Точка C лежить між точками A і B, оскільки за умовою задачі вона належить відрізку AB. Отже, точка A не лежить між точками B і C, тобто точки B і C лежать по один бік від точки A. Тому півпрямі AB і AC збігаються.



Мал. 13

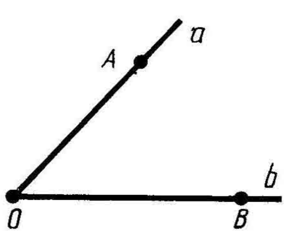
Розглянемо тепер півпрямі з початковою точкою C (півпрямі CA і CB). Точка C розділяє точки A і B. Тому точки A і B не можуть належати одній півпрямій, отже, півпрямі CA і CB доповняльні.

7. КУТ

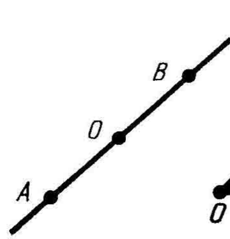
Кутом називається фігура, яка складається з точки — *вершини кута* і двох різних півпрямих, що виходять із цієї точки,— *сторін кута*.

На малюнку 14 ви бачите кут з вершиною O і сторонами a, b. Кут позначають або його вершиною, або його сторонами, або записують три точки: вершину і дві точки, що лежать на сторонах кута. Слово «кут» іноді заміняють знаком $\angle$. Кут на малюнку 14 можна позначити трьома способами: $\angle O$, $\angle (ab)$, $\angle AOB$. У третьому способі позначення кута буква, що позначає вершину кута, ставиться всередині.

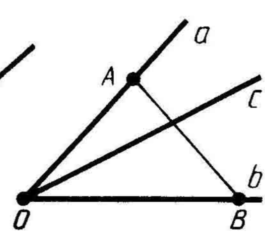
Якщо сторони кута є доповняльними півпрямими однієї прямої, то кут називають *розгорнутим.* На малюнку 15 ви бачите розгорнутий кут з вершиною O і сторонами OA і OB.



Мал. 14



Мал. 15



Мал. 16

Будемо говорити, що промінь *проходить між* сторонами даного кута, якщо він виходить з його вершини і перетинає який-небудь відрізок з кінцями на його сторонах. На малюнку 16 промінь c проходить між сторонами кута (ab), оскільки він виходить з вершини кута (ab) і перетинає відрізок AB з кінцями на його сторонах.

Для розгорнутого кута вважаємо, що будь-який промінь, який виходить з його вершини і відмінний від його сторін, проходить між сторонами кута.

Кути вимірюються градусами за допомогою транспортира. На малюнку 17 кут (ab) дорівнює 120°. Півпряма c проходить між сторонами кута (ab). Кут (ac) дорівнює 90°, а кут (bc) дорівнює 30°. Кут (ab) дорівнює сумі кутів (ac) і (bc).

Основними властивостями вимірювання кутів назвемо такі властивості:

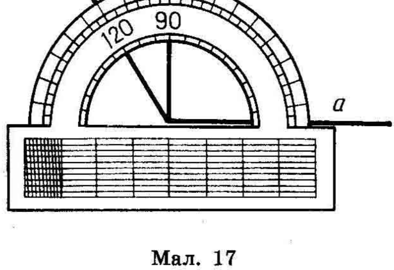
V. Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля. Розгорнутий кут дорівнює 180°. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

Це означає, що коли промінь c проходить між сторонами кута (ab), то кут (ab) дорівнює сумі кутів (ac) і (bc).

Задача 25. Чи може промінь c проходити між сторонами кута (ab), якщо $\angle\,(ac) = 30°$, $\angle\,(cb) = 80°$, $\angle\,(ab) = 50°$?

Розв'язання. Якщо промінь c проходить між сторонами кута (ab), то за властивістю вимірювання кутів має бути $\angle\,(ac) + \angle\,(cb) = \angle\,(ab)$. Але $30° + 80° \neq 50°$.

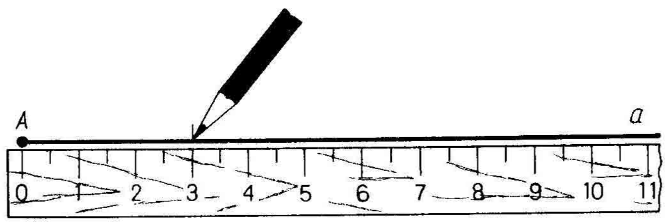
Отже, промінь c не може проходити між сторонами кута (ab).



Мал. 17

8. ВІДКЛАДАННЯ ВІДРІЗКІВ І КУТІВ

На малюнку 18 показано, як за допомогою лінійки на півпрямій a з початковою точкою A можна відкласти відрізок даної довжини (3 см).



Мал. 18

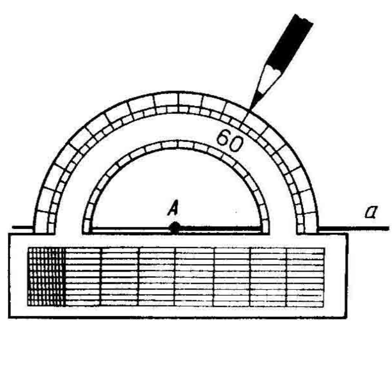
Подивіться на малюнок 19. Півпряма a, продовжена за початкову точку A, розбиває площину на дві півплощини. На малюнку показано, як за допомогою транспортира відкласти від півпрямої a у верхню півплощину кут з даною градусною мірою (60°).

Основними властивостями відкладання відрізків і кутів назвемо такі властивості:

VI. На будь-якій півпрямій від її початкової точки можна відкласти відрізок даної довжини і тільки один.

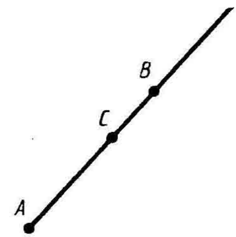
VII. Від будь-якої півпрямої у дану півплощину можна відкласти кут з даною градусною мірою, меншою за 180°, і тільки один.

Задача (30). На промені AB відкладено відрізок AC, менший за відрізок AB. Яка з трьох точок A, B і C лежить між двома іншими? Поясніть відповідь.



Мал. 19

Розв'язання (мал. 20). Оскільки точки B і C лежать на одній півпрямій з початковою точкою A, то вони не розділяються точкою A, тобто точка A не лежить між точками B і C.



Мал. 20

Чи може точка B лежати між точками A і C? Якби вона лежала між точками A і C, то було б $AB + BC = AC$. Але це неможливо, оскільки за умовою відрізок AC менший за відрізок AB. Отже, точка B не лежить між точками A і C.

З трьох точок A, B, C одна лежить між двома іншими. Тому точка C лежить між точками A і B.

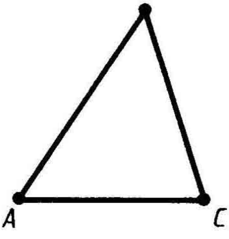
9. ТРИКУТНИК

Трикутником називається фігура, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які попарно сполучають ці точки. Точки називаються *вершинами* трикутника, а відрізки — його *сторонами*.

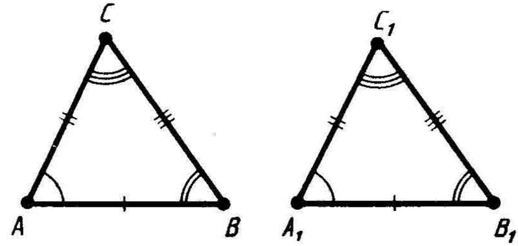
На малюнку 21 ви бачите трикутник з вершинами A, B, C і сторонами AB, BC, AC. Трикутник позначається його вершинами. Замість слова «трикутник» іноді вживають знак $\triangle$. Наприклад, трикутник на малюнку 21 позначається так: $\triangle ABC$.

Кутом трикутника ABC при вершині A називається кут, утворений півпрямими AB і AC. Так само означаються кути трикутника при вершинах B і C.

Два відрізки називаються *рівними*, якщо вони мають однако-



Мал. 21



Мал. 22

ву довжину. Два кути називаються *рівними*, якщо вони мають однакову кутову міру в градусах.

Трикутники називаються *рівними*, якщо в них відповідні сторони рівні і відповідні кути рівні. При цьому відповідні кути мають лежати проти відповідних сторін.

На малюнку 22 ви бачите два рівних трикутники ABC і $A_1B_1C_1$. У них

$$AB = A_1B_1,\ AC = A_1C_1,\ BC = B_1C_1,$$
$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1.$$

Рівні відрізки на малюнку, як правило, позначають однією, двома або трьома рисками, а рівні кути — однією, двома або трьома дужками.

Для позначення рівності трикутників користуються звичайним знаком рівності $=$. Запис $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ читається так: «Трикутник ABC дорівнює трикутнику $A_1B_1C_1$». При цьому має значення порядок запису вершин трикутника. Рівність $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ означає, що $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, ... А рівність $\triangle ABC = \triangle B_1A_1C_1$ означає вже зовсім інше: $\angle A = \angle B_1$, $\angle B = \angle A_1$ ... .

З а д а ч а (38). Трикутники ABC і PQR рівні. Відомо, що сторона AB дорівнює 10 м, а кут C дорівнює 90°. Чому дорівнюють сторона PQ і кут R? Відповідь поясніть.

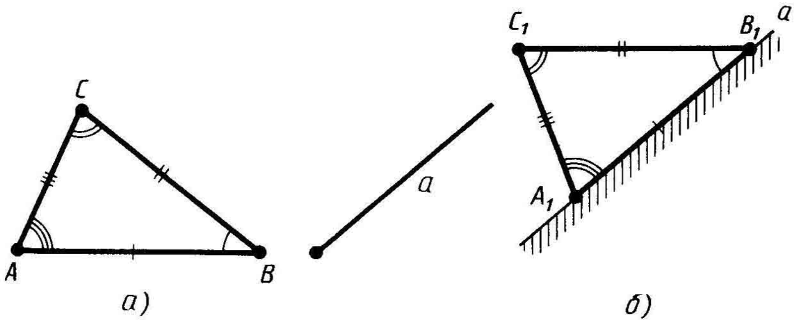
Р о з в' я з а н н я. Оскільки трикутники ABC і PQR рівні, то $AB = PQ$, $\angle C = \angle R$. Отже, $PQ = 10$ м, $\angle R = 90°$.

10. ІСНУВАННЯ ТРИКУТНИКА, ЩО ДОРІВНЮЄ ДАНОМУ

Нехай маємо трикутник ABC і промінь a (мал. 23, *а*). Перемістимо трикутник ABC так, щоб його вершина A збіглася з початком променя a, вершина B була на промені a, а вершина C опинилася у даній півплощині відносно променя a та його продовження. Вершини нашого трикутника у цьому новому положенні позначимо A_1, B_1, C_1 (мал. 23, *б*).

Трикутник $A_1B_1C_1$ дорівнює трикутнику ABC.

Існування трикутника $A_1B_1C_1$, що дорівнює трикутнику ABC і розміщений зазначеним способом відносно даного променя a,



Мал. 23

вважається однією з **основних властивостей** найпростіших фігур. Цю властивість сформулюємо так:

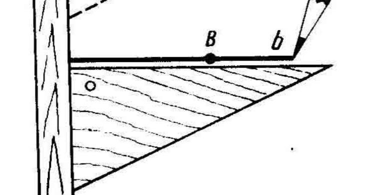
VIII. Який би не був трикутник, існує трикутник, що дорівнює йому у заданому розміщенні відносно даної півпрямої.

11. ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ

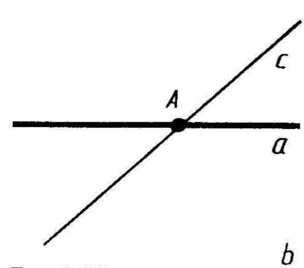
Дві прямі називаються *паралельними*, якщо вони не перетинаються.

На малюнку 24 показано, як за допомогою кутника і лінійки провести через дану точку B пряму b, паралельну даній прямій a.

Паралельність прямих позначають знаком ∥. Запис $a \parallel b$ читається: «Пряма a паралельна прямій b».



Мал. 24



Мал. 25

Основна властивість паралельних прямих:

IX. Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести на площині не більше як одну пряму, паралельну даній.

Задача (41). Чи може пряма, що перетинає одну з двох паралельних прямих, не перетинати другу? Поясніть відповідь.

Розв'язання. Нехай a і b — паралельні прямі і нехай пряма c перетинає пряму a в точці A (мал. 25). Коли б пряма c не перетинала пряму b, то через точку A проходили б дві прямі, що не перетинають пряму b: пряма a і пряма c. Але за властивістю паралельних прямих це неможливо. Отже, пряма c, яка перетинає пряму a, повинна перетинати і пряму b, паралельну їй.

12. ТЕОРЕМИ І ДОВЕДЕННЯ

Правильність твердження про властивість тієї чи іншої геометричної фігури встановлюється міркуванням. Це міркування називається *доведенням*. А саме твердження, яке доводять, називається *теоремою*. Наведемо приклад.

Теорема 1.1. ***Якщо пряма, яка не проходить через жодну з вершин трикутника, перетинає одну з його сторін, то вона перетинає тільки одну з двох інших сторін.***

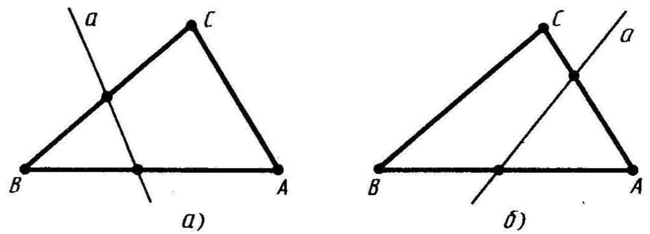
Доведення. Нехай пряма a не проходить через жодну з вершин трикутника ABC і перетинає його сторону AB (мал. 26). Пряма a розбиває площину на дві півплощини. Точки A і B лежать в різних півплощинах, оскільки відрізок AB перетинає пряму a. Точка C лежить в одній з цих півплощин.

Якщо точка C лежить в одній півплощині з точкою A, то відрізок AC не перетинає пряму a, а відрізок BC перетинає цю пряму (мал. 26, *а*).

Якщо точка C лежить в одній півплощині з точкою B, то відрізок AC перетинає пряму a, а відрізок BC не перетинає її (мал. 26, *б*).

В обох випадках пряма a перетинає тільки один з відрізків AC або BC. Оце і усе доведення.

Формулювання теореми звичайно складається з двох частин. В одній частині говориться про те, що дано. Ця частина нази-



Мал. 26

вається *умовою* теореми. В другій частині говориться про те, що має бути доведене. Ця частина називається *висновком* теореми.

Умова теореми 1.1 полягає в тому, що пряма не проходить через жодну з вершин трикутника і перетинає одну з його сторін. Висновок теореми полягає в тому, що ця пряма перетинає тільки одну з двох інших сторін трикутника.

13. АКСІОМИ

Твердження, які містять формулювання основних властивостей найпростіших фігур, не доводяться і називаються *аксіомами*. Слово аксіома походить від грецького слова *аксіос* і означає твердження, що не викликає сумнівів.

Під час доведення теорем дозволяється користуватися основними властивостями найпростіших фігур, тобто аксіомами, а також уже доведеними властивостями, тобто теоремами. Ніякими іншими властивостями фігур, навіть якщо вони нам здаються очевидними, користуватись не можна.

При доведенні теорем можна користуватися малюнком, як геометричним записом того, що виражається словами. Не дозволяється використовувати під час міркувань властивості фігур, які видно з малюнка, якщо не можна обґрунтувати їх, спираючись на аксіоми і теореми, доведені раніше.

У геометрії поряд з такими словами, як аксіома і теорема, вживається також слово «означення». Дати *означення* чого-небудь означає пояснити, що це таке.

Наприклад, говорять: «Дайте означення трикутника». Відповідають: «Трикутником називається фігура, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які попарно сполучають ці точки».

Другий приклад: «Дайте означення паралельних прямих». Відповідають: «Прямі називаються паралельними, якщо вони не перетинаються». Ви вже знаєте означення рівності відрізків, рівності кутів і трикутників.

? КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Наведіть приклади геометричних фігур.
2. Назвіть основні геометричні фігури на площині.
3. Як позначаються точки і прямі?
4. Сформулюйте основні властивості належності точок і прямих.
5. Поясніть, що таке відрізок з кінцями у даних точках.
6. Сформулюйте основну властивість розміщення точок на прямій.
7. Сформулюйте основні властивості вимірювання відрізків.
8. Що називається відстанню між двома даними точками?
9. Які властивості має розбиття площини на дві півплощини?
10. Сформулюйте основну властивість розміщення точок відносно прямої на площині.
11. Що таке півпряма або промінь? Які півпрямі називаються доповняльними?
12. Як позначаються півпрямі?
13. Яка фігура називається кутом?
14. Як позначається кут?
15. Який кут називається розгорнутим?
16. Поясніть, що означає вираз: «Півпряма проходить між сторонами кута».
17. В яких одиницях вимірюють кути і за допомогою якого інструмента? Поясніть, як виконують вимірювання.
18. Сформулюйте основні властивості вимірювання кутів.
19. Сформулюйте основні властивості відкладання відрізків і кутів.
20. Що таке трикутник?
21. Що таке кут трикутника при даній вершині?
22. Які відрізки називаються рівними?

23. Які кути називаються рівними?
24. Які трикутники називаються рівними?
25. Як позначають на малюнку відповідні сторони і кути рівних трикутників?
26. Поясніть за малюнком 23 існування трикутника, що дорівнює даному.
27. Які прямі називаються паралельними? Яким знаком позначають паралельність прямих?
28. Сформулюйте основну властивість паралельних прямих.
29. Наведіть приклад теореми.

ЗАДАЧІ[1]

1. 1) Проведіть пряму. Позначте яку-небудь точку A, що лежить на прямій, і точку B, що не лежить на прямій.
2) Проведіть дві прямі a і b, що перетинаються. Позначте точку C перетину прямих; точку A на прямій a, що не лежить на прямій b; точку D, що не лежить на жодній з прямих a і b.

2. Позначте на аркуші паперу дві точки. Проведіть через них пряму від руки. За допомогою лінійки перевірте правильність побудови.

3. Чи можуть дві прямі мати дві точки перетину? Поясніть відповідь.

4. Для перевірки правильності лінійки використовують такий спосіб. Через дві точки за допомогою лінійки проводять лінію (мал. 27). Потім лінійку перевертають і через ті самі точки знову проводять лінію. Якщо лінії не збіглися, то лінійка неправильна. На якій властивості прямих грунтується такий спосіб перевірки правильності лінійки?

Мал. 27

5. Проведіть пряму a. Позначте на прямій дві довільні точки A і B. Позначте тепер точку C так, щоб точка A лежала між точками B і C.

---

[1] Багато задач цього підручника взято із шкільних підручників і задачників минулих років, зокрема з «Геометрії» А. П. Кисельова і «Збірника задач з геометрії» М. О. Рибкіна.

6. Проведіть пряму a. Позначте на ній дві довільні точки A і B. Позначте тепер яку-небудь точку C відрізка AB.
7. Точка M лежить на прямій CD між точками C і D. Знайдіть довжину відрізка CD, якщо: 1) $CM = 2{,}5$ см, $MD = 3{,}5$ см; 2) $CM = 3{,}1$ дм, $MD = 4{,}6$ дм; 3) $CM = 12{,}3$ м, $MD = 5{,}8$ м.
8. Позначте на прямій дві точки та на око середину відрізка, що сполучає ці точки. Перевірте правильність побудови вимірювання за допомогою лінійки.
9. Три точки A, B, C лежать на одній прямій. Відомо, що $AB = 4{,}3$ см, $AC = 7{,}5$ см, $BC = 3{,}2$ см. Чи може точка A лежати між точками B і C? Чи може точка C лежати між точками A і B? Яка з трьох точок A, B, C лежить між двома іншими?
10. Точки A, B, C лежать на одній прямій. Чи належить точка B відрізку AC, якщо: $AC = 5$ см, $BC = 7$ см? Поясніть відповідь.
11. Точки A, B, C лежать на одній прямій. Чи може точка B розділяти точки A і C, якщо: $AC = 7$ см, $BC = 7{,}6$ см? Відповідь поясніть.
12. Чи можуть точки A, B, C лежати на одній прямій, якщо $AB = 1{,}8$ м, $AC = 1{,}3$ м, $BC = 3$ м? Поясніть відповідь.
13. Чи можуть три точки A, B, C лежати на одній прямій, якщо довжина більшого відрізка AB менша за суму довжин відрізків AC і BC? Поясніть відповідь.
14. Точки A, B, C лежать на одній прямій. Знайдіть довжину відрізка BC, якщо $AB = 2{,}7$ м, $AC = 3{,}2$ м. Скільки розв'язків має задача?
15. На відрізку AB довжиною 15 м взято точку C. Знайдіть довжини відрізків AC і BC, якщо: 1) відрізок AC на 3 м довший за відрізок BC; 2) відрізок AC у два рази довший за відрізок BC; 3) точка C — середина відрізка AB; 4) довжини відрізків AC і BC відносяться, як $2 : 3$.
16. Проведіть пряму і позначте яку-небудь точку A, що не лежить на цій прямій. Позначте тепер дві точки B і C так, щоб відрізок AB перетинав пряму, а відрізок BC не перетинав її.
17. Дано пряму і три точки A, B, C, що не лежать на цій прямій. Відомо, що відрізок AB перетинає пряму, а відрізок AC не

перетинає її. Чи перетинає пряму відрізок BC? Відповідь поясніть.

18. Дано пряму і чотири точки A, B, C і D, що не лежать на цій прямій. Чи перетинає відрізок AD пряму, якщо: 1) відрізки AB, BC і CD перетинають пряму; 2) відрізки AC і BC перетинають пряму, а відрізок BD не перетинає; 3) відрізки AB і CD перетинають пряму, а відрізок BC не перетинає; 4) відрізки AB і CD не перетинають пряму, а відрізок BC перетинає; 5) відрізки AB, BC, CD не перетинають пряму; 6) відрізки AC, BC і BD перетинають пряму? Поясніть відповідь.

19. Дано п'ять точок і пряма, що не проходить через жодну з цих точок. Відомо, що три точки лежать в одній півплощині відносно цієї прямої, а дві точки — в іншій півплощині. Кожну пару точок сполучено відрізком. Скільки відрізків перетинає пряму? Відповідь поясніть.

20. Дано пряму a і точки A, X, Y, Z на цій прямій (мал. 11). Відомо, що точки X і Y лежать по один бік від точки A, точки X і Z також лежать по один бік від точки A. Як розміщені точки Y і Z відносно точки A: по один бік чи по різні боки? Поясніть відповідь.

21. Позначте дві точки A і B. Проведіть півпряму AB.

22. На відрізку AB взято точку C. Серед півпрямих AB, AC, CA, CB назвіть пару півпрямих, які збігаються, і пару доповняльних півпрямих. Поясніть відповідь.

23. Проведіть з однієї точки три довільні промені. Визначте на око кути, утворені цими променями. Перевірте ваші відповіді, вимірюючи кути транспортиром. Виконайте вправу повторно.

24. Промінь a проходить між сторонами кута (cd). Знайдіть кут (cd), якщо: 1) $\angle(ac) = 35°$, $\angle(ad) = 75°$; 2) $\angle(ac) = 57°$, $\angle(ad) = 62°$; 3) $\angle(ac) = 94°$, $\angle(ad) = 85°$.

25. Чи може промінь c проходити між сторонами кута (ab), якщо: 1) $\angle(ac) = 30°$, $\angle(cb) = 80°$, $\angle(ab) = 50°$; 2) $\angle(ac) = 100°$, $\angle(cb) = 90°$; 3) кут (ac) більший за кут (ab)?

26. Між сторонами кута (ab), що дорівнює $60°$, проходить промінь c. Знайдіть кути (ac) і (bc), якщо: 1) кут (ac) на $30°$ більший за кут (bc); 2) кут (ac) в два рази більший за кут

(bc); 3) промінь c ділить кут (ab) пополам; 4) градусні міри кутів (ac) і (bc) відносяться, як 2 : 3.

27. Проведіть пряму. Позначте на цій прямій яку-небудь точку A. Потім візьміть на око точку B цієї прямої так, щоб $AB = 5$ см. Перевірте точність побудови точки B лінійкою. Виконайте вправу повторно, якщо: 1) $AB = 3$ см; 2) $AB = 7$ см; 3) $AB = 10$ см.

28. Побудуйте на око кути $30°$, $45°$, $60°$, $90°$. Перевірте точність побудови транспортиром. Виконайте вправу повторно.

29. Чи існує на півпрямій AB така точка X, відмінна від B, що $AX = AB$? Поясніть відповідь.

30. На промені AB відкладено відрізок AC, менший за відрізок AB. Яка з трьох точок A, B, C лежить між двома іншими? Відповідь поясніть.

31. На промені AB позначено точку C. Знайдіть довжину відрізка BC, якщо: 1) $AB = 1{,}5$ м, $AC = 0{,}3$ м; 2) $AB = 2$ см, $AC = 4{,}4$ см.

32. Побудуйте на око трикутник з рівними сторонами (рівносторонній трикутник). Перевірте точність побудови вимірюванням сторін.

33. На стороні AB трикутника ABC взято точку D. Чому дорівнює сторона AB трикутника, якщо $AD = 5$ см, а $BD = 6$ см?

34. На стороні AB трикутника ABC взято точку D. Чому дорівнює кут C трикутника, якщо $\angle ACD = 30°$, а $\angle BCD = 70°$?

35. Накресліть довільний трикутник. Побудуйте від руки, на око, трикутник, що дорівнює йому. Перевірте правильність побудови, вимірюючи відповідні кути і сторони. Виконайте вправу повторно.

36. Трикутники ABC і PQR рівні. Відомо, що $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 7$ см. Знайдіть сторони трикутника PQR. Поясніть відповідь.

37. Трикутники ABC і PQR рівні. Кути другого трикутника відомі: $\angle P = 40°$, $\angle Q = 60°$, $\angle R = 80°$. Знайдіть кути трикутника ABC.

38. Трикутники ABC і PQR рівні. Відомо, що сторона AB дорівнює 10 м, а кут $C = 90°$. Чому дорівнює сторона PQ і кут R? Поясніть відповідь.

39. Трикутники ABC, PQR і XYZ рівні. Відомо, що $AB = 5$ см,

$QR = 6$ см, $ZX = 7$ см. Знайдіть решту сторін кожного трикутника.

40. Дано трикутник ABC. Чи існує інший трикутник ABD, що дорівнює даному?

41. Чи може пряма, що перетинає одну з двох паралельних прямих, не перетинати другу? Поясніть відповідь.

42. Дано дві прямі, що перетинаються. Чи можна провести третю пряму, паралельну кожній з двох даних?

43. Чи може пряма, що не проходить через жодну з вершин трикутника, перетинати кожну його сторону? Чому?

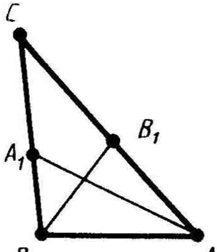
44*.[1] Дано чотири точки: A, B, C і D. Відомо, що точки A, B, C лежать на одній прямій і точки B, C, D також лежать на одній прямій. Доведіть, що всі чотири точки лежать на одній прямій.

45*. Дано чотири прямі a, b, c і d. Відомо, що прямі a, b, c перетинаються в одній точці й прямі b, c, d також перетинаються в одній точці. Доведіть, що всі чотири прямі проходять через одну точку.

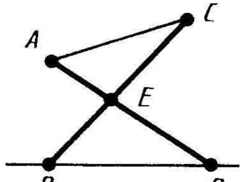
46*. Точки A, B, C, D не лежать на одній прямій. Відомо, що пряма AB перетинає відрізок CD, а пряма CD перетинає відрізок AB. Доведіть, що відрізки AB і CD перетинаються.

47*. Дано трикутник ABC. На стороні AC взято точку B_1, а на стороні BC — точку A_1. Доведіть, що відрізки AA_1 і BB_1 перетинаються (мал. 28).

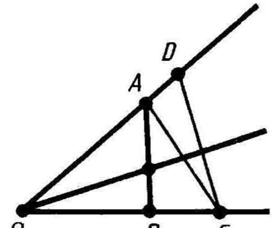
48*. Відрізки AB і CD не лежать на одній прямій і перетинаю-



Мал. 28



Мал. 29



Мал. 30

[1] Зірочкою (*) позначено задачі підвищеної складності.

ться в точці E. Доведіть, що відрізок AC не перетинає пряму BD (мал. 29).

49* Доведіть, що коли промінь, який виходить з вершини кута, перетинає відрізок AB з кінцями на сторонах кута, то він перетинає: 1) відрізок AC з кінцями на сторонах кута; 2) довільний відрізок CD з кінцями на сторонах кута (мал. 30).

50. Доведіть, що дві прямі або паралельні, або перетинаються в одній точці.

51* Точки A і C належать прямій a. На півпрямій CA відкладено відрізок CB, більший за відрізок CA. 1) Яка з трьох точок A, B, C лежить між двома іншими? Поясніть відповідь. 2) Доведіть, що точка A розбиває пряму a на дві півпрямі: AB і AC.

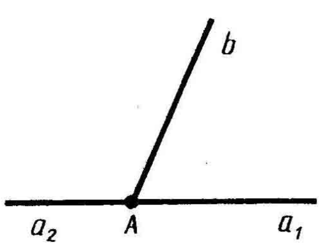
§ 2. СУМІЖНІ І ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ

14. СУМІЖНІ КУТИ

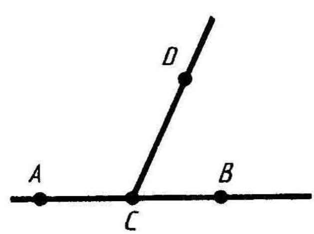
Означення. Два кути називаються *суміжними*, якщо в них одна сторона спільна, а інші сторони цих кутів є доповняльними півпрямими.

На малюнку 31 кути (a_1b) і (a_2b) суміжні. У них сторона b спільна, а сторони a_1 і a_2 є доповняльними півпрямими.

Нехай C — точка на прямій AB, що лежить між точками A і B, а D — точка, що не лежить на прямій AB (мал. 32). Тоді кути BCD і ACD суміжні. У них сторона CD спільна. Сторони CA і CB — доповняльні півпрямі прямої AB, оскільки точки A і B цих півпрямих розділені початковою точкою C.



Мал. 31



Мал. 32

Т е о р е м а 2.1. ***Сума суміжних кутів дорівнює 180°.***

Д о в е д е н н я. Нехай $\angle(a_1 b)$ і $\angle(a_2 b)$ — дані суміжні кути (мал. 31). Промінь b проходить між сторонами a_1 і a_2 розгорнутого кута. Тому сума кутів $(a_1 b)$ і $(a_2 b)$ дорівнює розгорнутому куту, тобто 180°. Теорему доведено.

Із теореми 2.1 випливає, що ***коли два кути рівні, то суміжні з ними кути також рівні.***

Із теореми 2.1 також випливає, що ***коли кут не розгорнутий, то його градусна міра менша від 180°.***

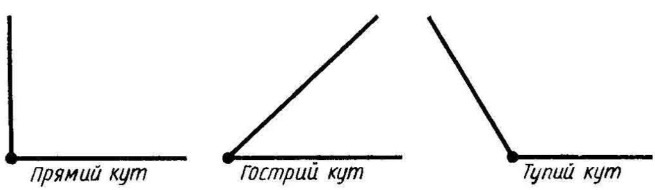
З а д а ч а (3). Знайдіть суміжні кути, якщо один з них у два рази більший за другий.

Р о з в' я з а н н я. Позначимо градусну міру меншого кута через x. Тоді градусна міра більшого кута буде $2x$. Сума кутів дорівнює 180°. Отже, $x + 2x = 180°$, $3x = 180°$. Звідси $x = 60°$. Виходить, наші суміжні кути дорівнюють 60° і 120°.

Кут, що дорівнює 90°, називається *прямим кутом.*

З теореми про суму суміжних кутів випливає, що ***кут, суміжний з прямим кутом, є прямий кут.***

Кут, менший за 90°, називається *гострим кутом.* Кут, більший за 90° і менший від 180°, називається *тупим.*

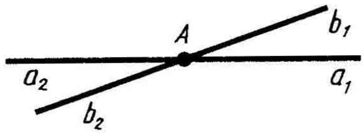


Мал. 33

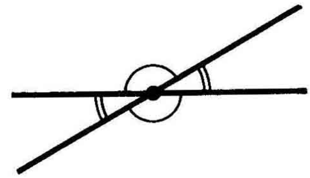
Оскільки сума суміжних кутів дорівнює 180°, то кут, суміжний з гострим кутом, тупий, а кут, суміжний з тупим,— гострий. На малюнку 33 зображено три види кутів.

15. ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ

О з н а ч е н н я. Два кути називаються *вертикальними,* якщо сторони одного кута є доповняльними півпрямими сторін другого.



Мал. 34



Мал. 35

На малюнку 34 кути (a_1b_1) і (a_2b_2) вертикальні. Сторони a_2 і b_2 другого кута — доповняльні півпрямі сторін a_1 і b_1 першого кута.

Т е о р е м а 2.2. ***Вертикальні кути рівні.***

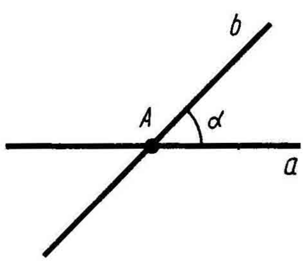
Д о в е д е н н я. Нехай (a_1b_1) і (a_2b_2) — дані вертикальні кути (мал. 34). Кут (a_1b_2) суміжний з кутом (a_1b_1) і кутом (a_2b_2). Звідси за теоремою про суму суміжних кутів робимо висновок, що кожний з кутів (a_1b_1) і (a_2b_2) доповнює кут (a_1b_2) до $180°$, тобто кути (a_1b_1) і (a_2b_2) рівні. Теорему доведено.

З а д а ч а (9). Сума двох кутів, утворених у результаті перетину двох прямих, дорівнює $50°$. Знайдіть ці кути.

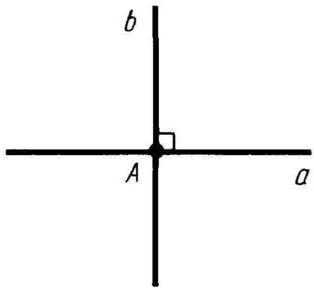
Р о з в' я з а н н я. Два кути, які утворилися в результаті перетину двох прямих, або суміжні, або вертикальні (мал. 35). Дані кути не можуть бути суміжними, оскільки їх сума дорівнює $50°$, а сума суміжних кутів становить $180°$. Отже, вони вертикальні. Оскільки вертикальні кути рівні й за умовою їх сума $50°$, то кожний з них дорівнює $25°$.

16. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ПРЯМІ

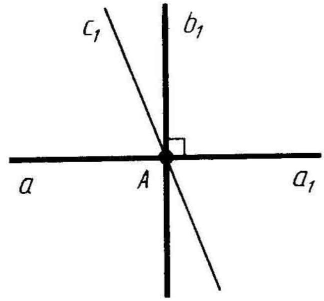
Нехай a і b — дві прямі, що перетинаються у точці A (мал. 36). Кожна з цих прямих ділиться точкою A на дві півпрямі. Півпрямі однієї прямої утворюють з півпрямими другої прямої чотири кути. Нехай α — один з цих кутів. Будь-який з решти трьох кутів буде або суміжним з кутом α, або вертикальним з кутом α. Звідси випливає, що коли один з кутів прямий, то решта кутів теж прямі. У цьому випадку говорять, що прямі перетинаються під прямим кутом.



Мал. 36



Мал. 37



Мал. 38

О з н а ч е н н я. Дві прямі називаються *перпендикулярними,* якщо вони перетинаються під прямим кутом (мал. 37).

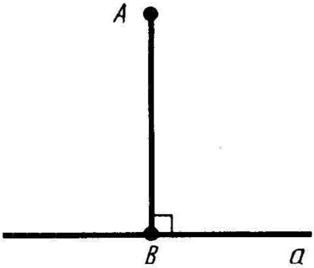
Перпендикулярність прямих позначають знаком $\perp$. Запис $a \perp b$ читається так: «Пряма a перпендикулярна до прямої b».

Т е о р е м а 2.3. ***Через кожну точку прямої можна провести перпендикулярну до неї пряму і до того ж тільки одну.***

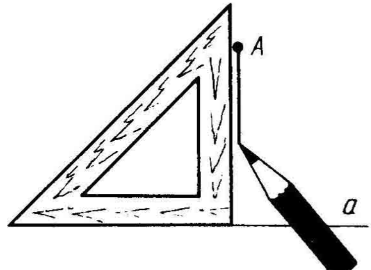
Д о в е д е н н я. Нехай a — дана пряма і A — точка на ній. Позначимо через a_1 одну з півпрямих прямої a з початком у точці A (мал. 38). Відкладемо від півпрямої a_1 кут (a_1b_1), що дорівнює 90°. Тоді пряма, яка містить промінь b_1, буде перпендикулярна до прямої a.

Припустимо, що існує інша пряма, яка теж проходить через точку A і перпендикулярна до прямої a. Позначимо через c_1 півпряму цієї прямої, що лежить в одній півплощині з променем b_1.

Кути (a_1b_1) і (a_1c_1), кожний з яких дорівнює 90°, відкладено в одну півплощину від півпрямої a_1. Але від півпрямої a_1 у дану



Мал. 39



Мал. 40

півплощину можна відкласти тільки один кут, що дорівнює 90°. Тому не може бути іншої прямої, яка проходить через точку A і перпендикулярна до прямої a. Теорему доведено.

Означення. *Перпендикуляром* до даної прямої називається відрізок прямої, перпендикулярної до даної прямої, який має одним із своїх кінців точку їх перетину. Цей кінець відрізка називається *основою* перпендикуляра.

На малюнку 39 перпендикуляр AB проведено з точки A до прямої a. Точка B — основа перпендикуляра. Для побудови перпендикуляра користуються косинцем (мал. 40).

17. ДОВЕДЕННЯ ВІД СУПРОТИВНОГО

Спосіб доведення, який ми застосували до теореми 2.3, називається доведенням від супротивного. Цей спосіб доведення полягає в тому, що спочатку робимо припущення, протилежне тому, яке стверджується теоремою. Потім міркуваннями, спираючись на аксіоми і вже доведені теореми, приходимо до висновку, що суперечить або умові теореми, або одній з аксіом, або доведеній раніше теоремі. На цій основі робимо висновок, що наше припущення неправильне, а тому правильне твердження теореми.

Пояснимо це на прикладі доведення теореми 2.3. У теоремі стверджується, що через кожну точку прямої можна провести тільки одну перпендикулярну до неї пряму. Припустивши, що таких прямих можна провести дві, ми дійшли висновку, що від даної півпрямої у дану півплощину можна відкласти два кути з однією і тією самою градусною мірою (90°). А це суперечить аксіомі відкладання кутів, за якою від даної півпрямої у дану півплощину можна відкласти лише один кут з даною градусною мірою.

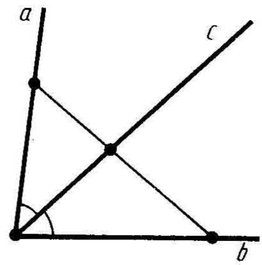
18. БІСЕКТРИСА КУТА

Означення[1]. *Бісектрисою* кута називається промінь, який виходить з вершини кута, проходить між його сторонами і ділить кут пополам.

[1] Далі слово «означення» записувати не будемо, а означуване поняття виділятимемо *курсивом*.

На малюнку 41 ви бачите кут (ab). Промінь c виходить з вершини кута, проходить між його сторонами і ділить кут пополам:

$$\angle(ac) = \angle(bc) = \frac{\angle(ab)}{2}.$$



Мал. 41

Задача 17. Доведіть, що бісектриса кута утворює з його сторонами кути не більші за 90°.

Розв'язання. Як ми знаємо, градусна міра будь-якого кута не більша за 180°. Тому половина його не більша за 90°.

19. ЩО ПОТРІБНО РОБИТИ, ЩОБ ДОБРЕ ВСТИГАТИ З ГЕОМЕТРІЇ

Під час вивчення геометрії незнання чого-небудь з пройденого матеріалу може стати причиною нерозуміння нового матеріалу. Наведемо приклад.

Припустимо, на уроці вчитель доводить теорему про рівність вертикальних кутів. Як ви знаєте, для доведення цієї теореми використовують означення суміжних кутів і теорему про суму суміжних кутів. Якщо ви не знаєте, які кути називаються суміжними, не знаєте теореми про суму суміжних кутів, то ви не зрозумієте цього доведення. В результаті цей урок буде для вас даремно витраченим часом. І до вашого незнання про суміжні кути додається незнання теореми про рівність вертикальних кутів.

Тому, щоб добре встигати з геометрії, треба знати основні результати вивченого матеріалу. А для цього слід повторювати вивчений матеріал за контрольними запитаннями.

Повторювати пройдений матеріал за контрольними запитаннями можна так. Прочитайте запитання. Усвідомте його зміст. Якщо треба дати означення якої-небудь фігури, дайте таке означення про себе.

Корисно зробити від руки малюнок фігури, означення якої маєте дати. Якщо у запитанні йдеться про теорему, сформулюйте її, з'ясуйте, в чому полягає умова і висновок теореми.

Зробіть від руки малюнок, який ілюструє зміст теореми. Доведення теореми при кожному повторенні робити не обов'язково.

Повторюйте пройдений матеріал щоразу, коли у процесі вивчення нового матеріалу ви виявили незнання чого-небудь.

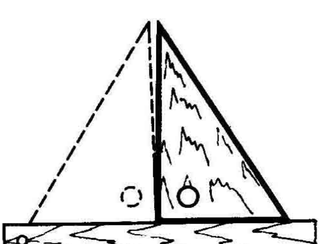
КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які кути називаються суміжними?
2. Доведіть, що сума суміжних кутів дорівнює 180°.
3. Доведіть, що коли два кути рівні, то суміжні з ними кути теж рівні.
4. Який кут називається прямим (гострим, тупим)?
5. Доведіть, що кут, суміжний з прямим, прямий.
6. Які кути називаються вертикальними?
7. Доведіть, що вертикальні кути рівні.
8. Доведіть, що коли при перетині двох прямих один з кутів прямий, то решта кутів теж прямі.
9. Які прямі називаються перпендикулярними? Який знак використовується для позначення перпендикулярності прямих?
10. Доведіть, що через будь-яку точку прямої можна провести перпендикулярну до неї пряму і тільки одну.
11. Що таке перпендикуляр до прямої?
12. Поясніть, у чому полягає доведення від супротивного.
13. Що називається бісектрисою кута?

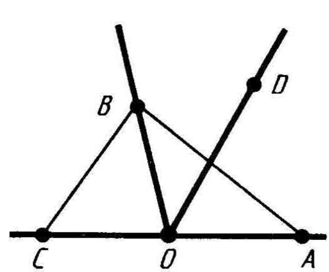
ЗАДАЧІ

1. Знайдіть кути, суміжні з кутами 30°; 45°; 60°; 90°.
2. Чи можуть два суміжні кути бути обидва: 1) гострими; 2) тупими; 3) прямими? Обґрунтуйте відповідь.
3. Знайдіть суміжні кути, якщо один з них у два рази більший від другого.
4. Знайдіть суміжні кути, якщо: 1) один з них на 30° більший від другого; 2) їх різниця дорівнює 40°; 3) один з них у три рази менший від другого; 4) вони рівні.
5. Який кут утворюють годинна і хвилинна стрілки годинника, коли вони показують: 1) 6 год; 2) 3 год; 3) 4 год?

6. Знайдіть суміжні кути, якщо їх градусні міри відносяться, як: 1) 2 : 3; 2) 3 : 7; 3) 11 : 25; 4) 22 : 23.
7. Один з кутів, утворених в результаті перетину двох прямих, дорівнює 30°. Чому дорівнює решта кутів?
8. Чому дорівнює кут, якщо два суміжні з ним кути становлять в сумі 100°?
9. Сума двох кутів, утворених в результаті перетину двох прямих, дорівнює 50°. Знайдіть ці кути.
10. Один з кутів, утворених в результаті перетину двох прямих, у 4 рази більший від другого. Знайдіть ці кути.
11. Один з кутів, утворених в результаті перетину двох прямих, на 50° менший від другого. Знайдіть ці кути.
12. Знайдіть кути, які утворюються в результаті перетину двох прямих, якщо сума трьох з них дорівнює 270°.
13. Доведіть, що коли три з чотирьох кутів, утворених в результаті перетину двох прямих, рівні, то прямі перпендикулярні.
14. Як лінійкою перевірити, чи прямий кут у косинця (мал. 42)?
15. Чому дорівнює кут між бісектрисою і стороною даного кута, який дорівнює: 1) 30°; 2) 52°; 3) 172°?
16. Знайдіть кут, якщо його бісектриса утворює із стороною кут, який дорівнює: 1) 60°; 2) 75°; 3) 89°.
17. Доведіть, що бісектриса кута утворює з його сторонами кути не більші за 90°.
18.* Доведіть, що коли промінь виходить з вершини кута і утворює з його сторонами рівні гострі кути, то він є бісектрисою кута.
19. Знайдіть кут між бісектрисами суміжних кутів.
20. Доведіть, що бісектриси вертикальних кутів лежать на одній прямій.



Мал. 42



Мал. 43

21. Знайдіть кут між бісектрисою і продовженням однієї із сторін даного кута, який дорівнює: 1) 50°; 2) 90°; 3) 150°.

22* З вершини O суміжних кутів AOB і COB проведено промінь OD у півплощину, де проходить спільна сторона кутів OB (мал. 43). Доведіть, що промінь OD перетинає або відрізок AB, або відрізок BC. Який з відрізків перетинає промінь OD, якщо кут AOD менший (більший) від кута AOB? Поясніть відповідь.

23. З вершини розгорнутого кута (aa_1) в одну півплощину проведено прямі b і c. Чому дорівнює кут (bc), якщо: 1) $\angle(ab) = 50°$, $\angle(ac) = 70°$; 2) $\angle(a_1b) = 50°$, $\angle(ac) = 70°$; 3) $\angle(ab) = 60°$, $\angle(a_1c) = 30°$?

24. З вершини розгорнутого кута (aa_1), в одну півплощину проведено промені b і c. Відомо, що $\angle(ab) = 60°$, $\angle(ac) = 30°$. Знайдіть кути (a_1b), (a_1c), і (bc).

25. Від півпрямої AB у різних півплощинах відкладено кути BAC і BAD. Знайдіть кут CAD, якщо: 1) $\angle BAC = 80°$, $\angle BAD = 170°$; 2) $\angle BAC = 87°$, $\angle BAD = 98°$; 3) $\angle BAC = 140°$, $\angle BAD = 30°$; 4) $\angle BAC = 60°$, $\angle BAD = 70°$.

26* Дано три промені a, b і c із спільним початком. Відомо, що $\angle(ab) = \angle(ac) = \angle(bc) = 120°$. 1) Чи проходить один з цих променів між сторонами кута, утвореного двома іншими променями? 2) Чи може пряма перетинати усі три промені? Поясніть відповідь.

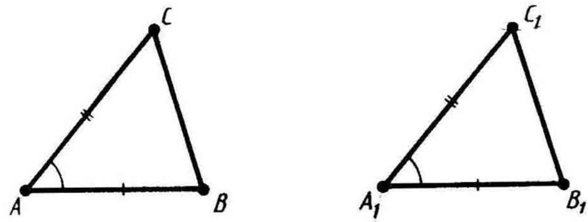
§ 3. ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

20. ПЕРША ОЗНАКА РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

Теорема 3.1 (ознака рівності трикутників за двома сторонами і кутом між ними). ***Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні.***

Доведення. Нехай у трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. Доведемо, що трикутники рівні (мал. 44).

Нехай $A_1B_2C_2$ — трикутник, що дорівнює трикутнику ABC, і його вершина B_2 лежить на промені A_1B_1, а вершина C_2 — у тій самій півплощині відносно прямої A_1B_1, де лежить вершина C_1

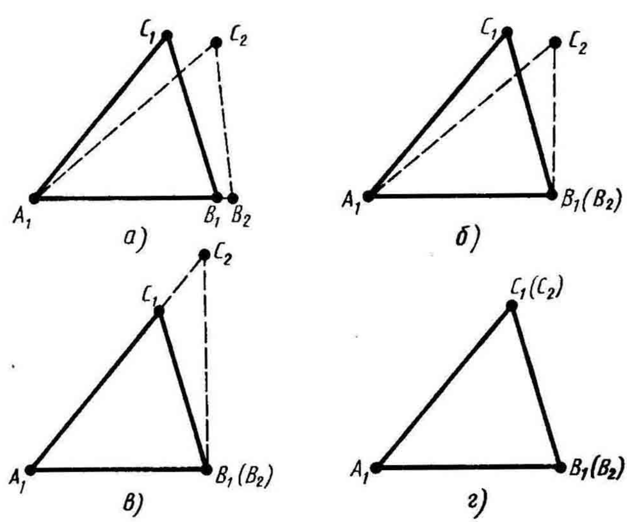


Мал. 44

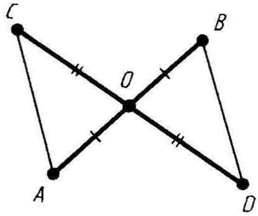
(мал. 45, *а*). Оскільки $A_1B_1 = A_1B_2$, то вершина B_2 збігається з вершиною B_1 (мал. 45, *б*). Через те що $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_1C_2$, промінь A_1C_2 збігається з променем A_1C_1 (мал. 45, *в*). Оскільки $A_1C_1 = A_1C_2$, то вершина C_2 збігається з вершиною C_1 (мал. 45, *г*). Отже, трикутник $A_1B_1C_1$ збігається з трикутником $A_1B_2C_2$, тобто дорівнює трикутнику ABC. Теорему доведено.

Задача (1). Відрізки AB і CD перетинаються в точці O, яка є серединою кожного з них. Чому дорівнює відрізок BD, якщо відрізок $AC = 10$ м?

Розв'язання. Трикутники AOC і BOD рівні за першою ознакою рівності трикутників (мал. 46). У них кути



Мал. 45



Мал. 46

AOC і BOD рівні як вертикальні, а $OA = OB$ і $OC = OD$, тому що точка O — середина відрізків AB і CD. З рівності трикутників AOC і BOD випливає рівність сторін AC і BD. Оскільки за умовою задачі $AC = 10$ м, то і $BD = 10$ м.

21. ВИКОРИСТАННЯ АКСІОМ ПРИ ДОВЕДЕННІ ТЕОРЕМ

Як ми знаємо, під час доведення теорем дозволяється користуватися аксіомами і раніше доведеними теоремами. Як правило, у процесі доведення посилаються не на номер аксіоми за списком, а на її зміст. Саме так було зроблено, коли доводили першу ознаку рівності трикутників (теорема 3.1). Розглянемо ще раз це доведення, називаючи аксіоми, які було використано.

Доведення починається словами: «Нехай $A_1B_2C_2$ — трикутник, що дорівнює трикутнику ABC, з вершиною B_2 на промені A_1B_1 і вершиною C_2 у тій самій півплощині відносно прямої A_1B_1, де лежить вершина C_1». Такий трикутник, як ми знаємо, існує за аксіомою VIII.

Далі стверджується, що вершини B_1 і B_2 збігаються на тій підставі, що $A_1B_1 = A_1B_2$. Тут використано аксіому відкладання відрізків (аксіома VI).

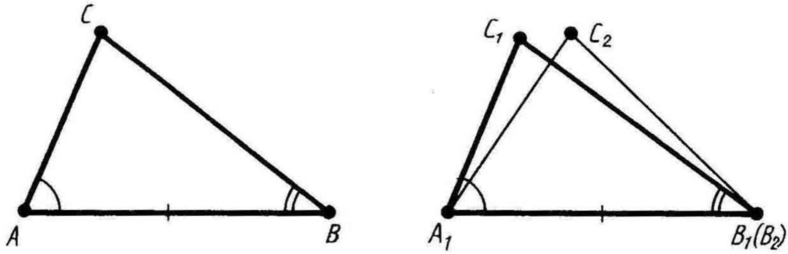
Потім стверджується, що промені A_1C_2 і A_1C_1 теж збігаються, тому що $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_1C_2$. Тут використано аксіому відкладання кутів (аксіома VII).

Нарешті стверджуємо, що й вершини C_1 і C_2 збігаються, оскільки $A_1C_1 = A_2C_2$. Тут знову використано аксіому VI.

Бачимо, що доведення теореми 3.1 ґрунтується лише на аксіомах.

22. ДРУГА ОЗНАКА РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

Теорема 3.2 (ознака рівності трикутників за стороною і прилеглими до неї кутами). ***Якщо сторона і прилеглі до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні й при-***



Мал. 47

леглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Доведення. Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ — два трикутники, у яких $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ і $\angle B = \angle B_1$ (мал. 47). Доведемо, що трикутники рівні.

Нехай $A_1B_2C_2$ — трикутник, що дорівнює трикутнику ABC, і його вершина B_2 лежить на промені A_1B_1, а вершина C_2 — у тій самій півплощині відносно прямої A_1B_1, де лежить вершина C_1.

Оскільки $A_1B_2 = A_1B_1$, то вершина B_2 збігається з вершиною B_1. Через те що $\angle B_1A_1C_2 = \angle B_1A_1C_1$ і $\angle A_1B_1C_2 = \angle A_1B_1C_1$, промінь A_1C_2 збігається з променем A_1C_1, а промінь B_1C_2 — з променем B_1C_1. Звідси випливає, що вершина C_2 збігається з вершиною C_1.

Отже, трикутник $A_1B_1C_1$ збігається з трикутником $A_1B_2C_2$, тобто дорівнює трикутнику ABC. Теорему доведено.

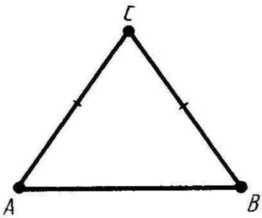
23. РІВНОБЕДРЕНИЙ ТРИКУТНИК

Трикутник називається *рівнобедреним,* якщо в нього дві сторони рівні. Ці рівні сторони називаються *бічними сторонами,* а третя сторона називається *основою* трикутника.

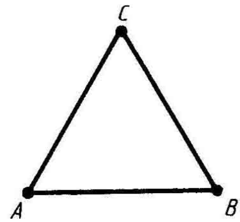
На малюнку 48 зображено рівнобедрений трикутник ABC. У нього бічні сторони AC і BC, а основа AB.

Теорема 3.3 (властивість кутів рівнобедреного трикутника). ***У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.***

Доведення. Нехай ABC — рівнобедрений трикутник з основою AB (мал. 48). Доведемо, що в нього $\angle A = \angle B$.



Мал. 48



Мал. 49

Трикутник CAB дорівнює трикутнику CBA за першою ознакою рівності трикутників. Справді, $CA = CB$, $CB = CA$, $\angle C = \angle C$. З рівності трикутників випливає, що $\angle A = \angle B$. Теорему доведено.

Трикутник, у якого всі сторони рівні, називається *рівностороннім.*

З а д а ч а (12). Доведіть, що у рівносторонньому трикутнику всі кути рівні.

Р о з в' я з а н н я. Нехай ABC — даний трикутник з рівними сторонами: $AB = BC = CA$ (мал. 49). Оскільки $AB = BC$, то цей трикутник рівнобедрений з основою AC. За теоремою 3.3 $\angle C = \angle A$. Через те що $BC = CA$, трикутник ABC рівнобедрений з основою AB. За теоремою 3.3 $\angle A = \angle B$. Таким чином, $\angle C = \angle A = \angle B$, тобто всі кути трикутника рівні.

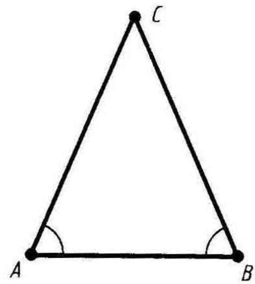
24. ОБЕРНЕНА ТЕОРЕМА

Т е о р е м а 3.4 (ознака рівнобедреного трикутника). ***Якщо в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений.***

Д о в е д е н н я. Нехай ABC — трикутник, у якого $\angle A = \angle B$ (мал. 50). Доведемо, що він рівнобедрений з основою AB.

Трикутник ABC дорівнює трикутнику BAC за другою ознакою рівності трикутників. Справді, $AB = BA$, $\angle B = \angle A$, $\angle A = \angle B$. З рівності трикутників випливає, що $AC = BC$. Отже, за означенням трикутник ABC — рівнобедрений. Теорему доведено.

Теорема 3.4 називається *оберненою* до теореми 3.3. Висновок теореми 3.3 є умовою теореми 3.4, а умова теореми 3.3 є висновкком теореми 3.4. Не кожна теорема має обернену, тобто якщо дана теорема правильна, то обернена теорема може бути неправильною. Пояснимо це на прикладі теореми про вертикальні кути. Цю теорему можна сформулювати так: якщо два кути вертикальні, то вони рівні. Обернена до неї теорема мала б бути такою: якщо два кути рівні, то вони вертикальні. А це, звичайно, неправильно. Два рівні кути зовсім не обов'язково повинні бути вертикальними.



Мал. 50

Задача (16). Сформулюйте і доведіть теорему, обернену до твердження задачі 12.

Розв'язання. Умова задачі 12 полягає в тому, що трикутник рівносторонній, а висновок — всі кути трикутника рівні. Тому обернена теорема повинна формулюватися так: якщо у трикутника всі кути рівні, то він рівносторонній.

Доведемо цю теорему. Нехай ABC — трикутник з рівними кутами: $\angle A = \angle B = \angle C$. Оскільки $\angle A = \angle B$, то за теоремою 3.4 $AC = CB$. Оскільки $\angle B = \angle C$, то за теоремою 3.4 $AC = AB$. Таким чином, $AB = AC = CB$, тобто усі сторони трикутника рівні.

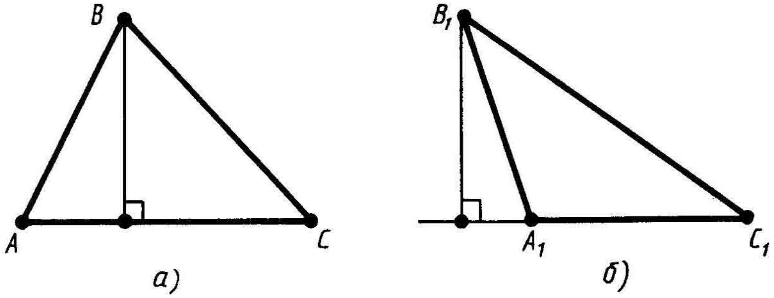
Отже, за означенням трикутник ABC — рівносторонній.

25. ВИСОТА, БІСЕКТРИСА І МЕДІАНА ТРИКУТНИКА

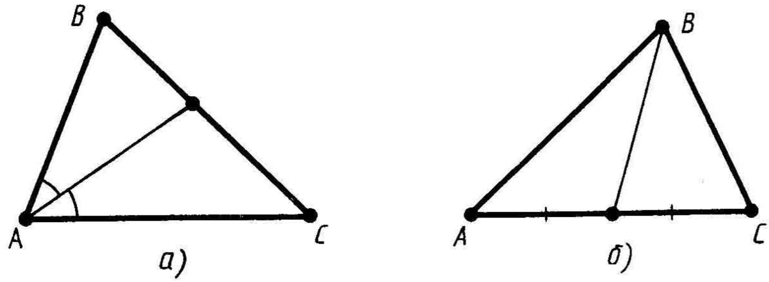
Висотою трикутника, опущеною з даної вершини, називається перпендикуляр, проведений з цієї вершини до прямої, що містить протилежну сторону трикутника.

На малюнку 51 ви бачите два трикутники, у яких проведено висоти з вершин B і B_1. На малюнку 51, *а* основа висоти лежить на стороні трикутника, на малюнку 51, *б* — на продовженні сторони трикутника.

Бісектрисою трикутника, проведеною з даної вершини, називається відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає цю вершину з точкою на протилежній стороні (мал. 52, *а*).



Мал. 51



Мал. 52

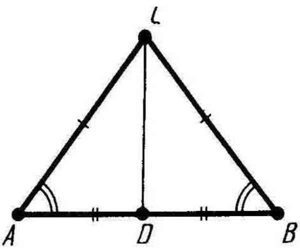
Медіаною трикутника, проведеною з даної вершини, називається відрізок, що сполучає цю вершину із серединою протилежної сторони трикутника (мал. 52, *б*).

26. ВЛАСТИВІСТЬ МЕДІАНИ РІВНОБЕДРЕНОГО ТРИКУТНИКА

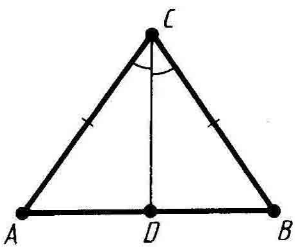
Теорема 3.5 (властивість медіани рівнобедреного трикутника). ***У рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до основи, є бісектрисою і висотою.***

Доведення. Нехай ABC — даний рівнобедрений трикутник з основою AB, а CD — медіана, проведена до основи (мал. 53).

Трикутники CAD і CBD рівні за першою ознакою рівності трикутників. (У них сторони AC і BC рівні, бо трикутник ABC рівнобедрений. Кути CAD і CBD рівні як кути при основі рівнобедреного трикутника. Сторони AD і BD рівні, оскільки D — середина відрізка AB.)



Мал. 53



Мал. 54

З рівності трикутників випливає рівність кутів: $\angle ACD = \angle BCD$, $\angle ADC = \angle BDC$. Оскільки кути ACD і BCD рівні, то CD — бісектриса. Через те що кути ADC і BDC суміжні і рівні, то вони прямі, тому CD — висота трикутника. Теорему доведено.

Задача (28). Доведіть, що бісектриса рівнобедреного трикутника, проведена з вершини, протилежної основі, є медіаною і висотою.

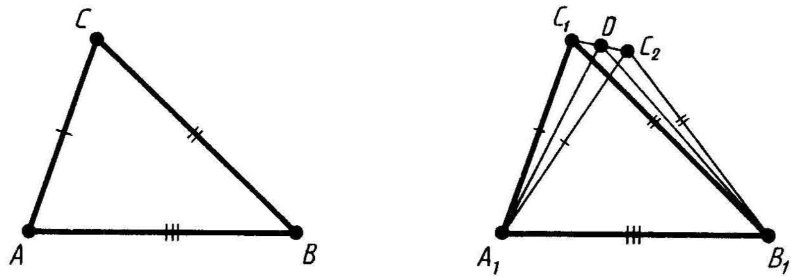
Розв'язання. Нехай ABC — рівнобедрений трикутник з основою AB і CD — його бісектриса (мал. 54). Трикутники ACD і BCD рівні за першою ознакою: у них сторона CD спільна, сторони AC і BC рівні як бічні сторони рівнобедреного трикутника, а кути при вершині C рівні тому, що CD — бісектриса. З рівності трикутників випливає рівність їх сторін AD і BD. Отже, CD — медіана трикутника ABC. А за властивістю медіани рівнобедреного трикутника вона є і висотою.

27. ТРЕТЯ ОЗНАКА РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

Теорема 3.6 (ознака рівності трикутників за трьома сторонами). ***Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні.***

Доведення. Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ — два трикутники, у яких $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ (мал. 55). Треба довести, що трикутники рівні.

Припустимо, що трикутники не рівні. Тоді у них $\angle A \neq \angle A_1$, $\angle B \neq \angle B_1$, $\angle C \neq \angle C_1$. Інакше вони були б рівні за першою ознакою.



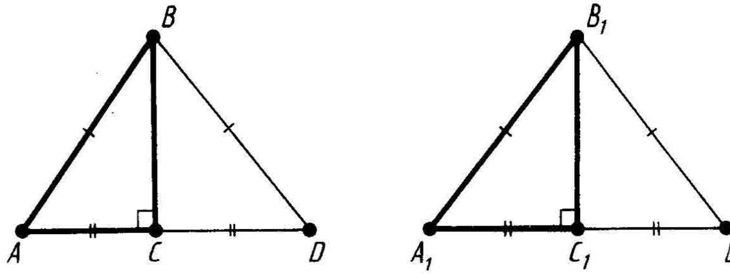
Мал. 55

Нехай $A_1B_1C_2$ — трикутник, що дорівнює трикутнику ABC, а вершина його C_2 лежить в одній півплощині з вершиною C_1 відносно прямої A_1B_1 (мал. 55).

Нехай D — середина відрізка C_1C_2. Трикутники $A_1C_1C_2$ і $B_1C_1C_2$ — рівнобедрені із спільною основою C_1C_2. Тому їх медіани A_1D і B_1D є висотами. Тоді прямі A_1D і B_1D перпендикулярні до прямої C_1C_2. Прямі A_1D і B_1D не збігаються, оскільки точки A_1, B_1, D не лежать на одній прямій. Але через точку D прямої C_1C_2 можна провести лише одну перпендикулярну до неї пряму. Ми дійшли до суперечності. Теорему доведено.

Задача (29). У трикутників ABC і $A_1B_1C_1$: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Розв'язання. Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ — дані трикутники (мал. 56). Побудуємо трикутник CBD, що дорівнює трикутнику CBA, і трикутник $C_1D_1B_1$, що дорівнює трикутнику $C_1A_1B_1$.



Мал. 56

Трикутники ABD і $A_1B_1D_1$ рівні за третьою ознакою. У них $AB = A_1B_1$, за умовою задачі; $AD = A_1D_1$, оскільки $AC = A_1C_1$; $BD = B_1D_1$, через те що $BD = AB$, $B_1D_1 = A_1B_1$. З рівності трикутників ABD і $A_1B_1D_1$ випливає рівність кутів: $\angle A = \angle A_1$. Оскільки за умовою $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, а $\angle A = \angle A_1$ за доведеним, то трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні за першою ознакою.

28. ЯК САМОСТІЙНО ГОТУВАТИСЬ ЗА ПІДРУЧНИКОМ

Може трапитись, що з деяких причин, наприклад через хворобу, ви не були на уроці геометрії. Тоді матеріал цього уроку вам доведеться вивчити самостійно за підручником. Текст підручника слід читати не поспішаючи, окремими реченнями, не переходити до наступного речення, не зрозумівши зміст попереднього. Розглянемо конкретний приклад — доведення третьої ознаки рівності трикутників. Отже, читаємо текст підручника:

«Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам другого трикутника...»

Щоб зрозуміти зміст цього речення, треба знати, що таке трикутник, його сторони і рівність сторін. Ви все це знаєте, тому зміст прочитаного речення вам зрозумілий. Читаємо далі: «то такі трикутники рівні».

Щоб зрозуміти зміст цього речення, потрібно знати, які трикутники називаються рівними. Але ви і це знаєте. Таким чином, зміст теореми вам зрозумілий. Читаємо доведення.

Доведення. «Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ — два трикутники, у яких $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ (мал. 55). Потрібно довести, що трикутники рівні».

Тут все зрозуміло. Позначаються трикутники, які задовольняють умову теореми і рівність яких потрібно довести.

«Припустимо, що трикутники не рівні».

Ви бачите, що робимо припущення, протилежне твердженню теореми. Отже, в процесі подальших міркувань ми маємо прийти до суперечності (доведення від супротивного).

«Тоді у них $\angle A \neq \angle A_1$, $\angle B \neq \angle B_1$, $\angle C \neq \angle C_1$. Інакше вони були б рівні за першою ознакою».

Пригадайте першу ознаку рівності трикутників. Переконайтесь у тому, що коли виконується хоча б одна з рівностей $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, то трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні, а це суперечить зробленому припущенню.

«Нехай $A_1B_1C_2$ — трикутник, що дорівнює трикутнику ABC, і його вершина C_2 лежить в одній півплощині з вершиною C_1 відносно прямої A_1B_1 (мал. 55)».

Тут все зрозуміло. Цією фразою починалось доведення першої і другої ознак.

«Нехай D — середина відрізка C_1C_2».

Ви знаєте, що таке середина відрізка.

«Трикутники $A_1C_1C_2$ і $B_1C_1C_2$ — рівнобедрені із спільною основою C_1C_2».

Щоб зрозуміти зміст цього твердження, потрібно знати, який трикутник називається рівнобедреним і яка його сторона називається основою.

«Тому їх медіани A_1D і B_1D є висотами».

Зміст цього речення вам зрозумілий. Ви знаєте, що таке медіана, висота, і знаєте властивість медіани рівнобедреного трикутника.

«Отже, прямі A_1D і B_1D перпендикулярні до прямої C_1C_2».

Ясно.

«Прямі A_1D і B_1D не збігаються, оскільки точки A_1, B_1, D не лежать на одній прямій».

Зрозуміло. Якби точка D лежала на прямій A_1B_1, то точки C_1 і C_2 лежали б у різних півплощинах відносно прямої A_1B_1.

«Але через точку D прямої C_1C_2 можна провести лише одну перпендикулярну до неї пряму».

Ясно. Ви знаєте таку теорему.

«Ми прийшли до суперечності».

Зрозуміло.

«Теорему доведено».

? КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

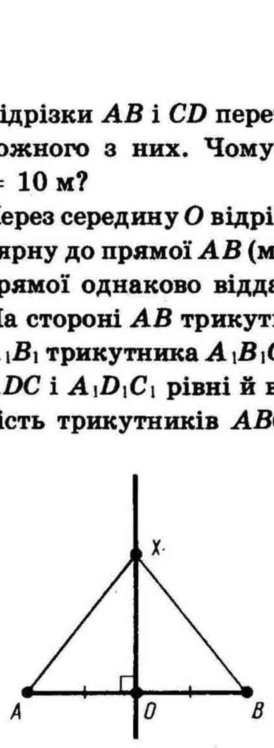
1. Доведіть першу ознаку рівності трикутників. Які аксіоми використовуються при доведенні теореми 3.1?
2. Сформулюйте і доведіть другу ознаку рівності трикутників.
3. Який трикутник називається рівнобедреним? Які сторони

рівнобедреного трикутника називаються бічними сторонами? Яка сторона називається основою?

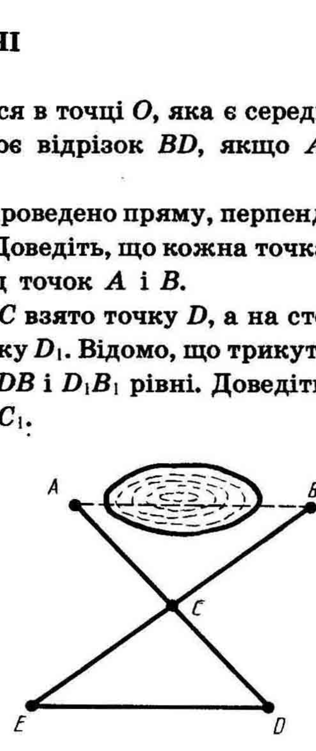
4. Доведіть, що у рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.
5. Який трикутник називається рівностороннім?
6. Доведіть, що коли у трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений.
7. Поясніть, що таке обернена теорема. Наведіть приклад. Чи для кожної теореми правильна обернена?
8. Що таке висота трикутника?
9. Що таке бісектриса трикутника?
10. Що таке медіана трикутника?
11. Доведіть, що у рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до основи, є висотою і бісектрисою.
12. Доведіть третю ознаку рівності трикутників.

ЗАДАЧІ

1. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O, яка є серединою кожного з них. Чому дорівнює відрізок BD, якщо $AC = 10$ м?
2. Через середину O відрізка AB проведено пряму, перпендикулярну до прямої AB (мал. 57). Доведіть, що кожна точка цієї прямої однаково віддалена від точок A і B.
3. На стороні AB трикутника ABC взято точку D, а на стороні A_1B_1 трикутника $A_1B_1C_1$ — точку D_1. Відомо, що трикутники ADC і $A_1D_1C_1$ рівні й відрізки DB і D_1B_1 рівні. Доведіть рівність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$.

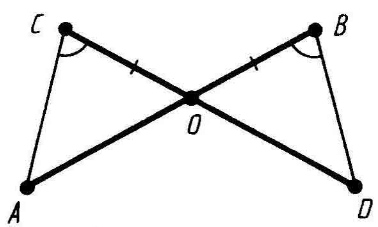


Мал. 57

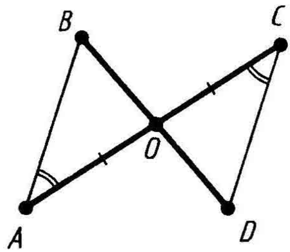


Мал. 58

4. Щоб виміряти на місцевості відстань між двома точками A і B, між якими не можна пройти по прямій (мал. 58), вибирають таку точку C, з якої можна пройти до точки A і до точки B і з якої видно обидві ці точки. Провішують [1] відстані AC і BC, продовжують їх за точку C і відкладають $CD = AC$ і $EC = CB$. Тоді відрізок ED дорівнює шуканій відстані. Поясніть чому.
5. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O (мал. 59). Доведіть рівність трикутників ACO і DBO, коли відомо, що кут ACO дорівнює куту DBO і $BO = CO$.
6. Відрізки AC і BD перетинаються в точці O (мал. 60). Доведіть рівність трикутників BAO і DCO, коли відомо, що кут BAO дорівнює куту DCO і $AO = CO$.
7.* Доведіть рівність трикутників за медіаною і кутами, на які вона розбиває кут трикутника.
8. Щоб виміряти на місцевості відстань між двома точками A і B, з яких одна (точка A) неприступна, провішують напрям відрізка AB (мал. 61) та на його продовженні відкладають довільний відрізок BE. Вибирають на місцевості точку D, з якої видно точку A і можна пройти до точок B і E. Провішують прямі BDQ і EDF і вимірюють $FD = DE$ і $DQ = BD$. Далі йдуть уздовж прямої FQ, дивлячись на точку A, поки не знайдуть таку точку H, яка лежить на прямій AD. Тоді HQ дорівнює шуканій відстані. Доведіть це.
9. Периметр (сума довжин сторін) рівнобедреного трикутника дорівнює 1 м, а основа 0,4 м. Знайдіть довжину бічної сторони.

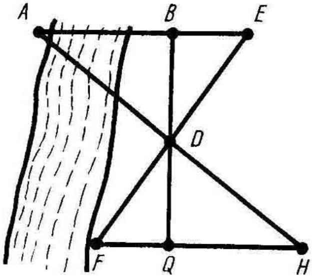


Мал. 59

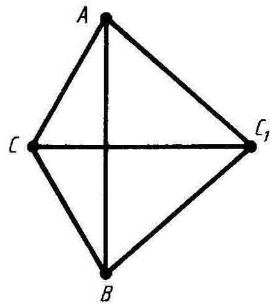


Мал. 60

[1] Напрям визначають жердинами-віхами.



Мал. 61



Мал. 62

10. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 7,5 м, а бічна сторона дорівнює 2 м. Знайдіть основу.

11. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 15,6 м. Знайдіть його сторони, якщо: 1) основа менша за бічну сторону на 3 м; 2) основа більша від бічної сторони на 3 м.

12. Доведіть, що у рівностороннього трикутника всі кути рівні.

13. Від вершини C рівнобедреного трикутника ABC з основою AB відкладено рівні відрізки: CA_1 — на стороні CA і CB_1 — на стороні CB. Доведіть рівність трикутників: 1) CAB_1 і CBA_1; 2) ABB_1 і BAA_1.

14. На основі AB рівнобедреного трикутника ABC дано точки A_1 і B_1. Відомо, що $AB_1 = BA_1$. Доведіть, що трикутники AB_1C і BA_1C рівні.

15. Трикутники ACC_1 і BCC_1 рівні. Їх вершини A і B лежать по різні боки від прямої CC_1. Доведіть, що трикутники ABC і ABC_1 рівнобедрені (мал. 62).

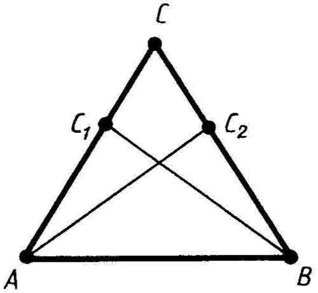
16. Сформулюйте і доведіть теорему, обернену до твердження задачі 12.

17. На сторонах AC і BC трикутника ABC взято точки C_1 і C_2. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений, якщо трикутники ABC_1 і BAC_2 рівні (мал. 63).

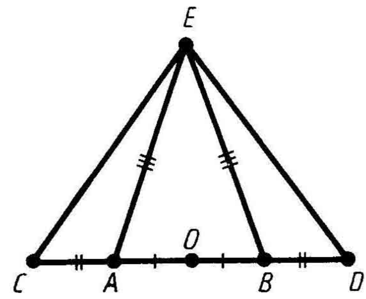
18. 1) Доведіть, що середини сторін рівнобедреного трикутника є також вершинами рівнобедреного трикутника.

2) Доведіть, що середини сторін рівностороннього трикутника є також вершинами рівностороннього трикутника.

19. 1) Накресліть трикутник з гострими кутами. За допомогою косинця і лінійки проведіть у ньому висоти. Виконайте вправу повторно для трикутника, у якого один кут тупий.



Мал. 63



Мал. 64

2) Накресліть трикутник. За допомогою транспортира і лінійки проведіть у ньому бісектриси.

3) Накресліть трикутник. За допомогою лінійки з поділками проведіть у ньому медіани.

20. Доведіть, що у рівнобедреному трикутнику: 1) бісектриси, проведені з вершин при основі, рівні; 2) медіани, проведені з тих самих вершин, також рівні.

21. Доведіть, що у рівних трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$: 1) медіани, проведені з вершин A і A_1, рівні; 2) бісектриси, проведені з вершин A і A_1, рівні.

22. Точки A, B, C, D лежать на одній прямій, причому відрізки AB і CD мають спільну середину. Доведіть, що коли трикутник ABE рівнобедрений з основою AB, то трикутник CDE з основою CD також рівнобедрений (мал. 64).

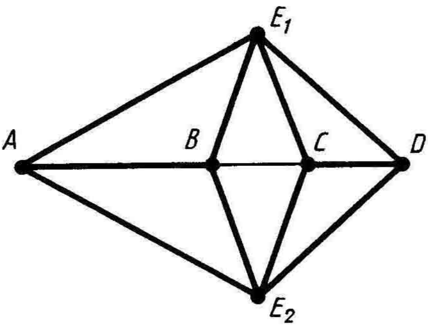
23. Доведіть рівність трикутників за кутом, бісектрисою цього кута і стороною, прилеглою до нього.

24. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC проведено медіану BM. На ній узято точку D. Доведіть рівність трикутників: 1) ABD і CBD; 2) AMD і CMD.

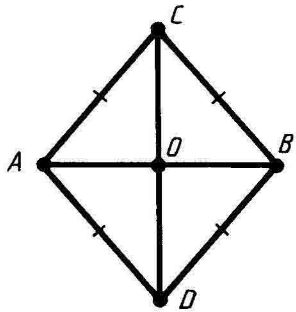
25. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений, якщо у нього: 1) медіана BD є висотою; 2) висота BD є бісектрисою; 3) бісектриса BD є медіаною.

26. Дано два рівнобедрених трикутники із спільною основою. Доведіть, що їх медіани, проведені до основи, лежать на одній прямій.

27. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC проведено медіану BD. Знайдіть її довжину, якщо периметр трикутника ABC дорівнює 50 м, а трикутника ABD — 40 м.



Мал. 65



Мал. 66

28. Доведіть, що бісектриса рівнобедреного трикутника, проведена з вершини, протилежної основі, є медіаною і висотою.

29. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

30. Доведіть, що у рівнобедреному трикутнику висота, опущена на основу, є медіаною і бісектрисою.

31. Трикутники ABC і ABC_1 із спільною основою AB рівнобедрені. Доведіть рівність трикутників ACC_1 і BCC_1.

32* Точки A, B, C, D лежать на одній прямій. Доведіть, що коли трикутники ABE_1 і ABE_2 рівні, то трикутники CDE_1 і CDE_2 також рівні (мал. 65).

33. Два відрізки AB і CD перетинаються у точці O, яка є серединою кожного з них. Доведіть рівність трикутників ACD і BDC.

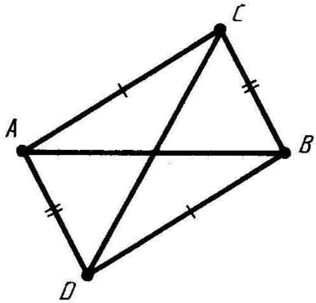
34. Доведіть рівність трикутників за двома сторонами і медіаною, проведеною до однієї з них.

35. Відрізки AB і CD перетинаються. Доведіть, що коли відрізки AC, CB, BD і AD рівні, то промінь AB є бісектрисою кута CAD і промінь CD — бісектрисою кута ACB (мал. 66).

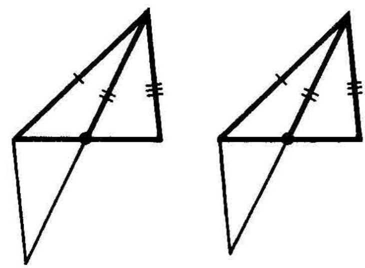
36* Доведіть, що в задачі 35 прямі AB і CD перпендикулярні.

37. Трикутники ABC і BAD рівні, причому точки C і D лежать по різні боки від прямої AB (мал. 67). Доведіть, що: 1) трикутники CBD і DAC рівні; 2) пряма CD ділить відрізок AB пополам.

38. Відрізки AB і CD однакової довжини перетинаються в точці O так, що $AO = OD$. Доведіть рівність трикутників ABC і DCB.



Мал. 67



Мал. 68

39. Доведіть рівність трикутників за двома сторонами і медіаною, що виходять з однієї вершини (мал. 68).

40. Доведіть рівність трикутників за стороною, медіаною, проведеною до неї, і кутами, які утворює медіана із стороною.

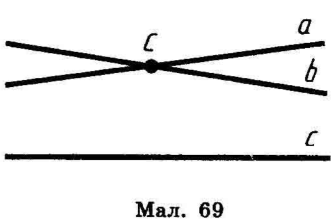
§ 4. СУМА КУТІВ ТРИКУТНИКА

29. ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ

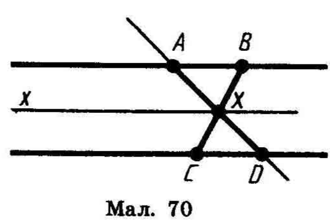
Теорема 4.1. ***Дві прямі, паралельні третій, паралельні одна одній.***

Доведення. Нехай прямі a і b паралельні прямій c. Припустимо, що прямі a і b не паралельні (мал. 69). Тоді вони перетнуться в деякій точці C. Отже, через точку C проходять дві прямі, паралельні прямій c. Але це неможливо, бо через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести не більш як одну пряму, паралельну даній. Теорему доведено.

Задача (4). Прямі AB і CD паралельні. Доведіть, що коли відрізок BC перетинає пряму AD, то точка перетину належить відрізку AD (мал. 70).



Мал. 69



Мал. 70

Р о з в' я з а н н я. Нехай X — точка перетину відрізка BC з прямою AD. Проведемо через неї пряму x, паралельну прямій AB. Вона буде паралельна і прямій CD. Пряма x розбиває площину на дві півплощини. Точки B і C лежать у різних півплощинах, бо відрізок BC перетинає пряму x (в точці X). Точка A лежить у тій самій півплощині, що і B, а точка D — у тій самій півплощині, що і C. Тому відрізок AD перетинає пряму x. А точкою перетину є точка X відрізка BC.

30. КУТИ, УТВОРЕНІ В РЕЗУЛЬТАТІ ПЕРЕТИНУ ДВОХ ПРЯМИХ СІЧНОЮ

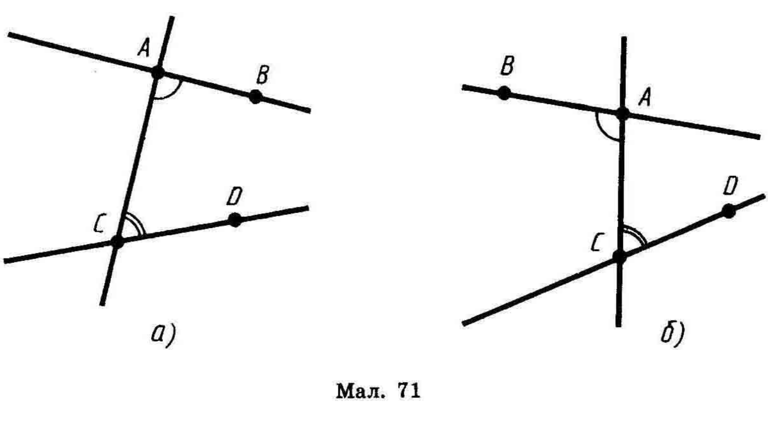
Нехай AB і CD — дві прямі і AC — третя пряма, що перетинає прямі AB і CD (мал. 71). Пряма AC відносно прямих AB і CD називається *січною.*

Пари кутів, які утворюються в результаті перетину прямих AB і CD січною AC, мають спеціальні назви.

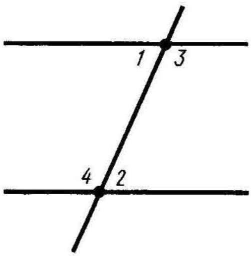
Якщо точки B і D лежать в одній півплощині відносно прямої AC, то кути BAC і DCA називаються *внутрішніми односторонніми* (мал. 71, *а*).

Якщо точки B і D лежать у різних півплощинах відносно прямої AC, то кути BAC і DCA називаються *внутрішніми різносторонніми* (мал. 71, *б*).

Січна AC утворює з прямими AB і CD дві пари внутрішніх односторонніх і дві пари внутрішніх різносторонніх кутів. Внут-



Мал. 71



Мал. 72

рішні різносторонні кути однієї пари, наприклад ∠ 1 і ∠ 2, є суміжними з внутрішніми різносторонніми кутами іншої пари ∠ 3 і ∠ 4 (мал. 72). Тому, якщо внутрішні різносторонні кути однієї пари рівні, то внутрішні різносторонні кути іншої пари також рівні.

Пара внутрішніх різносторонніх кутів, наприклад ∠ 1 і ∠ 2, і пара внутрішніх односторонніх кутів, наприклад ∠ 2 і ∠ 3, мають один кут спільний — ∠ 2, а два інші кути суміжні, ∠ 1 і ∠ 3.

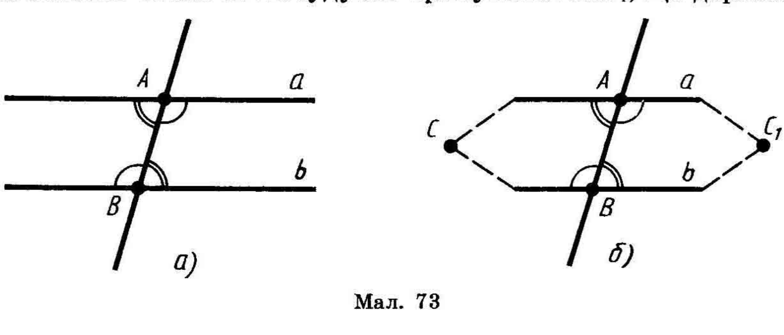
Тому, якщо внутрішні різносторонні кути рівні, то сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°. І навпаки, якщо сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, то внутрішні різносторонні кути рівні.

31. ОЗНАКА ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ

Теорема 4.2 (ознака паралельності прямих). ***Якщо внутрішні різносторонні кути рівні або сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, то прямі паралельні.***

Доведення. Нехай прямі a і b утворюють із січною AB рівні внутрішні різносторонні кути (мал. 73, a). Припустимо, прямі a і b не паралельні, а отже, перетинаються в деякій точці C (мал. 73, b).

Січна AB розбиває площину на дві півплощини. В одній з них лежить точка C. Побудуємо трикутник BAC_1, що дорівнює



Мал. 73

трикутнику ABC, з вершиною C_1 в другій півплощині. За умовою внутрішні різносторонні кути при паралельних a, b і січній AB рівні. Оскільки відповідні кути трикутників ABC і BAC з вершинами A і B рівні, то вони збігаються з внутрішніми різносторонніми кутами. Отже, пряма AC_1 збігається з прямою a, а пряма BC_1 збігається з прямою b. Дістанемо, що через точки C і C_1 проходять дві різні прямі a і b. А це неможливо. Отже, прямі a і b — паралельні.

Якщо при перетині прямих a і b січною AB сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, то, як ми знаємо, внутрішні різносторонні кути рівні. Отже, як було доведено вище, прямі a і b — паралельні. Теорему доведено.

З теореми 4.2 випливає, що ***дві прямі, перпендикулярні до третьої, паралельні.***

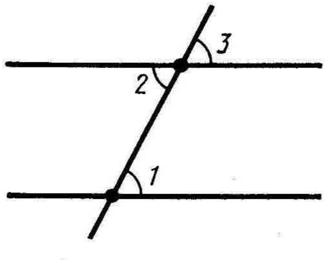
Якщо у парі внутрішніх різносторонніх кутів один з кутів замінити вертикальним йому, то дістанемо пару кутів, які називаються *відповідними кутами*, утвореними в результаті перетину двох прямих січною.

Кути 1 і 2 на малюнку 74 — внутрішні різносторонні, а кути 1 і 3 — відповідні.

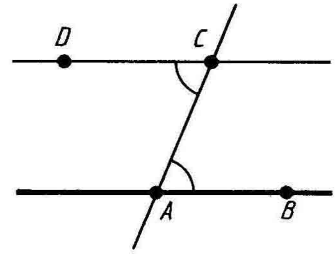
З рівності внутрішніх різносторонніх кутів випливає рівність відповідних кутів і навпаки. Звідси дістанемо ознаку паралельності прямих за відповідними кутами. А саме: ***прямі паралельні, якщо відповідні кути рівні.***

Задача (8). Дано пряму AB і точку C, що не лежить на цій прямій. Доведіть, що через точку C можна провести пряму, паралельну прямій AB.

Розв'язання. Пряма AC розбиває площину на дві півплощини (мал. 75). Точка B лежить в одній з них. Від-



Мал. 74



Мал. 75

кладемо від півпрямої CA у другу півплощину кут ACD, що дорівнює куту CAB. Тоді прямі AB і CD паралельні. Справді, для цих прямих і січної AC кути BAC і DCA внутрішні різносторонні. Оскільки вони рівні, то прямі AB і CD паралельні.

Зіставляючи твердження задачі 8 й аксіоми IX (основної властивості паралельних прямих), приходимо до важливого висновку: ***через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести паралельну їй пряму і тільки одну.***

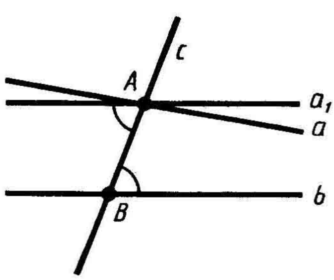
32. ВЛАСТИВІСТЬ КУТІВ, УТВОРЕНИХ ПРИ ПЕРЕТИНІ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ СІЧНОЮ

Теорема 4.3 (обернена до теореми 4.2). ***Якщо дві паралельні прямі перетнуті третьою прямою, то внутрішні різносторонні кути рівні, а сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°.***

Доведення. Нехай a і b — паралельні прямі і c — пряма, яка перетинає їх у точках A і B. Проведемо через точку A пряму a_1 так, щоб внутрішні різносторонні кути, утворені січною c і прямими a_1 і b, були рівні (мал. 76).

За ознакою паралельності прямих прямі a_1 і b паралельні. Оскільки через точку A проходить тільки одна пряма, паралельна прямій b, то пряма a збігається з прямою a_1. Отже, внутрішні різносторонні кути, утворені січною й паралельними прямими a і b, рівні. Теорему доведено.

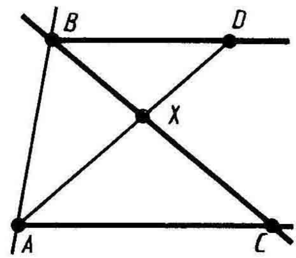
З властивості кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, випливає, що ***коли пряма перпендикулярна до однієї з паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої.***



Мал. 76

Задача (13). Прямі AC і BD паралельні, причому точки A і D лежать по різні боки від січної BC (мал. 77). Доведіть, що: 1) кути DBC і ACB внутрішні різносторонні відносно січної BC; 2) промінь

BC проходить між сторонами кута *ABD*; 3) кути *CAB* і *DBA* внутрішні односторонні відносно січної *AB*.



Мал. 77

Розв'язання. 1) Кути *DBC* і *ACB* внутрішні різносторонні тому, що точки *A* і *D* лежать по різні боки від січної *BC*.

2) Промінь *BC* проходить між сторонами кута *ABD* тому, що він перетинає відрізок *AD* з кінцями на сторонах кута (задача 4).

3) Кути *CAB* і *DBA* внутрішні односторонні тому, що точки *C* і *D* лежать по один бік від січної *AB*, тобто у півплощині, де лежить точка *X* перетину відрізків *BC* і *AD*.

33. СУМА КУТІВ ТРИКУТНИКА

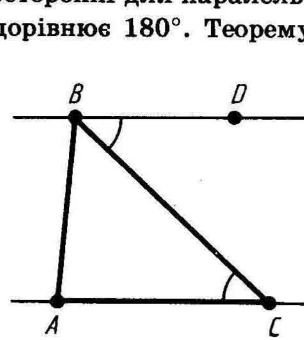
Теорема 4.4. *Сума кутів трикутника дорівнює 180°.*

Доведення. Нехай *ABC* — даний трикутник. Проведемо через вершину *B* пряму, паралельну прямій *AC*. Візьмемо на ній точку *D* так, щоб точки *A* і *D* лежали по різні боки від прямої *BC* (мал. 78).

Кути *DBC* і *ACB* рівні як внутрішні різносторонні при перетині паралельних прямих *AC* і *BD* січною *BC*. Тому сума кутів трикутника при вершинах *B* і *C* дорівнює куту *ABD*.

А сума всіх трьох кутів трикутника дорівнює сумі кутів *ABD* і *BAC*. Оскільки ці кути внутрішні односторонні для паралельних *AC* і *BD* і січної *AB*, то їх сума дорівнює 180°. Теорему доведено.

З теореми 4.4 випливає, що ***у будь-якому трикутнику принаймні два кути гострі.***



Мал. 78

Справді, припустимо, що у трикутнику тільки один гострий кут або взагалі немає гострих кутів. Тоді у цьому трикутнику є два кути, кожний з яких не менший за 90°. Сума цих двох кутів уже не менша за 180°.

Але це неможливо, бо сума всіх кутів трикутника дорівнює 180°. Що й треба було довести.

Задача 30. Чому дорівнюють кути рівностороннього трикутника?

Розв'язання. У рівносторонньому трикутнику, як відомо, всі кути рівні. Оскільки вони в сумі становлять 180°, то кожний з них дорівнює 60°.

34. ЗОВНІШНІ КУТИ ТРИКУТНИКА

Зовнішнім кутом трикутника при даній вершині називається кут, суміжний з кутом трикутника при цій вершині (мал. 79).

Щоб не плутати кут трикутника при даній вершині із зовнішнім кутом при цій самій вершині, його іноді називають *внутрішнім кутом.*

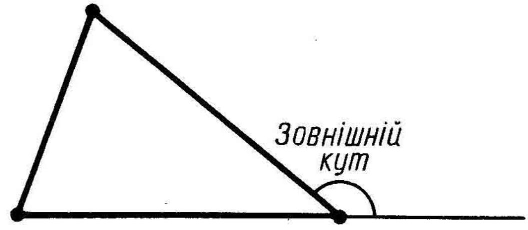
Теорема 4.5. ***Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним.***

Доведення. Нехай ABC — даний трикутник (мал. 80). За теоремою 4.4 $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$. Звідси випливає, що $\angle A + \angle B = 180° - \angle C$. У правій частині цієї рівності стоїть градусна міра зовнішнього кута трикутника при вершині C. Теорему доведено.

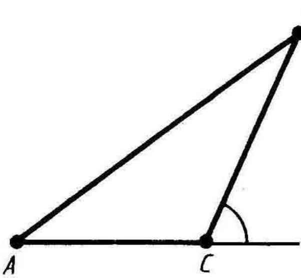
З теореми 4.5 випливає, що ***зовнішній кут трикутника більший від будь-якого внутрішнього кута, не суміжного з ним.***

Задача 35. У трикутнику ABC проведено висоту CD. Яка з трьох точок A, B, D лежить між двома іншими, якщо кути A і B трикутника гострі?

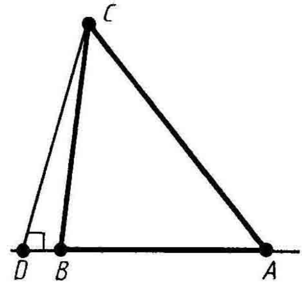
Розв'язання. Точка B не може лежати між точка-



Мал. 79



Мал. 80



Мал. 81

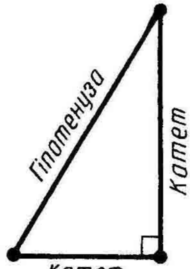
ми A і D. Якби вона була між точками A і D (мал. 81), то гострий кут ABC як зовнішній кут трикутника CBD був би більшим від прямого кута CDB. Так само доводимо, що й точка A не може лежати між точками B і D. Отже, точка D лежить між точками A і B.

35. ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК

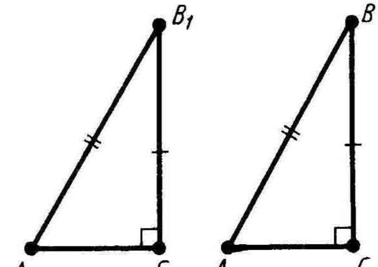
Трикутник називається *прямокутним*, якщо він має прямий кут.

Оскільки сума кутів трикутника дорівнює 180°, то в прямокутному трикутнику тільки один прямий кут. Два інших кути прямокутного трикутника гострі. Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює $180° - 90° = 90°$.

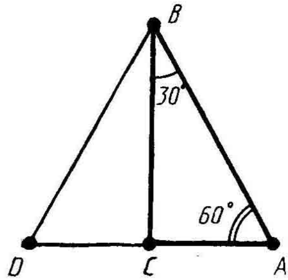
Сторона прямокутного трикутника, що лежить проти прямого кута, називається *гіпотенузою*, дві інші сторони називаються *катетами* (мал. 82).



Мал. 82



Мал. 83



Мал. 84

Відзначимо таку ознаку рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою і катетом:

Якщо гіпотенуза і катет одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі і катету другого трикутника, то такі трикутники рівні (мал. 83).

Доведення цієї ознаки дано у вигляді розв'язання задачі 29 з § 3.

Задача (43). Доведіть, що в прямокутному трикутнику з кутом 30° катет, протилежний цьому куту, дорівнює половині гіпотенузи.

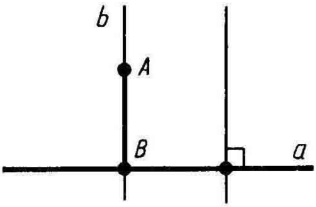
Розв'язання. Нехай ABC — прямокутний трикутник з прямим кутом C і кутом B, що дорівнює 30° (мал. 84). Побудуємо трикутник DBC, що дорівнює трикутнику ABC, як показано на малюнку 84. У трикутнику ABD всі кути рівні і дорівнюють по 60°, тому він рівносторонній. Оскільки $AC = \frac{1}{2}AD$, а $AD = AB$, то $AC = \frac{1}{2}AB$, що й треба було довести.

36. ІСНУВАННЯ І ЄДИНІСТЬ ПЕРПЕНДИКУЛЯРА ДО ПРЯМОЇ

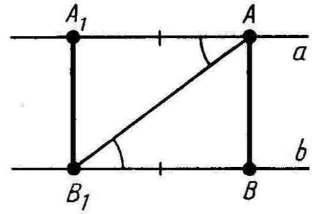
Теорема 4.6. ***З будь-якої точки, що не лежить на даній прямій, можна опустити на цю пряму перпендикуляр і тільки один.***

Доведення. Нехай a — дана пряма й A — точка, що не лежить на ній (мал. 85). Проведемо через довільну точку прямої a перпендикулярну пряму. Проведемо тепер через точку A паралельну їй пряму b. Вона буде перпендикулярною до прямої a, оскільки пряма a, будучи перпендикулярною до однієї з паралельних прямих, перпендикулярна і до другої. Відрізок AB прямої b і є перпендикуляр, проведений з точки A до прямої a.

Доведемо єдиність перпендикуляра AB. Припустимо існування іншого перпендикуляра AC. Тоді трикутник ABC матиме два прямих кути. А це, як відомо, неможливо. Теорему доведено.



Мал. 85



Мал. 86

Довжина перпендикуляра, опущеного з даної точки на пряму, називається *відстанню від точки до прямої.*

Задача (50). Доведіть, що відстані від будь-яких двох точок прямої до паралельної прямої рівні.

Розв'язання. Нехай a і b — паралельні прямі і A, A_1 — довільні точки на прямій a (мал. 86). Опустимо з точки A_1 перпендикуляр A_1B_1 на пряму b. Відкладемо від точки B_1 на прямій b відрізок B_1B, що дорівнює відрізку AA_1 так, щоб точки A_1 і B були по різні боки від прямої AB_1. Тоді трикутники AB_1A_1 і B_1AB рівні за першою ознакою. У них сторона AB_1 спільна, $AA_1 = BB_1$ за побудовою, а кути B_1AA_1 і AB_1B рівні як внутрішні різносторонні при перетині паралельних a та b з січною AB_1. З рівності трикутників випливає, що AB — перпендикуляр до прямої b і $AB = A_1B_1$, що й треба було довести.

Як бачимо, відстані від усіх точок прямої до паралельної прямої рівні. Тому кажуть, що паралельні прямі рівновіддалені.

Відстанню між паралельними прямими називається відстань від якої-небудь точки однієї прямої до другої прямої.

37. З ІСТОРІЇ ВИНИКНЕННЯ ГЕОМЕТРІЇ

Перші відомості про властивості геометричних фігур люди дістали в результаті практичної діяльності і спостережень над навколишнім світом. З часом учені помітили, що деякі властивості геометричних фігур можна вивести з інших властивостей міркуваннями. Так виникли теореми і доведення.

З'явилося природне бажання по можливості зменшити кількість тих властивостей геометричних фігур, які випливають безпосередньо з досвіду. Твердження, що залишилися без

М. І. Лобачевський — російський математик (1792—1856)

доведення властивостей, стали аксіомами. Таким чином, аксіоми мають досвідне походження.

Геометрія на ранній стадії свого розвитку досягла особливо високого рівня в Єгипті. У першому тисячолітті до нашої ери геометричні відомості від єгиптян перейшли до греків. За період з VII по III століття до нашої ери грецькі геометри не лише збагатили геометрію численними новими теоремами, але зробили також серйозні кроки до строгого її обґрунтування. Багатовікова робота грецьких геометрів за цей період була узагальнена Евклідом (330—275 рр. до н. е.) в його знаменитій праці «Начала».

Виклад геометрії в «Началах» Евкліда побудовано на системі аксіом. Ця система відрізняється від системи аксіом, прийнятої у даному підручнику. Але в ній теж є аксіома паралельних.

Аксіома паралельних, на відміну від інших аксіом, не має наочного підтвердження. Можливо через це з часів Евкліда математики багатьох країн намагалися довести її як теорему. Але це нікому не вдавалося. Нарешті, в XIX столітті було доведено, що це зробити неможливо. Першим, хто висловив це твердження, був великий російський математик Микола Іванович Лобачевський.

? КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Доведіть, що дві прямі, паралельні третій, паралельні одна одній.
2. Поясніть, які кути називаються внутрішніми односторонніми. Які кути називаються внутрішніми різносторонніми?
3. Доведіть, що коли внутрішні різносторонні кути однієї пари рівні, то внутрішні різносторонні кути другої пари також рівні, а сума внутрішніх односторонніх кутів кожної пари дорівнює 180°.
4. Доведіть ознаку паралельності прямих.
5. Поясніть, які кути називаються відповідними. Доведіть, що

коли внутрішні різносторонні кути рівні, то відповідні кути також рівні і навпаки.

6. Доведіть, що через точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести паралельну їй пряму. Скільки прямих, паралельних даній, можна провести через точку, що не лежить на цій прямій?
7. Доведіть, що коли дві паралельні прямі перетинаються третьою прямою, то внутрішні різносторонні кути рівні, а сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°.
8. Доведіть, що дві прямі, перпендикулярні до третьої, паралельні. Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна й до другої.
9. Доведіть, що сума кутів трикутника дорівнює 180°.
10. Доведіть, що в будь-якому трикутнику принаймні два кути гострі.
11. Що таке зовнішній кут трикутника?
12. Доведіть, що зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним.
13. Доведіть, що зовнішній кут трикутника більший за будь-який внутрішній кут, не суміжний з ним.
14. Який трикутник називається прямокутним?
15. Чому дорівнює сума гострих кутів прямокутного трикутника?
16. Яка із сторін прямокутного трикутника називається гіпотенузою? Які сторони називаються катетами?
17. Сформулюйте ознаку рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою і катетом.
18. Доведіть, що з будь-якої точки, яка не лежить на даній прямій, можна опустити на цю пряму перпендикуляр і тільки один.
19. Що називається відстанню точки від прямої?
20. Поясніть, що таке відстань між паралельними прямими.

ЗАДАЧІ

1. Доведіть, що коли деяка пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає й другу.
2. Доведіть, що коли дві прямі перетинаються, то будь-яка третя пряма перетинає принаймні одну з цих прямих.

3. Дано $a \parallel b \parallel c \parallel d$. Доведіть, що $a \parallel d$.
4. Прямі AB і CD паралельні. Доведіть, що коли відрізок BC перетинає пряму AD, то точка перетину належить відрізку AD (мал. 70).
5. Дано трикутник ABC. На стороні AB позначено точку B_1, а на стороні AC — точку C_1 (мал. 87). Назвіть внутрішні односторонні і внутрішні різносторонні кути при прямих AB, AC і січній B_1C_1.
6. Назвіть внутрішні різносторонні і внутрішні односторонні кути на малюнку 72.
7. Відрізки AD і BC перетинаються. Для прямих AC і BD і січної BC назвіть пару внутрішніх різносторонніх кутів. Для цих же прямих і січної AB назвіть пару внутрішніх односторонніх кутів. Поясніть відповідь.
8. Дано пряму AB і точку C, яка не лежить на цій прямій. Доведіть, що через точку C можна провести пряму, паралельну прямій AB.
9. Доведіть, що бісектриси внутрішніх різносторонніх кутів, утворених паралельними і січною, паралельні, тобто лежать на паралельних прямих.
10. Відрізки AB і CD перетинаються в точці E і діляться цією точкою пополам. Доведіть, що прямі AC і BD паралельні.
11. Трикутники ABC і BAD рівні. Точки C і D лежать по різні боки від прямої AB. Доведіть, що прямі AC і BD паралельні.
12. Кут ABC дорівнює $80°$, а кут BCD — $120°$. Чи можуть прямі AB і CD бути паралельними? Обґрунтуйте відповідь.
13. Прямі AC і BD паралельні, причому точки A і D лежать по різні боки від січної BC (мал. 77). Доведіть, що: 1) кути DBC і ACB внутрішні різносторонні відносно січної BC; 2) промінь BC проходить між сторонами кута ABD; 3) кути CAB і DBA внутрішні односторонні відносно січної AB.
14. 1) Різниця двох внутрішніх односторонніх кутів при двох паралельних прямих і січній дорівнює $30°$. Знайдіть ці кути.
    2) Сума двох внутрішніх різносторонніх кутів при двох паралельних прямих і січній дорівнює $150°$. Чому дорівнюють ці кути?
15. Один з кутів, які утворюються при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює $72°$. Знайдіть інші сім кутів.
16. Один з кутів, які утворюються при перетині двох паралель-

них прямих січною, дорівнює 30°. Чи може один з решти семи кутів дорівнювати 70°? Поясніть відповідь.

17. Доведіть, що дві прямі, паралельні перпендикулярним прямим, перпендикулярні між собою.

18. Знайдіть невідомий кут трикутника, якщо в ньому два кути дорівнюють: 1) 50° і 30°; 2) 40° і 75°; 3) 65° і 80°; 4) 25° і 120°.

19. Знайдіть кути трикутника, якщо вони пропорційні до чисел: 1) 1, 2, 3; 2) 2, 3, 4; 3) 3, 4, 5; 4) 4, 5, 6; 5) 5, 6, 7.

20. Чи може у трикутнику бути: 1) два тупих кути; 2) тупий і прямий кути; 3) два прямих кути?

21. Чи може бути тупим кут при основі рівнобедреного трикутника?

22. Знайдіть кут між бічними сторонами рівнобедреного трикутника, якщо кут при його основі дорівнює: 1) 40°; 2) 55°; 3) 72°.

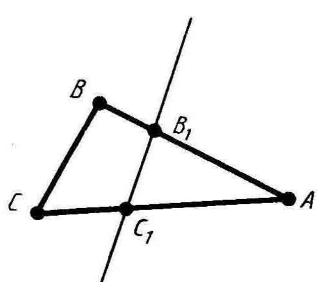
23. Знайдіть кут при основі рівнобедреного трикутника, якщо кут між бічними сторонами дорівнює: 1) 80°; 2) 120°; 3) 30°.

24. Один з кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 100°. Знайдіть решту кутів трикутника.

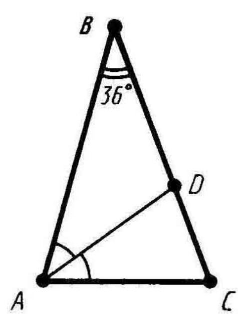
25. Один з кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 70°. Знайдіть решту кутів трикутника. Скільки розв'язків має задача?

26. Доведіть, що коли один з кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 60°, то трикутник — рівносторонній.

27. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC проведено



Мал. 87



Мал. 88

бісектрису CD. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо кут ADC дорівнює: 1) $60°$; 2) $75°$; 3) α.

28. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC і кутом при вершині B, що дорівнює $36°$, проведено бісектрису AD. Доведіть, що трикутники CDA і ADB рівнобедрені (мал. 88).

29. У трикутнику ABC проведено бісектриси з вершин A і B. Точку їх перетину позначено D. Знайдіть кут ADB, якщо: 1) $\angle A = 50°$, $\angle B = 100°$; 2) $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$; 3) $\angle C = 130°$; 4) $\angle C = \gamma$.

30. Чому дорівнюють кути рівностороннього трикутника?

31. Під яким кутом перетинаються бісектриси двох внутрішніх односторонніх кутів при паралельних прямих?

32. Один із зовнішніх кутів рівнобедреного трикутника дорівнює $70°$. Знайдіть кути трикутника.

33. Знайдіть кути трикутника, знаючи, що зовнішні кути при двох його вершинах дорівнюють $120°$ і $150°$.

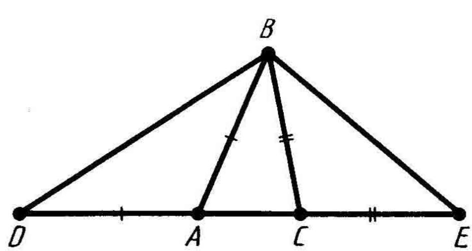
34. Два зовнішніх кути трикутника дорівнюють $100°$ і $150°$. Знайдіть третій зовнішній кут.

35. У трикутнику ABC проведено висоту CD. Яка з трьох точок A, B, D лежить між двома іншими, якщо кути A і B трикутника гострі?

36. У трикутнику ABC проведено висоту CD. Яка з трьох точок A, B, D лежить між двома іншими, якщо кут A тупий? Обґрунтуйте відповідь.

37. Доведіть, що бісектриса зовнішнього кута при вершині рівнобедреного трикутника паралельна основі.

38. Сума зовнішніх кутів трикутника ABC при вершинах A і B, взятих по одному для кожної вершини, дорівнює $240°$. Чому дорівнює кут C трикутника?



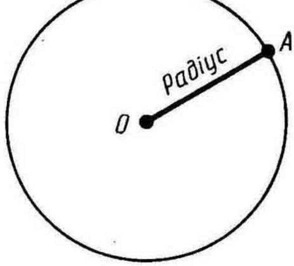
Мал. 89

39. Дано трикутник ABC. На продовженні сторони AC відкладено відрізки $AD = AB$ і $CE = CB$ (мал. 89). Як знайти кути трикутника DBE, знаючи кути трикутника ABC?
40. У трикутнику один з внутрішніх кутів дорівнює $30°$, а один із зовнішніх $40°$. Знайдіть решту внутрішніх кутів трикутника.
41. З вершини прямого кута трикутника ABC проведено висоту BD. Знайдіть кут CBD, знаючи, що: 1) $\angle A = 20°$; 2) $\angle A = 65°$; 3) $\angle A = \alpha$.
42. З вершини тупого кута B трикутника ABC проведено висоту BD. Знайдіть кути трикутників ABD і CBD, знаючи, що $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.
43. Доведіть, що в прямокутному трикутнику з кутом $30°$, катет, протилежний цьому куту, дорівнює половині гіпотенузи.
44. Знайдіть кути прямокутного рівнобедреного трикутника.
45. У рівносторонньому трикутнику ABC проведено медіану AD. Знайдіть кути трикутника ABD.
46. Висоти трикутника ABC, проведені з вершин A і C, перетинаються в точці M. Знайдіть $\angle AMC$, якщо $\angle A = 70°$, $\angle C = 80°$.
47*. У трикутнику ABC медіана BD дорівнює половині сторони AC. Знайдіть кут B трикутника.
48. Пряма a перетинає відрізок BC в його середині. Доведіть, що точки B і C знаходяться на однаковій відстані від прямої a.
49. Відрізок BC перетинає пряму a в точці O. Відстані від точок B і C до прямої a рівні. Доведіть, що точка O є серединою відрізка BC.
50. Доведіть, що відстані від будь-яких двох точок прямої до паралельної прямої рівні.
51. Доведіть, що відстані від вершин рівностороннього трикутника до прямих, які містять протилежні їм сторони, рівні.

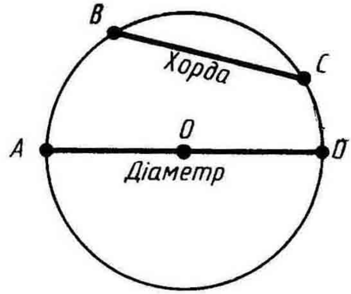
§ 5. ГЕОМЕТРИЧНІ ПОБУДОВИ

38. КОЛО

Колом називається фігура, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки. Ця точка називається *центром* кола.



Мал. 90

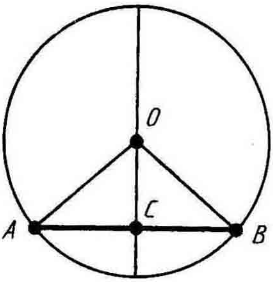


Мал. 91

Відстань від точок кола до його центра називається *радіусом* кола. Радіусом називається також будь-який відрізок, що сполучає точку кола з його центром (мал. 90).

Відрізок, що сполучає дві точки кола, називається *хордою*. Хорда, що проходить через центр, називається *діаметром*. На малюнку 91 BC — хорда, AD — діаметр.

Задача (3). Доведіть, що діаметр кола, який проходить через середину хорди, перпендикулярний до неї.



Мал. 92

Розв'язання. Нехай AB — хорда кола і C — її середина (мал. 92). Трикутник AOB рівнобедрений з основою AB. У ньому сторони OA і OB рівні як радіуси кола. За властивістю медіани рівнобедреного трикутника, проведеної до основи, відрізок OC є висотою. Тому діаметр кола, проведений через середину хорди, перпендикулярний до хорди.

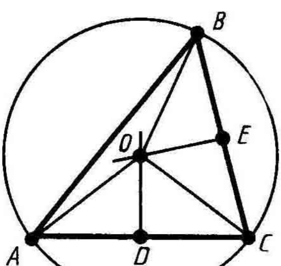
39. КОЛО, ОПИСАНЕ НАВКОЛО ТРИКУТНИКА

Коло називається *описаним* навколо трикутника, якщо воно проходить через усі його вершини.

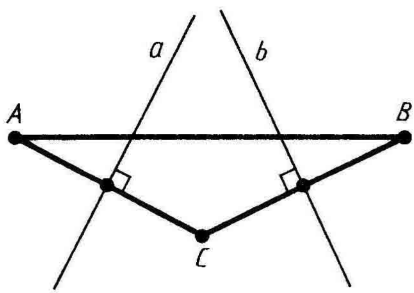
Теорема 5.1. ***Центр кола, описаного навколо трикутника, є точкою перетину перпендикулярів до сторін трикутника, проведених через середини цих сторін.***

Доведення. Нехай *ABC* — даний трикутник і *O* — центр описаного навколо нього кола (мал. 93). Трикутник *AOC* — рівнобедрений; у ньому сторони *OA* і *OC* рівні як радіуси. Медіана *OD* цього трикутника одночасно є його висотою. Тому центр кола лежить на прямій, яка перпендикулярна до сторони *AC* і проходить через її середину. Так само доводимо, що центр кола лежить на перпендикулярах до двох інших сторін трикутника. Теорему доведено.

Зауваження. Пряму, що проходить через середину відрізка перпендикулярно до нього, часто називають *серединним перпендикуляром.* У зв'язку з цим інколи говорять, що центр кола, описаного навколо трикутника, лежить на перетині серединних перпендикулярів до сторін трикутника.



Мал. 93



Мал. 94

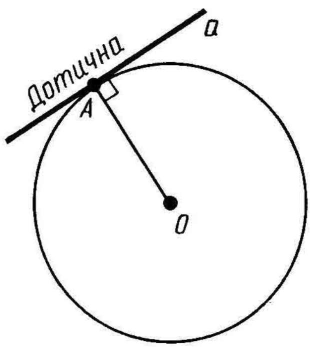
Задача (6). Доведіть, що серединні перпендикуляри до двох сторін трикутника перетинаються.

Розв'язання. Нехай *ABC* трикутник і *a*, *b* — серединні перпендикуляри до його сторін *AC* і *BC* (мал. 94). Припустимо, прямі *a* і *b* не перетинаються, а отже, паралельні. Пряма *AC* перпендикулярна до прямої *a*. Пряма *BC* перпендикулярна до прямої *b*, а тому і до прямої *a*, оскільки прямі *a* і *b* паралельні. Таким чином, обидві прямі *AC* і *BC* перпендикулярні до прямої *a*, а тому паралельні. Але це неправильно. Прямі *AC*, *BC* перетинаються в точці *C*. Ми дійшли до суперечності. Твердження доведено.

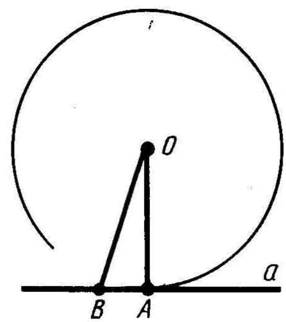
40. ДОТИЧНА ДО КОЛА

Пряма, що проходить через точку кола перпендикулярно до радіуса, проведеного в цю точку, називається *дотичною.* При цьому дана точка кола називається *точкою дотику.*

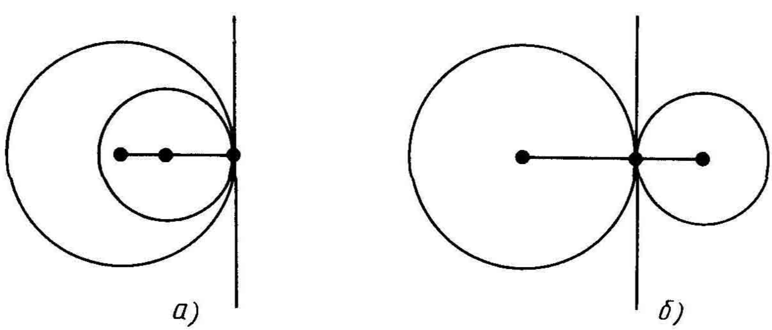
На малюнку 95 пряму a проведено через точку кола A перпендикулярно до радіуса OA Пряма a є дотичною до кола. Точка A є точкою дотику. Можна сказати також, що коло дотикається до прямої a в точці A.



Мал. 95



Мал. 96



Мал. 97

З а д а ч а (8). Доведіть, що дотична до кола не має з ним інших спільних точок, крім точки дотику.

Р о з в' я з а н н я. Нехай a — дотична до кола в точці A (мал. 96). Припустимо, дотична і коло мають, крім точки A, спільну точку B, відмінну від A. Трикутник AOB рівнобедрений з основою AB. У ньому бічні сторони AO, OB — радіуси кола. Оскільки у рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні, то трикутник має два прямих кути. А це неможливо. Ми дійшли до суперечності. Твердження доведено.

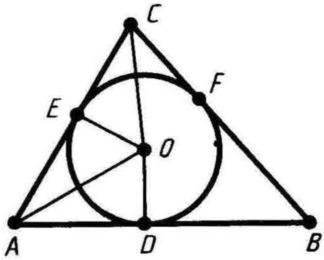
Говорять, що два кола, які мають спільну точку, *дотикаються* в цій точці, якщо вони мають в ній спільну дотичну (мал. 97). Дотик кіл називається *внутрішнім*, якщо центри кіл лежать по один бік від їх спільної дотичної (мал. 97, *а*). Дотик кіл називається *зовнішнім*, якщо центри кіл лежать по різні боки від їх спільної дотичної (мал. 97, *б*).

41. КОЛО, ВПИСАНЕ В ТРИКУТНИК

Коло називається *вписаним* у трикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.

Теорема 5.2. ***Центр кола, вписаного в трикутник, є точкою перетину його бісектрис.***

Доведення. Нехай ABC — даний трикутник, O — центр вписаного в нього кола, D, E і F — точки дотику кола із сторонами (мал. 98). Прямокутні трикутники AOD і AOE рівні за гіпотенузою і катетом. У них гіпотенуза AO спільна, а катети OD і OE рівні як радіуси. З рівності трикутників випливає рівність кутів OAD і OAE. А це означає, що точка O лежить на бісектрисі трикутника, проведеній з вершини A. Так само доводимо, що точка O лежить на двох інших бісектрисах трикутника. Теорему доведено.



Мал. 98

42. ЩО ТАКЕ ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ

У задачах на побудову йдеться про побудову геометричної фігури за допомогою даних креслярських інструментів. Такими інструментами найчастіше є лінійка і циркуль. Розв'язування задачі полягає не стільки в побудові фігури, скільки у знаходженні способу, як це зробити, і відповідному доведенні. Задача вважається розв'язаною, якщо знайдено спосіб побудови фігур і доведено, що в результаті виконання зазначених побудов справді виходить фігура з потрібними властивостями.

За допомогою лінійки як інструмента геометричних побудов можна провести довільну пряму; пряму, що проходить через дану точку; пряму, що проходить через дві дані точки. Ніяких інших операцій виконувати лінійкою не можна. Зокрема, лінійкою не можна відкладати відрізки, навіть якщо вона має поділки.

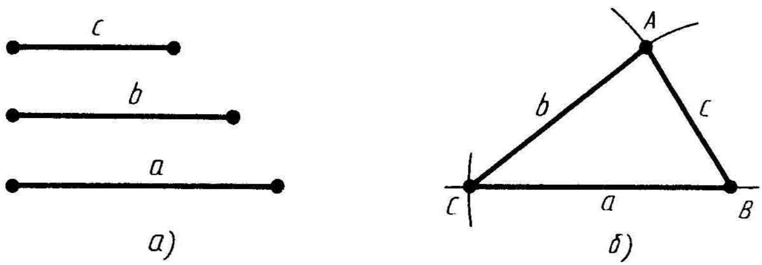
Циркуль як інструмент геометричних побудов дає змогу описати з центром у даній точці коло даного радіуса. Зокрема, циркулем можна відкласти даний відрізок на даній прямій від даної точки.

Розглянемо найпростіші задачі на побудову.

43. ПОБУДОВА ТРИКУТНИКА З ДАНИМИ СТОРОНАМИ

Задача 5.1. ***Побудувати трикутник з даними сторонами a, b, c*** (мал. 99, *а*).

Розв'язання. За допомогою лінійки проводимо довільну пряму і позначаємо на ній довільну точку B (мал. 99, *б*). Розхилом циркуля, що дорівнює a, описуємо коло з центром B і радіусом a. Нехай C — точка перетину цього кола з прямою. Тепер розхилом циркуля, що дорівнює c, описуємо коло з центром у точці B, а розхилом циркуля, що



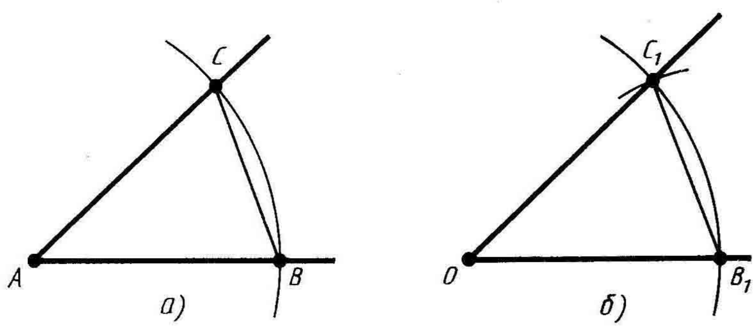
Мал. 99

дорівнює b, описуємо коло з центром у точці C. Нехай A — точка перетину цих кіл. Проведемо відрізки AB і AC. Трикутник ABC має сторони, які дорівнюють a, b, c.

44. ПОБУДОВА КУТА, ЩО ДОРІВНЮЄ ДАНОМУ

Задача 5.2. ***Відкласти від даної півпрямої в дану півплощину кут, що дорівнює даному куту.***

Розв'язання. Проведемо довільне коло з центром у вершині A даного кута (мал. 100, *а*). Нехай B і C — точки перетину кола із сторонами кута. Проведемо коло радіусом AB з центром у точці O — початковій точці даної півпрямої (мал. 100, *б*). Точку перетину цього кола з даною півпрямою позначимо B_1. Опишемо коло з центром B_1 і радіусом BC. Точка C_1 перетину побудованих кіл у даній півплощині лежить на стороні шуканого кута.



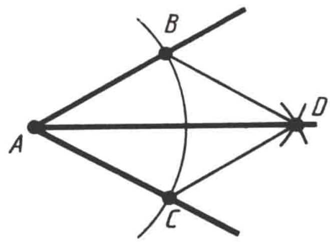
Мал. 100

Для доведення досить показати, що трикутники ABC і OB_1C_1 рівні як трикутники з відповідно рівними сторонами. Кути A і O є відповідними кутами цих трикутників.

45. ПОБУДОВА БІСЕКТРИСИ КУТА

Задача 5.3. ***Побудувати бісектрису даного кута.***

Розв'язання. З вершини A даного кута як з центра, описуємо коло довільного радіуса (мал. 101). Нехай B і C — точки перетину цього кола із сторонами кута. З точок B і C тим

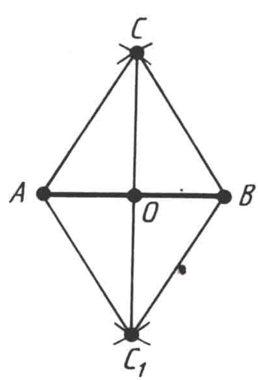


Мал. 101

самим радіусом описуємо кола. Нехай D — точка їх перетину, відмінна від A. Проведемо півпряму AD.

Промінь AD є бісектрисою, бо ділить кут BAC пополам. Це випливає з рівності трикутників ABD і ACD, у яких кути DAB і DAC є відповідними.

46. ДІЛЕННЯ ВІДРІЗКА ПОПОЛАМ



Мал. 102

Задача 5.4. ***Поділити відрізок пополам.***

Розв'язання. Нехай AB — даний відрізок (мал. 102). З точок A і B радіусом AB описуємо кола. Нехай C і C_1 — точки перетину цих кіл. Вони лежать у різних півплощинах відносно прямої AB. Відрізок CC_1 перетинає пряму AB у деякій точці O. Ця точка і є середина відрізка AB.

Справді, трикутники CAC_1 і CBC_1 рівні за третьою ознакою рівності трикутників. Звідси випливає рівність кутів ACO і BCO. Трикутники ACO і BCO рівні за першою ознакою рівності трикутників. Сторони AO і BO цих трикутників є відповідними, а тому вони рівні. Таким чином, O — середина відрізка AB.

47. ПОБУДОВА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЇ ПРЯМОЇ

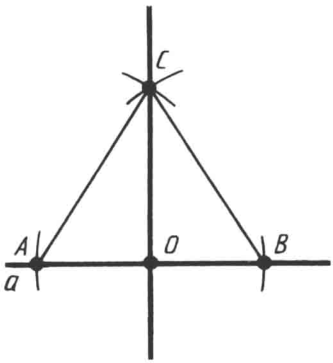
Задача 5.5. ***Через дану точку O провести пряму, перпендикулярну до даної прямої a.***

Розв'язання. Можливі два випадки:

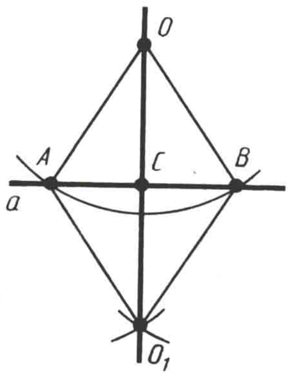
1) точка O лежить на прямій a;

2) точка O не лежить на прямій a.

Розглянемо перший випадок (мал. 103).



Мал. 103



Мал. 104

З точки O довільним радіусом проводимо коло. Воно перетне пряму a у двох точках: A і B. З точок A і B проводимо кола радіусом AB. Нехай C — точка їх перетину. Шукана пряма проходить через точки O і C.

Перпендикулярність прямих OC і AB випливає з рівності кутів при вершині O трикутників ACO і BCO. Ці трикутники рівні за третьою ознакою рівності трикутників.

Розглянемо другий випадок (мал. 104).

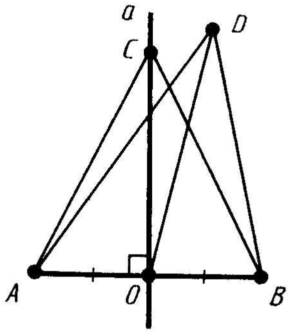
З точки O проводимо коло, що перетинає пряму a. Нехай A і B — точки перетину його з прямою a. З точок A і B тим самим радіусом проводимо кола. Нехай O_1 — точка їх перетину, що лежить у півплощині, відмінній від тієї, у якій лежить точка O. Шукана пряма проходить через точки O і O_1.

Доведемо це. Позначимо через C точку перетину прямих AB і OO_1. Трикутники AOB і AO_1B рівні за третьою ознакою рівності трикутників. Тому кут OAC дорівнює куту O_1AC. Тоді трикутники OAC і O_1AC рівні за першою ознакою рівності трикутників. Отже, їх кути ACO і ACO_1 рівні. Оскільки ці кути суміжні, то вони прямі. Таким чином, OC — перпендикуляр, опущений з точки O на пряму a.

48. ГЕОМЕТРИЧНЕ МІСЦЕ ТОЧОК

Одним з методів розв'язування задач на побудову є метод геометричних місць.

Геометричним місцем точок називається фігура, що складається з усіх точок площини, які мають певну властивість.



Мал. 105

Наприклад, коло можна означити як геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки.

Важливе геометричне місце точок дає така теорема.

Теорема 5.3. ***Геометричне місце точок, рівновіддалених від двох даних точок, є пряма, яка перпендикулярна до відрізка, що сполучає ці точки і проходить через його середину.***

Доведення. Нехай A і B — дані точки, a — пряма, що проходить через середину O відрізка AB перпендикулярно до нього (мал. 105). Ми повинні довести, що:

1) кожна точка прямої a рівновіддалена від точок A і B;

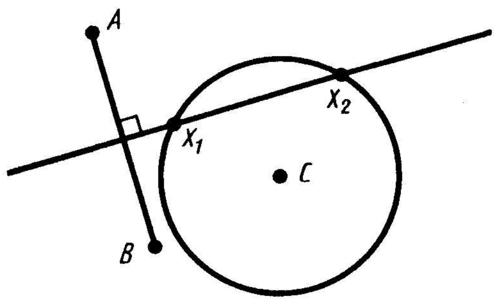
2) кожна точка D площини, рівновіддалена від точок A і B, лежить на прямій a.

Те, що кожна точка C прямої a знаходиться на однаковій відстані від точок A і B, випливає з рівності трикутників AOC і BOC. У цих трикутників кути при вершині O прямі, сторона OC спільна, а $AO = OB$, бо O — середина відрізка AB.

Покажемо тепер, що кожна точка D площини, рівновіддалена від точок A і B, лежить на прямій a. Розглянемо трикутник ADB. Він рівнобедрений, бо $AD = BD$. У ньому DO — медіана. За властивістю рівнобедреного трикутника медіана, проведена до основи, є висотою. Отже, точка D лежить на прямій a. Теорему доведено.

49. МЕТОД ГЕОМЕТРИЧНИХ МІСЦЬ

Розглянемо суть методу геометричних місць, який використовується у процесі розв'язування задач на побудову. Нехай, щоб розв'язати задачу на побудову, нам потрібно знайти якусь точку X, що задовольняє дві умови. Геометричне місце точок, що задовольняють першу умову, є деяка фігура F_1, а геометричне місце точок, що задовольняють другу умову, є деяка фігура F_2. Шукана точка X належить F_1 і F_2, тобто є їх точкою перетину. Якщо ці геометричні місця прості (скажімо, складаються з прямих і кіл), то можна їх побудувати і знайти точку X, яка нас цікавить. Наведемо приклад.



Мал. 106

Задача (43). Дано три точки A, B, C. Побудуйте точку X, яка однаково віддалена від точок A і B і знаходиться на даній відстані від точки C.

Розв'язання. Шукана точка X задовольняє дві умови: 1) однаково віддалена від точок A і B; 2) лежить на даній відстані від точки C. Геометричне місце точок, що задовольняють першу умову, є пряма, яка перпендикулярна до відрізка AB і проходить через його середину (мал. 106). Геометричне місце точок, що задовольняють другу умову, є коло даного радіуса з центром у точці C. Шукана точка X лежить на перетині цих геометричних місць.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

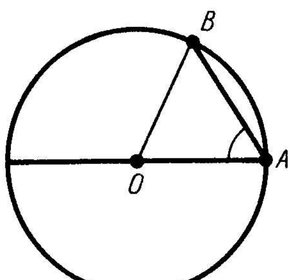
1. Що таке коло, центр кола, радіус?
2. Що таке хорда кола? Яка хорда називається діаметром?
3. Яке коло називається описаним навколо трикутника?
4. Доведіть, що центр кола, описаного навколо трикутника, лежить на перетині серединних перпендикулярів до сторін трикутника.
5. Яка пряма називається дотичною до кола?
6. Що означає: кола дотикаються в даній точці?
7. Який дотик кіл називається зовнішнім, який — внутрішнім?
8. Яке коло називається вписаним у трикутник?
9. Доведіть, що центр кола, вписаного у трикутник, лежить на перетині його бісектрис.

10. Поясніть, як побудувати трикутник за трьома сторонами.
11. Поясніть, як відкласти від даної півпрямої у дану півплощину кут, що дорівнює даному куту.
12. Поясніть, як поділити даний кут пополам.
13. Поясніть, як поділити даний відрізок пополам.
14. Поясніть, як через дану точку провести пряму, перпендикулярну до даної прямої.
15. Що являє собою геометричне місце точок, рівновіддалених від двох даних точок?

ЗАДАЧІ

1. Доведіть, що будь-який промінь, який виходить з центра кола, перетинає коло в одній точці.
2. Доведіть, що пряма, яка проходить через центр кола, перетинає коло у двох точках.
3. Доведіть, що діаметр кола, який проходить через середину хорди, перпендикулярний до неї.
4. Сформулюйте і доведіть теорему, обернену до твердження задачі 3.
5. 1) З точки даного кола проведено діаметр і хорду, що дорівнює радіусу. Знайдіть кут між ними (мал. 107).

   2) З точки даного кола проведено дві хорди, що дорівнюють радіусу. Знайдіть кут між ними.
6. Доведіть, що серединні перпендикуляри до двох сторін трикутника перетинаються.
7. Чи може коло дотикатися до прямої у двох точках? Поясніть відповідь.



Мал. 107

8. Доведіть, що дотична до кола не має з ним інших спільних точок, крім точки дотику.
9. Які кути утворює хорда AB, що дорівнює радіусу кола, з дотичною в точці A?
10. Знайдіть кути, під якими перетинаються прямі, що дотикаються до кола в кінцях хорди, яка дорівнює радіусу.

11. Кола з радіусами 30 см і 40 см дотикаються. Знайдіть відстань між центрами кіл у випадках зовнішнього і внутрішнього дотиків.

12. Чи можуть дотикатися два кола, якщо їх радіуси дорівнюють 25 см і 50 см, а відстань між центрами 60 см?

13.* 1) Точки A, B, C лежать на прямій, а точка O — поза прямою. Чи можуть два трикутники AOB і BOC бути рівнобедреними з основами AB і BC? Поясніть відповідь.

2) Чи можуть коло і пряма перетинатися більше, ніж у двох точках?

14.* 1) Кола з центрами O і O_1 перетинаються в точках A і B. Доведіть, що пряма AB перпендикулярна до прямої OO_1.

2) Доведіть, що два кола не можуть перетинатися більше, ніж у двох точках.

15.* 1) Через точку A кола з центром O проведено пряму, що не дотикається до кола OB — перпендикуляр, опущений на пряму. На продовженні відрізка AB відкладено відрізок $BC = AB$. Доведіть, що точка C лежить на колі.

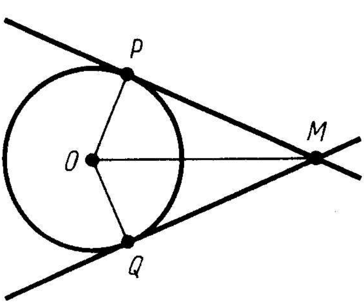
2) Доведіть, що коли пряма має з колом тільки одну спільну точку, то вона є дотичною до кола в цій точці.

3) Доведіть, що коли два кола мають тільки одну спільну точку, то вони дотикаються в цій точці.

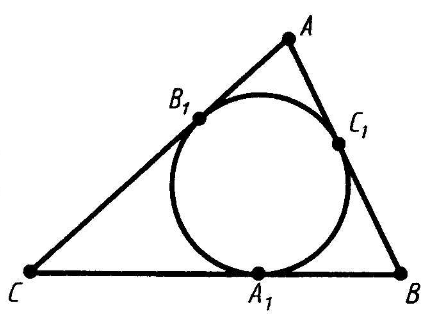
16.* 1) З однієї точки до кола проведено дві дотичні (мал. 108). Доведіть, що відрізки дотичних MP і MQ рівні.

2) Доведіть, що через одну точку не може проходити більше двох дотичних до кола.

17. Одне коло описане навколо рівностороннього трикутника, а друге — вписане в нього. Доведіть, що центри цих кіл збігаються.



Мал. 108



Мал. 109

18. Коло, вписане у трикутник ABC, дотикається до його сторін у точках A_1, B_1, C_1 (мал. 109). Доведіть, що $AC_1 = \frac{AB + AC - BC}{2}$.

19. Побудуйте трикутник за трьома сторонами a, b і c, якщо: 1) $a = 2$ см, $b = 3$ см, $c = 4$ см; 2) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $c = 5$ см; 3) $a = 4$ см, $b = 5$ см, $c = 6$ см.

20. Дано трикутник ABC. Побудуйте інший трикутник ABD, що дорівнює йому.

21. Побудуйте коло даного радіуса, що проходить через дві дані точки.

22. Побудуйте трикутник за двома сторонами і радіусом описаного кола.

23. Побудуйте трикутник ABC за такими даними:

1) за двома сторонами і кутом між ними:

а) $AB = 5$ см, $AC = 6$ см, $\angle A = 40°$;
б) $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $\angle B = 70°$;

2) за стороною і прилеглими до неї кутами:

а) $AB = 6$ см, $\angle A = 30°$, $\angle B = 50°$;
б) $AB = 4$ см, $\angle A = 45°$, $\angle B = 60°$.

24. Побудуйте трикутник за двома сторонами і кутом, протилежним більшій з них:

а) $a = 6$ см, $b = 4$ см, $\alpha = 70°$;
б) $a = 4$ см, $b = 6$ см, $\beta = 100°$.

25. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною і кутом при основі.

26. Побудуйте коло, вписане в даний трикутник.

27. Поділіть кут на чотири рівні частини.

28. Побудуйте кути 60° і 30°.

29. Дано трикутник. Побудуйте його медіани.

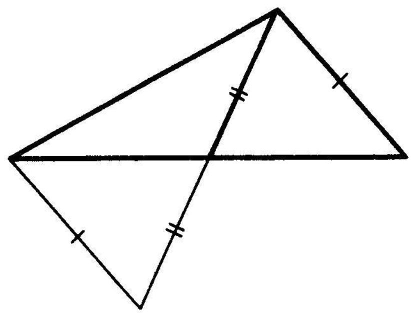
30. Побудуйте трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до однієї з них.

31. Побудуйте трикутник за стороною, медіаною, проведеною до цієї сторони, і радіусом описаного кола.

32. Побудуйте трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до третьої сторони (мал. 110).

33. Дано трикутник. Побудуйте його висоти.

34. Побудуйте коло, описане навколо даного трикутника.



Мал. 110

35. Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою і катетом.

36. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною і висотою, опущеною на основу.

37. Побудуйте трикутник за двома сторонами і висотою, опущеною на третю сторону.

38. Побудуйте трикутник за двома сторонами і висотою, опущеною на одну з них.

39. Побудуйте трикутник за стороною і проведеними до неї медіаною та висотою.

40. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою і радіусом описаного кола.

41. Доведіть, що геометричне місце точок, віддалених від даної прямої на відстань h, складається з двох прямих, паралельних даній і віддалених від неї на h.

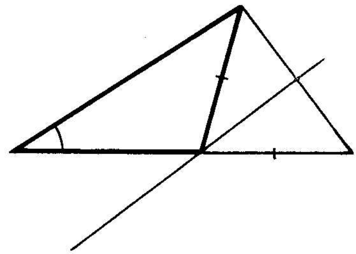
42. На даній прямій знайдіть точку, яка знаходиться на даній відстані від другої даної прямої.

43. Дано три точки: A, B, C. Побудуйте точку X, яка однаково віддалена від точок A і B і знаходиться на даній відстані від точки C.

44. На даній прямій знайдіть точку, рівновіддалену від двох даних точок.

45. Дано чотири точки: A, B, C, D. Знайдіть точку X, яка однаково віддалена від точок A і B і однаково віддалена від точок C і D.

46* Побудуйте трикутник, якщо дано сторону, прилеглий до неї кут і суму двох інших сторін (мал. 111).



Мал. 111

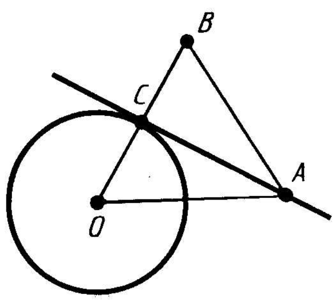
47* Побудуйте трикутник, якщо дано сторону, прилеглий до неї кут і різницю двох інших сторін.

48* Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і сумою другого катета й гіпотенузи.

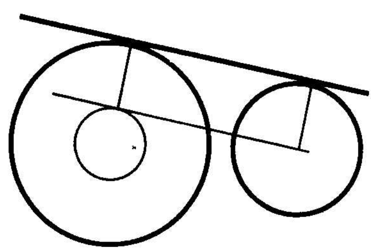
49* 1) З точки A до кола з центром O і радіусом R проведено дотичну (мал. 112). Доведіть, що точка C дотику лежить на основі рівнобедреного трикутника OAB, у якого $OA = AB$, $OB = 2R$.

2) Проведіть дотичну до кола, яка проходить через дану точку поза колом.

50* Проведіть спільну дотичну до двох даних кіл (мал. 113).



Мал. 112



Мал. 113

8 клас

§ 6. ЧОТИРИКУТНИКИ

50. ОЗНАЧЕННЯ ЧОТИРИКУТНИКА

Чотирикутником називається фігура, яка складається з чотирьох точок і чотирьох відрізків, що послідовно їх сполучають. При цьому жодні три з даних точок не повинні лежати на одній прямій, а відрізки, які їх сполучають, не повинні перетинатись. Дані точки називаються *вершинами* чотирикутника, а відрізки, що їх сполучають,— *сторонами* чотирикутника.

Задача (1). На малюнках 114—116 зображено три фігури, кожна з яких складається з чотирьох точок і чотирьох відрізків, які послідовно їх сполучають. Яка з цих фігур є чотирикутником?

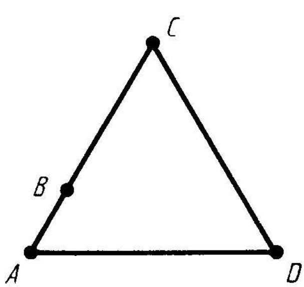
Розв'язання. Чотирикутником є лише фігура на малюнку 116, бо у фігури на малюнку 114 точки A, B, C лежать на одній прямій, а у фігури на малюнку 115 відрізки BC і AD перетинаються.

Вершини чотирикутника називаються *сусідніми*, якщо вони є кінцями однієї з його сторін. Несусідні вершини називаються *протилежними*. Відрізки, що сполучають протилежні вершини чотирикутника, називаються *діагоналями*.

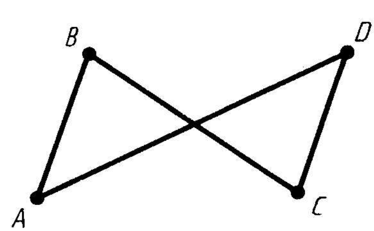
У чотирикутнику на малюнку 117 діагоналями є відрізки AC і BD.

Сторони чотирикутника, що виходять з однієї вершини, називаються *сусідніми* сторонами. Сторони, які не мають спільного кінця, називаються *протилежними* сторонами.

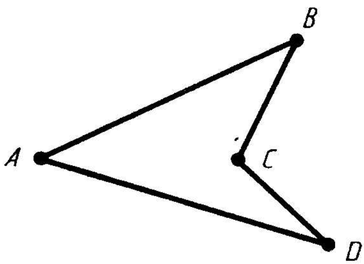
У чотирикутнику на малюнку 117 протилежними є сторони AB і CD, BC і AD.



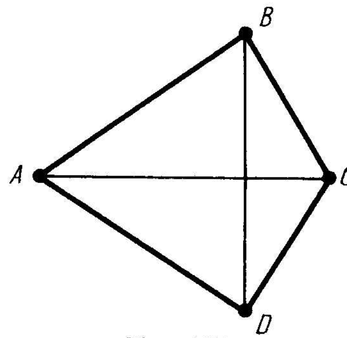
Мал. 114



Мал. 115



Мал. 116



Мал. 117

Чотирикутник позначають, записуючи його вершини. Наприклад, чотирикутник на малюнку 117 позначають так: $ABCD$. У позначенні чотирикутника вершини, що стоять поряд, повинні бути сусідніми. Чотирикутник $ABCD$ на малюнку 117 можна також позначити $BCDA$ або $DCBA$. Але не можна позначити $ABDC$ (B і D — не сусідні вершини).

Сума довжин усіх сторін чотирикутника називається *периметром*.

51. ПАРАЛЕЛОГРАМ

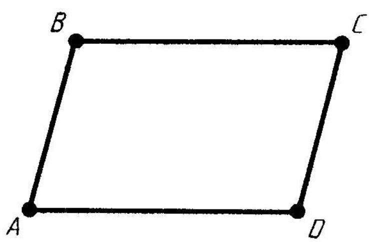
Паралелограм — це чотирикутник, у якого протилежні сторони паралельні, тобто лежать на паралельних прямих (мал. 118).

Теорема 6.1. ***Якщо діагоналі чотирикутника перетинаються і в точці перетину діляться пополам, то цей чотирикутник — паралелограм.***

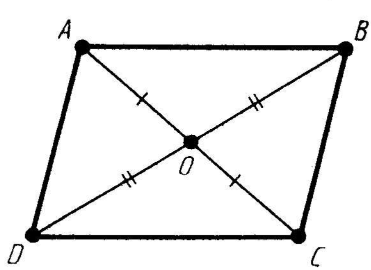
Доведення. Нехай $ABCD$ — даний чотирикутник і O — точка перетину його діагоналей (мал. 119).

Трикутники AOD і COB рівні. У них кути при вершині O рівні як вертикальні, а $OD = OB$ і $OA = OC$ за умовою теореми.

Отже, кути OBC і ODA рівні. А вони є внутрішніми різно-



Мал. 118



Мал. 119

сторонніми при прямих AD і BC і січній BD. За ознакою паралельності прямих прямі AD і BC паралельні. Так само доводимо паралельність прямих AB і CD за допомогою рівності трикутників AOB і COD.

Оскільки протилежні сторони чотирикутника паралельні, то за означенням цей чотирикутник — паралелограм. Теорему доведено.

52. ВЛАСТИВІСТЬ ДІАГОНАЛЕЙ ПАРАЛЕЛОГРАМА

Теорема 6.2 (обернена до теореми 6.1). ***Діагоналі паралелограма перетинаються і в точці перетину діляться пополам.***

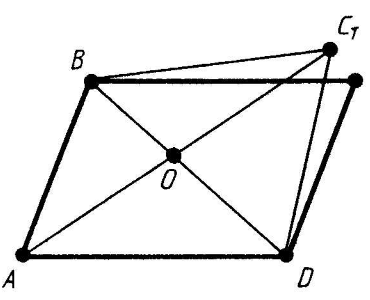
Доведення. Нехай $ABCD$ — даний паралелограм (мал. 120). Проведемо його діагональ BD. Позначимо її середину O і на продовженні відрізка AO відкладемо відрізок OC_1, що дорівнює AO.

За теоремою 6.1 чотирикутник ABC_1D є паралелограм. Отже, пряма BC_1 паралельна AD. Але через точку B можна провести тільки одну пряму, паралельну AD. А це означає, що пряма BC_1 збігається з прямою BC.

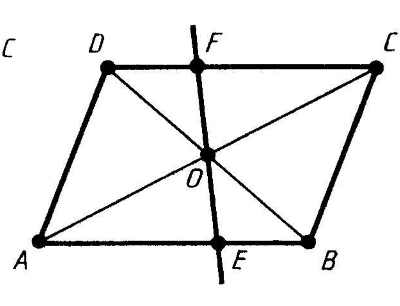
Аналогічно доводимо, що пряма DC_1 збігається з прямою DC. Отже, точка C_1 збігається з точкою C. Паралелограм $ABCD$ збігається з ABC_1D. Тому його діагоналі перетинаються і в точці перетину діляться пополам. Теорему доведено.

Задача (6). Через точку перетину діагоналей паралелограма проведено пряму. Доведіть, що відрізок її, який міститься між паралельними сторонами, ділиться в цій точці пополам.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — даний паралелограм і EF — пряма, що перетинає паралельні сторони AB і CD (мал. 121). Трикутники OAE і OCF рівні за другою ознакою. У них сторони OA і OC рівні, бо O — середина діагоналі AC. Кути при вершині O рівні як вертикальні,



Мал. 120



Мал. 121

а кути EAO і FCO рівні як внутрішні різносторонні при паралельних AB, CD і січній AC.

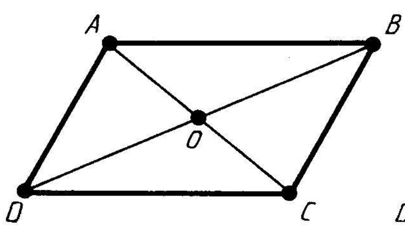
З рівності трикутників випливає рівність сторін: $OE = OF$, що й треба було довести.

53. ВЛАСТИВІСТЬ ПРОТИЛЕЖНИХ СТОРІН І КУТІВ ПАРАЛЕЛОГРАМА

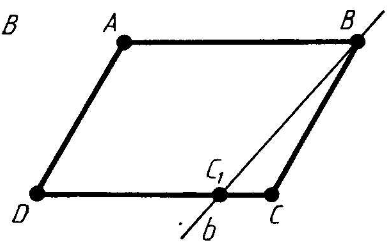
Теорема 6.3. ***У паралелограма протилежні сторони рівні, протилежні кути рівні.***

Доведення. Нехай $ABCD$ — даний паралелограм (мал. 122). Проведемо діагоналі паралелограма. Нехай O — точка їх перетину.

Рівність протилежних сторін AB і CD випливає з рівності трикутників AOB і COD. У них кути при вершині O рівні як вертикальні, а $OA = OC$ і $OB = OD$ за властивістю діагоналей паралелограма. Так само з рівності трикутників AOD і COB випливає рівність другої пари протилежних сторін — AD і BC.



Мал. 122



Мал. 123

Рівність протилежних кутів ABC і CDA випливає з рівності трикутників ABC і CDA (за трьома сторонами). У них $AB = CD$ і $BC = DA$ за доведеним, а сторона AC спільна. Так само рівність протилежних кутів BCD і DAB випливає з рівності трикутників BCD і DAB. Теорему доведено.

Задача (18). Доведіть, що коли в чотирикутнику дві сторони паралельні й рівні, то він — паралелограм.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — даний чотирикутник, у якого сторони AB і CD паралельні і рівні (мал. 123). Проведемо через вершину B пряму b, паралельну стороні AD. Ця пряма перетинає промінь DC у деякій точці C_1. Чотирикутник ABC_1D є паралелограм. Оскільки у паралелограма протилежні сторони рівні, то $C_1D = AB$. А за умовою $AB = CD$. Отже, $DC = DC_1$. Звідси випливає, що точки C і C_1 збігаються. Таким чином, чотирикутник $ABCD$ збігається з паралелограмом ABC_1D, а це означає, що він теж є паралелограм.

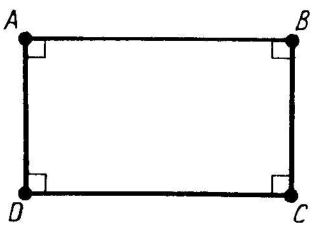
54. ПРЯМОКУТНИК

Прямокутник — це паралелограм, у якого всі кути прямі (мал. 124).

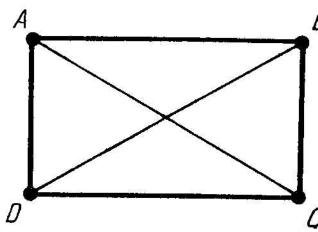
Теорема 6.4. ***Діагоналі прямокутника рівні.***

Доведення. Нехай $ABCD$ — даний прямокутник (мал. 125).

Твердження теореми випливає з рівності прямокутних трикутників BAD і CDA. У них кути BAD і CDA прямі, катет AD спільний, а катети AB і CD рівні як протилежні сторони паралелограма. З рівності трикутників випливає, що їх гіпотенузи рівні. А гіпотенузи є діагоналями прямокутника. Теорему доведено.

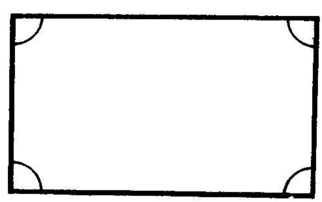


Мал. 124



Мал. 125

Задача (24). Доведіть, що коли у паралелограма всі кути рівні, то він є прямокутником.



Мал. 126

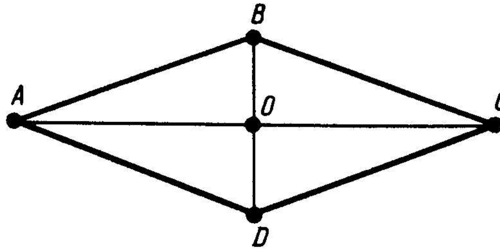
Розв'язання. Кути паралелограма, прилеглі до однієї сторони, є внутрішніми односторонніми (мал. 126), тому їх сума дорівнює 180°. Оскільки за умовою задачі ці кути рівні, то кожний з них прямий. А паралелограм, у якого всі кути прямі, є прямокутником.

55. РОМБ

Ромб — це паралелограм, у якого всі сторони рівні (мал. 127).

Теорема 6.5. ***Діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом. Діагоналі ромба є бісектрисами його кутів.***

Доведення. Нехай $ABCD$ — даний ромб (мал. 127), O — точка перетину його діагоналей. За властивістю паралелограма $AO = OC$. Отже, у трикутнику ABC відрізок BO є медіаною.

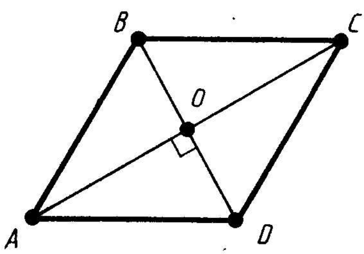


Мал. 127

Оскільки $ABCD$ — ромб, то $AB = BC$ і трикутник ABC — рівнобедрений. За властивістю рівнобедреного трикутника медіана, проведена до його основи, є бісектрисою і висотою. А це означає, що діагональ BD є бісектрисою кута B і перпендикулярна до діагоналі AC. Теорему доведено.

Задача (33). Доведіть, що коли у паралелограма діагоналі перпендикулярні, то він є ромбом.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — паралелограм, діагоналі якого перпендикулярні, і O — точка перетину діагоналей (мал. 128). Трикутники AOB і AOD рівні за першою ознакою рівності трикутників. У них кути при вершині O за умовою прямі, сторона AO спільна, а $OB = OD$ за

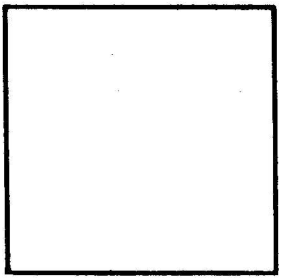


Мал. 128

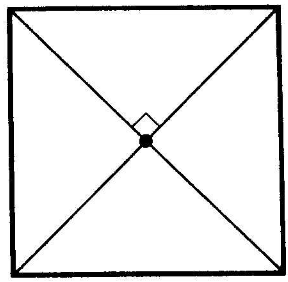
властивістю діагоналей паралелограма. З рівності трикутників випливає рівність сторін $AB = AD$. А за властивістю протилежних сторін паралелограма $AD = BC$, $AB = CD$. Отже, всі сторони паралелограма рівні, тобто він є ромбом.

56. КВАДРАТ

Квадрат — це прямокутник, у якого всі сторони рівні (мал. 129). Оскільки сторони квадрата рівні, то він є ромбом. Тому квадрат має властивості прямокутника і ромба:



Мал. 129



Мал. 130

1. У квадрата всі кути прямі.

2. Діагоналі квадрата рівні.

3. Діагоналі квадрата перетинаються під прямим кутом і є бісектрисами його кутів.

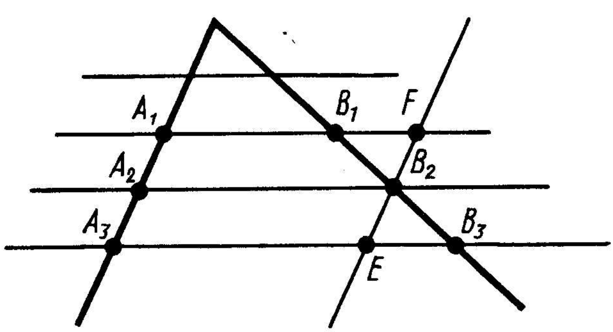
Задача (40). Доведіть, що коли діагоналі прямокутника перетинаються під прямим кутом, то він є квадратом.

Розв'язання. Оскільки прямокутник є паралелограм, а паралелограм з перпендикулярними діагоналями є ромб (задача 33), то у розглядуваного прямокутника всі сторони рівні (мал. 130). За означенням такий прямокутник — квадрат.

57. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

Теорема 6.6 (теорема Фалеса). ***Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки і на другій його стороні*** (мал. 131).

Доведення. Нехай A_1, A_2, A_3 — точки перетину пара-



Мал. 131

Фалес Мілетський — давньогрецький учений (VI ст. до н. е.)

лельних прямих з однією із сторін кута і A_2 лежить між A_1 і A_3 (мал. 131). Нехай B_1, B_2, B_3 — відповідні точки перетину цих прямих з другою стороною кута. Доведемо, що коли $A_1A_2 = A_2A_3$, то $B_1B_2 = B_2B_3$.

Проведемо через точку B_2 пряму EF, паралельну прямій A_1A_3. За властивістю паралелограма $A_1A_2 = FB_2$, $A_2A_3 = B_2E$. Оскільки $A_1A_2 = A_2A_3$, то $FB_2 = B_2E$.

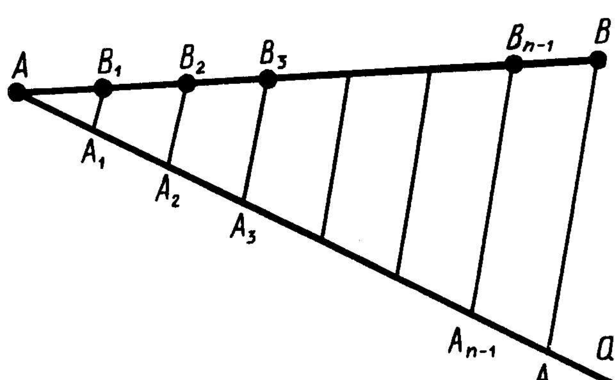
Трикутники B_2B_1F і B_2B_3E рівні за другою ознакою. У них $B_2F = B_2E$ за доведеним. Кути при вершині B_2 рівні як вертикальні, а кути B_2FB_1 і B_2EB_3 рівні як внутрішні різносторонні при паралельних прямих A_3B_3 і A_1B_1 і січній EF. З рівності трикутників випливає рівність сторін: $B_1B_2 = B_2B_3$. Теорему доведено.

Зауваження. В умові теореми Фалеса замість сторін кута можна взяти довільні дві прямі, при цьому висновок теореми буде таким самим:

паралельні прямі, які перетинають дві дані прямі і відтинають на одній прямій рівні відрізки, відтинають рівні відрізки і на другій прямій.

Інколи теорема Фалеса використовуватиметься і в такій формі.

Задача (48). Поділіть даний відрізок AB на n рівних частин.



Мал. 132

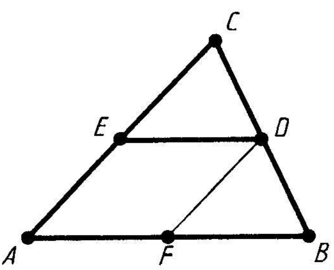
Р о з в'я з а н н я. Проведемо з точки A півпряму a, що не лежить на прямій AB (мал. 132). Відкладемо на півпрямій a рівні відрізки: AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$. Сполучимо точки A_n і B. Проведемо через точки A_1, A_2, ..., A_{n-1} прямі, паралельні прямій A_nB. Вони перетнуть відрізок AB у точках B_1, B_2, ..., B_{n-1}, що ділять відрізок AB на n рівних відрізків (за теоремою Фалеса).

58. СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРИКУТНИКА

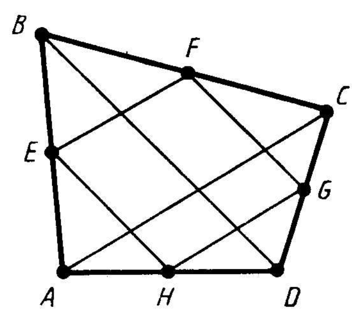
Середньою лінією трикутника називається відрізок, який сполучає середини двох його сторін.

Т е о р е м а 6.7. ***Середня лінія трикутника, яка сполучає середини двох даних сторін, паралельна третій стороні і дорівнює її половині.***

Д о в е д е н н я. Нехай DE — середня лінія трикутника ABC (мал. 133). Проведемо через точку D пряму, паралельну стороні AB. За теоремою Фалеса вона перетне відрізок AC в його середині, тобто містить середню лінію DE. Отже, середня лінія DE паралельна стороні AB.



Мал. 133



Мал. 134

Проведемо тепер середню лінію DF. Вона паралельна стороні AC. Чотирикутник $AEDF$ — паралелограм. За властивістю паралелограма $ED = AF$, а через те, що за теоремою Фалеса $AF = FB$, то $ED = \frac{1}{2}AB$. Теорему доведено.

З а д а ч а (55). Доведіть, що середини сторін чотирикутника є вершинами паралелограма.

Р о з в'я з а н н я. Нехай $ABCD$ — даний чотирикутник і E, F, G, H — середини його сторін (мал. 134). Відрізок EF — середня лінія трикутника ABC. Тому $EF \parallel AC$. Відрізок GH — середня лінія трикутника ADC. Тому $GH \parallel AC$. Отже, $EF \parallel GH$, тобто протилежні сторони EF і GH

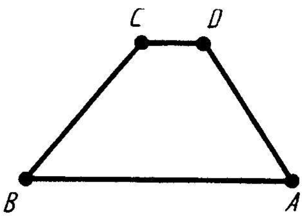
чотирикутника $EFGH$ паралельні. Так само доводимо паралельність другої пари протилежних сторін. Отже, чотирикутник $EFGH$ — паралелограм.

59. ТРАПЕЦІЯ

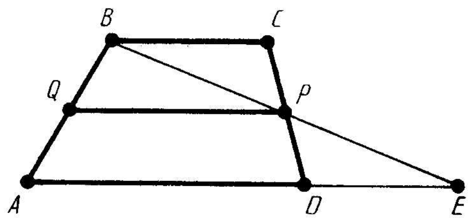
Трапецією називається чотирикутник, у якого тільки дві протилежні сторони паралельні. Ці паралельні сторони називаються *основами* трапеції. Дві інші сторони називаються *бічними* сторонами.

На малюнку 135 бачимо трапецію $ABCD$ з основами AB і CD і бічними сторонами BC і AD.

Трапеція, у якої бічні сторони рівні, називається *рівнобічною*. Відрізок, який сполучає середини бічних сторін, називається *середньою лінією* трапеції.



Мал. 135



Мал. 136

Теорема 6.8. ***Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі.***

Доведення. Нехай $ABCD$ — дана трапеція (мал. 136). Проведемо через вершину B і середину P бічної сторони CD пряму. Вона перетинає пряму AD у деякій точці E.

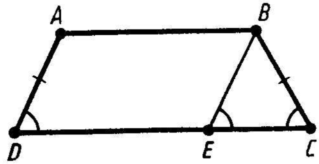
Трикутники PBC і PED рівні за другою ознакою рівності трикутників. У них $CP = DP$ за побудовою, кути при вершині P рівні як вертикальні, а кути PCB і PDE рівні як внутрішні різносторонні при паралельних прямих BC і AD і січній CD. З рівності трикутників випливає рівність сторін $PB = PE$, $BC = ED$.

Отже, середня лінія PQ трапеції є середньою лінією трикутника ABE. За властивістю середньої лінії трикутника $PQ \parallel AE$ і відрізок $PQ = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}(AD + BC)$. Теорему доведено.

Задача (60). Доведіть, що у рівнобічній трапеції кути при основі рівні.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція (мал. 137). Доведемо, що кути трапеції при основі CD рівні.

Проведемо через вершину B пряму, паралельну стороні



Мал. 137

AD. Вона перетне промінь DC у деякій точці E. Чотирикутник $ABED$ — паралелограм. За властивістю паралелограма $BE = AD$. За умовою $AD = BC$ (трапеція рівнобічна), отже, трикутник BCE рівнобедрений з основою EC. Кути трикутника і трапеції при вершині C збігаються, а кути при вершинах E і D рівні як відповідні кути при перетині паралельних прямих січною. Тому $\angle ADC = \angle BCD$. Твердження доведено.

60. ТЕОРЕМА ПРО ПРОПОРЦІЙНІ ВІДРІЗКИ

Теорема 6.9. ***Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають від сторін кута пропорційні відрізки.***

Доведення. Нехай сторони кута A перетинають паралельні прямі — у точках B, C і B_1, C_1 відповідно (мал. 138). Теорема стверджує, що

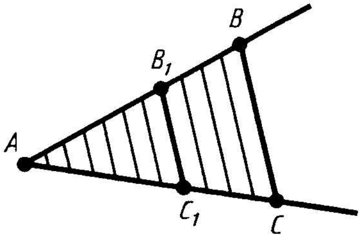
$$\frac{AC_1}{AC} = \frac{AB_1}{AB}. \qquad (*)$$

Доведемо спочатку рівність (*) для випадку, коли існує відрізок такої довжини δ, який можна відкласти ціле число разів і на відрізку AC і на відрізку AC_1. Нехай $AC = n\delta$, $AC_1 = m\delta$ і $n > m$. Розіб'ємо відрізок AC на n рівних частин (довжиною δ). При цьому точка C_1 буде однією з точок поділу. Проведемо через точки поділу прямі, паралельні прямій BC. За теоремою Фалеса ці прямі розбивають відрізок AB на рівні відрізки деякої довжини δ_1. Маємо:

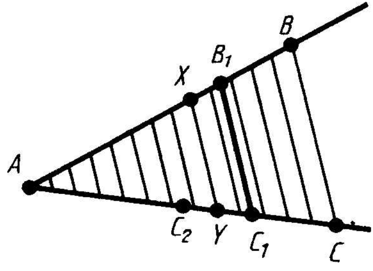
$$AB = n\delta_1 \text{ і } AB_1 = m\delta_1.$$

Бачимо, що

$$\frac{AC_1}{AC} = \frac{m}{n} \text{ і } \frac{AB_1}{AB} = \frac{m}{n}.$$



Мал. 138



Мал. 139

Отже,

$$\frac{AC_1}{AC} = \frac{AB_1}{AB},$$

що й треба було довести.

Доведемо теорему для загального випадку (не для запам'ятовування). Припустимо, $\frac{AC_1}{AC} \neq \frac{AB_1}{AB}$, наприклад $\frac{AC_1}{AC} > \frac{AB_1}{AB}$.

Відкладемо на промені AC відрізок $AC_2 = \frac{AC}{AB} \cdot AB_1$ (мал. 139). При цьому $AC_2 < AC_1$. Розіб'ємо відрізок AC на велику кількість n рівних частин і проведемо через точки поділу прямі, паралельні BC.

При досить великому n на відрізку C_1C_2 будуть точки поділу. Позначимо одну з них через Y, а відповідну точку на відрізку AB_1 через X. Як було доведено,

$$\frac{AY}{AC} = \frac{AX}{AB}.$$

Замінимо у цій рівності величину AY на меншу величину AC_2, а величину AX — на більшу AB_1. Дістанемо:

$$\frac{AC_2}{AC} < \frac{AB_1}{AB}.$$

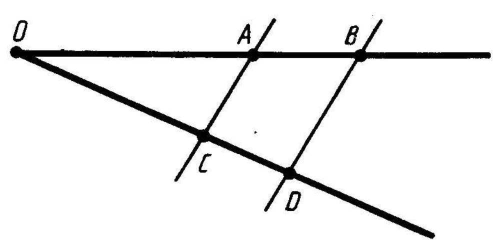
Звідси $AC_2 < \frac{AC}{AB} \cdot AB_1$. Але $AC_2 = \frac{AC}{AB} \cdot AB_1$.

Ми прийшли до суперечності. Теорему доведено.

61. ПОБУДОВА ЧЕТВЕРТОГО ПРОПОРЦІЙНОГО ВІДРІЗКА

Задача 6.1. ***Дано відрізки a, b, c. Побудувати відрізок** $x = \frac{bc}{a}$.*

Розв'язання. Будуємо довільний нерозгорнутий кут з вершиною O (мал. 140). Відкладаємо на одній стороні кута відрізки $OA = a$ і $OB = b$, на другій стороні — відрізок $OC = c$. Сполучаємо точки A і C прямою і через точку B проводимо паралельну їй пряму BD. Відрізок $OD = x$.



Мал. 140

Справді, за теоремою про пропорційні відрізки

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}.$$

Звідси

$$OD = \frac{OB \cdot OC}{OA} = \frac{bc}{a}.$$

Таким чином, відрізок OD є шуканим відрізком x.

Зауваження. Побудований відрізок x називається *четвертим пропорційним*. Ця назва зумовлена тим, що він є четвертим членом пропорції $a : b = c : x$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Яка фігура називається чотирикутником?
2. Які вершини чотирикутника називаються сусідніми? Які називаються протилежними?
3. Що таке діагоналі чотирикутника?
4. Які сторони чотирикутника називаються сусідніми? Які називаються протилежними?
5. Як позначається чотирикутник?
6. Що таке паралелограм?
7. Доведіть, що коли діагоналі чотирикутника перетинаються і в точці перетину діляться пополам, то він є паралелограмом.
8. Доведіть, що діагоналі паралелограма перетинаються і в точці перетину діляться пополам.
9. Доведіть, що у паралелограмі протилежні сторони рівні, протилежні кути рівні.
10. Що таке прямокутник?
11. Доведіть, що діагоналі прямокутника рівні.
12. Що таке ромб?
13. Доведіть, що діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом; діагоналі ромба є бісектрисами його кутів.
14. Що таке квадрат? Перелічіть властивості квадрата.
15. Доведіть теорему Фалеса.
16. Доведіть, що середня лінія трикутника дорівнює половині відповідної сторони.
17. Який чотирикутник називається трапецією?
18. Яка трапеція називається рівнобічною?
19. Доведіть, що середня лінія трапеції дорівнює півсумі основ.
20. Доведіть теорему про пропорційні відрізки.

ЗАДАЧІ

1. На малюнках 114—116 подано три фігури, кожна з яких складається з чотирьох точок і чотирьох відрізків, що послідовно сполучають ці точки. Яка з цих фігур є чотирикутником?

2. Побудуйте довільний чотирикутник $RQRS$. Покажіть його протилежні сторони та вершини.
3. Скільки можна побудувати паралелограмів з вершинами у трьох даних точках, які не лежать на одній прямій? Побудуйте їх.
4. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 5 м. З точки, взятої на основі цього трикутника, проведено дві прямі, паралельні бічним сторонам. Знайдіть периметр утвореного паралелограма.
5. Відстань від точки перетину діагоналей паралелограма до двох його вершин дорівнює 3 см і 4 см. Чому дорівнює відстань від неї до двох інших вершин? Поясніть відповідь.
6. Через точку перетину діагоналей паралелограма проведено пряму. Доведіть, що відрізок цієї прямої, який знаходиться між паралельними сторонами, ділиться в цій точці пополам.
7. У паралелограмі $ABCD$ через точку перетину діагоналей проведено пряму, яка відтинає на сторонах BC і AD відрізки $BE = 2$ м і $AF = 2{,}8$ м. Знайдіть сторони BC і AD.
8. У паралелограмі $ABCD$ $AB = 10$ см, $BC = 15$ см. Чому дорівнюють сторони AD і CD? Поясніть відповідь.
9. У паралелограмі $ABCD$ $\angle A = 30°$. Чому дорівнюють кути B, C, D? Поясніть відповідь.
10. Периметр паралелограма $ABCD$ дорівнює 10 см. Знайдіть довжину діагоналі BD, знаючи, що периметр трикутника ABD дорівнює 8 см.
11. Один з кутів паралелограма дорівнює 40°. Знайдіть інші кути.
12. Знайдіть кути паралелограма, знаючи, що один з них більший від другого на 50°.
13. Чи може один з кутів паралелограма дорівнювати 40°, а другий — 50°?
14. Діагональ паралелограма утворює з двома його сторонами кути 25° і 35°. Знайдіть кути паралелограма.
15. Знайдіть усі кути паралелограма, якщо сума двох із них дорівнює: 1) 80°; 2) 100°; 3) 160°.
16. Знайдіть усі кути паралелограма, якщо різниця двох із них дорівнює: 1) 70°; 2) 110°; 3) 140°.
17. У паралелограмі $ABCD$ точка E — середина сторони BC, а F — середина сторони AD. Доведіть, що чотирикутник $BEDF$ — паралелограм.
18. Доведіть, що коли у чотирикутнику дві сторони паралельні і рівні, то він є паралелограмом.
19. У паралелограмі $ABCD$ проведено бісектрису кута A, яка перетинає сторону BC у точці E. Чому дорівнюють відрізки BE і EC, якщо $AB = 9$ см, $AD = 15$ см?

20. Дві сторони паралелограма відносяться, як 3 : 4, а периметр його дорівнює 2,8 м. Знайдіть сторони.

21. У паралелограмі $ABCD$ перпендикуляр, опущений з вершини B на сторону AD, ділить її пополам. Знайдіть діагональ BD і сторони паралелограма, коли відомо, що периметр паралелограма дорівнює 3,8 м, а периметр трикутника ABD дорівнює 3 м.

22. Побудуйте паралелограм: 1) за двома сторонами і діагоналлю; 2) за стороною і двома діагоналями.

23. Побудуйте паралелограм: 1) за двома сторонами і кутом; 2) за діагоналями і кутом між ними.

24. Доведіть, що коли у паралелограмі всі кути рівні, то він є прямокутником.

25. Доведіть, що коли у паралелограмі хоча б один кут прямий, то він є прямокутником.

26. Доведіть, що коли у паралелограмі діагоналі рівні, то він є прямокутником.

27. Бетонна плита з прямолінійними сторонами повинна мати форму прямокутника. Як за допомогою мотузки перевірити правильність форми плити?

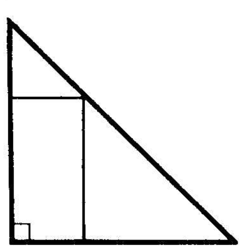
28. Бісектриса одного з кутів прямокутника ділить його сторону пополам. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його менша сторона дорівнює 10 см.

29. У прямокутнику точка перетину діагоналей знаходиться від меншої сторони на 4 см далі, ніж від більшої сторони. Периметр прямокутника дорівнює 56 см. Знайдіть сторони прямокутника.

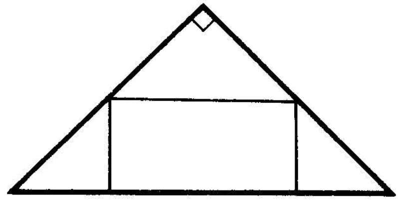
30. З однієї точки кола проведено дві взаємно перпендикулярні хорди, віддалені від центра на 6 см і 10 см. Знайдіть їх довжини.

31. У прямокутний трикутник, кожний катет якого дорівнює 6 см, вписано прямокутник, який має з трикутником спільний кут (мал. 141). Знайдіть периметр прямокутника.

32. У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано прямокутник так, що дві його вершини лежать на гіпотенузі, а дві інші — на катетах (мал. 142). Чому дорівнюють сто-



Мал. 141



Мал. 142

рони прямокутника, коли відомо, що вони відносяться, як 5 : 2, а гіпотенуза трикутника дорівнює 45 см?

33. Доведіть, що коли у паралелограмі діагоналі перпендикулярні, то він є ромбом.

34. Доведіть, що коли діагональ паралелограма є бісектрисою його кутів, то він є ромбом.

35. Кути, утворені діагоналями ромба з однією з його сторін, відносяться, як 4 : 5. Знайдіть кути ромба.

36. Доведіть, що чотирикутник, у якого всі сторони рівні, є ромбом.

37. У ромбі одна з діагоналей дорівнює стороні. Знайдіть кути ромба.

38. Побудуйте ромб: 1) за кутом і діагоналлю, яка виходить з вершини цього кута; 2) за діагоналлю і протилежним кутом.

39. Побудуйте ромб: 1) за стороною і діагоналлю; 2) за двома діагоналями.

40. Доведіть, що коли діагоналі прямокутника перетинаються під прямим кутом, то він є квадратом.

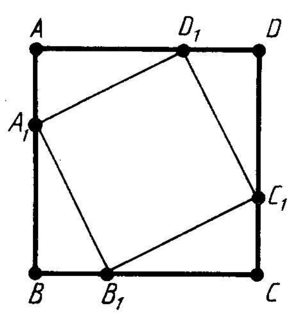
41. У рівнобедрений прямокутний трикутник, кожен катет якого 2 м, вписано квадрат, що має з ним спільний кут. Знайдіть периметр квадрата.

42. Дано квадрат $ABCD$. На кожній з його сторін відкладено рівні відрізки: $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$. Доведіть, що чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат (мал. 143).

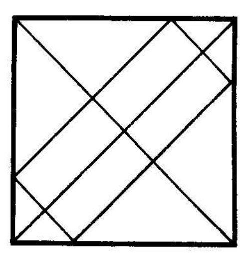
43. Діагональ квадрата дорівнює 4 м. Сторона його дорівнює діагоналі другого квадрата. Знайдіть сторону другого квадрата.

44. Дано квадрат, сторона якого 1 м, діагональ його дорівнює стороні другого квадрата. Знайдіть діагональ другого квадрата.

45. У квадрат вписано прямокутник так, що на кожній стороні квадрата знаходиться одна вершина прямокутника і сторо-



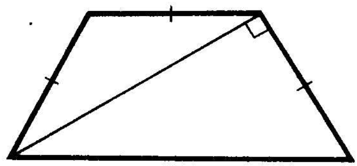
Мал. 143



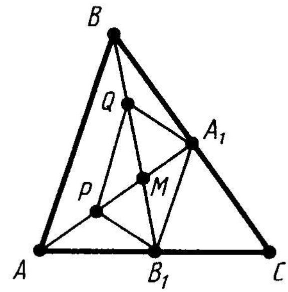
Мал. 144

ни прямокутника паралельні діагоналям квадрата (мал. 144). Знайдіть сторони прямокутника, знаючи, що одна з них удвічі більша від другої, а діагональ квадрата дорівнює 12 м.

46. У рівнобедрений прямокутний трикутник вписано квадрат так, що дві його вершини знаходяться на гіпотенузі, а дві інші — на катетах. Знайдіть сторону квадрата, коли відомо, що гіпотенуза дорівнює 3 м.
47. З даної точки проведено до кола радіусом 10 см дві взаємно перпендикулярні дотичні. Знайдіть довжини дотичних (відстань від даної точки до точки дотику).
48. Поділіть даний відрізок AB на n рівних частин.
49. Поділіть даний відрізок на таку кількість рівних частин: 1) 3; 2) 5; 3) 6.
50. Сторони трикутника дорівнюють 8 см, 10 см, 12 см. Знайдіть сторони трикутника, вершинами якого є середини сторін даного трикутника.
51. Периметр трикутника дорівнює 12 м, середини сторін сполучено відрізками. Знайдіть периметр утвореного трикутника.
52. Середня лінія рівнобедреного трикутника, паралельна основі, дорівнює 3 см. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр становить 16 см.
53. Як побудувати трикутник, якщо дано середини його сторін?
54. Доведіть, що вершини трикутника рівновіддалені від прямої, яка проходить через середини двох його сторін.
55. Доведіть, що середини сторін чотирикутника є вершинами паралелограма.
56. Знайдіть сторони паралелограма з попередньої задачі, якщо діагоналі чотирикутника дорівнюють 10 м і 12 м.
57. У чотирикутнику діагоналі дорівнюють a і b. Знайдіть периметр чотирикутника, вершинами якого є середини сторін даного чотирикутника.
58. Доведіть, що середини сторін прямокутника є вершинами ромба. І навпаки, середини сторін ромба є вершинами прямокутника.
59. Бічну сторону трапеції поділено на три рівні частини і через точки поділу проведено до другої сторони відрізки, паралельні основам. Знайдіть довжини цих відрізків, якщо основи трапеції дорівнюють 2 м і 5 м.
60. Доведіть, що в рівнобічній трапеції кути при основі рівні.
61. Чому дорівнюють кути рівнобічної трапеції, якщо різниця протилежних її кутів дорівнює 40°?
62. У рівнобічній трапеції більша основа дорівнює 2,7 м, бічна сторона 1 м, а кут між ними 60°. Знайдіть меншу основу.
63. У рівнобічній трапеції висота, проведена з вершини тупого



Мал. 145



Мал. 146

кута, ділить більшу основу на відрізки 6 см і 30 см. Знайдіть основи трапеції.

64* Менша основа рівнобічної трапеції дорівнює бічній стороні, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони (мал. 145). Знайдіть кути трапеції.

65. З одного боку від прямої a дано дві точки A і B на відстані 10 м і 20 м від неї. Знайдіть відстань від середини відрізка AB до прямої a.

66. З різних боків від прямої a дано дві точки A і B на відстанях 10 см і 4 см від неї. Знайдіть відстань від середини відрізка AB до прямої a.

67. Основи трапеції відносяться, як 2 : 3, а середня лінія дорівнює 5 м. Знайдіть основи.

68. Кінці діаметра віддалені від дотичної до кола на 1,6 м і 0,6 м. Знайдіть довжину діаметра.

69. Середня лінія трапеції дорівнює 7 см, а одна з її основ більша від другої на 4 см. Знайдіть основи трапеції.

70. Висота, проведена з вершини тупого кута рівнобічної трапеції, ділить більшу основу на частини, що мають довжини a і b ($a > b$). Знайдіть середню лінію трапеції.

71* Побудуйте трапецію за основами і бічними сторонами.

72* Побудуйте трапецію за основами і діагоналями.

73* Дано відрізки a, b, c, d, e. Побудуйте відрізок $x = \frac{abc}{de}$.

74* 1) У трикутнику ABC проведено медіани AA_1 є BB_1, які перетинаються в точці M (мал. 146). У трикутнику AMB проведено середню лінію PQ. Доведіть, що чотирикутник A_1B_1PQ — паралелограм.

2) Доведіть, що дві довільні медіани трикутника точкою перетину діляться у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини.

3) Доведіть, що всі три медіани трикутника перетинаються в одній точці.

§ 7. ТЕОРЕМА ПІФАГОРА

62. КОСИНУС КУТА

Косинусом **гострого кута прямокутного трикутника називається відношення прилеглого катета до гіпотенузи.**

Косинус кута α позначається так: $\cos\alpha$. На малюнку 147 зображено прямокутний трикутник ABC з кутом A, який дорівнює α. Косинус кута α дорівнює відношенню катета AC, прилеглого до цього кута, до гіпотенузи AB, тобто

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}.$$

Теорема 7.1. ***Косинус кута залежить тільки від градусної міри кута і не залежить від розміщення і розмірів трикутника.***

Це означає, що у двох прямокутних трикутників з одним і тим самим гострим кутом косинуси цього кута рівні.

Доведення. Нехай ABC і $A'B'C'$ — два прямокутні трикутники з одним і тим самим кутом при вершинах A і A', який дорівнює α (мал. 148). Треба довести, що

$$\frac{A'C'}{A'B'} = \frac{AC}{AB}.$$

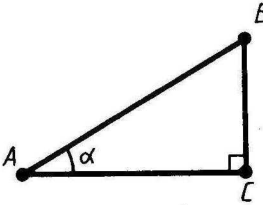
Побудуємо трикутник AB_1C_1, який дорівнює трикутнику $A'B'C'$ так, як показано на малюнку 148. Оскільки прямі BC і B_1C_1 перпендикулярні до прямої AC, то вони паралельні. За теоремою про пропорційні відрізки маємо:

$$\frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC}{AB}.$$

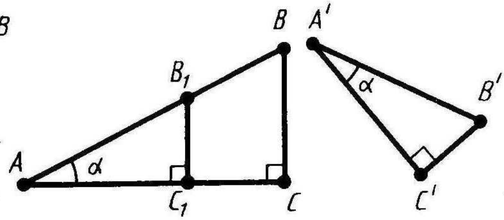
А через те що за побудовою $AC_1 = A'C'$, $AB_1 = A'B'$, то

$$\frac{A'C'}{A'B'} = \frac{AC}{AB}.$$

Теорему доведено.



Мал. 147

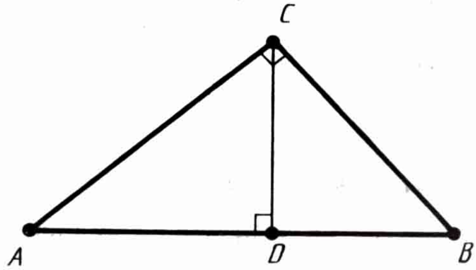


Мал. 148

63. ТЕОРЕМА ПІФАГОРА

Теорема 7.2 (теорема Піфагора). ***У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.***

Доведення. Нехай ABC — даний прямокутний трикутник з прямим кутом C. Проведемо висоту CD з вершини прямого кута C (мал. 149).



Мал. 149

За означенням косинуса кута $\cos A = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$.

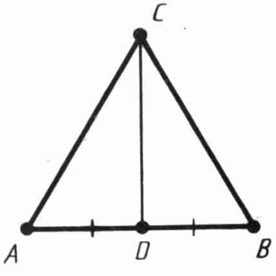
Звідси $AB \cdot AD = AC^2$. Аналогічно $\cos B = \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}$. Звідси $AB \cdot BD = BC^2$. Додавши рівності почленно і врахувавши, що $AD + DB = AB$, дістанемо:

$$AC^2 + BC^2 = AB\,(AD + DB) = AB^2.$$

Теорему доведено.

З теореми Піфагора випливає, що ***в прямокутному трикутнику будь-який з катетів менший за гіпотенузу.*** Звідси, в свою чергу, випливає, що $\cos \alpha < 1$ для будь-якого гострого кута α.

Задача (11). Знайдіть медіану рівнобедреного трикутника з основою a і бічною стороною b, проведену до основи.



Мал. 150

Розв'язання. Нехай ABC — рівнобедрений трикутник з основою AB і CD — його медіана, проведена до основи (мал. 150). Як відомо, медіана рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є висотою. Тому трикутник ACD прямокутний з прямим кутом D. За теоремою Піфагора $AD^2 + CD^2 = AC^2$, $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + CD^2 = b^2$. Звідси $CD = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$.

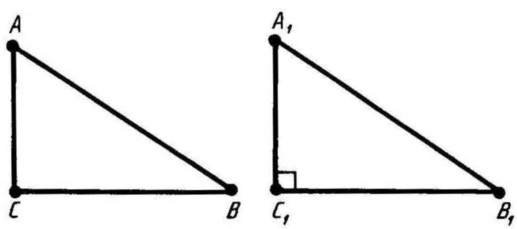
64. ЄГИПЕТСЬКИЙ ТРИКУТНИК

Піфагор — давньогрецький учений (VI ст. до н. е.)

Задача (17). Доведіть, що коли у трикутнику сторони a, b, c і $a^2 + b^2 = c^2$, то кут трикутника, протилежний стороні c, прямий.

Розв'язання. Нехай ABC — даний трикутник, у якого $AB = c$, $AC = a$, $BC = b$ (мал. 151). Побудуємо прямокутний трикутник $A_1B_1C_1$ з катетами $A_1C_1 = a$ і $B_1C_1 = b$. За теоремою Піфагора його гіпотенуза $A_1B_1 = \sqrt{a^2 + b^2} = c$. Таким чином, трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні за третьою ознакою. З рівності трикутників випливає, що кут трикутника ABC при вершині C прямий.

Землеміри Стародавнього Єгипту для побудови прямого кута користувались таким способом. Мотузок ділили вузлами на 12 рівних частин і кінці зв'язували. Потім мотузок розтягували на землі так, щоб утворився трикутник із сторонами 3, 4 і 5 поділок. Кут трикутника, протилежний до сторони, яка має 5 поділок, був прямий ($3^2 + 4^2 = 5^2$). У зв'язку з таким способом побудови прямого кута трикутник із сторонами 3, 4, 5 од. інколи називають *єгипетським*.



Мал. 151

65. ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА

Нехай BA — перпендикуляр, опущений з точки B на пряму a, і C — будь-яка точка прямої a, відмінна від A. Відрізок BC називається *похилою*, проведеною з точки B до прямої a (мал. 152). Точка C називається *основою похилої*. Відрізок AC називається *проекцією похилої*.

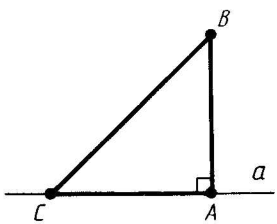
З теореми Піфагора випливає, що ***коли з даної точки до прямої проведено перпендикуляр і похилі, то будь-яка похила***

більша від перпендикуляра, рівні похилі мають рівні проекції, з двох похилих більша та, у якої проекція більша.

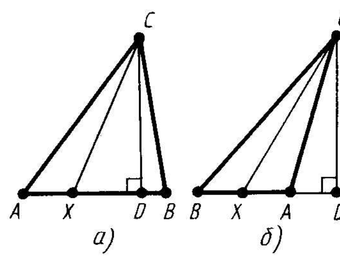
Справді, за теоремою Піфагора $AB^2 + AC^2 = BC^2$ (мал. 152). Звідси бачимо, що $BC > AB$. При даному AB чим більша AC, тим більша BC.

Задача (19). На стороні AB трикутника ABC взято точку X. Доведіть, що відрізок CX менший принаймні від однієї із сторін AC чи BC.

Розв'язання. Проведемо висоту CD трикутника. У будь-якому випадку відрізок DX менший або від AD (мал. 153, *а*), або від BD (мал. 153, *б*). За властивістю похилих, проведених з однієї точки, випливає, що відрізок CX менший принаймні від одного з відрізків AC або BC. Що й треба було довести.



Мал. 152



Мал. 153

66. НЕРІВНІСТЬ ТРИКУТНИКА

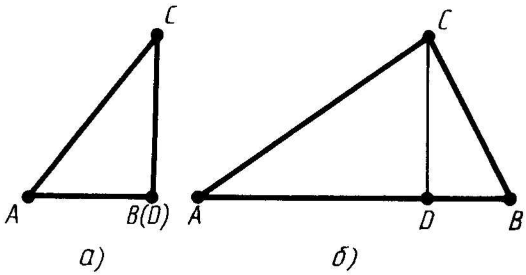
Якщо точки A і B різні, то *відстанню* між ними називається довжина відрізка AB. Якщо точки A і B збігаються, то вважають, що відстань між ними дорівнює нулю.

Теорема 7.3 (нерівність трикутника). ***Які б не були три точки, відстань між будь-якими двома з цих точок не більша від суми відстаней від них до третьої точки.***

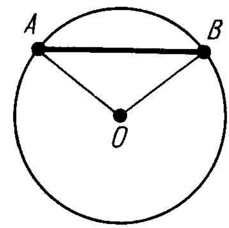
Це означає, що кожна з цих відстаней менша або дорівнює сумі двох інших.

Доведення. Нехай A, B, C — три дані точки. Якщо дві точки з трьох або всі три збігаються, то твердження теореми очевидне.

Якщо ж усі точки різні й лежать на одній прямій, то одна з них лежить між двома іншими, наприклад, B. У цьому випадку $AB + BC = AC$. Звідси бачимо, що кожна з трьох відстаней не більша від суми двох інших.



Мал. 154



Мал. 155

Припустимо тепер, що точки не лежать на одній прямій (мал. 154). Доведемо, що $AB < AC + BC$. Опустимо перпендикуляр CD на пряму AB. За доведеним $AB \leqslant AD + BD$. Через те що $AB < AC$ і $BD < BC$, то $AB < AC + BC$. Теорему доведено.

Зауважимо, що у випадку, коли точки не лежать на одній прямій, нерівність трикутника — строга нерівність. Звідси випливає, що ***в будь-якому трикутнику кожна сторона менша за суму двох інших сторін.***

З а д а ч а (23). Доведіть, що будь-яка хорда кола не більша за діаметр і дорівнює діаметру тільки тоді, коли сама є діаметром.

Р о з в' я з а н н я (мал. 155). За нерівністю трикутника $AB \leqslant OA + OB = 2R$, причому, коли центр O не лежить на відрізку AB, то нерівність строга. Рівність буде тільки тоді, коли хорда проходить через центр, тобто є діаметром.

67. СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ СТОРОНАМИ І КУТАМИ ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА

Нехай ABC — прямокутний трикутник з прямим кутом C і гострим кутом при вершині A, що дорівнює α (мал. 156). За означенням $\cos\alpha$ дорівнює відношенню катета, прилеглого до кута α, до гіпотенузи.

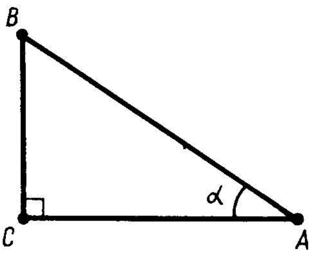
Синусом кута α (позначають $\sin\alpha$) називається відношення протилежного катета BC до гіпотенузи AB, тобто

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}.$$

Тангенсом кута α (позначають $\operatorname{tg}\alpha$) називається відношення протилежного катета BC до прилеглого катета AC, тобто

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}.$$

Синус і тангенс кута, так само як і косинус, залежать тільки від величини кута.



Мал. 156

Справді, за теоремою Піфагора

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}.$$

За означенням

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}.$$

Підставимо значення BC:

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{AB^2 - AC^2}}{AB} = \sqrt{1 - \left(\frac{AC}{AB}\right)^2} = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}.$$

Оскільки $\cos\alpha$ залежить тільки від величини кута, то й $\sin\alpha$ теж залежить тільки від величини кута.

За означенням

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}.$$

Поділимо чисельник і знаменник на AB:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AB} : \frac{AC}{AB} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Звідси бачимо, що і $\operatorname{tg}\alpha$ залежить тільки від величини кута.

З означень $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ дістанемо такі правила:

Катет, протилежний куту** α, **дорівнює добутку гіпотенузи на $\sin\alpha$.

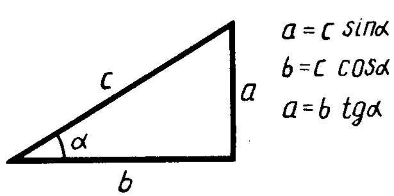
Катет, прилеглий до кута** α, **дорівнює добутку гіпотенузи на $\cos\alpha$.

Катет, протилежний куту** α, **дорівнює добутку другого катета на $\operatorname{tg}\alpha$.

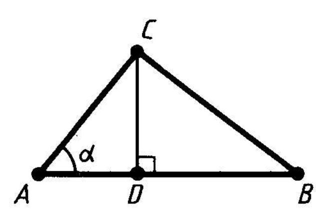
Ці правила дають можливість за однією із сторін прямокутного трикутника і гострим кутом знаходити дві інші сторони; а за двома сторонами знаходити гострі кути (мал. 157).

Задача (47). У прямокутному трикутнику дано гіпотенузу c і гострий кут α. Знайдіть катети, їх проекції на гіпотенузу і висоту, опущену на гіпотенузу.

Розв'язання (мал. 158). $AC = AB\cos\alpha = c\cos\alpha$, $BC = AB\sin\alpha = c\sin\alpha$; $BD = BC\sin\alpha = c\sin^2\alpha$; $AD = AC\cos\alpha = c\cos^2\alpha$; $CD = AC\sin\alpha = c\sin\alpha\cos\alpha$.



Мал. 157



Мал. 158

Для $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ складено спеціальні таблиці, які дають можливість для даного кута α знайти $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$ або за значенням $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ знайти відповідний кут. Зараз для цього звичайно використовують мікрокалькулятори.

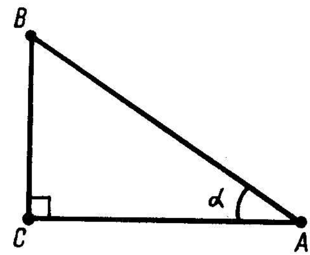
68. ОСНОВНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ТОТОЖНОСТІ

Одну тотожність ви вже знаєте:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Доведемо ще такі тотожності: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, $1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

Візьмемо довільний прямокутний трикутник ABC з кутом при вершині A, що дорівнює α (мал. 159). За теоремою Піфагора:



Мал. 159

$$BC^2 + AC^2 = AB^2.$$

Поділимо обидві частини рівності на AB^2. Дістанемо:

$$\left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = 1.$$

Але $\frac{BC}{AB} = \sin\alpha$, $\frac{AC}{AB} = \cos\alpha$. Таким чином,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Ця рівність є тотожністю. Вона правильна для будь-якого гострого кута α.

Щоб довести другу тотожність, поділимо обидві частини виведеної тотожності на $\cos^2\alpha$. Дістанемо:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \text{ або } 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Якщо обидві частини тотожності $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ поділити на $\sin^2\alpha$, то дістанемо третю тотожність:

$$1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Значення цих тотожностей полягає в тому, що вони дають можливість за однією з величин $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ чи $\operatorname{tg}\alpha$ знайти дві інші.

З а д а ч а 63. Обчисліть значення $\sin\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\cos\alpha = \frac{5}{13}$.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, то $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$, а $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{12}{5}$.

69. ЗНАЧЕННЯ СИНУСА, КОСИНУСА І ТАНГЕНСА ДЕЯКИХ КУТІВ

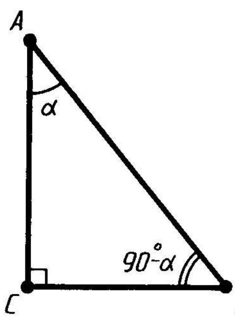
Т е о р е м а 7.4. ***Для будь-якого гострого кута α*** **$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$.**

Д о в е д е н н я. Нехай ABC — прямокутний трикутник з гострим кутом α при вершині A (мал. 160). Тоді гострий кут при вершині B дорівнює $90° - \alpha$. За означенням

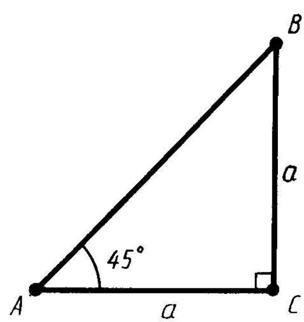
$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB},\ \cos\alpha = \frac{AC}{AB},$$

$$\sin(90° - \alpha) = \frac{AC}{AB},\ \cos(90° - \alpha) = \frac{BC}{AB}.$$

З другої і третьої рівності маємо: $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$.
З першої і четвертої рівностей дістаємо: $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$.
Теорему доведено.



Мал. 160



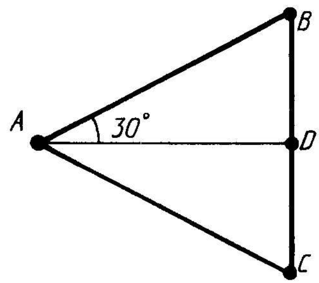
Мал. 161

Знайдемо синус, косинус і тангенс кута 45°. Для цього побудуємо прямокутний трикутник з гострим кутом 45° (мал. 161). Другий його гострий кут теж дорівнює 45°, тому трикутник рівнобедрений. Нехай катети трикутника дорівнюють a. За теоремою Піфагора гіпотенуза дорівнює $a\sqrt{2}$. Знаходимо:

$$\sin 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \operatorname{tg} 45° = \frac{a}{a} = 1.$$

Знайдемо синус, косинус і тангенс кута 30°. Візьмемо рівносторонній трикутник ABC (мал. 162). Проведемо в ньому медіану AD. Вона буде бісектрисою і висотою. Тому трикутник ABD — прямокутний з гострим кутом при вершині A, який дорівнює 30°. Нехай a — сторона рівностороннього трикутника. Тоді $BD = \frac{a}{2}$. За теоремою Піфагора



Мал. 162

$$AD = \sqrt{Ab^2 - BD^2} = $$
$$= \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Отже,

$$\sin 30^\circ = \frac{a}{2} : a = \frac{1}{2}; \ \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} : a = \frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Оскільки $\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha)$, то

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \ \cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2};$$
$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \sqrt{3}.$$

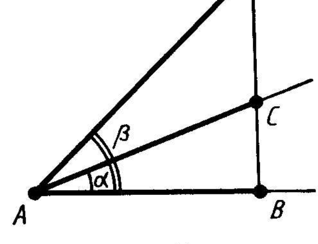
70. ЗМІНА СИНУСА, КОСИНУСА І ТАНГЕНСА ПРИ ЗРОСТАННІ КУТА

Теорема 7.5. ***При зростанні гострого кута*** $\sin \alpha$ ***і*** $\operatorname{tg} \alpha$ ***зростають, а*** $\cos \alpha$ ***спадає.***

Доведення. Нехай α і β — гострі кути, причому $\alpha < \beta$. Відкладемо кути α і β від півпрямої AB в одну півплощину (мал. 163). Проведемо через точку B пряму, перпендикулярну до AB. Вона перетне сторони даних кутів у точках C і D.

Оскільки $\alpha < \beta$, то точка C лежить між точками B і D. Тому $BC < BD$. А за властивістю похилих, проведених з однієї точки до прямої, маємо $AC < AD$.

Оскільки $\cos \alpha = \frac{AB}{AC}$, $\cos \beta = \frac{AB}{AD}$, то $\cos \alpha > \cos \beta$, тобто при зростанні кута косинус спадає.



Мал. 163

Оскільки $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$, а $\cos\alpha$ спадає при зростанні кута, то $\sin\alpha$ зростає.

Оскільки $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ і $\sin\alpha$ зростає, а $\cos\alpha$ спадає при зростанні α, то $\operatorname{tg}\alpha$ зростає при зростанні α. Теорему доведено.

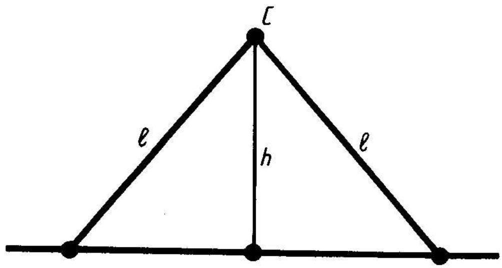
КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Дайте означення косинуса гострого кута прямокутного трикутника.
2. Доведіть, що косинус кута залежить тільки від градусної міри кута і не залежить від розміщення і розмірів трикутника.
3. Доведіть теорему Піфагора.
4. Доведіть, що в прямокутному трикутнику гіпотенуза більша за будь-який катет.
5. Доведіть, що $\cos\alpha < 1$ для гострого кута α.
6. Доведіть, що коли з однієї точки до прямої проведено перпендикуляр і похилі, то будь-яка похила більша від перпендикуляра. Рівні похилі мають рівні проекції; з двох похилих більша та, у якої проекція більша.
7. Доведіть нерівність трикутника.
8. Доведіть, що в трикутнику кожна сторона менша за суму двох інших сторін.
9. Дайте означення синуса і тангенса гострого кута. Доведіть, що вони залежать тільки від градусної міри кута.
10. Як виражається катет прямокутного трикутника через гіпотенузу і гострий кут, через гострий кут і другий катет?
11. Доведіть тотожності: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$; $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.
12. Доведіть, що для будь-якого гострого кута α: $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$; $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$.
13. Чому дорівнюють значення синуса, косинуса і тангенса кутів 30°, 45°, 60°?
14. Доведіть, що $\sin\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$ зростають при зростанні гострого кута α, а $\cos\alpha$ спадає.

ЗАДАЧІ

1. Побудуйте кут, косинус якого дорівнює: 1) $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{4}{9}$; 3) 0,5; 4) 0,8.
2. У прямокутному трикутнику дано катети a і b. Знайдіть гіпотенузу, якщо: 1) $a = 3$; $b = 4$; 2) $a = 1$, $b = 1$; 3) $a = 5$, $b = 6$.

3. У прямокутному трикутнику дано гіпотенузу c і катет a. Знайдіть другий катет, якщо: 1) $c = 5$, $a = 3$; 2) $c = 13$, $a = 5$; 3) $c = 6$, $a = 5$.
4. Дві сторони прямокутного трикутника дорівнюють 3 м і 4 м. Знайдіть третю сторону. (Два випадки.)
5. Чи можуть сторони прямокутного трикутника бути пропорційними до чисел 5, 6, 7?
6. Знайдіть сторону ромба, якщо його діагоналі дорівнюють: 1) 6 см і 8 см; 2) 16 дм і 30 дм; 3) 5 м і 12 м.
7. Сторони прямокутника дорівнюють 60 см і 91 см. Чому дорівнює діагональ?
8. Діагональ квадрата a. Чому дорівнює сторона квадрата?
9. Чи можна з круглого листа заліза діаметром 1,4 м вирізати квадрат із стороною 1 м?
10. Знайдіть висоту рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 5 м і 11 м, а бічна сторона 4 м.
11. Знайдіть медіану рівнобедреного трикутника з основою a і бічною стороною b, проведену до основи.
12. Чи можуть побачити один одного космонавти, які летять над поверхнею Землі на висоті 230 км, якщо відстань між ними по прямій дорівнює 2200 км? Радіус Землі 6370 км.
13. У рівносторонньому трикутнику із стороною a знайдіть висоту.
14. Дано відрізки a і b. Як побудувати відрізок: 1) $\sqrt{a^2 + b^2}$; 2) $\sqrt{a^2 - b^2}$, $a > b$?
15*. Дано відрізки a і b. Як побудувати відрізок $x = \sqrt{ab}$?
16. Між двома фабричними будівлями побудовано похилий жолоб для транспортування матеріалів. Відстань між будівлями дорівнює 10 м, а кінці жолоба розташовані на висоті 8 м і 4 м над землею. Знайдіть довжину жолоба.
17. Доведіть, що коли трикутник має сторони a, b, c і $a^2 + b^2 = c^2$, то кут трикутника, протилежний стороні c, прямий.
18. Чому дорівнює у трикутнику із сторонами 5, 12, 13 кут, протилежний стороні 13?
19. На стороні AB трикутника ABC взято точку X. Доведіть, що відрізок CX менший принаймні за одну із сторін AC чи BC.
20. Доведіть, що відстань між будь-якими двома точками, взятими на сторонах трикутника, не більша від найбільшої з його сторін.
21. Дано пряму і точку C на відстані h від цієї прямої. Доведіть, що з точки C можна провести дві і тільки дві похилі довжиною l, якщо $l > h$ (мал. 164).
22*. Доведіть, що пряма, яка знаходиться від центра кола на відстані, меншій за радіус, перетинає коло у двох точках.
23. Доведіть, що довільна хорда кола не більша від діаметра і дорівнює діаметру тільки тоді, коли сама є діаметром.



Мал. 164

24. Доведіть, що точки A, B, C лежать на одній прямій, якщо: 1) $AB = 5$ м, $BC = 7$ м, $AC = 12$ м; 2) $AB = 10{,}7$, $BC = 17{,}1$, $AC = 6{,}4$.

25. Доведіть, що будь-яка сторона трикутника більша від різниці двох інших його сторін.

26. Чи може у паралелограмі із сторонами 4 см і 7 см одна з діагоналей дорівнювати 2 см?

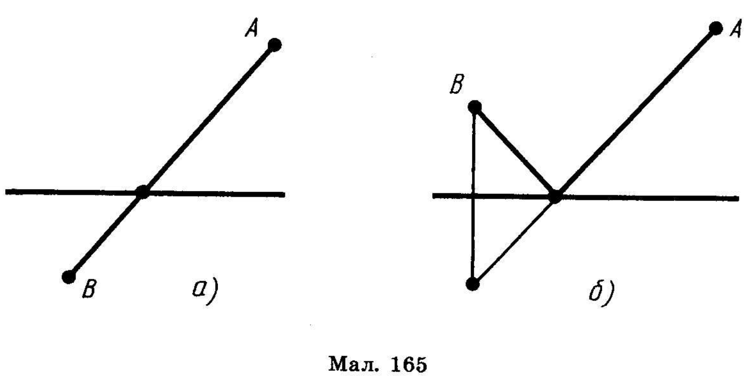
27. У трикутнику одна сторона дорівнює 1,9 м, а друга 0,7 м. Знайдіть третю сторону, знаючи, що її довжина дорівнює цілому числу метрів.

28*. Доведіть, що медіана трикутника ABC, проведена з вершини A, менша за півсуму сторін AB і AC.

29*. Відомо, що діагоналі чотирикутника перетинаються. Доведіть, що сума їх довжин менша за периметр, але більша від півпериметра чотирикутника.

30. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O. Доведіть, що сума відстаней від будь-якої точки площини до точок A, B, C і D не менша, ніж $OA + OB + OC + OD$.

31*. На прямолінійному шосе треба знайти місце для автобусної зупинки так, щоб сума відстаней від неї до населених пунк-



Мал. 165

тів A і B була найменшою. Розгляньте два випадки: 1) населені пункти розміщені з різних боків від шосе (мал. 165, *а*); 2) населені пункти розміщені з одного боку від шосе (мал. 165, *б*).

32. Чи можуть сторони трикутника бути пропорційними до чисел 1, 2, 3?

33. Доведіть, що в трикутнику кожна сторона менша за половину периметра.

34. Всередині кола радіуса R взято точку на відстані d від центра. Знайдіть найбільшу і найменшу відстань від цієї точки до точок кола.

35. Поза колом радіуса R взято точку на відстані d від центра. Знайдіть найбільшу і найменшу відстані від цієї точки до точок кола.

36. Чи можуть перетинатися кола, центри яких знаходяться на відстані 20 см, а радіуси 8 см і 11 см? Поясніть відповідь.

37. Чи можуть перетинатися кола, центри яких знаходяться на відстані 5 см, а радіуси 6 см і 12 см? Поясніть відповідь.

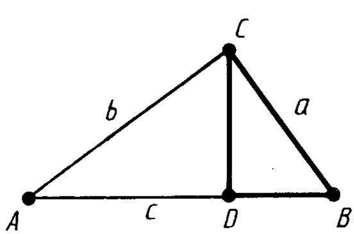
38*. Доведіть, що в задачі 36 кола знаходяться одне поза другим, а в задачі 37 кола радіуса 6 см знаходиться всередині кола радіуса 12 см.

39. Чи можуть перетинатись кола з радіусами R_1 і R_2 і відстанню між центрами d, якщо $R_1 + R_2 < d$?

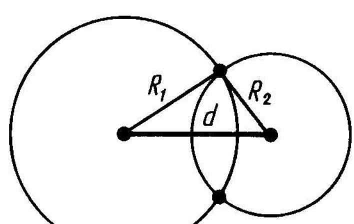
40*. Дано три додатних числа a, b, c, які задовольняють умови: $a \leqslant b \leqslant c < a + b$. Доведіть послідовно твердження:

1) $0 < \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} < a$; 2) існує прямокутний трикутник BCD, гіпотенуза якого $BC = a$, а катет $BD = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}$ (мал. 166); 3) трикутник ABC, у якого $BC = a$, $AB = c$, а відстань BD дорівнює $\dfrac{c^2 + a^2 - B^2}{2c}$, має сторону $AC = b$ (мал. 166).

41. Дано три додатних числа a, b, c. Доведіть, що коли кожне з цих чисел менше за суму двох інших, то існує трикутник із сторонами a, b, c.



Мал. 166



Мал. 167

42. Чи можна побудувати трикутник із сторонами:
1) $a = 1$см, $b = 2$ см, $c = 3$ см; 2) $a = 2$ см, $b = 3$ см, $c = 4$ см; 3) $a = 3$ см, $b = 7$ см, $c = 11$ см; 4) $a = 4$ см, $b = 5$ см, $c = 9$ см?

43*. Дано два кола з радіусами R_1, R_2 і відстанню між центрами d. Доведіть, що коли кожне з чисел R_1, R_2 і d менше за суму двох інших, то кола перетинаються в двох точках (мал. 167).

44. У прямокутному трикутнику один катет дорівнює 8 см, а синус протилежного йому кута дорівнює 0,8. Знайдіть гіпотенузу і другий катет.

45. У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює a, а один з гострих кутів α. Знайдіть другий гострий кут і катети.

46. У прямокутному трикутнику катет дорівнює a, а протилежний йому кут α. Знайдіть другий гострий кут, протилежний йому катет і гіпотенузу.

47. У прямокутному трикутнику дано гіпотенузу c і гострий кут α. Знайдіть катети, їх проекції на гіпотенузу і висоту, опущену на гіпотенузу.

48. 1) Знайдіть $\sin 22°$, $\sin 22° 36'$; $\sin 22° 38'$; $\sin 22° 41'$; $\cos 68°$; $\cos 68° 18'$; $\cos 68° 23'$.
2) Знайдіть кут x, якщо $\sin x = 0{,}2850$; $\sin x = 0{,}2844$, $\cos x = 0{,}2710$.

49. Знайдіть значення синуса і косинуса кутів: 1) 16°; 2) 24° 36′; 3) 70° 32′; 4) 88° 49′.

50. Знайдіть величину гострого кута x, якщо: 1) $\sin x = 0{,}0175$; 2) $\sin x = 0{,}5015$; 3) $\cos x = 0{,}6814$; 4) $\cos x = 0{,}0670$.

51. Знайдіть значення тангенса кута:
1) 10°; 2) 40° 40′; 3) 50° 30′; 4) 70° 15′.

52. Знайдіть гострий кут x, якщо: 1) $\operatorname{tg} x = 0{,}3227$; 2) $\operatorname{tg} x = 0{,}7846$; 3) $\operatorname{tg} x = 6{,}152$; 4) $\operatorname{tg} x = 9{,}254$.

53. Висота рівнобедреного трикутника дорівнює 12,4 м, а основа 40,6 м. Знайдіть кути трикутника і бічну сторону.

54. Відношення катетів прямокутного трикутника дорівнює 19 : 28. Знайдіть його кути.

55. Сторони прямокутника дорівнюють 12,4 і 26. Знайдіть кут між діагоналями.

56. Діагоналі ромба дорівнюють 4,73 і 2,94. Знайдіть його кути.

57. Сторона ромба 241 м, висота 120 м. Знайдіть його кути.

58. Радіус кола дорівнює 5 м. З точки, що знаходиться на відстані 13 м від центра, проведено дотичну до кола. Знайдіть довжини дотичних і кут між ними.

59. Тінь від вертикальної жердини, висота якої дорівнює 7 м, становить 4 м. Виразіть у градусах висоту сонця над горизонтом (мал. 168).

60. Основа рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює a. Знайдіть бічну сторону.

61. Знайдіть невідомі сторони й гострі кути прямокутного трикутника за такими даними:
1) за двома катетами: а) $a = 3$, $b = 4$; б) $a = 9$, $b = 40$; в) $a = 20$, $b = 21$; г) $a = 11$, $b = 60$;
2) за гіпотенузою і катетом: а) $c = 13$, $a = 5$; б) $c = 25$, $a = 7$; в) $c = 17$, $a = 8$; г) $c = 85$, $a = 84$;
3) за гіпотенузою і гострим кутом: а) $c = 2$, $\alpha = 20°$; б) $c = 4$, $\alpha = 50°20'$; в) $c = 8$, $\alpha = 70°\ 36'$; г) $c = 16$, $\alpha = 76°\ 21'$;
4) за катетом і протилежним кутом: а) $a = 3$, $\alpha = 30°\ 27'$; б) $a = 5$, $\alpha = 40°\ 48'$; в) $a = 7$, $\alpha = 60°\ 35'$; г) $a = 9$, $\alpha = 68°$.

62. Спростіть вирази:
1) $1 - \sin^2\alpha$; 2) $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)$;
3) $1 + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$; 4) $\sin\alpha - \sin\alpha\cos^2\alpha$;
5) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;
6) $\mathrm{tg}^2\,\alpha - \sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\,\alpha$; 7) $\cos^2\alpha + \mathrm{tg}^2\,\alpha\cos^2\alpha$;
8) $\mathrm{tg}^2\,\alpha\,(2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 1)$; 9) $\dfrac{1 - \mathrm{tg}^2\,\alpha + \mathrm{tg}^4\,\alpha}{\cos^2\alpha}$.

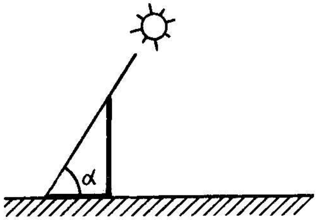
63. Обчисліть значення $\sin\alpha$ і $\mathrm{tg}\,\alpha$, якщо:
1) $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$; 2) $\cos\alpha = \dfrac{15}{17}$; 3) $\cos\alpha = 0{,}6$.

64. Знайдіть $\cos\alpha$ і $\mathrm{tg}\,\alpha$, якщо:
1) $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$; 2) $\sin\alpha = \dfrac{40}{41}$; 3) $\sin\alpha = 0{,}8$.

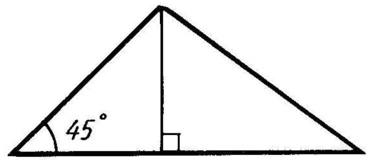
65. Побудуйте кут α, якщо: 1) $\cos\alpha = \dfrac{4}{7}$; 2) $\sin\alpha = \dfrac{4}{7}$;
3) $\sin\alpha = 0{,}5$; 4) $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{3}{5}$; 5) $\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}7$.

66. У прямокутному трикутнику з гіпотенузою a і кутом $60°$ знайдіть катет, протилежний цьому куту.

67. Знайдіть радіус r кола, вписаного в рівносторонній трикутник, і радіус R кола, описаного навколо цього трикутника, якщо сторона трикутника дорівнює a.



Мал. 168



Мал. 169

68. У трикутнику один з кутів при основі дорівнює 45°, а висота ділить основу на частини 20 см і 21 см. Знайдіть більшу бічну сторону [1] (мал. 169).

69. У трикутнику одна із сторін дорівнює 1 м, а прилеглі до неї кути 30° і 45°. Знайдіть дві інші сторони трикутника.

70. Діагональ прямокутника у два рази більша від однієї з його сторін. Знайдіть кути між діагоналями.

71. Діагоналі ромба дорівнюють a і $a\sqrt{3}$. Знайдіть кути цього ромба.

72. Який з кутів більший — α чи β, якщо:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $\sin\beta = \frac{1}{4}$; 2) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $\sin\beta = \frac{3}{4}$;

3) $\cos\alpha = \frac{3}{7}$, $\cos\beta = \frac{2}{5}$; 4) $\cos\alpha = 0{,}75$, $\cos\beta = 0{,}74$;

5) $\mathrm{tg}\,\alpha = 2{,}1$, $\mathrm{tg}\,\beta = 2{,}5$; 6) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{8}{3}$, $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{5}{2}$?

73. У прямокутному трикутнику ABC кут A більший від кута B. Який з катетів більший: AC чи BC?

74. У прямокутному трикутнику ABC катет BC більший від катета AC. Який кут більший: A чи B?

§ 8. ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ

71. ОЗНАЧЕННЯ ДЕКАРТОВИХ КООРДИНАТ

Проведемо на площині через точку O дві взаємно перпендикулярні прямі x і y — *осі координат* (мал. 170). Вісь x (вона, як правило, горизонтальна) називається *віссю абсцис*, а вісь y — *віссю ординат*. Точка їх перетину O — *початок координат* — розбиває кожну з осей на дві півосі. Домовимось одну з них називати *додатною*, позначаючи її стрілкою, а другу — *від'ємною*.

Кожній точці A площини поставимо у відповідність пару чисел — *координати точки* — абсцису (x) і ординату (y) за таким правилом.

Через точку A проведемо пряму, паралельну осі ординат (мал. 171). Вона перетне вісь абсцис x у деякій точці A_x. *Абсцисою* точки A називатимемо число x, абсолютна величина якого дорівнює відстані від точки O до A_x. Це число додатне, якщо A_x належить додатній півосі, і від'ємне, якщо A_x належить від'ємній півосі. Коли точка A лежить на осі ординат y, то вважаємо, що x дорівнює нулю.

---

[1] Інколи у довільному трикутнику, не обов'язково рівнобедреному, сторону, проведену горизонтально, називають основою, а дві інші — бічними сторонами, як у даній задачі.

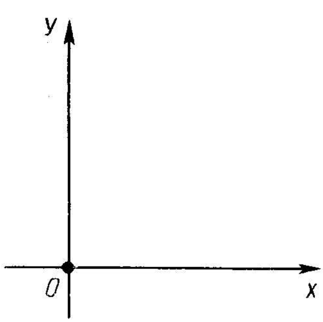
Р. Декарт — французький учений (1596—1650)

Ординату (y) точки A визначаємо аналогічно. Через точку A проведемо пряму, паралельну осі абсцис x (мал. 171). Вона перетне вісь ординат y в деякій точці A_y. *Ординатою* точки A називатимемо число y, абсолютна величина якого дорівнює відстані від точки O до A_y. Це число додатне, якщо A_y належить додатній півосі, і від'ємне, якщо A_y належить від'ємній півосі. Коли точка A лежить на осі абсцис x, то вважаємо, що y дорівнює нулю.

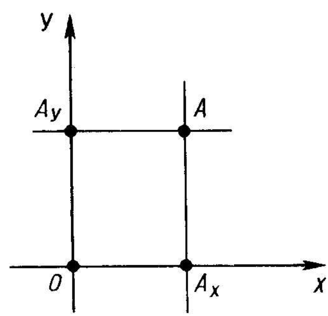
Координати точки записуватимемо в дужках поряд з буквеним позначенням точки, наприклад A (x; y) (на першому місці — абсциса, на другому — ордината).

Осі координат розбивають площину на чотири частини — чверті: I, II, III, IV (мал. 172). В межах однієї чверті знаки обох координат зберігаються і мають значення, показані на малюнку.

Точки осі x (осі абсцис) мають ординати, що дорівнюють нулю, ($y = 0$), а точки осі y (осі ординат) мають абсциси, що дорівнюють нулю, ($x = 0$). У початку координат абсциса і ордината дорівнюють нулю.



Мал. 170

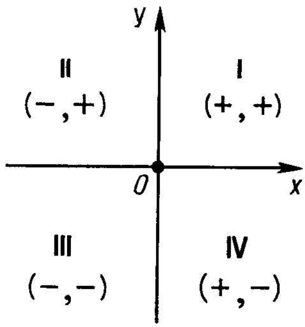


Мал. 171

Площину, на якій введено таким способом координати x і y, називатимемо *площиною* xy. Довільну точку цієї площини з координатами x і y інколи позначатимемо (x; y). Введені на площині координати x і y називаються *декартовими* за ім'ям французького вченого Р. Декарта, який вперше застосував їх у своїх дослідженнях.

З а д а ч а (9). Дано точки A (-3; 2) і B (4; 1). Доведіть, що відрізок AB перетинає вісь y, але не перетинає вісь x.

Р о з в' я з а н н я. Вісь y розбиває площину xy на дві



Мал. 172

півплощини. В одній півплощині абсциси точок додатні, а в другій — від'ємні. Оскільки абсциси точок A і B протилежних знаків, то точки A і B лежать у різних півплощинах. А це означає, що відрізок AB перетинає вісь y.

Вісь x теж розбиває площину xy на дві півплощини. В одній півплощині ординати точок додатні, а в другій — від'ємні. Точки A і B мають ординати одного знака (додатні). Отже, точки A і B лежать в одній півплощині. А це означає, що відрізок AB не перетинає вісь x.

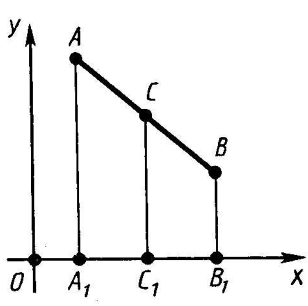
72. КООРДИНАТИ СЕРЕДИНИ ВІДРІЗКА

Нехай A $(x_1;\ y_1)$ і B $(x_2;\ y_2)$ — дві довільні точки і C $(x;\ y)$ середина відрізка AB. Знайдемо координати x, y точки C.

Розглянемо спочатку випадок, коли відрізок AB не паралельний осі y, тобто $x_1 \neq x_2$. Проведемо через точки A, B, C прямі, паралельні осі y (мал. 173). Вони перетнуть вісь x в точках A_1 $(x_1;\ 0)$, B_1 $(x_2;\ 0)$, C_1 $(x;\ 0)$. За теоремою Фалеса точка C_1 буде серединою відрізка A_1B_1.

Оскільки точка C_1 — середина відрізка A_1B_1, то $A_1C_1 = B_1C_1$, а значить, $|x - x_1| = |x - x_2|$. Звідси випливає, що або $x - x_1 = x - x_2$, або $x - x_1 = -(x - x_2)$. Перша рівність неможлива, бо $x_1 \neq x_2$. Тому справджується друга рівність. З неї дістаємо формулу:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$



Мал. 173

Якщо $x_1 = x_2$, тобто відрізок AB паралельний осі y, то всі три точки A_1, B_1, C_1 мають одну й ту ж абсцису. Отже, формула лишається правильною і в цьому випадку.

Ординату точки C знаходимо аналогічно. Через точки A, B, C проводимо прямі, паралельні осі x. Дістаємо формулу:

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Задача (15). Дано три вершини паралелограма $ABCD$: $A(1;\ 0)$, $B(2;\ 3)$, $C(3;\ 2)$. Знайдіть координати четвертої вершини D і точки перетину діагоналей.

Розв'язання. Точка перетину діагоналей є серединою кожної з них. Тому вона є серединою відрізка AC, а тому має координати

$$x = \frac{1+3}{2} = 2,\ y = \frac{0+2}{2} = 1.$$

Тепер, знаючи координати точки перетину діагоналей, знаходимо координати x, y четвертої вершини D. Користуючись тим, що точка перетину діагоналей є серединою відрізка BD, маємо: $\frac{2+x}{2} = 2$, $\frac{3+y}{2} = 1$. Звідси $x = 2$, $y = -1$.

73. ВІДСТАНЬ МІЖ ТОЧКАМИ

Нехай на площині xy дано дві точки: A_1 з координатами x_1, y_1 і A_2 з координатами x_2, y_2. Виразимо відстань між точками A_1 і A_2 через координати цих точок.

Розглянемо спочатку випадок, коли $x_1 \neq x_2$ і $y_1 \neq y_2$. Проведемо через точки A_1 і A_2 прямі, паралельні осі координат, і позначимо через A точку їх перетину (мал. 174). Відстань між точками A й A_1 дорівнює $|y_1 - y_2|$, а відстань між точками A й A_2 дорівнює $|x_1 - x_2|$. За теоремою Піфагора у прямокутному трикутнику AA_1A_2 маємо:

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2, \qquad (*)$$

де d — відстань між точками A_1 і A_2.

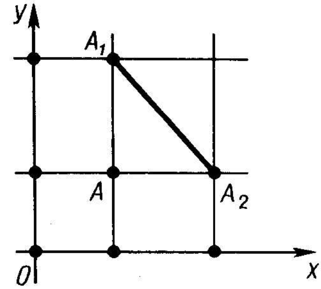
Хоча формула (*) для відстані між точками виведена у припущенні $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, вона залишається правильною і для інших випадків. Справді, якщо $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$, то d дорівнює $|y_1 - y_2|$. Такий самий результат дістаємо і за формулою (*). Аналогічно розглядаємо випадок, коли $x_1 \neq x_2$, $y_1 = y_2$. Якщо $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, то точки A_1 і A_2 збігаються і за формулою (*) дістанемо $d = 0$.

Задача (19). Знайдіть на осі x точку, рівновіддалену від точок $(1;\ 2)$ і $(2;\ 3)$.

Розв'язання. Нехай $(x;\ 0)$ — шукана точка. Прирівнявши відстані від неї до даних точок, дістанемо:

$$(x-1)^2 + (0-2)^2 = (x-2)^2 + (0-3)^2.$$

Звідси знаходимо $x = 4$. Отже, шукана точка є $(4;\ 0)$.



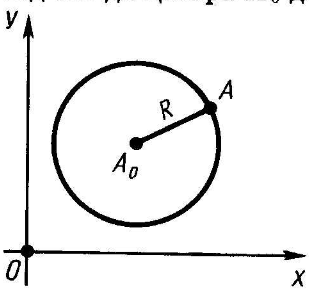
Мал. 174

74. РІВНЯННЯ КОЛА

Рівнянням фігури на площині в декартових координатах називається рівняння з двома змінними x і y, яке задовольняють координати будь-якої точки фігури. І навпаки: будь-які два числа, що задовольняють це рівняння, є координатами деякої точки фігури.

Складемо рівняння кола з центром у точці $A_0\,(a;\ b)$ і радіусом R (мал. 175). Візьмемо довільну точку $A(x;\ y)$ на колі. Відстань від неї до центра A_0 дорівнює R. Квадрат відстані від точки A до A_0 дорівнює $(x-a)^2+(y-b)^2$. Таким чином, координати x, y кожної точки A кола задовольняють рівняння

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (*)$$



Мал. 175

Навпаки: будь-яка точка A, координати якої задовольняють рівняння (*), належить колу, оскільки відстань від неї до точки A_0 дорівнює R. Звідси випливає, що рівняння (*) справді є рівнянням кола з центром A_0 і радіусом R.

Зауважимо, що коли центром кола є початок координат, то рівняння кола має вигляд:

$$x^2+y^2=R^2.$$

З а д а ч а (30). Яку геометричну фігуру задано рівнянням $x^2+y^2+ax+by+c=0$, $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c>0$?

Р о з в' я з а н н я. Перетворимо дане рівняння так:

$$x^2+ax+\frac{a^2}{4}+y^2+by+\frac{b^2}{4}=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c,$$

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}\right)^2.$$

Бачимо, що шукана фігура — коло з центром $\left(-\frac{a}{2};\ -\frac{b}{2}\right)$ і радіусом $R=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^4}{4}-c}$.

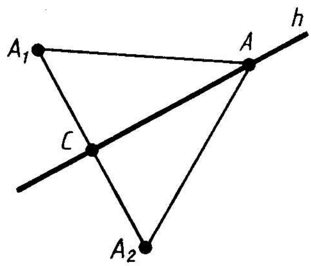
75. РІВНЯННЯ ПРЯМОЇ

Доведемо, що ***будь-яка пряма у декартових координатах x, y має рівняння виду:***

$$ax+by+c=0, \ (*),$$

де a, b, c — деякі числа.

Нехай h — довільна пряма на площині xy. Проведемо якунебудь пряму, перпендикулярну до прямої h, і відкладемо на ній від точки перетину C з прямою h рівні відрізки CA_1 і CA_2 (мал. 176).



Мал. 176

Нехай a_1, b_1 — координати точки A_1 і a_2, b_2 — координати точки A_2. Як відомо, будь-яка точка $A(x;\ y)$ прямої h рівновіддалена від точок A_1 і A_2. Тому координати її задовольняють рівняння

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = \\ = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2. \qquad (**)$$

Навпаки: якщо координати x, y якої-небудь точки задовольняють рівняння (**), то ця точка рівновіддалена від точок A_1 і A_2, тобто належить прямій h. Таким чином, рівняння (**) є рівнянням прямої h. Якщо в цьому рівнянні розкрити дужки і перенести всі члени рівняння в ліву частину, то воно набере вигляду:

$$2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y + (a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2) = 0.$$

Позначивши $2(a_2 - a_1) = a$, $2(b_2 - b_1) = b$, $a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2 = c$, дістанемо рівняння (*). Твердження доведено.

Задача 35. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки $A(-1;\ 1)$, $B(1;\ 0)$.

Розв'язання. Як відомо, рівняння прямої має вид $ax + by + c = 0$. Точки A і B лежать на прямій, тому їх координати задовольняють це рівняння.

Підставивши координати точок A і B у рівняння прямої, дістанемо:

$$-a + b + c = 0,\ a + c = 0.$$

З цих рівнянь можна виразити два коефіцієнти, наприклад a і b, через третій: $a = -c$, $b = -2c$. Підставляючи ці значення a і b у рівняння прямої, дістанемо:

$$-cx - 2cy + c = 0.$$

На c можна скоротити. Тоді матимемо:

$$-x - 2y + 1 = 0.$$

Це і є рівняння шуканої прямої.

76. КООРДИНАТИ ТОЧКИ ПЕРЕТИНУ ПРЯМИХ

Нехай дано рівняння двох прямих

$$ax + by + c = 0,$$
$$a_1x + b_1y + c_1 = 0.$$

Знайдемо координати їх точки перетину.

Оскільки точка перетину $(x;\ y)$ належить кожній з прямих, то її координати задовольняють і перше і друге рівняння. Тому координати точки перетину є розв'язком системи рівнянь, які задають прямі. Розглянемо приклад.

Нехай дано рівняння прямих:

$$3x - y + 2 = 0,$$
$$5x - 2y + 1 = 0.$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь, знаходимо $x = -3$, $y = -7$. Точка перетину прямих $(-3;\ -7)$.

Задача (43). Доведіть, що прямі, задані рівняннями

$$y = kx + l_1,$$
$$y = kx + l_2,$$

коли $l_1 \neq l_2$, паралельні.

Розв'язання. Припустимо, прямі не паралельні і перетинаються в деякій точці $(x_1;\ y_1)$. Оскільки точка перетину належить кожній з прямих, то для неї маємо:

$$y_1 = kx_1 + l_1,$$
$$y_1 = kx_1 + l_2.$$

Віднімаючи ці рівняння почленно, дістанемо $0 = l_1 - l_2$. А це суперечить умові $(l_1 \neq l_2)$, тобто прийшли до суперечності. Твердження доведено.

77. РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОЇ ВІДНОСНО СИСТЕМИ КООРДИНАТ

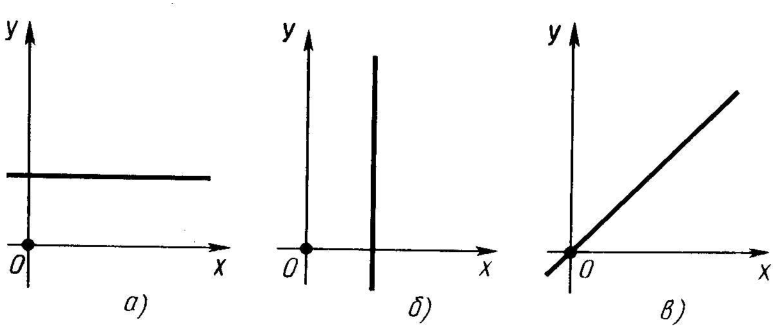
З'ясуємо, як розміщена пряма відносно осі координат, якщо її рівняння $ax + by + c = 0$ має той чи інший окремий вигляд.

1. $a = 0$, $b \neq 0$. У цьому випадку рівняння прямої можна записати так:

$$y = -\frac{c}{b}.$$

Таким чином, усі точки прямої мають одну і ту саму ординату $\left(-\frac{c}{b}\right)$. Отже, ***пряма паралельна осі x*** (мал. 177, *а*). Зокрема, якщо $c = 0$, то пряма збігається з віссю x.

2. $b = 0$, $a \neq 0$. Цей випадок розглядаємо аналогічно. ***Пряма паралельна осі y*** (мал. 177, *б*) і збігається з нею, якщо і $c = 0$.



Мал. 177

3. $c = 0$. ***Пряма проходить через початок координат,*** оскільки його координати (0; 0) задовольняють рівняння прямої (мал. 177, *в*).

Задача (45). Складіть рівняння прямої, яка паралельна осі x і проходить через точку (2; —3).

Розв'язання. Оскільки пряма паралельна осі x, то вона має рівняння виду: $y + c = 0$.
Через те що точка (2; —3) лежить на прямій, то її координати задовольняють це рівняння: $-3 + c = 0$. Звідси $c = 3$. Отже, рівняння прямої $y + 3 = 0$.

78. КУТОВИЙ КОЕФІЦІЄНТ У РІВНЯННІ ПРЯМОЇ

Якщо в загальному рівнянні прямої $ax + by + c = 0$ коефіцієнт при y не дорівнює нулю, то це рівняння можна розв'язати відносно y. Дістанемо:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Або, позначивши $-\frac{a}{b} = k$, $-\frac{c}{b} = l$, матимемо:

$$y = kx + l.$$

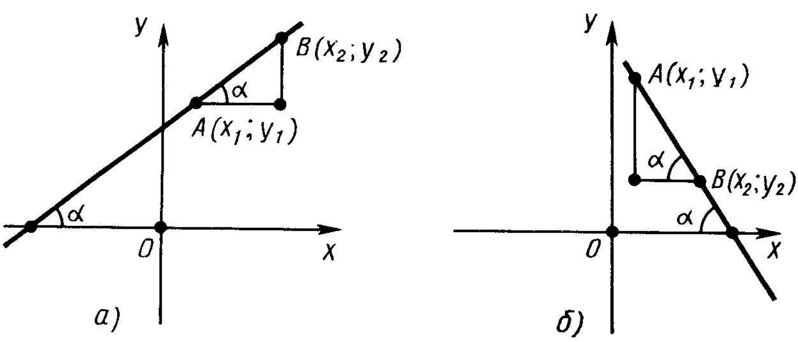
З'ясуємо геометричний зміст коефіцієнта k у цьому рівнянні. Візьмемо дві точки на прямій $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ $(x_1 < x_2)$. Їх координати задовольняють рівняння прямої:

$$y_1 = kx_1 + l,\ y_2 = kx_2 + l.$$

Віднявши почленно ці рівняння, дістанемо: $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$. Звідси

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Для випадку на малюнку 178, *а*: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \alpha$, а на малюнку 178, *б* $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\operatorname{tg} \alpha$.



Мал. 178

Таким чином, коефіцієнт k у рівнянні прямої з точністю до знака дорівнює тангенсу гострого кута, утвореного прямою з віссю x.

Коефіцієнт k у рівнянні прямої називається *кутовим коефіцієнтом* прямої.

79. ГРАФІК ЛІНІЙНОЇ ФУНКЦІЇ

У процесі побудови графіків функцій на уроках алгебри ви, очевидно, помітили, що графіком лінійної функції є пряма. Тепер доведемо це.

Нехай $y = ax + b$ — дана лінійна функція. Доведемо, що графіком її є пряма.

Для даної функції, якщо $x = 0$, то $y = b$, якщо $x = 1$, то $y = a + b$. Тому графіку функції належать точки $(0; b)$ і $(1; a + b)$. Складемо рівняння прямої, яка проходить через ці точки. Як відомо, воно має вид:

$$y = kx + l.$$

Оскільки названі точки графіка лежать на прямій, то їх координати задовольняють рівняння прямої:

$$b = k \cdot 0 + l,$$
$$a + b = k \cdot 1 + l.$$

Звідси знаходимо $l = b$, $k = a$. Отже, наша пряма має рівняння

$$y = ax + b.$$

Виходить, рівняння прямої задовольняють усі точки графіка. Тобто графіком лінійної функції є пряма.

80. ПЕРЕТИН ПРЯМОЇ З КОЛОМ

Розглянемо питання про перетин прямої з колом.

Нехай R — радіус кола і d — відстань від центра кола до прямої. Візьмемо центр кола за початок координат, а пряму, перпендикулярну до даної,— за вісь x (мал. 179). Тоді рівнянням кола буде $x^2 + y^2 = R^2$, а рівнянням прямої $x = d$.

Пряма і коло перетинаються, якщо система двох рівнянь

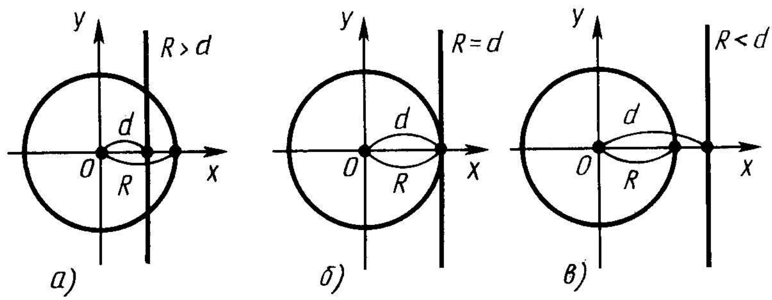
$$x^2 + y^2 = R^2,\ x = d$$

має розв'язок. І навпаки, усякий розв'язок цієї системи дає координати x, y точки перетину прямої з колом. Розв'язавши нашу систему, дістанемо:

$$x = d,\ y = \pm\sqrt{R^2 - d^2}.$$

З виразу для y бачимо, що система має два розв'язки, тобто ***коло і пряма перетинаються у двох точках, якщо*** $R > d$ (мал. 179, *а*).

Система має один розв'язок, ***якщо*** $R = d$ (мал. 179, *б*). У цьому випадку ***пряма і коло дотикаються.***



Мал. 179

Система не має розв'язків, тобто ***пряма і коло не перетинаються, якщо $R < d$*** (мал. 179, *в*).

З а д а ч а (50). Знайдіть точки перетину кола $x^2 + y^2 = 1$ з прямою $y = 2x + 1$.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки точки перетину лежать на колі і на прямій, то їх координати задовольняють систему рівнянь $x^2 + y^2 = 1$, $y = 2x + 1$.

Розв'яжемо цю систему. Підставимо y з другого рівняння в перше. Дістанемо рівняння для x:

$$5x^2 + 4x = 0.$$

Рівняння має два корені $x_1 = 0$ і $x_2 = -\frac{4}{5}$. Це абсциси точок перетину. Ординати цих точок дістанемо з рівняння прямої, підставивши в нього x_1 і x_2. Матимемо $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{3}{5}$. Отже, точки перетину прямої і кола $(0;\ 1)$, $\left(-\frac{4}{5};\ -\frac{3}{5}\right)$.

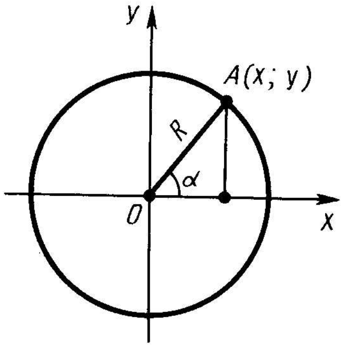
81. ОЗНАЧЕННЯ СИНУСА, КОСИНУСА І ТАНГЕНСА ДЛЯ БУДЬ-ЯКОГО КУТА ВІД 0° ДО 180°

Досі значення синуса, косинуса і тангенса були означені тільки для гострих кутів. Тепер дамо означення їх для будь-якого кута від 0° до 180°.

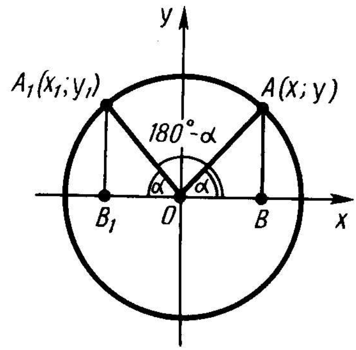
Візьмемо коло на площині xy з центром у початку координат і радіусом R (мал. 180). Відкладемо від додатної півосі x у верхню півплощину (півплощина, де $y > 0$) кут α. Нехай x і y — координати точки A. Значення $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$ для гострого кута виражаються через координати точки A, а саме:

$$\sin \alpha = \frac{y}{R},\ \cos \alpha = \frac{x}{R},\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}.$$

Визначимо тепер значення $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ і $\operatorname{tg} \alpha$ за цими формулами для будь-якого кута α. (Для $\operatorname{tg} \alpha$ кут $\alpha = 90°$ вилучається.)



Мал. 180



Мал. 181

При такому означенні $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$, $\operatorname{tg} 180° = 0$.

Якщо вважати, що кут між променями, які збігаються, дорівнює 0°, матимемо: $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\operatorname{tg} 0° = 0$.

Доведемо, що ***для будь-якого кута*** α, $0° < \alpha < 180°$, $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$. ***Для кута*** $\alpha \neq 90°$ $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

Справді, трикутники OAB і OA_1B_1 рівні за гіпотенузою і гострим кутом (мал. 181). З рівності трикутників випливає, що $AB = A_1B_1$, тобто $y = y_1$; $OB = OB_1$, а отже, $x = -x_1$. Тому

$$\sin(180° - \alpha) = \frac{y_1}{R} = \frac{y}{R} = \sin\alpha,$$

$$\cos(180° - \alpha) = \frac{x_1}{R} = \frac{-x}{R} = -\cos\alpha.$$

Поділивши почленно рівності $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ і $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, дістанемо:

$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Що й треба було довести.

? КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Поясніть, як означаються координати точки.
2. Які знаки мають координати точки, якщо вона належить першій (другій, третій, четвертій) чверті?
3. Чому дорівнюють абсциси точок, що лежать на осі ординат? Чому дорівнюють ординати точок, що лежать на осі абсцис? Чому дорівнюють координати початку координат?
4. Виведіть формули для координат середини відрізка.
5. Виведіть формулу відстані між точками.
6. Що таке рівняння фігури в декартових координатах?
7. Виведіть рівняння кола.

8. Доведіть, що пряма в декартових координатах має рівняння виду $ax + by + c = 0$.
9. Як знайти координати точки перетину двох прямих, заданих рівнянням?
10. Як розміщена пряма, якщо в її рівнянні коефіцієнт $a = 0$ ($b = 0$; $c = 0$)?
11. Що таке кутовий коефіцієнт прямої і який його геометричний зміст?
12. Доведіть, що графіком лінійної функції є пряма.
13. При якій умові пряма і коло не перетинаються, перетинаються в двох точках, дотикаються?
14. Дайте означення синуса, косинуса, тангенса для довільного кута від $0°$ до $180°$.
15. Доведіть, що для будь-якого кута α, $0° < \alpha < 180°$, $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, $\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

ЗАДАЧІ

1. Проведіть осі координат, виберіть одиницю довжини на осях, побудуйте точки з координатами: (1; 2), (—2; 1), (—1; —3), (2; —1).
2. Візьміть навмання чотири точки на площині xy. Знайдіть координати цих точок.
3. На прямій, паралельній осі x, узято дві точки. Одна з них має ординату $y = 2$. Чому дорівнює ордината другої точки?
4. На прямій, перпендикулярній до осі x, узято дві точки. Одна з них має абсцису $x = 3$. Чому дорівнює абсциса другої точки?
5. З точки $A(2; 3)$ опущено перпендикуляр на вісь x. Знайдіть координати основи перпендикуляра.
6. Через точку $A(2; 3)$ проведено пряму, паралельну осі x. Знайдіть координати точки перетину її з віссю y.
7. Знайдіть геометричне місце точок площини xy, для яких абсциса $x = 3$.
8. Знайдіть геометричне місце точок площини xy, для яких $|x| = 3$.
9. Дано точки $A(-3; 2)$ і $B(4; 1)$. Доведіть, що відрізок AB перетинає вісь y, але не перетинає вісь x.
10. Яку з півосей осі y (додатну чи від'ємну) перетинає відрізок AB з попередньої задачі?
11. Знайдіть відстань від точки (—3; 4) до: 1) осі x; 2) осі y.
12. Знайдіть координати середини відрізка AB, якщо: 1) $A(1; -2)$, $B(5; 6)$; 2) $A(-3; 4)$, $B(1; 2)$; 3) $A(5; 7)$, $B(-3; -5)$.
13. Точка C — середина відрізка AB. Знайдіть координати другого кінця відрізка AB, якщо: 1) $A(0; 1)$, $C(-1; 2)$; 2) $A(-1; 3)$; $C(1; -1)$; 3) $A(0; 0)$, $C(-2; 2)$.

14. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-1;\ -2)$, $B(2;\ -5)$, $C(1;\ -2)$, $D(-2;\ 1)$ є паралелограмом. Знайдіть точку перетину його діагоналей.
15. Дано три вершини паралелограма $ABCD$: $A(1;\ 0)$, $B(2;\ 3)$, $C(3;\ 2)$. Знайдіть координати четвертої вершини D і точки перетину діагоналей.
16. Знайдіть середини сторін трикутника з вершинами в точках: $O(0;\ 0)$, $A(0;\ 2)$, $B(-4;\ 0)$.
17. Дано три точки $A(4;\ -2)$, $B(1;\ 2)$, $C(-2;\ 6)$. Знайдіть відстані між цими точками, взятими попарно.
18. Доведіть, що точки A, B, C в задачі 17 лежать на одній прямій. Яка з них лежить між двома іншими?
19. Знайдіть на осі x точку, рівновіддалену від точок $(1;\ 2)$ і $(2;\ 3)$.
20. Знайдіть точку, рівновіддалену від осей координат і від точки $(3;\ 6)$.
21.* Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(4;\ 1)$, $B(0;\ 4)$, $C(-3;\ 0)$, $D(1;\ -3)$ є квадратом.
22. Доведіть, що чотири точки $(1;\ 0)$, $(-1;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(0;\ -1)$ є вершинами квадрата.
23. Які з точок $(1;\ 2)$, $(3;\ 4)$, $(-4;\ 3)$, $(0;\ 5)$, $(5;\ -1)$ лежать на колі, рівняння якого $x^2 + y^2 = 25$?
24. Знайдіть на колі, рівняння якого $x^2 + y^2 = 169$, точки: 1) з абсцисою 5; 2) з ординатою -12.
25. Дано точки $A(2;\ 0)$ і $B(-2;\ 6)$. Складіть рівняння кола, діаметром якого є відрізок AB.
26. Дано точки $A(-1;\ -1)$ і $C(-4;\ 3)$. Складіть рівняння кола з центром у точці C, яке проходить через точку A.
27. Знайдіть на осі x центр кола, яке проходить через точку $(1;\ 4)$ і має радіус 5.
28.* Складіть рівняння кола з центром у точці $(1;\ 2)$, яке дотикається до осі x.
29. Складіть рівняння кола з центром $(-3;\ 4)$, яке проходить через початок координат.
30.* Яку геометричну фігуру задано рівнянням:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,\ \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c > 0?$$

31. Знайдіть координати точок перетину двох кіл: $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 - 2x + y - 2 = 0$.
32. Знайдіть координати точок перетину кола $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 7 = 0$ з віссю x.
33. Доведіть, що коло $x^2 + y^2 + 2ax + 1 = 0, |a| > 1$, не перетинається з віссю y.
34. Доведіть, що коло $x^2 + y^2 + 2ax = 0$ дотикається до осі y, $a \neq 0$.
35. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки $A(-1;\ 1)$, $B(1;\ 0)$.

36. Складіть рівняння прямої AB, якщо 1) $A(2;\ 3)$, $B(3;\ 2)$; 2) $A(4;\ -1)$, $B(-6;\ 2)$; 3) $A(5;\ -3)$, $B(-1;\ -2)$.

37. Складіть рівняння прямих, що містять сторони трикутника OAB із задачі 16.

38. Чому дорівнюють координати a і b у рівнянні прямої $ax + by = 1$, якщо вона проходить через точки $(1;\ 2)$ і $(2;\ 1)$?

39. Знайдіть точки перетину з осями координат прямої, заданої рівнянням: 1) $x + 2y + 3 = 0$; 2) $3x + 4y = 12$; 3) $3x - 2y + 6 = 0$; 4) $4x - 2y - 10 = 0$.

40. Знайдіть точку перетину прямих, заданих рівняннями:
1) $x + 2y + 3 = 0$, $4x + 5y + 6 = 0$;
2) $3x - y - 2 = 0$, $2x + y - 8 = 0$;
3) $4x + 5y + 8 = 0$, $4x - 2y - 6 = 0$.

41*. Доведіть, що три прямі $x + 2y = 3$, $2x - y = 1$ і $3x + y = 4$ перетинаються в одній точці.

42*. Знайдіть координати точки перетину медіан трикутника з вершинами $(1;\ 0)$, $(2;\ 3)$, $(3;\ 2)$.

43. Доведіть, що прямі, задані рівняннями $y = kx + l_1$, $y = kx + l_2$, якщо $l_1 \neq l_2$, паралельні.

44. Серед прямих, заданих рівняннями, назвіть пари паралельних прямих:

1) $x + y = 1$;	2) $y = x - 1$;	3) $x - y = 2$;
4) $y = 4$;	5) $y = 3$;	6) $2x + 2y + 3 = 0$.

45. Складіть рівняння прямої, яка паралельна осі y і проходить через точку $(2;\ -3)$.

46. Складіть рівняння прямої, яка паралельна осі x і проходить через точку $(2;\ 3)$.

47. Складіть рівняння прямої, яка проходить через початок координат і точку $(2;\ 3)$.

48. Знайдіть кутові коефіцієнти прямих із задачі 39.

49. Знайдіть гострі кути, утворені даними прямими з віссю x: 1) $2y = 2x + 3$; 2) $\sqrt{3}x - y = 2$; 3) $x + \sqrt{3}y + 1 = 0$.

50. Знайдіть точки перетину кола $x^2 + y^2 = 1$ з прямою: 1) $y = 2x + 1$; 2) $y = x + 1$; 3) $y = 3x + 1$; 4) $y = kx + 1$.

51*. При яких значеннях c пряма $x + y + c = 0$ і кола $x^2 + y^2 = 1$: 1) перетинаються; 2) не перетинаються; 3) дотикаються?

52. Знайдіть синус, косинус, тангенс кутів: 1) $120°$; 2) $135°$; 3) $150°$.

53. Знайдіть: 1) $\sin 160°$; 2) $\cos 140°$; 3) $\operatorname{tg} 130°$.

54. Знайдіть синус, косинус і тангенс кутів: 1) $40°$; 2) $14°\,36'$; 3) $70°\,20'$; 4) $30°\,16'$; 5) $130°$; 6) $150°\,30'$; 7) $150°\,33'$; 8) $170°\,28'$.

55. Знайдіть кути, для яких: 1) $\sin\alpha = 0{,}2$; 2) $\cos\alpha = -0{,}7$; 3) $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}4$.

56. Знайдіть $\sin\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, якщо: 1) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$; 2) $\cos\alpha = -0{,}5$; 3) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

57. Знайдіть $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, якщо: 1) $\sin\alpha = 0{,}6$, $0° < \alpha < 90°$; 2) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $90° < \alpha < 180°$; 3) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $0° < \alpha < 180°$.

58. Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$. Знайдіть $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$.

59. Побудуйте кут α, якщо $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

60. Побудуйте кут α, якщо $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.

61*. Доведіть, що коли $\cos\alpha = \cos\beta$, то $\alpha = \beta$.

62*. Доведіть, що коли $\sin\alpha = \sin\beta$, то або $\alpha = \beta$, або $\alpha = 180° - \beta$.

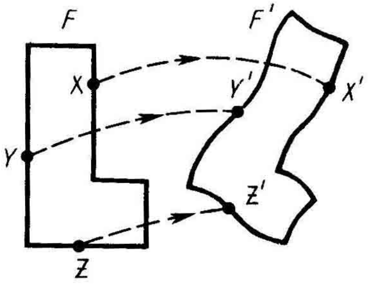
§ 9. РУХ

82. ПЕРЕТВОРЕННЯ ФІГУР

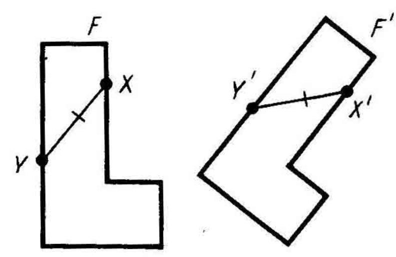
Якщо кожну точку даної фігури змістити яким-небудь чином, то ми дістанемо нову фігуру. Говорять, що ця фігура утворилася *перетворенням* даної (мал. 182).

Перетворення однієї фігури в іншу називається *рухом*, якщо воно зберігає відстань між точками, тобто переводить будь-які дві точки X і Y першої фігури у точки X', Y' другої фігури так, що $XY = X'Y'$ (мал. 183).

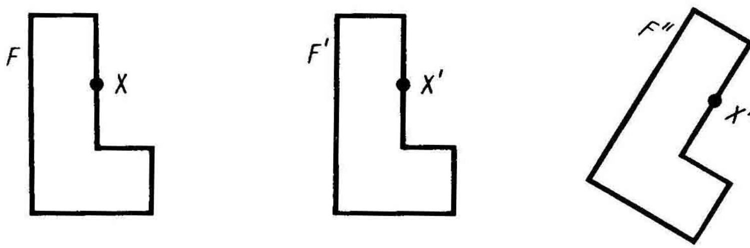
Зауваження. Поняття руху в геометрії пов'язане із звичайним уявленням про переміщення. Але якщо, говорячи про переміщення, ми уявляємо неперервний процес, то в геометрії для нас матиме значення тільки початкове і кінцеве положення фігури.



Мал. 182



Мал. 183



Мал. 184

Нехай фігура F переводиться рухом у фігуру F', а фігура F' переводиться рухом у фігуру F'' (мал. 184). Нехай під час першого руху точка X фігури F переходить у точку X' фігури F', а під час другого руху точка X' фігури F' переходить у точку X'' фігури F''. Тоді перетворення фігури F у фігуру F'', при якому довільна точка X фігури F переходить у точку X'' фігури F'', зберігає відстань між точками, а тому є також рухом.

Цю властивість руху виражають словами: ***два рухи, виконані послідовно, дають знову рух.***

Нехай перетворення фігури F у фігуру F' переводить різні точки фігури F у різні точки фігури F' (мал. 182). Нехай довільна точка X фігури F при цьому перетворенні переходить у точку X' фігури F'. Перетворення фігури F' у фігуру F, при якому точка X' переходить у точку X, називається перетворенням, *оберненим* до даного. Рух зберігає відстані між точками, тому переводить різні точки в різні.

Очевидно, ***перетворення, обернене до руху, теж є рух.***

83. ВЛАСТИВОСТІ РУХУ

Теорема 9.1. ***Точки, що лежать на прямій, під час руху переходять у точки, які лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення.***

Це означає, що коли точки A, B, C, які лежать на прямій, переходять у точки A_1, B_1, C_1, то ці точки також лежать на прямій; якщо точка B лежить між точками A і C, то точка B_1 лежить між точками A_1 і C_1.

Доведення. Нехай точка B прямої AC лежить між точками A і C. Доведемо, що точки A_1, B_1, C_1 лежать на одній прямій.

Якщо точки A_1, B_1, C_1 не лежать на прямій, то вони є вершинами трикутника. Тому $A_1C_1 < A_1B_1 + B_1C_1$. За означенням руху звідси випливає, що $AC < AB + BC$. Проте за властивістю вимірювання відрізків $AC = AB + BC$.

Ми прийшли до суперечності. Отже, точка B_1 лежить на прямій A_1C_1. Перше твердження теореми доведено.

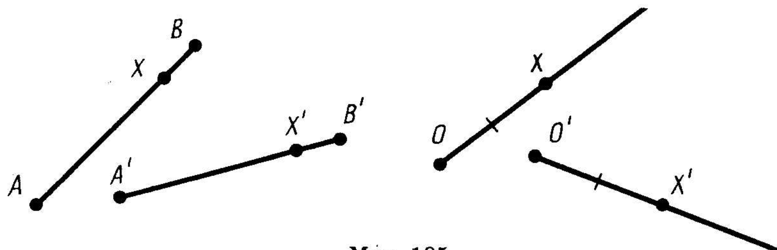
Покажемо тепер, що точка B_1 лежить між точками A_1 і C_1.

Припустимо, що точка A_1 лежить між точками B_1 і C_1. Тоді $A_1B_1 + A_1C_1 = B_1C_1$, і тому $AB + AC = BC$. Але це суперечить рівності $AB + BC = AC$. Таким чином, точка A_1 не може лежати між точками B_1 і C_1.

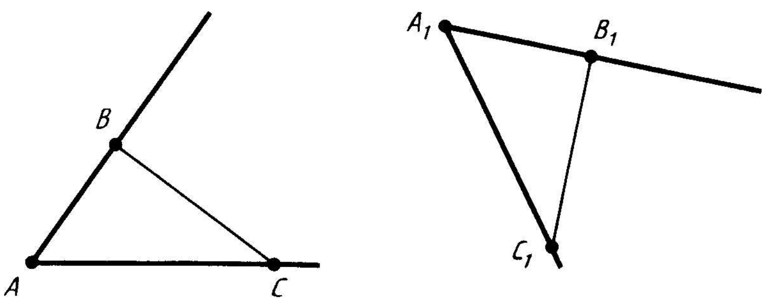
Аналогічно доводимо, що точка C_1 не може лежати між точками A_1 і B_1.

Оскільки з трьох точок A_1, B_1, C_1 одна лежить між двома іншими, то цією точкою може бути тільки B_1. Теорему доведено.

З теореми 9.1 випливає, що ***під час руху прямі переходять у прямі, півпрямі — у півпрямі, відрізки — у відрізки*** (мал. 185).



Мал. 185



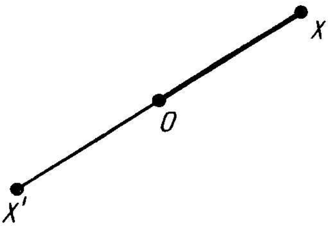
Мал. 186

Доведемо, що ***під час руху зберігаються кути між півпрямими.***

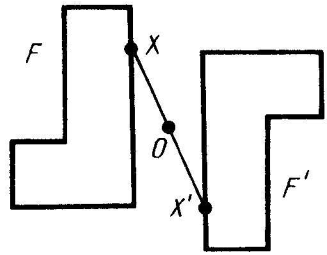
Нехай AB і AC — дві півпрямі, що виходять з точки A і не лежать на одній прямій (мал. 186). Під час руху ці півпрямі перейдуть у деякі півпрямі A_1B_1 і A_1C_1. Оскільки рух зберігає відстані, то трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні за третьою ознакою рівності трикутників. З рівності трикутників випливає рівність кутів BAC і $B_1A_1C_1$, що й треба було довести.

84. СИМЕТРІЯ ВІДНОСНО ТОЧКИ

Нехай O — фіксована точка і X — довільна точка площини (мал. 187). Відкладемо на продовженні відрізка OX за точку O відрізок OX', що дорівнює OX. Точка X' називається *симетрич-*



Мал. 187



Мал. 188

ною точці X відносно точки O. Точка, симетрична точці O, є сама точка O. Очевидно, точка симетрична точці X', є точка X.

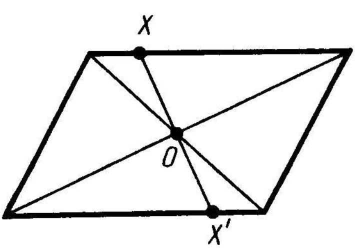
Перетворення фігури F у фігуру F', при якому кожна її точка X переходить у точку X', симетричну відносно даної точки O, називається *перетворенням симетрії відносно точки O.* При цьому фігури F і F' називаються *симетричними відносно точки O* (мал. 188).

Якщо перетворення симетрії відносно точки O переводить фігуру F у себе, то вона називається *центрально-симетричною,* а точка O називається *центром симетрії.*

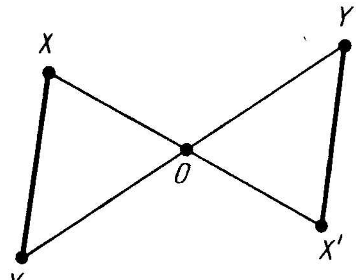
Наприклад, паралелограм є центрально-симетричною фігурою. Центром симетрії його є точка перетину діагоналей (мал. 189).

Теорема 9.2. ***Перетворення симетрії відносно точки є рухом.***

Доведення. Нехай X і Y — дві довільні точки фігури F (мал. 190). Перетворення симетрії відносно точки O переводить їх у точки X' і Y'. Розглянемо трикутники XOY і $X'OY'$. Ці трикутники рівні за першою ознакою рівності трикутників. У них кути при вершині O рівні як вертикальні, а $OX = OX'$, $OY = OY'$ за означенням симетрії відносно точки O. З рівності трикутників випливає рівність сторін $XY = X'Y'$. А це означає, що симетрія відносно точки O є рух. Теорему доведено.



Мал. 189

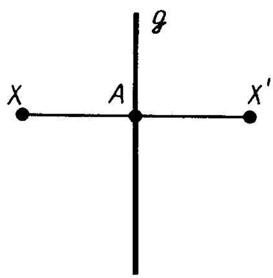


Мал. 190

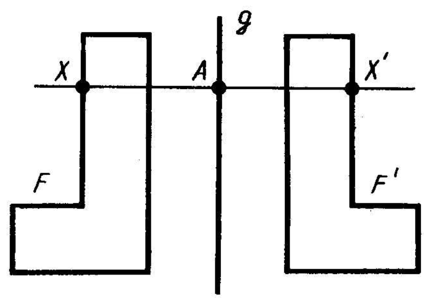
85. СИМЕТРІЯ ВІДНОСНО ПРЯМОЇ

Нехай g — фіксована пряма (мал. 191). Візьмемо довільну точку X і опустимо перпендикуляр AX на пряму g. На продовженні перпендикуляра за точку A відкладемо відрізок AX', що дорівнює відрізку AX. Точка X' називається *симетричною точці X відносно прямої g*. Якщо точка X лежить на прямій g, то симетрична їй точка є сама точка X. Очевидно, що точка, симетрична точці X', є точка X.

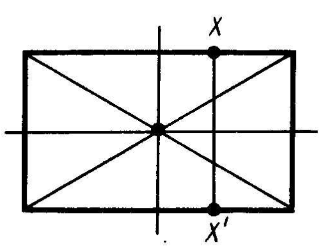
Перетворення фігури F у фігуру F', при якому кожна її точка X переходить у точку X', симетричну відносно даної прямої g, називається *перетворенням симетрії відносно прямої g*. При цьому фігури F і F' називаються *симетричними відносно прямої g* (мал. 192).



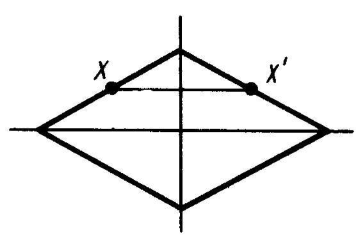
Мал. 191



Мал. 192



Мал. 193



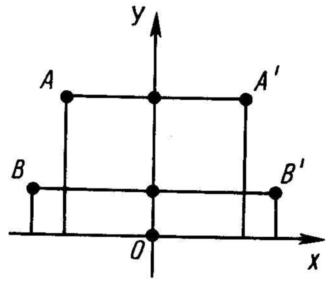
Мал. 194

Якщо перетворення симетрії відносно прямої g переводить фігуру F у себе, то ця фігура називається *симетричною відносно прямої g*, а пряма g називається *віссю симетрії* фігури.

Наприклад, прямі, що проходять через точку перетину діагоналей прямокутника паралельно його сторонам, є осями симетрії прямокутника (мал. 193). Прямі, на яких лежать діагоналі ромба, є його осями симетрії (мал. 194).

Теорема 9.3. ***Перетворення симетрії відносно прямої є рух.***

Доведення. Приймемо дану пряму за вісь y декартової системи координат (мал. 195). Нехай довільна точка A $(x;\ y)$ фігури F переходить у точку $A'(x';\ y')$ фігури F'. З означення симетрії відносно прямої випливає, що точки A і A' мають рівні ординати, а абсциси відрізняються тільки знаком: $x' = -x$.



Мал. 195

Візьмемо дві довільні точки $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$. Вони перейдуть у точки $A'(-x_1;\ y_1)$ і $B'(-x_2;\ y_2)$.

Маємо:

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$
$$A'B'^2 = (-x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

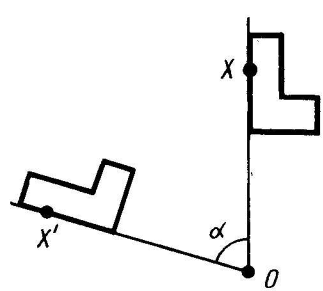
Звідси бачимо, що $AB = A'B'$. Це означає, що перетворення симетрії відносно прямої є рух. Теорему доведено.

86. ПОВОРОТ

Поворотом площини навколо даної точки називається такий рух, при якому кожний промінь, що виходить з даної точки, повертається на один і той самий кут в одному і тому самому напрямі (мал. 196). Це означає, що коли при повороті навколо точки O точка X переходить у точку X', то промені OX і OX' утворюють один і той самий кут, якою б не була точка X. Цей кут називається *кутом повороту*. Перетворення фігур при повороті площини також називається *поворотом*.

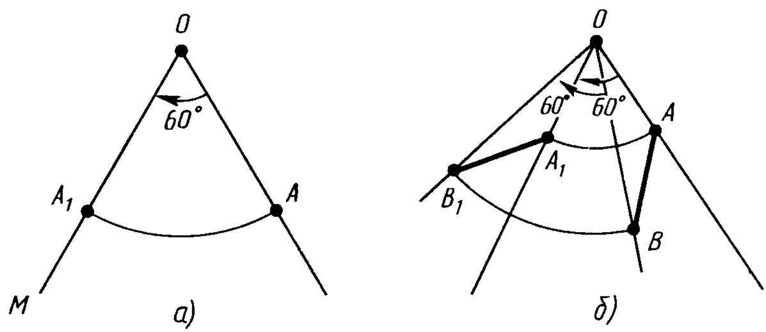
Задача (25). 1) Побудуйте точку A_1, в яку переходить точка A при повороті навколо точки O на кут $60°$ за годинниковою стрілкою.

2) Побудуйте фігуру, в яку переходить відрізок AB при повороті навколо точки O на кут $60°$ за годинниковою стрілкою.



Мал. 196

Розв'язання. 1) Проведемо промінь OA і побудуємо промінь OM так, що $\angle AOM = 60°$ (мал. 197, *а*). Відкладемо на промені OM відрізок OA_1, що дорівнює відрізку OA. Точка A_1 шукана.



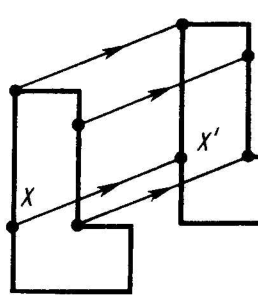
Мал. 197

2) Побудуємо точки A_1 і B_1, в які переходять при даному повороті точки A і B, які є кінцями відрізка AB (мал. 197, *б*). Відрізок A_1B_1 є шуканим, оскільки при повороті відрізок переходить у відрізок.

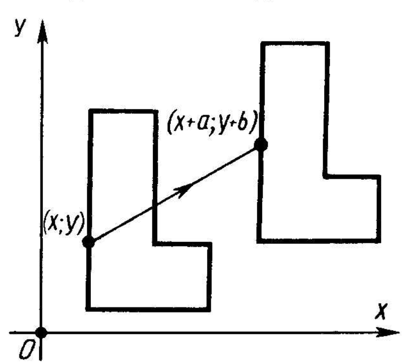
87. ПАРАЛЕЛЬНЕ ПЕРЕНЕСЕННЯ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Наочно паралельне перенесення означають як перетворення, при якому точки зміщуються в одному і тому самому напрямі на одну й ту саму відстань (мал. 198). Таке означення має той недолік, що в ньому вживається вислів «в одному і тому самому напрямі», який сам потребує точного означення. У зв'язку з цим паралельному перенесенню ми дамо інше означення, яке відповідає тому самому наочному уявленню, але вже строге.

Введемо на площині декартові координати x, y. Перетворення фігури F, при якому довільна її точка $(x; y)$ переходить у точку $(x + a; y + b)$, де a і b одні й ті самі для всіх точок



Мал. 198



Мал. 199

$(x;\ y)$, називається *паралельним перенесенням* (мал. 199). Паралельне перенесення задається формулами:

$$x' = x + a,\ y' = y + b.$$

Ці формули виражають координати x', y' точки, у яку переходить точка $(x;\ y)$ при паралельному перенесенні.

Паралельне перенесення є рух.

Справді, дві довільні точки $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$ переходять при паралельному перенесенні у точки $A'(x_1 + a,\ y_1 + b)$, $B'(x_2 + a,\ y_2 + b)$.

Тому

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$
$$A'B'^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Звідси $AB = A'B'$. Таким чином, паралельне перенесення зберігає відстані, тобто є рухом, що й треба було довести.

Назва «паралельне перенесення» зумовлена тим, що ***при паралельному перенесенні точки зміщуються вздовж паралельних прямих (або прямих, які збігаються) на одну й ту саму відстань.***

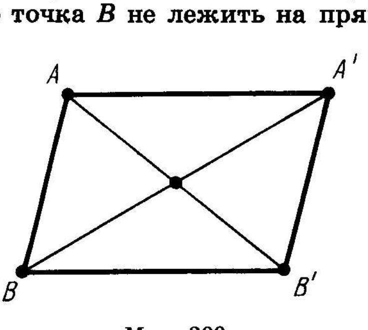
Справді, нехай точки $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$ переходять у точки $A'(x_1 + a;\ y_1 + b)$ і $B'(x_2 + a;\ y_2 + b)$ (мал. 200). Середина відрізка AB' має координати

$$x = \frac{x_1 + x_2 + a}{2},\quad y = \frac{y_1 + y_2 + b}{2}.$$

Ті самі координати має і середина відрізка $A'B$. Звідси випливає, що діагоналі чотирикутника $AA'B'B$ перетинаються і точкою перетину діляться пополам. Отже, цей чотирикутник — паралелограм. А в паралелограма протилежні сторони AA' і BB' паралельні і рівні.

Зазначимо, що в паралелограма $AA'B'B$ паралельні і дві інші протилежні сторони AB і $A'B'$. Звідси випливає, що ***при паралельному перенесенні пряма переходить у паралельну пряму (або в себе).***

З а у в а ж е н н я. У попередньому доведенні припускалось, що точка B не лежить на прямій AA'. У випадку, коли точка



Мал. 200

Мал. 201

B лежить на прямій AA', точка B' теж лежить на цій прямій, бо середина відрізка AB' збігається із серединою відрізка BA' (мал. 201). Отже, всі точки A, B, A', B' лежать на одній прямій. Далі

$$AA' = \sqrt{(x_1 + a - x_1)^2 + (y_1 + b - y_1)^2} = \sqrt{a^2 + b^2},$$
$$BB' = \sqrt{(x_2 + a - x_2)^2 + (y_2 + b - y_2)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Таким чином, у цьому випадку точки A і B зміщуються вздовж прямої AB на одну й ту саму відстань $\sqrt{a^2 + b^2}$, а пряма AB переходить у себе.

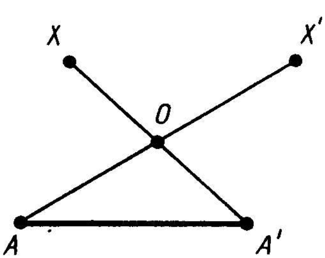
88. ІСНУВАННЯ І ЄДИНІСТЬ ПАРАЛЕЛЬНОГО ПЕРЕНЕСЕННЯ

Теорема 9.4. ***Які б не були дві точки A і A', існує одне і до того єдине паралельне перенесення, при якому точка A переходить у точку A'.***

Доведення. Спочатку доведемо існування паралельного перенесення, яке переводить точку A у A'. Введемо декартові координати на площині. Нехай a_1 і a_2 — координати точки A і a_1', a_2' — координати точки A'. Паралельне перенесення, задане формулами

$$x' = x + a_1' - a_1; \quad y' = y + a_2' - a_2,$$

переводить точку A у точку A'. Справді, якщо $x = a_1$ і $y = a_2$, дістанемо $x' = a_1'$, $y' = a_2'$.



Мал. 202

Доведемо єдиність паралельного перенесення, яке переводить точку A у точку A'. Нехай X — довільна точка фігури і X' — точка, в яку вона переходить при паралельному перенесенні (мал. 202). Як відомо, відрізки XA' і AX' мають спільну середину O. Задання точки X однозначно визначає точку O — середину відрізка $A'X$. А точки A і O однозначно визначають точку X', оскільки точка O є серединою відрізка AX'. Однозначність у визначенні точки X' і означає єдиність паралельного перенесення.

Теорему доведено повністю.

Задача (30). При паралельному перенесенні точка $(1; 1)$ переходить у точку $(-1; 0)$. В яку точку переходить початок координат?

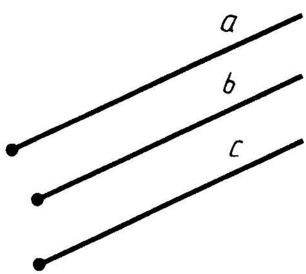
Розв'язання. Будь-яке паралельне перенесення задається формулами: $x' = x + a$, $y' = y + b$.

Оскільки точка $(1; 1)$ переходить у точку $(-1; 0)$, то $-1 = 1 + a$, $0 = 1 + b$. Звідси $a = -2$, $b = -1$. Таким чином, наше паралельне перенесення, яке переводить точку (1; 1) у (—1; 0), задається формулами $x' = x - 2$, $y' = y - 1$. Підставляючи в ці формули координати початку ($x = 0$, $y = 0$), дістанемо $x' = -2$, $y' = -1$. Отже, початок координат переходить у точку (—2; —1).

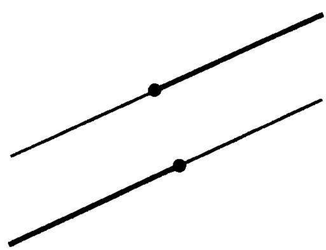
89. СПІВНАПРЯМЛЕНІСТЬ ПІВПРЯМИХ

Дві півпрямі називаються *однаково напрямленими* або *співнапрямленими*, якщо вони суміщаються паралельним перенесенням. Тобто існує паралельне перенесення, яке переводить одну півпряму в іншу.

Якщо півпрямі a і b однаково напрямлені й півпрямі b і c однаково напрямлені, то півпрямі a і c також однаково напрямлені (мал. 203).



Мал. 203



Мал. 204

Справді, нехай паралельне перенесення, яке задано формулами

$$x' = x + m, \quad y' = y + n, \qquad (*)$$

переводить півпряму a у півпряму b, а паралельне перенесення, задане формулами

$$x'' = x' + m_1, \quad y'' = y' + n_1, \qquad (**)$$

переводить півпряму b у півпряму c.

Розглянемо паралельне перенесення, задане формулами

$$x'' = x + m + m_1, \; y'' = y + n + n_1. \qquad (***)$$

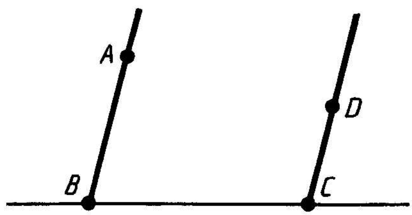
Стверджуємо, що це паралельне перенесення переводить півпряму a у півпряму c. Доведемо це.

Нехай (x; y) — довільна точка півпрямої a. Відповідно до формул (*) точка ($x + m$; $y + n$) належить півпрямій b. Оскільки точка ($x + m$; $y + n$) належить півпрямій b, то за формулами (**) точка ($x + m + m_1$; $y + n + n_1$) належить півпрямій c. Таким чином, паралельне перенесення, задане формулами

(***), переводить півпряму a у півпряму c. А це означає, що півпрямі a і c однаково напрямлені, що й треба було довести.

Дві півпрямі називаються *протилежно напрямленими,* якщо кожна з них однаково напрямлена з півпрямою, доповняльною до другої (мал. 204).

Задача (32). Прямі AB і CD — паралельні. Точки A і D лежать з одного боку від січної BC. Доведіть, що промені BA і CD однаково напрямлені.



Мал. 205

Розв'язання. Застосуємо до променя CD паралельне перенесення, при якому точка C переходить у точку B (мал. 205). При цьому пряма CD суміститься з прямою BA. Точка D, зміщаючись вздовж прямої, паралельної CB, залишається у тій самій півплощині відносно прямої BC. Тому промінь CD суміститься з променем BA, а отже, ці промені однаково напрямлені.

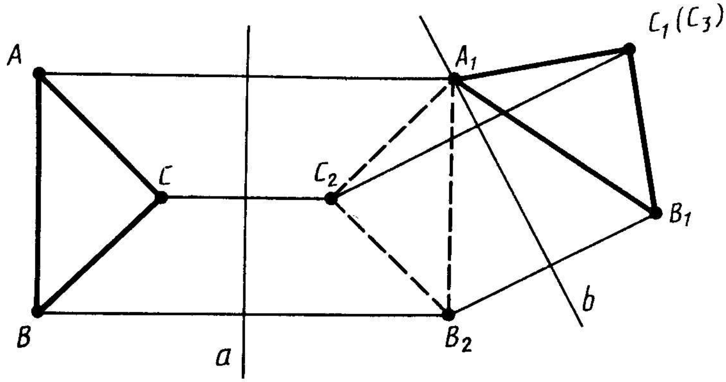
90. РІВНІСТЬ ФІГУР

Дві фігури називаються *рівними,* якщо вони переводяться рухом одна в одну.

Для позначення рівності фігур користуються звичайним знаком рівності. Запис $F = F'$ означає, що фігура F дорівнює фігурі F'. У записі рівності трикутників: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ передбачається, що вершини, які суміщаються під час руху, стоять на відповідних місцях. За такої умови ***рівність трикутників, що визначається через суміщення їх рухом, і рівність, як ми її розуміли досі, виражають одне і те саме.***

Це означає, що коли у двох трикутниках відповідні сторони рівні і відповідні кути рівні, то ці трикутники суміщаються рухом. І навпаки, якщо два трикутники суміщаються рухом, то у них відповідні сторони рівні і відповідні кути рівні. Доведемо обидва ці твердження.

Нехай трикутник ABC суміщається рухом з трикутником $A_1B_1C_1$, причому вершина A переходить у вершину A_1, B — у B_1, C — у C_1. Оскільки під час руху зберігаються відстані і кути, то



Мал. 206

для наших трикутників $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Нехай тепер у трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ маємо $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$. Доведемо, що вони суміщаються рухом, причому вершина A переходить у вершину A_1, B — у B_1, C — у C_1. Застосуємо до трикутника ABC перетворення симетрії відносно прямої a, яка перпендикулярна до відрізка AA_1 і проходить через його середину (мал. 206). Дістанемо трикутник $A_1B_2C_2$. Якщо точки B_1 і B_2 різні, то застосуємо до нього симетрію відносно прямої b, яка проходить через точку A_1 і перпендикулярна до прямої B_1B_2. Дістанемо трикутник $A_1B_1C_3$.

Якщо точки C_1 і C_3 лежать з одного боку від прямої A_1B_1, то вони збігаються. Справді, оскільки кути $B_1A_1C_1$ і $B_1A_1C_4$ рівні, то промені A_1C_1 і A_1C_3 збігаються, а через те, що відрізки A_1C_1 і A_1C_3 рівні, то збігаються точки C_1 і C_3. Таким чином, трикутник ABC рухом переведено у трикутник $A_1B_1C_1$.

Якщо точки C_1 і C_3 лежать з різних боків від прямої A_1B_1, то для доведення треба ще застосувати симетрію відносно прямої A_1B_1.

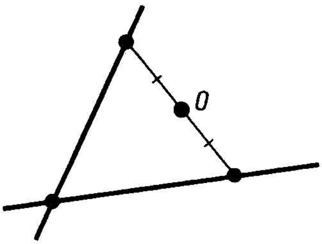
? КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Яке перетворення фігури називається рухом?
2. Доведіть, що під час руху точки, які лежать на прямій, переходять у точки, які теж лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення.
3. У що переходять прямі, півпрямі, відрізки під час руху?
4. Доведіть, що під час руху зберігаються кути.
5. Поясніть, які точки називаються симетричними відносно даної точки.

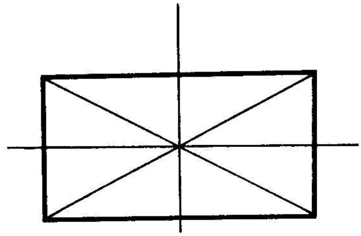
6. Яке перетворення називається симетрією відносно даної точки?
7. Яка фігура називається центрально-симетричною?
8. Що таке центр симетрії фігури? Наведіть приклад центрально-симетричної фігури.
9. Доведіть, що симетрія відносно точки є рух.
10. Які точки називаються симетричними відносно даної прямої?
11. Яке перетворення називається симетрією відносно даної прямої?
12. Яка фігура називається симетричною відносно даної прямої?
13. Що таке вісь симетрії фігури? Наведіть приклад.
14. Доведіть, що симетрія відносно прямої є рух.
15. Який рух називається поворотом?
16. Що таке паралельне перенесення?
17. Які ви знаєте властивості паралельного перенесення?
18. Доведіть існування і єдиність паралельного перенесення, яке переводить дану точку в іншу дану точку.
19. Які півпрямі називаються співнапрямленими?
20. Доведіть, що коли півпрямі a і b однаково напрямлені і півпрямі b і c однаково напрямлені, то півпрямі a і c теж однаково напрямлені.
21. Які півпрямі називаються протилежно напрямленими?
22. Які фігури називаються рівними?

ЗАДАЧІ

1. Доведіть, що під час руху паралелограм переходить у паралелограм.
2. У яку фігуру переходить під час руху квадрат? Поясніть відповідь.
3. Дано точки A і B. Побудуйте точку B', симетричну точці B відносно точки A.
4. Розв'яжіть попередню задачу, користуючись тільки циркулем.
5. Доведіть, що центр кола є його центром симетрії.
6. При симетрії відносно деякої точки точка X переходить у точку X'. Побудуйте точку, в яку при цій симетрії переходить точка Y.
7. Чи може у трикутника бути центр симетрії?
8. Доведіть, що у паралелограма точка перетину діагоналей є центром симетрії.
9. Доведіть, що чотирикутник, в якого є центр симетрії, є паралелограмом.
10.* Дано прямі, які перетинаються, і точка, що не лежить на



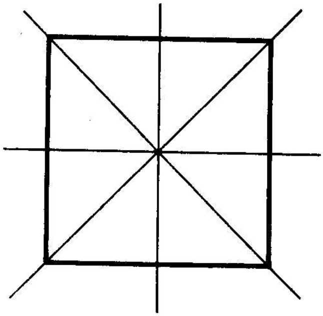
Мал. 207



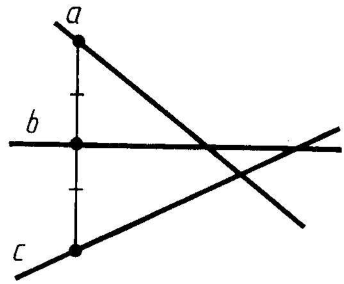
Мал. 208

цих прямих. Побудуйте відрізок з кінцями на даних прямих і серединою в даній точці (мал. 207).

11. Якою є фігура, симетрична відносно даної точки: 1) відрізку; 2) куту; 3) трикутнику?
12. Дано точки A, B, C. Побудуйте точку C', симетричну точці C відносно прямої AB.
13. Розв'яжіть задачу 12, користуючись тільки циркулем.
14. Знайдіть координати точки, симетричної точці (—3; 4) відносно: 1) осі x; 2) осі y; 3) початку координат.
15. При симетрії відносно деякої прямої точка X переходить у точку X'. Побудуйте точку, в яку перейде при цій симетрії точка Y.
16. Доведіть, що пряма, яка містить бісектрису кута, є його віссю симетрії.
17. Доведіть, що пряма, яка містить медіану рівнобедреного трикутника, проведену до основи, є віссю симетрії трикутника.
18. Доведіть, що коли у трикутнику є вісь симетрії, то 1) вона проходить через одну з його вершин; 2) трикутник рівнобедрений.
19. Скільки осей симетрії у рівносторонньому трикутнику?
20. Доведіть, що прямі, які проходять через точку перетину діагоналей прямокутника паралельно його сторонам, є його осями симетрії (мал. 208).
21. Доведіть, що діагоналі ромба є його осями симетрії.
22. Доведіть, що діагоналі квадрата і прямі, які проходять через точку їх перетину паралельно його сторонам, є осями симетрії квадрата (мал. 209).
23. Доведіть, що пряма, яка проходить через центр кола, є його віссю симетрії.
24.* Дано три прямі a, b, c, які попарно перетинаються. Як побудувати відрізок, перпендикулярний до прямої b, середина якого лежить на прямій b, а кінці на прямих a і c (мал. 210)? Чи завжди задача має розв'язок?
25. 1) Побудуйте точку A_1, в яку переходить точка A при повороті навколо точки O на кут $60°$ за годинниковою стрілкою.



Мал. 209



Мал. 210

2) Побудуйте фігуру, в яку переходить відрізок AB при повороті навколо точки O на кут 60° за годинниковою стрілкою.

26. Побудуйте фігуру, в яку переходить трикутник ABC при повороті його навколо вершини C на кут 60°.

27. Дано точки A, B, C. Побудуйте точку C', в яку переходить точка C при паралельному перенесенні, що переводить точку A у B.

28. Паралельне перенесення задається формулами $x' = x + 1$, $y' = y - 1$. В які точки при цьому паралельному перенесенні переходять точки (0; 0), (1; 0), (0; 2)?

29. Знайдіть величини a і b у формулах паралельного перенесення $x' = x + a$, $y' = y + b$, якщо: 1) точка (1; 2) переходить у точку (3; 4); 2) точка (2; —3) — у точку (—1; 5); 3) точка (—1; —3) — у точку (0; —2).

30. При паралельному перенесенні точка (1; 1) переходить у точку (—1; 0). В яку точку переходить початок координат?

31. Чи існує паралельне перенесення, при якому: 1) точка (1; 2) переходить у точку (3; 4), а точка (0; 1) — у точку (—1; 0); 2) точка (2; —1) переходить у точку (1; 0), а точка (—1; 3) — у точку (0; 4)?

32. Прямі AB і CD — паралельні. Точки A і D лежать з одного боку від січної BC. Доведіть, що промені BA і CD однаково напрямлені.

33. Доведіть, що в задачі 32 промені BA і CD протилежно напрямлені, якщо точки A і D лежать по різні боки від січної BC.

34. Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. Серед променів AB, BA, BC, CB, CD, DC, AD, DA назвіть пари однаково напрямлених і протилежно напрямлених променів.

35. Доведіть, що відрізки однакової довжини і кути з однаковою градусною мірою суміщаються рухом.

36* У паралелограмів $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$: $AB = A_1B_1$, $AD = A_1D_1$ і $\angle A = \angle A_1$. Доведіть, що паралелограми рівні, тобто суміщаються рухом.

37* Доведіть, що ромби рівні, якщо вони мають рівні діагоналі.

38. Доведіть, що два кола однакового радіуса рівні, тобто суміщаються рухом.

§ 10. ВЕКТОРИ

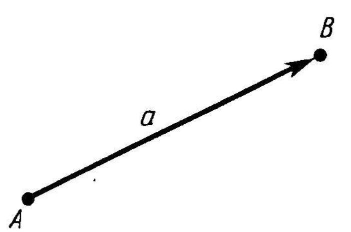
91. АБСОЛЮТНА ВЕЛИЧИНА І НАПРЯМ ВЕКТОРА

Вектором називатимемо напрямлений відрізок (мал. 211). Напрям вектора визначається його початком і кінцем. На малюнку напрям вектора позначають стрілкою. Для позначення векторів використовуватимемо малі букви латинського алфавіту a, b, c, ... Можна також позначити вектор, вказавши його початок і кінець. При такому способі позначення вектора на перше місце ставлять його початок. Іноді замість слова «вектор» над буквеним позначенням вектора ставлять стрілку або риску. Вектор на малюнку 211 можна позначити так: $\bar{a}$, $\vec{a}$ або $\overrightarrow{AB}$.

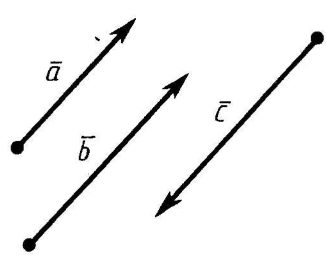
Вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ називаються *однаково напрямленими*, якщо однаково напрямлені й півпрямі AB і CD. Вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ називаються *протилежно напрямленими*, якщо протилежно напрямлені й півпрямі AB і CD. На малюнку 212 вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ однаково напрямлені, а вектори $\bar{a}$ і $\bar{c}$ протилежно напрямлені.

Абсолютною величиною (або модулем) вектора називається довжина відрізка, що зображає вектор. Абсолютна величина вектора $\bar{a}$ позначається $|\bar{a}|$.

Початок вектора може збігатися з його кінцем. Такий вектор називатимемо *нульовим* вектором. Нульовий вектор позначається нулем з рискою ($\bar{0}$). Про напрям нульового вектора не говорять. Вважається, що абсолютна величина нульового вектора дорівнює нулю.



Мал. 211



Мал. 212

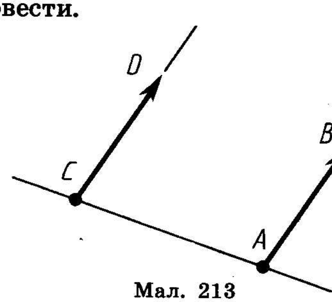
92. РІВНІСТЬ ВЕКТОРІВ

Два вектори називаються *рівними*, якщо вони суміщаються паралельним перенесенням. Це означає, що існує паралельне перенесення, яке переводить початок і кінець одного вектора відповідно у початок і кінець другого вектора.

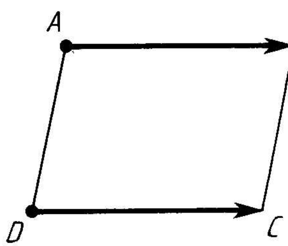
З означення рівності векторів випливає, що ***рівні вектори однаково напрямлені й рівні за абсолютною величиною.***

І навпаки, ***якщо вектори однаково напрямлені й рівні за абсолютною величиною, то вони рівні.***

Справді, нехай $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ — однаково напрямлені вектори, рівні за абсолютною величиною (мал. 213). Паралельне перенесення, яке переводить точку C у точку A, суміщає півпряму CD з півпрямою AB, оскільки вони однаково напрямлені. А через те що відрізок AB дорівнює відрізку CD, то точка D збігається з точкою B, тобто паралельне перенесення переводить вектор $\overline{CD}$ у вектор $\overline{AB}$. Отже, вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ рівні, що й треба було довести.



Мал. 213



Мал. 214

З а д а ч а (2). Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. Доведіть рівність векторів $\overline{AB}$ і $\overline{DC}$.

Р о з в'я з а н н я. Застосуємо до вектора $\overline{AB}$ паралельне перенесення, при якому точка A переходить у точку D (мал. 214). В результаті цього перенесення точка A переміщується вздовж прямої AD, а отже, точка B переміщується вздовж паралельної прямої BC. Пряма AB переходить у паралельну пряму, тобто у пряму DC. Отже, точка B перейде у точку C. Таким чином, наше паралельне перенесення переводить вектор $\overline{AB}$ у вектор $\overline{DC}$, а це означає, що ці вектори рівні.

Нехай $\bar{a}$ — вектор і A — довільна точка. Тоді від точки A можна відкласти один і тільки один вектор $\bar{a}'$, що дорівнює вектору $\bar{a}$.

Справді, існує єдине паралельне перенесення, при якому початок вектора $\bar{a}$ переходить у точку A. Вектор, в який переходить при цьому вектор $\bar{a}$, і є вектор $\bar{a}'$.

Для практичного відкладання від даної точки (D) вектора, що дорівнює даному ($\overline{AB}$), можна скористатися твердженням задачі 2.

93. КООРДИНАТИ ВЕКТОРА

Нехай вектор $\bar{a}$ має початком точку $A_1(x_1; y_1)$, а кінцем точку $A_2(x_2; y_2)$. Координатами вектора $\bar{a}$ називатимемо числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$. Координати вектора ставитимемо поряд з буквеним позначенням вектора, у даному випадку $\bar{a}(a_1; a_2)$ або просто $\overline{(a_1; a_2)}$. Координати нульового вектора дорівнюють нулю.

З формули, яка виражає відстань між двома точками через їх координати, випливає, що абсолютна величина вектора з координатами a_1, a_2 дорівнює $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Рівні вектори мають рівні відповідні координати. І навпаки, ***якщо у векторів відповідні координати рівні, то вектори рівні.***

Справді, нехай $A_1(x_1; y_1)$ і $A_2(x_2; y_2)$ — початок і кінець вектора $\bar{a}$. Оскільки вектор $\bar{a}'$, що дорівнює йому, дістають з вектора $\bar{a}$ паралельним перенесенням, то його початком і кінцем будуть відповідно: $A_1'(x_1 + c; y_1 + d)$, $A_2'(x_2 + c; y_2 + d)$. Звідси видно, що обидва вектори $\bar{a}$ і $\bar{a}'$ мають одні і ті самі координати: $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$.

Доведемо тепер обернене твердження. Нехай відповідні координати векторів $\overline{A_1A_2}$ і $\overline{A_1'A_2'}$ рівні. Доведемо, що вектори рівні.

Нехай x_1' і y_1' — координати точки A_1', а x_2', y_2' — координати точки A_2'. За умовою теореми $x_2 - x_1 = x_2' - x_1'$, $y_2 - y_1 = y_2' - y_1'$. Звідси $x_2' = x_2 + x_1' - x_1$, $y_2' = y_2 + y_1' - y_1$. Паралельне перенесення, що задається формулами

$$x' = x + x_1' - x_1,\quad y' = y + y_1' - y_1,$$

переводить точку A_1 у точку A_1', а точку A_2 у точку A_2', тобто вектори $\overline{A_1A_2}$ і $\overline{A_1'A_2'}$ рівні, що й треба було довести.

Задача (7). Дано три точки: $A(1; 1)$, $B(-1; 0)$, $C(0; 1)$. Знайдіть таку точку $D(x; y)$, щоб вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ були рівні.

Розв'язання. Координати вектора $\overline{AB}$: -2; -1. Координати вектора $\overline{CD}$: $x - 0$, $y - 1$. Оскільки $\overline{AB} = \overline{CD}$, то $x - 0 = -2$, $y - 1 = -1$. Звідси знаходимо координати точки D: $x = -2$, $y = 0$.

94. ДОДАВАННЯ ВЕКТОРІВ

Сумою векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ з координатами a_1, a_2 і b_1, b_2 називається вектор $\bar{c}$ з координатами $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, тобто

$$\bar{a}(a_1; a_2) + \bar{b}(b_1; b_2) = \bar{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2).$$

Для будь-яких векторів $\bar{a}(a_1;\ a_2)$, $\bar{b}(b_1;\ b_2)$, $\bar{c}(c_1;\ c_2)$

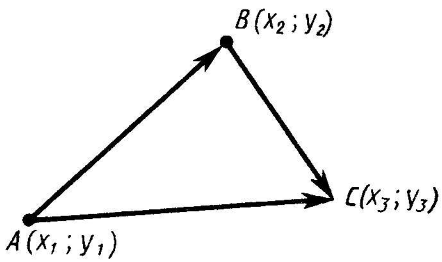
$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a},\ \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}.$$

Для доведення досить порівняти відповідні координати векторів, що стоять у правій і лівій частинах рівностей. Ми бачимо, що вони рівні. А вектори з відповідно рівними координатами рівні.

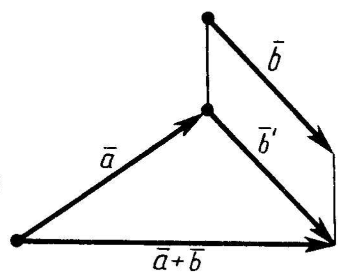
Т е о р е м а 10.1. ***Які б не були точки A, B, C, справджується векторна рівність:***

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

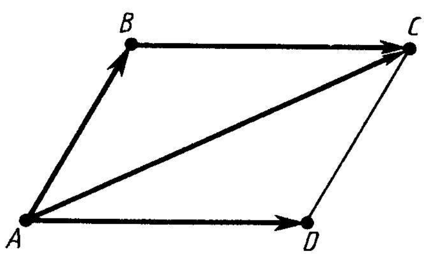
Д о в е д е н н я. Нехай $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, $C(x_3;\ y_3)$ — дані точки (мал. 215). Координати вектора $\overline{AB}$: $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, а координати вектора $\overline{BC}$: $x_3 - x_2$, $y_3 - y_2$. Отже, координатами вектора $\overline{AB} + \overline{BC}$ є $x_3 - x_1$, $y_3 - y_1$. А це і є координати вектора $\overline{AC}$. Отже, вектор $\overline{AB} + \overline{BC}$ дорівнює вектору $\overline{AC}$. Теорему доведено.



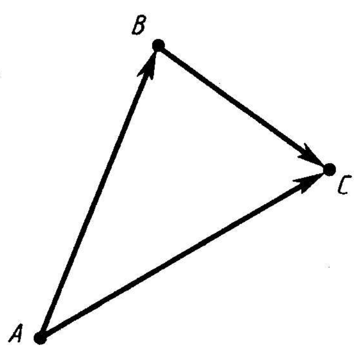
Мал. 215



Мал. 216



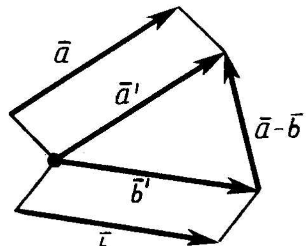
Мал. 217



Мал. 218

З теореми 10.1 маємо такий спосіб побудови суми довільних векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$. Треба від кінця вектора $\bar{a}$ відкласти вектор $\bar{b}'$, що дорівнює вектору $\bar{b}$. Тоді вектор, початок якого збігається з початком вектора $\bar{a}$, а кінець — з кінцем вектора $\bar{b}'$, буде сумою векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ (мал. 216). Такий спосіб знаходження суми двох векторів називається *«правилом трикутника»* додавання векторів.

Для векторів із спільним початком їх сума зображається діагоналлю паралелограма, побудованого на цих векторах (*«правило паралелограма»*) (мал. 217). Справді, $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$, а $\overline{BC} = \overline{AD}$. Отже, $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$.



Мал. 219

Різницею векторів $\bar{a}(a_1; a_2)$, $\bar{b}(b_1; b_2)$ називається такий вектор $\bar{c}(c_1; c_2)$, який у сумі з вектором $\bar{b}$ дає вектор $\bar{a}$: $\bar{b} + \bar{c} = \bar{a}$. Звідси знаходимо координати вектора $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$:

$$c_1 = a_1 - b_1,\ c_2 = a_2 - b_2.$$

Задача (11). Дано вектори із спільним початком: $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ (мал. 218). Довести, що $\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{BC}$.

Розв'язання. Маємо: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$. А це означає, що $\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{BC}$.

Звідси дістаємо таке правило для побудови різниці двох векторів. Щоб побудувати вектор, який дорівнює різниці векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, треба від однієї точки відкласти вектори $\bar{a}'$ і $\bar{b}'$, що дорівнюють їм. Тоді вектор, початок якого збігається з кінцем вектора $\bar{b}$, а кінець — з кінцем вектора $\bar{a}'$, буде різницею векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ (мал. 219).

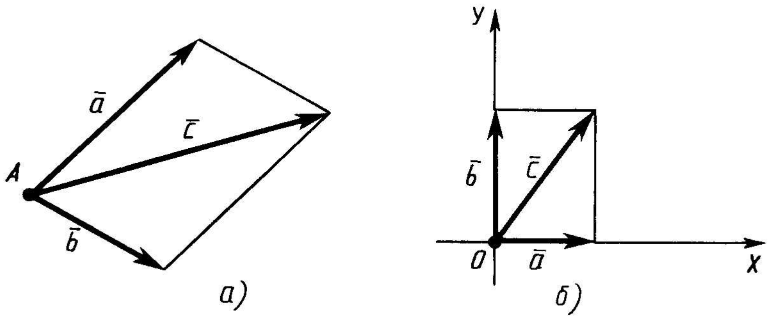
95. ДОДАВАННЯ СИЛ

Силу, прикладену до тіла, зручно зображати вектором, напрям якого збігається з напрямом дії сили, а абсолютна величина пропорційна до величини сили. Як свідчить досвід, при такому способі зображення сил рівнодійна двох або декількох сил, прикладених до тіла в одній точці, зображається сумою відповідних їм векторів. На малюнку 220, *а* до тіла в точці A прикладені дві сили, зображені векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$. Рівнодійна цих сил зображається вектором

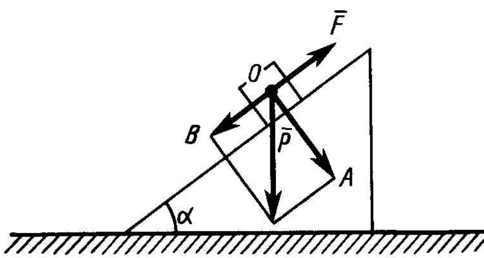
$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}.$$

Зображення сили у вигляді суми сил, які діють у двох заданих напрямах, називається розкладанням сили за цими напрямами. Так, на малюнку 220, *а* силу $\bar{c}$ розкладено на суму сил $\bar{a}$ і $\bar{b}$ — складові сили $\bar{c}$.

Розкладання вектора зручно робити за двома перпендикулярними осями. У цьому випадку складові вектора називаються *проекціями* вектора на осі (мал. 220, *б*).



Мал. 220



Мал. 221

З а д а ч а (16). З якою силою F треба утримувати вантаж вагою P на похилій площині, щоб він не скочувався вниз (мал. 221)?

Р о з в' я з а н н я. Нехай O — центр маси вантажу, до якого прикладено силу P. Розкладемо вектор $\bar{P}$ за двома взаємно перпендикулярними напрямами, як показано на малюнку 221. Сила OA перпендикулярна до похилої площини і не викликає переміщення вантажу. Сила $\bar{F}$, яка утримує вантаж, має дорівнювати за величиною і бути протилежною за напрямом силі $\overline{OB}$. Тому $F = P \sin \alpha$.

96. МНОЖЕННЯ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

Добутком вектора $\overline{(a_1;\ a_2)}$ *на число* λ називається вектор $\overline{(\lambda a_1;\ \lambda a_2)}$, тобто $\overline{(a_1;\ a_2)}\lambda = \overline{(\lambda a_1;\ \lambda a_2)}$.

За означенням

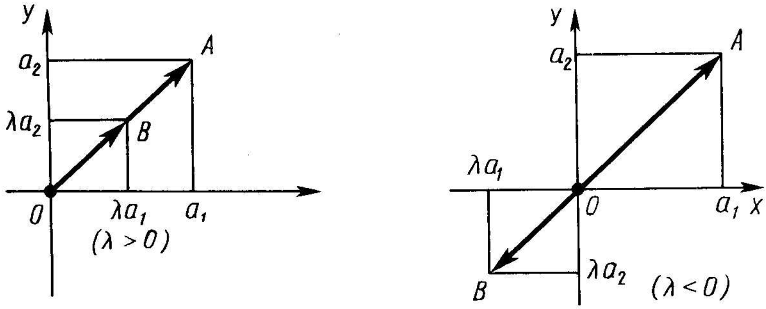
$$\overline{(a_1;\ a_2)}\lambda = \lambda\overline{(a_1;\ a_2)}.$$

З означення операції множення вектора на число випливає, що ***для будь-якого вектора*** $\bar{a}$ ***і чисел*** λ, μ

$$(\lambda + \mu)\bar{a} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{a}.$$

Для будь-яких двох векторів $\bar{a}$ ***і*** $\bar{b}$ ***і числа*** λ

$$\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}.$$



Мал. 222

Теорема 10.2. ***Абсолютна величина вектора $\lambda\bar{a}$ дорівнює $|\lambda| \cdot |\bar{a}|$. Напрям вектора $\lambda\bar{a}$, якщо $\bar{a} \neq 0$, збігається з напрямом вектора $\bar{a}$, якщо $\lambda > 0$, і протилежний напряму вектора $\bar{a}$, якщо $\lambda < 0$.***

Доведення. Побудуємо вектори $\overline{OA}$ і $\overline{OB}$, які відповідно дорівнюють $\bar{a}$ і $\lambda\bar{a}$ (O — початок координат). Нехай a_1 і a_2 — координати вектора $\bar{a}$. Тоді координатами точки A будуть числа a_1 і a_2, а координатами точки B — λa_1, λa_2 (мал. 222). Рівняння прямої OA має вигляд:

$$\alpha x + \beta y = 0.$$

Оскільки це рівняння задовольняють координати точки $A(a_1; a_2)$, то його задовольняють і координати точки $B(\lambda a_1; \lambda a_2)$. Звідси випливає, що точка B лежить на прямій OA. Координати c_1 і c_2 будь-якої точки C, яка лежить на півпрямій OA, мають ті самі знаки, що й координати a_1 і a_2 точки A, а координати будь-якої точки, що лежить на півпрямій, доповняльній до OA, мають протилежні знаки.

Якщо $\lambda > 0$, то точка B лежить на півпрямій OA, а отже, вектори $\bar{a}$ і $\lambda\bar{a}$ однаково напрямлені. Якщо $\lambda < 0$, то точка B лежить на доповняльній півпрямій, і вектори $\bar{a}$ та $\lambda\bar{a}$ протилежно напрямлені.

Абсолютна величина вектора $\lambda\bar{a}$ дорівнює:

$$|\lambda\bar{a}| = \sqrt{(\lambda a_1)^2 + (\lambda a_2)^2} = |\lambda|\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |\lambda|\ |\bar{a}|.$$

Теорему доведено.

Задача (17). Дано точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$. Доведіть, що вектори $\overline{AB}$ і $\overline{BA}$ протилежно напрямлені.

Розв'язання. Координати вектора $\overline{AB}$: $x_2 - x_1$ і $y_2 - y_1$. Координати вектора $\overline{BA}$: $x_1 - x_2$ і $y_1 - y_2$. Ми бачимо, що $\overline{AB} = (-1)\overline{BA}$. А це означає, що вектори $\overline{AB}$ і $\overline{BA}$ протилежно напрямлені.

97. РОЗКЛАДАННЯ ВЕКТОРА ЗА ДВОМА НЕКОЛІНЕАРНИМИ ВЕКТОРАМИ

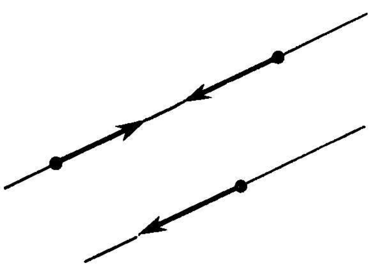
Два ненульові вектори називаються *колінеарними,* якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих (мал. 223). Колінеарні вектори або однаково напрямлені, або протилежно напрямлені.

Нехай $\bar{a}$ і $\bar{b}$ — відмінні від нуля колінеарні вектори. Доведемо, що ***існує число λ таке, що***

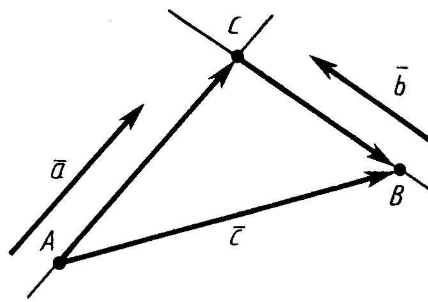
$$\bar{b} = \lambda\bar{a}.$$

Припустимо, вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ однаково напрямлені. Вектори $\bar{b}$ і $\frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|} \cdot \bar{a}$ однаково напрямлені і мають одну і ту ж абсолютну величину $|\bar{b}|$. Отже, вони рівні:

$$\bar{b} = \frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|} \cdot \bar{a} = \lambda\bar{a},\ \lambda = \frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}.$$



Мал. 223



Мал. 224

Для випадку протилежно напрямлених векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ аналогічно робимо висновок, що

$$\bar{b} = -\frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|} \cdot \bar{a} = \lambda\bar{a},\ \lambda = -\frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}.$$

що й треба було довести.

Нехай $\bar{a}$ і $\bar{b}$ — відмінні від нуля неколінеарні вектори. Доведемо, що ***будь-який вектор $\bar{c}$ можна записати у вигляді***

$$\bar{c} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}.$$

Нехай A і B — початок і кінець вектора c (мал. 224). Через точки A і B проведемо прямі, паралельні векторам $\bar{a}$ і $\bar{b}$. Вони перетнуться у деякій точці C. Маємо:

$$\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}.$$

Оскільки вектори $\bar{a}$ і $\overline{AC}$ колінеарні, то $\overline{AC} = \lambda\bar{a}$. Оскільки вектори $\overline{CB}$ і $\bar{b}$ колінеарні, то $\overline{CB} = \mu\bar{b}$.

Таким чином, $\bar{c} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$, що й треба було довести.

98. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

Скалярним добутком векторів $\bar{a}(a_1;\ a_2)$ і $\bar{b}(b_1;\ b_2)$ називається число $a_1b_1 + a_2b_2$.

Скалярний добуток векторів записують так само, як добуток чисел. Скалярний добуток $\bar{a}\cdot\bar{a}$ позначають $\bar{a}^2$ і називають скалярним квадратом. Очевидно, $\bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$.

З означення скалярного добутку векторів випливає, що ***для будь-яких векторів*** $\bar{a}(a_1;\ a_2)$, $\bar{b}(b_1;\ b_2)$, $\bar{c}(c_1;\ c_2)$

$$(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = \overline{ac} + \overline{bc}.$$

Справді, лівою частиною рівності є $(a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2$, а правою $a_1c_1 + a_2c_2 + b_1c_1 + b_2c_2$. Очевидно, вони рівні.

Кутом між ненульовими векторами $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ називається кут BAC. Кутом між будь-якими двома ненульовими векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називається кут між векторами, що дорівнюють даним і мають спільний початок. Вважають, що кут між однаково напрямленими векторами дорівнює нулю.

Теорема 10.3. ***Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх абсолютних величин на косинус кута між ними.***

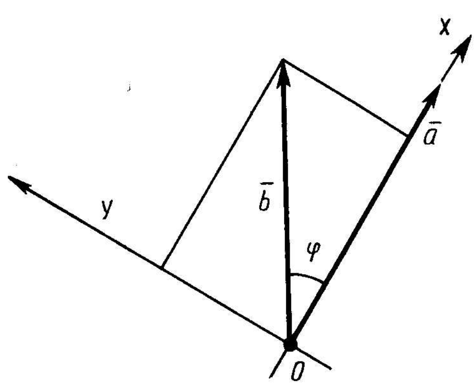
Доведення. Нехай $\bar{a}$ і $\bar{b}$ — дані вектори і φ — кут між ними. Маємо:

$$(\bar{a} + \bar{b})^2 = (\bar{a} + \bar{b})(\bar{a} + \bar{b}) = (\bar{a} + \bar{b})\bar{a} + (\bar{a} + \bar{b})\bar{b} =$$
$$= \overline{aa} + \overline{ba} + \overline{ab} + \overline{bb} = \bar{a}^2 + 2\overline{ab} + \bar{b}^2,$$

або

$$|\bar{a} + \bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 + 2\overline{ab}.$$

Звідси видно, що скалярний добуток $\overline{ab}$ виражається через довжини векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{a} + \bar{b}$, а тому не залежить від вибору системи координат, тобто скалярний добуток не зміниться, якщо систему координат вибрати спеціально. Візьмемо систему коор-



Мал. 225

динат xy так, як показано на малюнку 225. За таким вибором системи координат координатами вектора $\bar{a}$ будуть $|\bar{a}|$ і 0, а координатами вектора $\bar{b}$ будуть $|\bar{b}|\cos\varphi$ і $|\bar{b}|\sin\varphi$. Скалярний добуток

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|\ |\bar{b}|\cos\varphi + 0\,|\bar{b}|\sin\varphi = |\bar{a}|\ |\bar{b}|\cos\varphi.$$

Теорему доведено.

З теореми 10.3 випливає, що ***коли вектори перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю.*** І навпаки, ***якщо скалярний добуток відмінних від нуля векторів дорівнює нулю, то вектори перпендикулярні.***

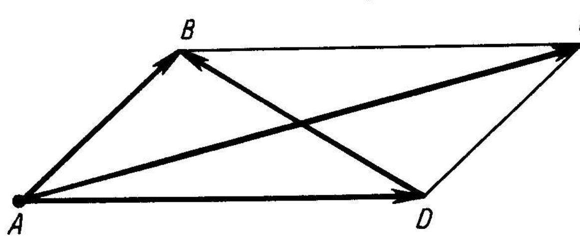
Задача (38). Доведіть, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.

Розв'язання. Нехай чотирикутник $ABCD$ — паралелограм (мал. 226). Маємо векторні рівності:

$$\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC},$$
$$\overline{AB} - \overline{AD} = \overline{DB}.$$

Піднесемо обидві частини утворених рівностей до квадрата. Дістанемо:

$$\overline{AB}^2 + 2\overline{AB}\cdot\overline{AD} + \overline{AD}^2 = \overline{AC}^2,$$
$$\overline{AB}^2 - 2\overline{AB}\cdot\overline{AD} + \overline{AD}^2 = \overline{DB}^2.$$



Мал. 226

Додамо почленно ці рівності. Дістанемо:

$$2\overline{AB}^2 + 2\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{DB}^2.$$

Оскільки у паралелограмі протилежні сторони рівні, то ця рівність означає, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін, що й треба було довести.

99. РОЗКЛАДАННЯ ВЕКТОРА ЗА КООРДИНАТНИМИ ОСЯМИ

Вектор називається *одиничним,* якщо його абсолютна величина дорівнює одиниці. Одиничні вектори, які мають напрями додатних координатних півосей, називаються *координатними векторами* або *ортами.* Позначатимемо їх $\bar{e}_1(1;\ 0)$ на осі x і $\bar{e}_2(0;\ 1)$ на осі y (мал. 227).

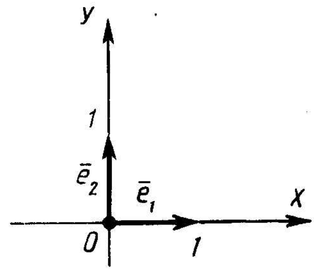
Оскільки координатні вектори відмінні від нуля і неколінеарні, то будь-який вектор $\bar{a}(a_1; a_2)$ можна записати у вигляді:

$$\bar{a} = \lambda\bar{e}_1 + \mu\bar{e}_2. \qquad (*)$$

Знайдемо коефіцієнти λ і μ цього розкладу. Помножимо рівність (*) на вектор $\bar{e}_1$. Оскільки

$$\bar{a}(a_1;\ a_2)\bar{e}_1 = a_1,\ \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = 1,\ \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = 0, \text{ то } a_1 = \lambda.$$

Аналогічно, помноживши обидві частини рівності (*) на вектор $\bar{e}_2$, дістанемо: $a_2 = \mu$.



Мал. 227

Таким чином, для будь-якого вектора $\bar{a}(a_1;\ a_2)$ маємо:

$$\bar{a} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2.$$

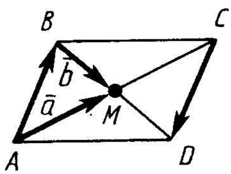
? КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що таке вектор? Як позначаються вектори?
2. Які вектори називаються однаково напрямленими (протилежно напрямленими)?
3. Що таке абсолютна величина вектора?
4. Що таке нульовий вектор?
5. Які вектори називаються рівними?
6. Доведіть, що рівні вектори однаково напрямлені й рівні за абсолютною величиною. І навпаки, вектори, однаково напрямлені й рівні за абсолютною величиною, рівні між собою.
7. Доведіть, що від будь-якої точки можна відкласти вектор, який дорівнює даному вектору, і тільки один.
8. Що таке координати вектора? Чому дорівнює абсолютна величина вектора з координатами a_1, a_2?
9. Доведіть, що рівні вектори мають відповідно рівні координати, а вектори з відповідно рівними координатами рівні.
10. Дайте означення додавання векторів.
11. Доведіть, що для будь-яких векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$: $\bar{a} + \bar{b} = \vec{b} + \bar{a}$.
12. Доведіть, що для будь-яких трьох векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$: $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$.
13. Доведіть векторну рівність $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.
14. Доведіть, що для знаходження суми векторів $\bar{a}$ та $\bar{b}$ треба від кінця вектора $\bar{a}$ відкласти вектор $\bar{b}'$, який дорівнює $\bar{b}$. Тоді вектор, початок якого збігається з початком вектора $\bar{a}$, а кінець — з кінцем вектора $\bar{b}'$, дорівнюватиме $\bar{a} + \bar{b}$.
15. Сформулюйте «правило паралелограма» додавання векторів.
16. Дайте означення різниці векторів.
17. Дайте означення множення вектора на число.

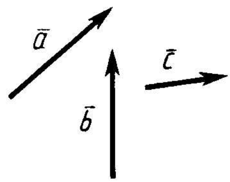
18. Доведіть, що абсолютна величина вектора $\lambda\bar{a}$ дорівнює $|\lambda|\ |\bar{a}|$, напрям вектора $\lambda\bar{a}$, коли $\bar{a}\neq\bar{0}$, збігається з напрямом вектора $\bar{a}$, якщо $\lambda > 0$, і протилежний напряму вектора $\bar{a}$, якщо $\lambda < 0$.
19. Які вектори називаються колінеарними?
20. Доведіть, що коли вектори $\bar{a}$ та $\bar{b}$ відмінні від нульового вектора і не колінеарні, то довільний вектор $\bar{c}$ можна подати у вигляді $\bar{c} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$.
21. Дайте означення скалярного добутку векторів.
22. Доведіть, що для будь-яких трьох векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$: $(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}$.
23. Як означається кут між векторами?
24. Чому дорівнює кут між однаково напрямленими векторами?
25. Доведіть, що скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх абсолютних величин на косинус кута між ними.
26. Доведіть, що коли вектори перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю. І навпаки, якщо скалярний добуток відмінних від нуля векторів дорівнює нулю, то вектори перпендикулярні.

ЗАДАЧІ

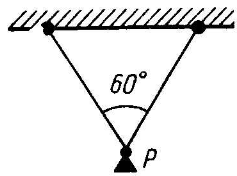
1. На прямій дано три точки: A, B, C, причому точка B лежить між точками A і C. Серед векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BA}$ та $\overline{BC}$ назвіть однаково напрямлені та протилежно напрямлені.
2. Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. Доведіть рівність векторів $\overline{AB}$ і $\overline{DC}$.
3. Дано вектор $\overline{AB}$ і точку C. Відкладіть від точки C вектор, що дорівнює вектору $\overline{AB}$, якщо: 1) точка C лежить на прямій AB; 2) точка C не лежить на прямій AB.
4. Вектори $\bar{a}(2;\ 4)$, $\bar{b}(-1;\ 2)$ і $\bar{c}(c_1;\ c_2)$ відкладено від початку координат. Чому дорівнюють координати їх кінців?
5. Абсолютна величина вектора $\bar{a}(5;\ m)$ дорівнює 13, а вектора $\bar{b}(n;\ 24)$ дорівнює 25. Знайдіть m та n.
6. Дано точки $A(0;\ 1)$, $B(1;\ 0)$, $C(1;\ 2)$, $D(2;\ 1)$. Доведіть рівність векторів $\overline{AB}$ та $\overline{CD}$.
7. Дано три точки $A(1;\ 1)$, $B(-1;\ 0)$, $C(0;\ 1)$. Знайдіть таку точку $D(x;\ y)$, щоб вектор $\overline{AB}$ дорівнював $\overline{CD}$.
8. Знайдіть вектор $\bar{c}$, що дорівнює сумі векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ та абсолютну величину вектора $\bar{c}$, якщо: 1) $\bar{a}(1;\ -4)$, $\bar{b}(-4;\ 8)$; 2) $\bar{a}(2;\ 5)$, $\bar{b}(4;\ 3)$.
9. Дано трикутник ABC. Знайдіть суму векторів: 1) $\overline{AC}$ та $\overline{CB}$; 2) $\overline{AB}$ і $\overline{CB}$; 3) $\overline{AC}$ і $\overline{AB}$; 4) $\overline{CA}$ і $\overline{CB}$.



Мал. 228



Мал. 229



Мал. 230

10. Знайдіть вектор $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$ та його абсолютну величину, якщо: 1) $\bar{a}((1;\ -4)$, $\bar{b}(-4;\ 8)$; 2) $\bar{a}(-2;\ 7)$, $\bar{b}(4;\ -1)$.

11. Дано вектори із спільним початком: $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$. Доведіть, що $\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{BC}$.

12. У паралелограмі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці M. Виразіть вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ через вектори $\bar{a} = \overline{AM}$ і $\bar{b} = \overline{BM}$ (мал. 228).

13. Накресліть три будь-які вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ так, як на малюнку 229. Побудуйте вектори, що дорівнюють: 1) $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$; 2) $\bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$; 3) $-\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$.

14. 1) Доведіть, що для векторів $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ і $\overline{AC}$ справджується нерівність $|\overline{AC}| \leqslant |\overline{AB}| + |\overline{BC}|$.
2) Доведіть, що для будь-яких векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ справджується нерівність $|\bar{a} + \bar{b}| \leqslant |\bar{a}| + |\bar{b}|$.

15. До горизонтальної балки на двох однакових нитках підвішено вантаж масою P. Визначте силу натягу ниток (мал. 230).

16. З якою силою F треба утримувати вантаж масою P на похилій площині, щоб він не скочувався вниз?

17. Дано точки $A(a_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$. Доведіть, що вектори $\overline{AB}$ і $\overline{BA}$ протилежно напрямлені.

18. Доведіть, що вектори $\bar{a}(1;\ 2)$ і $\bar{b}(0{,}5;\ 1)$ однаково напрямлені, а вектори $\bar{c}(-1;\ 2)$ і $\bar{d}(0{,}5;\ -1)$ протилежно напрямлені.

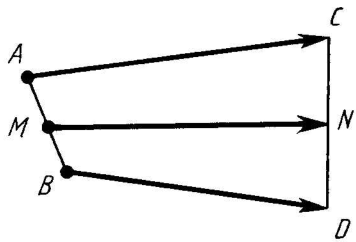
19. Дано вектори $\bar{a}(3;\ 2)$ і $\bar{b}(0;\ -1)$. Знайдіть вектор $\bar{c} = -2\bar{a} + 4\bar{b}$ та його абсолютну величину.

20. Абсолютна величина вектора $\lambda\bar{a}$ дорівнює 5. Знайдіть λ, якщо: 1) $\bar{a}(-6;\ 8)$; 2) $\bar{a}(3;\ -4)$; 3) $\bar{a}(5;\ 12)$.

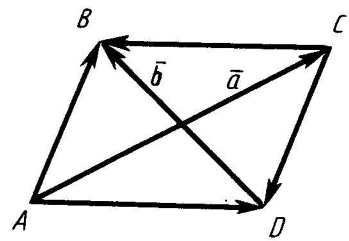
21. У трикутнику ABC проведено медіану AM. Доведіть, що $\overline{AM} = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{AC})$.

22. Точки M і N є серединами відрізків відповідно AB і CD. Доведіть векторну рівність $\overline{MN} = \frac{1}{2}(\overline{AC} + \overline{BD})$ (мал. 231).

23. Дано паралелограм $ABCD$, $\overline{AC} = \bar{a}$, $\overline{DB} = \bar{b}$ (мал. 232). Виразіть вектори $\overline{AB}$, $\overline{CB}$, $\overline{CD}$ і $\overline{AD}$ через $\bar{a}$ і $\bar{b}$.



Мал. 231



Мал. 232

24*. Доведіть, що відповідні координати колінеарних векторів пропорційні. І навпаки, якщо відповідні координати двох векторів пропорційні, то ці вектори колінеарні.

25. Дано вектори $\bar{a}(2;\ -4)$, $\bar{b}(1;\ 1)$, $\bar{c}(1;\ -2)$, $\bar{d}(-2;\ -4)$. Вкажіть пари колінеарних векторів. Які з даних векторів однаково напрямлені, а які протилежно напрямлені?

26. Відомо, що вектори $\bar{a}(1;\ -1)$ та $\bar{b}(-2;\ m)$ колінеарні. Знайдіть, чому дорівнює m.

27. Дано вектори $\bar{a}(1;\ 0)$, $\bar{b}(1;\ 1)$ та $\bar{c}(-1;\ 0)$. Знайдіть такі числа λ і μ, щоб справджувалася рівність $\bar{c} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}$.

28. Доведіть, що для будь-яких векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$: $(\bar{a}\bar{b})^2 \leqslant \bar{a}^2\bar{b}^2$.

29. Знайдіть кут між векторами $\bar{a}(1;\ 2)$ і $\bar{b}\left(1;\ -\frac{1}{2}\right)$.

30*. Дано вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$. Знайдіть абсолютну величину вектора $\bar{a} + \bar{b}$, якщо абсолютні величини векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ дорівнюють 1, а кут між ними 60°.

31. Знайдіть кут між векторами $\bar{a}$ і $\bar{a} + \bar{b}$ попередньої задачі.

32. Дано вершини трикутника $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 1)$; $C(4;\ 5)$. Знайдіть косинуси кутів трикутника.

33. Знайдіть кути трикутника з вершинами $A(0;\ \sqrt{3})$, $B(2;\ \sqrt{3})$, $C\left(\frac{3}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

34. Доведіть, що вектори $\bar{a}(m;\ n)$ і $\bar{b}(-n;\ m)$ перпендикулярні або дорівнюють нулю.

35. Дано вектори $\bar{a}(3;\ 4)$ і $\bar{b}(m;\ 2)$. При якому значенні m ці вектори перпендикулярні?

36. Дано вектори $\bar{a}(1;\ 0)$ і $\bar{b}(1;\ 1)$. Знайдіть таке число λ, щоб вектор $\bar{a} + \lambda\bar{b}$ був перпендикулярним до вектора $\bar{a}$.

37. Доведіть, що коли $\bar{a}$ і $\bar{b}$ — одиничні неколінеарні вектори, то вектори $\bar{a} + \bar{b}$ і $\bar{a} - \bar{b}$ відмінні від нуля і перпендикулярні.

38*. Доведіть, що сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.

39*. Дано сторони трикутника a, b, c. Знайдіть його медіани m_a, m_b, m_c.

40. Доведіть, що геометричне місце точок, сума квадратів відстаней від яких до двох даних точок стала, є колом з центром у середині відрізка, який сполучає дані точки.

41. Вектори $\bar{a} + \bar{b}$ і $\bar{a} - \bar{b}$ перпендикулярні. Доведіть, що $|\bar{a}| = |\bar{b}|$.

42. Доведіть за допомогою векторів, що діагоналі ромба перпендикулярні.

43. Дано чотири точки: $A(1;\ 1)$, $B(2;\ 3)$, $C(0;\ 4)$, $D(-1;\ 2)$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — прямокутник.

44. Дано чотири точки $A(0;\ 0)$, $B(1;\ 1)$, $C(0;\ 2)$, $D(-1;\ 1)$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — квадрат.

45. Серед векторів $\bar{a}\left(-\frac{3}{5};\ \frac{4}{5}\right)$, $\bar{b}\left(\frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right)$, $\bar{c}\ (0;\ -1)$, $\bar{d}\left(\frac{3}{5};\ -\frac{4}{5}\right)$ знайдіть одиничні і зазначте, які з них колінеарні.

46. Знайдіть одиничний вектор $\bar{e}$, колінеарний вектору $\bar{a}(6;\ 8)$ і однаково з ним напрямлений.

47. Дано координатні вектори $\bar{e}_1(1;\ 0)$ і $\bar{e}_2(0;\ 1)$. Чому дорівнюють координати вектора $2\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2$?

48*. 1) Дано три точки O, A, B. Точка X ділить відрізок AB у відношенні $\lambda : \mu$, починаючи від точки A. Виразіть вектор $\overline{OX}$ через вектори $\overline{OA} = \bar{a}$ і $\overline{OB} = \bar{b}$.

2) Доведіть, що медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить їх у відношенні $2 : 1$, починаючи від відповідних вершин.

49. Доведіть, що проекція $\bar{a}$ вектора $\bar{c}$ на вісь абсцис з координатним вектором $\bar{e}_1(1;\ 0)$ задається формулою $\bar{a} = k\bar{e}_1$, де $k = \bar{c}\bar{e}_1$.

50. Доведіть, що проекція суми векторів на вісь дорівнює сумі проекцій доданків на ту саму вісь.

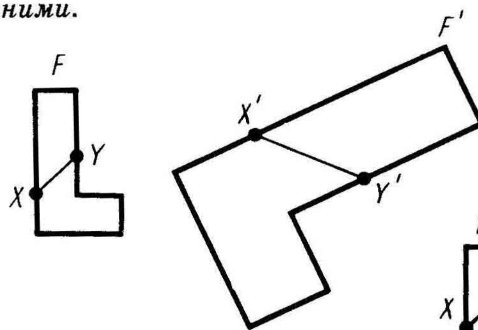
9 клас

§ 11. ПОДІБНІСТЬ ФІГУР

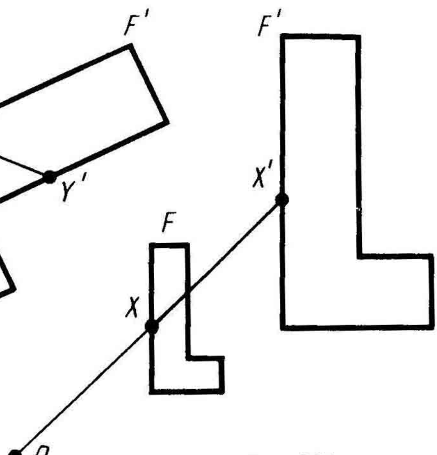
100. ПЕРЕТВОРЕННЯ ПОДІБНОСТІ

Перетворення фігури F у фігуру F' називається *перетворенням подібності*, якщо при цьому перетворенні відстані між точками змінюються в одну й ту саму кількість разів (мал. 233). Це означає, що коли довільні точки X і Y фігури F при перетворенні подібності переходять у точки X', Y' фігури F', то $X'Y' = k \cdot XY$, причому число k — одне і те саме для всіх точок X і Y. Число k називається *коефіцієнтом подібності*. Якщо $k = 1$, перетворення подібності, очевидно, є рухом.

Нехай F — дана фігура і O — фіксована точка (мал. 234). Через довільну точку X фігури F проведемо промінь OX і відкладемо на ньому відрізок OX', що дорівнює $k \cdot OX$, де k — додатне число. Перетворення фігури F, при якому кожна її точка X переходить у точку X', побудовану таким способом, називається *гомотетією відносно центра O*. Число k називається *коефіцієнтом гомотетії*, фігури F і F' називаються *гомотетичними*.



Мал. 233



Мал. 234

Теорема 11.1. ***Гомотетія є перетворенням подібності.***

Доведення. Нехай O — центр гомотетії, k — коефіцієнт гомотетії, X і Y — дві довільні точки фігури (мал. 235). У результаті гомотетії точки X і Y переходять у точки X' і Y' відповідно на променях OX і OY, причому $OX' = k \cdot OX$, $OY' = k \cdot OY$. Звідси маємо векторні рівності:

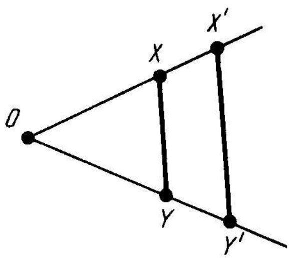
$$\overline{OX'} = k\overline{OX}, \ \overline{OY'} = k\overline{OY}.$$

Віднявши ці рівності почленно, дістанемо:

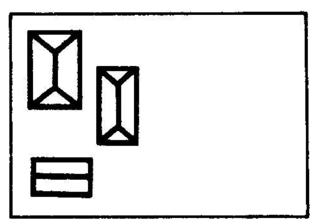
$$\overline{OY'} - \overline{OX'} = k(\overline{OY} - \overline{OX}).$$

Оскільки $\overline{OY'} - \overline{OX'} = \overline{X'Y'}$, $\overline{OY} - \overline{OX} = \overline{XY}$, то $\overline{X'Y'} = k \times \overline{XY}$. Отже, $|\overline{X'Y'}| = k|\overline{XY}|$, тобто $X'Y' = kXY$. Таким чином, гомотетія є перетворенням подібності. Теорему доведено.

Перетворення подібності широко використовується на практиці при виконанні креслень деталей машин, споруд, планів місцевості тощо. Такі зображення — подібні перетворення уявних зображень в натуральну величину. Коефіцієнт подібності при цьому називається масштабом. Наприклад, якщо ділянка місцевості зображується в масштабі 1:100, то це означає, що одному сантиметру на плані відповідає 1 м на місцевості.



Мал. 235

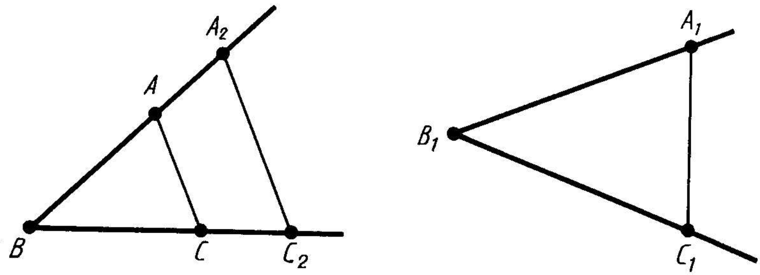

Мал. 236

З а д а ч а (4). На малюнку 236 зображено план садиби у масштабі 1:1000. Визначте розміри садиби (довжину і ширину).

Р о з в' я з а н н я. Довжина і ширина садиби на плані 4 см і 2,7 см. Оскільки план виконано у масштабі 1:1000, то розміри садиби дорівнюють відповідно $4 \cdot 1000$ см $=$ $= 40$ (м), $2{,}7 \cdot 1000$ см $= 27$ (м).

101. ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ПОДІБНОСТІ

Так само як і для руху, доводимо, що при перетворенні подібності три точки A, B, C, які лежать на одній прямій, переходять у три точки A_1, B_1, C_1, які теж лежать на одній прямій. Причому, якщо точка B лежить між точками A і C, то B_1 лежить між точками A_1 і C_1. Звідси випливає, що ***перетворення подібності переводить прямі у прямі, півпрямі — у півпрямі, відрізки — у відрізки.***



Мал. 237

Доведемо, що ***перетворення подібності зберігає кути між півпрямими.***

Справді, нехай кут ABC перетворенням подібності з коефіцієнтом k переводиться в кут $A_1B_1C_1$ (мал. 237). Застосуємо до кута ABC перетворення гомотетії відносно його вершини B з коефіцієнтом гомотетії k. При цьому точки A і C перейдуть у точки A_2 і C_2. Трикутник A_2BC_2 дорівнює трикутнику $A_1B_1C_1$ за третьою ознакою. З рівності трикутників випливає рівність кутів A_2BC_2 і $A_1B_1C_1$. Отже, кут ABC дорівнює куту $A_1B_1C_1$, що й треба було довести.

102. ПОДІБНІСТЬ ФІГУР

Дві фігури називаються *подібними*, якщо вони переводяться одна в одну перетворенням подібності. Подібність фігур позначають спеціальним знаком: $\backsim$. Запис $F \backsim F'$ читається: «фігура F подібна фігурі F'».

Доведемо, що ***коли фігура F_1 подібна фігурі F_2, а фігура F_2 подібна фігурі F_3, то фігури F_1 і F_3 подібні.***

Нехай X_1 і Y_1 — дві довільні точки фігури F_1. Перетворення подібностей, яке переводить фігуру F_1 в F_2, переводить ці точки у точки X_2, Y_2, для яких $X_2Y_2 = k_1X_1Y_1$.

Перетворення подібності, яке переводить фігуру F_2 в F_3, переводить точки X_2, Y_2 у точки X_3, Y_3, для яких $X_3Y_3 = k_2 \cdot X_2Y_2$.

З рівностей

$$X_2Y_2 = k_1X_1Y_1,\ X_3Y_3 = k_2X_2Y_2$$

випливає, що $X_3Y_3 = k_1 \cdot k_2X_1Y_1$. А це означає, що перетворення фігури F_1 в F_3, яке дістаємо при послідовному виконанні двох перетворень подібності, є подібність. Отже, фігури F_1 і F_3 подібні, що й треба було довести.

У запису подібності трикутників: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ передбачається, що вершини, які суміщаються перетворенням подібності, стоять на відповідних місцях, тобто A переходить в A_1, B — в B_1, C — в C_1.

З властивостей перетворення подібності випливає, що ***у подібних фігур відповідні кути рівні, а відповідні відрізки пропорційні***. Зокрема, у ***подібних трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$***

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1;$$

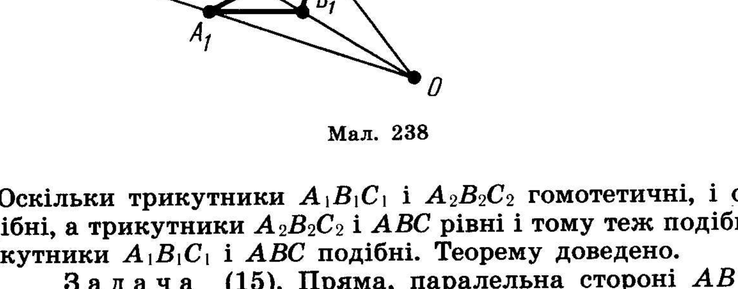
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

103. ОЗНАКА ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ ЗА ДВОМА КУТАМИ

Теорема 11.2. ***Якщо два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам другого трикутника, то такі трикутники подібні.***

Доведення. Нехай у трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ маємо $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Доведемо, що $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

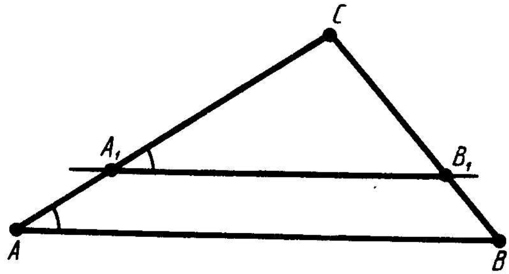
Нехай $k = \frac{AB}{A_1B_1}$. Застосуємо до трикутника $A_1B_1C_1$ перетворення подібності з коефіцієнтом подібності k, наприклад гомотетію (мал. 238). При цьому дістанемо деякий трикутник $A_2B_2C_2$, що дорівнює трикутнику ABC. Справді, оскільки перетворення подібності зберігає кути, то $\angle A_2 = \angle A_1$, $\angle B_2 = \angle B_1$. Отже, у трикутників ABC і $A_2B_2C_2$: $\angle A = \angle A_2$, $\angle B = \angle B_2$. Далі $A_2B_2 = kA_1B_1 = AB$. Отже, трикутник ABC дорівнює трикутнику $A_2B_2C_2$ за другою ознакою (за стороною і прилеглими до неї кутами).



Мал. 238

Оскільки трикутники $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ гомотетичні, і отже, подібні, а трикутники $A_2B_2C_2$ і ABC рівні і тому теж подібні, то трикутники $A_1B_1C_1$ і ABC подібні. Теорему доведено.

Задача (15). Пряма, паралельна стороні AB трикутника ABC, перетинає його сторону AC у точці A_1, а сторону BC у точці B_1. Доведіть, що $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.



Мал. 239

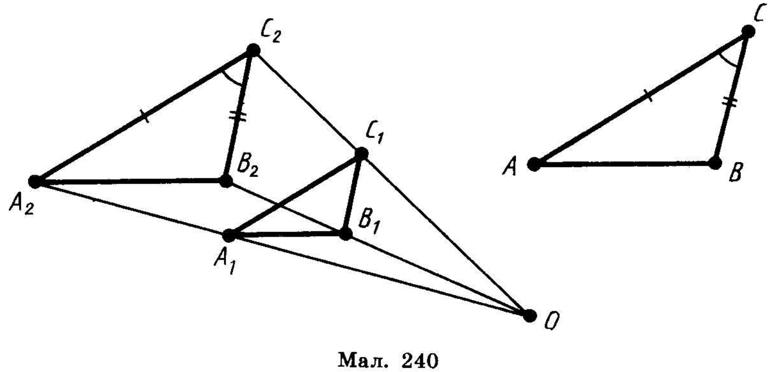
Розв'язання (мал. 239). У трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ кут при вершині C спільний, а кут CA_1B_1 дорівнює куту CAB, як відповідні кути при паралельних AB і A_1B_1 і січній AC. Отже, $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C$ за двома кутами.

104. ОЗНАКА ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ ЗА ДВОМА СТОРОНАМИ І КУТОМ МІЖ НИМИ

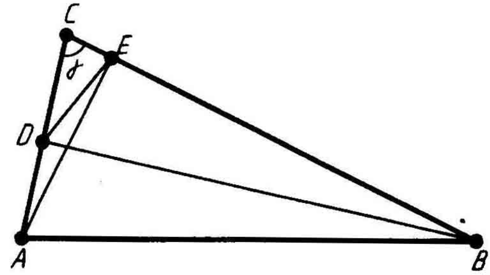
Теорема 11.3. ***Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого трикутника і кути, утворені цими сторонами, рівні, то трикутники подібні.***

Доведення (аналогічне до доведення теореми 11.2). Нехай у трикутників ABC і $A_1B_1C_1$: $\angle C = \angle C_1$ і $AC = kA_1C_1$, $BC = kB_1C_1$. Доведемо, що $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

Застосуємо до трикутника $A_1B_1C_1$ перетворення подібності з коефіцієнтом подібності k, наприклад гомотетію (мал. 240). При цьому дістанемо деякий трикутник $A_2B_2C_2$, що дорівнює трикутнику ABC. Справді, оскільки перетворення подібності зберігає кути, то $\angle C_2 = \angle C_1$. Отже, у трикутників ABC і $A_2B_2C_2$ $\angle C = \angle C_2$. Далі, $A_2C_2 = kA_1C_1 = AC$, $B_2C_2 = kB_1C_1 =$



Мал. 240



Мал. 241

$= BC$. Звідси випливає, що трикутники ABC і $A_2B_2C_2$ рівні за першою ознакою (за двома сторонами і кутом між ними).

Оскільки трикутники $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ гомотетичні і, отже, подібні, а трикутники $A_2B_2C_2$ і ABC рівні і тому теж подібні, то трикутники $A_1B_1C_1$ і ABC подібні. Теорему доведено.

Задача (31). У трикутнику ABC з гострим кутом C проведені висоти AE і BD (мал. 241). Доведіть, що $\triangle ABC \backsim$ $\backsim \triangle EDC$.

Розв'язання. У трикутників ABC і EDC кут при вершині C спільний. Доведемо пропорційність сторін трикутників, які прилягають до цього кута. Маємо $EC =$ $= AC \cos \gamma$, $DC = BC \cos \gamma$. Тобто сторони, що прилягають до кута C, у трикутників пропорційні. Отже, $\triangle ABC \backsim$ $\backsim \triangle EDC$ за двома сторонами і кутом між ними.

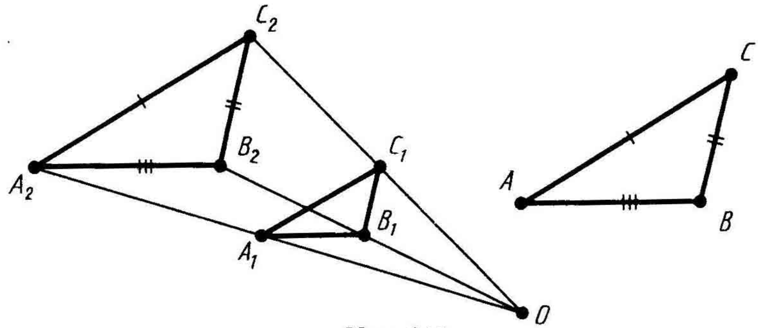
105. ОЗНАКА ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ ЗА ТРЬОМА СТОРОНАМИ

Теорема 11.4. ***Якщо сторони одного трикутника пропорційні сторонам другого, то такі трикутники подібні.***

Доведення (аналогічне до доведення теореми 11.2). Нехай у трикутників ABC і $A_1B_1C_1$: $AB = kA_1B_1$, $AC = kA_1C_1$, $BC = kB_1C_1$. Доведемо, що $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

Застосуємо перетворення подібності з коефіцієнтом подібності k до $\triangle A_1B_1C_1$, наприклад гомотетію (мал. 242). При цьому дістанемо деякий трикутник $A_2B_2C_2$, що дорівнює трикутнику ABC. Справді, у трикутників відповідні сторони рівні: $A_2B_2 = kA_1B_1 = AB$, $A_2C_2 = kA_1C_1 = AC$, $B_2C_2 = kB_1C_1 = BC$. Звідси випливає, що трикутники рівні за третьою ознакою (за трьома сторонами).

Оскільки трикутники $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ гомотетичні, і отже, подібні, а трикутники $A_2B_2C_2$ і ABC рівні і тому теж подібні, то трикутники $A_1B_1C_1$ і ABC подібні. Теорему доведено.



Мал. 242

Задача (36). Доведіть, що у подібних трикутників периметри відносяться, як відповідні сторони.

Розв'язання. Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ — подібні трикутники. Тоді сторони трикутника $A_1B_1C_1$ пропорційні сторонам трикутника ABC, тобто $A_1B_1 = kAB$, $B_1C_1 = kBC$, $A_1C_1 = kAC$. Додавши ці рівності почленно, дістанемо:

$$A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1 = k(AB + BC + AC).$$

Звідси

$$\frac{A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1}{AB + BC + AC} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC},$$

тобто периметри трикутників відносяться, як відповідні сторони.

106. ПОДІБНІСТЬ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

У прямокутного трикутника один кут прямий. Тому, за теоремою 11.2, ***для подібності двох прямокутних трикутників досить, щоб у них було по рівному гострому куту.***

За допомогою цієї ознаки подібності прямокутних трикутників доведемо деякі співвідношення у трикутниках.

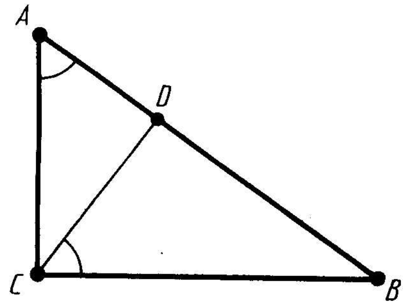
Нехай ABC — прямокутний трикутник з прямим кутом C. Проведемо висоту CD з вершини прямого кута (мал. 243).

Трикутники ABC і CBD мають спільний кут при вершині B. Отже, вони подібні: $\triangle ABC \sim \triangle CBD$. З подібності трикутників випливає пропорційність відповідних сторін:

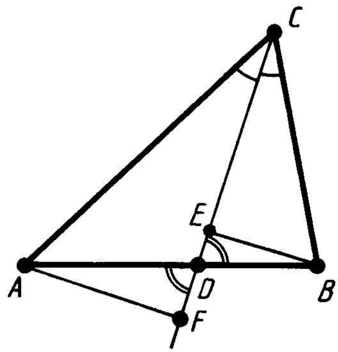
$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD} \text{ або } BC = \sqrt{AB \cdot BD}.$$

Це співвідношення формулюється так: ***катет прямокутного трикутника є середнім пропорційним між гіпотенузою і проекцією цього катета на гіпотенузу.***

Прямокутні трикутники ACD і CBD теж подібні: у них



Мал. 243



Мал. 244

рівні гострі кути при вершинах A і C. З подібності цих трикутників випливає пропорційність їх сторін:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}, \text{ або } CD = \sqrt{AD \cdot BD}.$$

Це співвідношення формулюють так: ***висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, є середнім пропорційним між проекціями катетів на гіпотенузу.***

Доведемо таку властивість бісектриси трикутника: ***бісектриса трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні двом іншим сторонам.***

Нехай CD — бісектриса трикутника ABC (мал. 244). Якщо трикутник ABC рівнобедрений з основою AB, то сформульована властивість бісектриси очевидна, оскільки у цьому випадку бісектриса CD є і медіаною.

Розглянемо загальний випадок, коли $AC \neq BC$. Опустимо з вершин A і B перпендикуляри AF і BE на пряму CD.

Прямокутні трикутники ACF і BCE подібні, оскільки у них рівні гострі кути при вершині C. З подібності трикутників випливає пропорційність сторін:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AF}{BE}.$$

Прямокутні трикутники ADF і BDE також подібні: у них кути при вершині D рівні як вертикальні. З подібності трикутників випливає пропорційність сторін:

$$\frac{AF}{BE} = \frac{AD}{BD}.$$

Порівнявши цю рівність з попередньою, дістанемо:

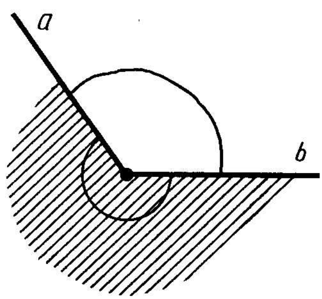
$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} \text{ або } \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD},$$

тобто відрізки AD і BD пропорційні сторонам AC і BC, що й треба було довести.

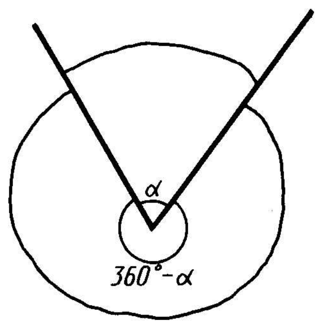
107. КУТИ, ВПИСАНІ В КОЛО

Кут розбиває площину на дві частини. Кожна з цих частин називається *плоским* кутом. На малюнку 245 заштриховано один з плоских кутів із сторонами a і b. Плоскі кути із спільними сторонами називаються *доповняльними*.

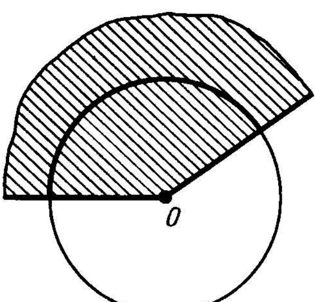
Якщо плоский кут є частиною півплощини, то його градусною мірою називається градусна міра звичайного кута з тими самими сторонами. Вважають, що коли плоский кут містить півплощину, то його градусна міра дорівнює $360° - \alpha$, де α — градусна міра доповняльного плоского кута (мал. 246).



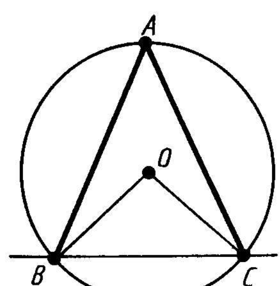
Мал. 245



Мал. 246



Мал. 247



Мал. 248

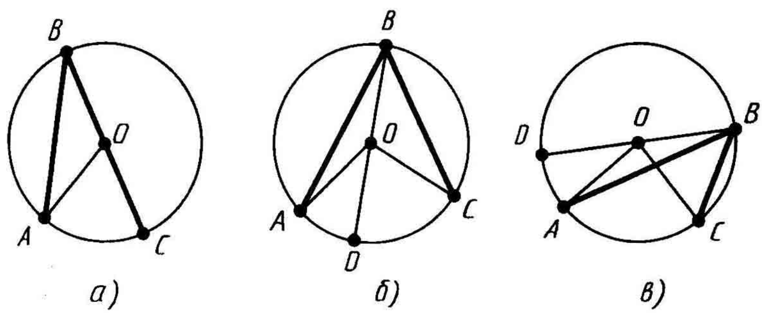
Центральним кутом у колі називається плоский кут з вершиною у його центрі. Частина кола, розміщена всередині плоского кута, називається *дугою кола*, що відповідає цьому центральному куту (мал. 247). *Градусною мірою дуги* кола називається градусна міра відповідного центрального кута.

Кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають це коло, називається *вписаним у коло* (мал. 248). Кут

BAC на малюнку 248 вписано в коло. Його вершина A лежить на колі, а сторони перетинають коло в точках B і C. Кажуть також, що кут A спирається на хорду BC. Пряма BC розбиває коло на дві дуги. Центральний кут, що відповідає тій з цих дуг, яка не містить точку A, називається центральним кутом, *який відповідає даному вписаному куту*.

Теорема 11.5. ***Кут, вписаний у коло, дорівнює половині відповідного центрального кута.***

Доведення. Розглянемо спочатку окремий випадок, коли одна із сторін кута проходить через центр кола (мал. 249, *а*). Трикутник AOB рівнобедрений, бо в нього сторони OA і OB рівні як радіуси. А тому кути A і B трикутника рівні. А через те що їх сума дорівнює зовнішньому куту трикутника при вершині O, то кут B трикутника дорівнює половині кута AOC, що й треба було довести.



Мал. 249

Загальний випадок зводиться до розглянутого окремого, якщо провести допоміжний діаметр BD (мал. 249, *б, в*).

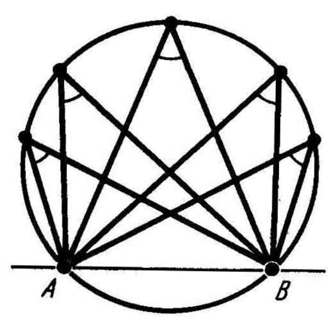
Для випадку, поданого на малюнку 249, *б*, маємо:

$$\angle ABC = \angle CBD + \angle ABD = \frac{1}{2}\angle COD + \frac{1}{2}\angle AOD = \frac{1}{2}\angle AOC.$$

Для випадку, поданого на малюнку 249, *в*, маємо:

$$\angle ABC = \angle CBD - \angle ABD = \frac{1}{2}\angle COD - \frac{1}{2}\angle AOD = \frac{1}{2}\angle AOC.$$

Теорему доведено повністю.



Мал. 250

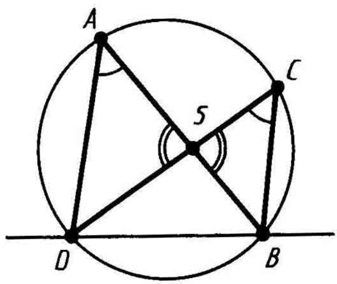
З теореми 11.5 випливає, що ***вписані кути, сторони яких проходять через точки A і B кола, а вершини лежать з одного боку від прямої AB, рівні*** (мал. 250).

Зокрема, ***кути, що спираються на діаметр, прямі.***

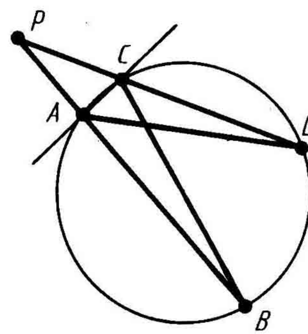
108. ПРОПОРЦІЙНІСТЬ ВІДРІЗКІВ ХОРД І СІЧНИХ КОЛА

Якщо хорди AB і CD кола перетинаються в точці S, то
$$AS \cdot BS = CS \cdot DS.$$

Спочатку доведемо, що трикутники ASD і CSB подібні (мал. 251). Вписані кути DCB і DAB рівні за наслідком із теореми 11.5. Кути ASD і BSC рівні як вертикальні. З рівності названих кутів випливає, що трикутники ASD і CSB подібні.



Мал. 251



Мал. 252

З подібності трикутників випливає пропорція
$$\frac{DS}{BS} = \frac{AS}{CS}.$$

Звідси
$$AS \cdot BS = CS \cdot DS,$$
що й треба було довести.

Якщо з точки P до кола проведено дві січні, що перетинають коло відповідно в точках A, B і C, D, то
$$AP \cdot BP = CP \cdot DP.$$

Нехай точки A і C найближчі до точки P точки перетину січних з колом (мал. 252). Трикутники PAD і PCB подібні. У них кут при вершині P спільний, а кути при вершинах B і D рівні за властивостями кутів, вписаних у коло. З подібності трикутників випливає пропорція:
$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}.$$

Звідси $PA \cdot PB = PC \cdot PD$, що й треба було довести.

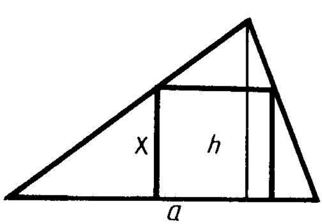
КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що таке перетворення подібності?
2. Що таке гомотетія (центр гомотетії, коефіцієнт гомотетії)?
3. Доведіть, що гомотетія є перетворенням подібності.
4. Які властивості перетворення подібності ви знаєте? Доведіть, що перетворення подібності зберігає кути між півпрямими.
5. Які фігури називаються подібними?
6. Яким знаком позначається подібність фігур? Як записується подібність трикутників?
7. Сформулюйте і доведіть ознаку подібності трикутників за двома кутами.
8. Сформулюйте і доведіть ознаку подібності трикутників за двома сторонами і кутом між ними.
9. Сформулюйте і доведіть ознаку подібності трикутників за трьома сторонами.
10. Доведіть, що катет прямокутного трикутника є середнє пропорційне між гіпотенузою і проекцією цього катета на гіпотенузу.
11. Доведіть, що висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, є середнє пропорційне між проекціями катетів на гіпотенузу.
12. Доведіть, що бісектриса трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні двом іншим сторонам.
13. Що таке плоский кут?
14. Що таке центральний кут?
15. Який кут називається вписаним у коло?
16. Доведіть, що вписаний у коло кут дорівнює половині відповідного центрального кута.
17. Доведіть властивість відрізків хорд, що перетинаються, і властивості січних відрізків.

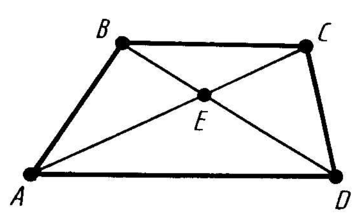
ЗАДАЧІ

1. У результаті гомотетії точка X переходить у точку X', а точка Y — у точку Y'. Як знайти центр гомотетії, якщо точки X, X', Y, Y' не лежать на одній прямій?
2. У результаті гомотетії точка X переходить у точку X'. Побудуйте центр гомотетії, якщо коефіцієнт гомотетії дорівнює 2.
3. Накресліть трикутник. Побудуйте гомотетичний йому трикутник, прийнявши за центр гомотетії одну з його вершин, а коефіцієнт гомотетії дорівнює 2.
4. На малюнку 236 зображено план садиби у масштабі 1:1000. Визначте розміри садиби (довжину і ширину).

5. Що являє собою фігура, подібна трикутнику?
6. У подібних трикутників ABC і $A_1B_1C_1$: $\angle A = 30°$, $AB = 1$ м, $BC = 2$ м, $B_1C_1 = 3$ м. Чому дорівнюють кут A_1 і сторона AB_1?
7. Доведіть, що фігура, подібна колу, є коло.
8.* Дано кут і всередині нього точку A. Побудуйте коло, що дотикається до сторін кута і проходить через точку A.
9.* Впишіть у даний трикутник квадрат, дві вершини якого лежать на одній стороні, а дві інші вершини — на двох інших сторонах.
10. Доведіть подібність рівнобедрених трикутників, які мають рівні кути при вершинах, протилежних основам.
11. У двох рівнобедрених трикутників кути між бічними сторонами рівні. Бічна сторона і основа одного трикутника відповідно дорівнюють 17 см і 10 см; основа другого дорівнює 8 см. Знайдіть його бічну сторону.
12. У трикутників ABC і $A_1B_1C_1$: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 5$ м, $BC = 7$ м, $A_1B_1 = 10$ м, $A_1C_1 = 8$ м. Знайдіть решту сторін трикутників.
13. Розв'яжіть задачу 12 за умови, що $AB = 16$ см, $BC = 20$ см, $A_1B_1 = 12$ см, $AC - A_1C_1 = 6$ см.
14. Доведіть, що висота прямокутного трикутника, опущена з вершини прямого кута, розбиває його на два трикутники, подібні даному.
15. Пряма, паралельна стороні AB трикутника ABC, перетинає його сторону AC у точці A_1, а сторону BC у точці B_1. Доведіть, що $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C$.
16. У трикутник з основою a і висотою h вписано квадрат так, що дві його вершини лежать на основі трикутника, а інші дві — на бічних сторонах (мал. 253). Обчисліть сторону квадрата.
17. Пряма, паралельна стороні AB трикутника ABC, ділить його сторону AC у відношенні $m : n$, починаючи від вершини C. В якому відношенні вона ділить сторону BC?
18. У трикутнику ABC проведено відрізок DE, паралельний стороні AC (кінець D відрізка лежить на стороні AB, а



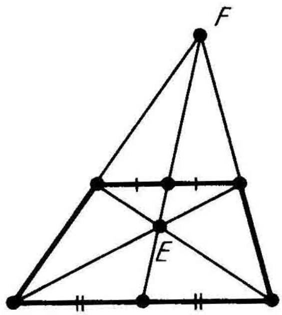
Мал. 253



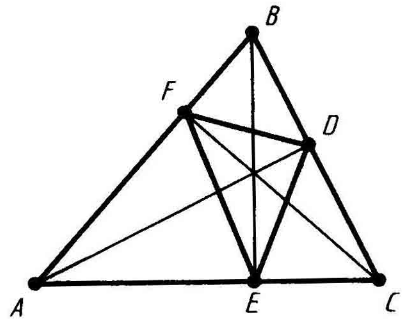
Мал. 254

E — на стороні BC). Знайдіть AD, якщо $AB = 16$ см, $AC = 20$ см і $DE = 15$ см.

19. У задачі 18 знайдіть відношення $AD : BD$, якщо $AC : DE = 55 : 28$.
20. Знайдіть довжину відрізка DE у задачі 18, якщо: 1) $AC = 20$ см, $AB = 17$ см і $BD = 11{,}9$ см; 2) $AC = 18$ дм, $AB = 15$ дм і $AD = 10$ дм.
21. Діагоналі трапеції $ABCD$ перетинаються в точці E (мал. 254). Доведіть подібність трикутників BCE і DAE.
22. Знайдіть відношення відрізків діагоналі трапеції, на які вона розбивається другою діагоналлю, якщо основи трапеції відносяться як $m : n$.
23. Пряма, що проходить через точку перетину діагоналей трапеції, ділить одну основу у відношенні $m : n$. В якому відношенні вона ділить другу основу?
24. У трапеції $ABCD$ з діагоналлю AC кути ABC і ACD рівні. Знайдіть діагональ AC, якщо основи BC і AD відповідно дорівнюють 12 м і 27 м.
25. Лінія, паралельна основам трапеції, ділить одну бічну сторону у відношенні $m : n$. В якому відношенні ділить вона другу бічну сторону?
26. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці E. Знайдіть сторони трикутника AED, якщо $AB = 5$ см, $BC = 10$ см, $CD = 6$ см, $AD = 15$ см.
27. Знайдіть висоту трикутника AED із задачі 26, опущену на сторону AD, якщо $BC = 7$ см, $AD = 21$ см і висота трапеції дорівнює 3 см.
28.* Діагоналі трапеції перетинаються в точці E, а продовження бічних сторін — у точці F. Доведіть, що пряма EF ділить основи трапеції пополам (мал. 255).
29.* У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC і протилежним кутом 36° проведено бісектрису AD.
   1) Доведіть подібність трикутників ABC і CAD.
   2) Знайдіть основу трикутника ABC, якщо його бічна сторона дорівнює a.
30. Кути B і B_1 трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ рівні. Сторони трикутника ABC, що прилягають до кута B, у 2,5 раза більші від сторін трикутника $A_1B_1C_1$, що прилягають до кута B_1. Знайдіть AC і A_1C_1, якщо їх сума дорівнює 4,2 м.
31. У трикутнику ABC з гострим кутом C проведено висоти AE і BD. Доведіть, що $\triangle ABC \sim \triangle EDC$.
32.* У гострокутному трикутнику ABC проведено висоти AD, BE, CF. Знайдіть кути трикутника DEF, знаючи кути трикутника ABC (мал. 256).
33.* Доведіть, що бісектриси трикутника DEF у задачі 32 лежать на висотах трикутника ABC.



Мал. 255



Мал. 256

34. Чи подібні два рівносторонні трикутники?

35. Чи подібні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, якщо:
1) $AB = 1$ м, $AC = 1{,}5$ м, $BC = 2$ м; $A_1B_1 = 10$ см, $A_1C_1 = 15$ см, $B_1C_1 = 20$ см;
2) $AB = 1$ м, $AC = 2$ м, $BC = 1{,}5$ м; $A_1B_1 = 8$ дм, $A_1C_1 = 16$ дм, $B_1C_1 = 12$ дм;
3) $AB = 1$ м, $AC = 2$ м, $BC = 1{,}25$ м; $A_1B_1 = 10$ см, $A_1C_1 = 20$ см, $B_1C_1 = 13$ см?

36. Доведіть, що у подібних трикутників периметри відносяться, як відповідні сторони.

37. Сторони трикутника дорівнюють 0,8 м, 1,6 м і 2 м. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, периметр якого дорівнює 5,5 м.

38. Периметр одного трикутника становить $\frac{11}{13}$ периметра подібного йому трикутника. Різниця двох відповідних сторін дорівнює 1 м. Знайдіть ці сторони.

39. Чи подібні два прямокутні трикутники, якщо один з них має кут 40°, а другий — кут, що дорівнює: 1) 50°; 2) 60°?

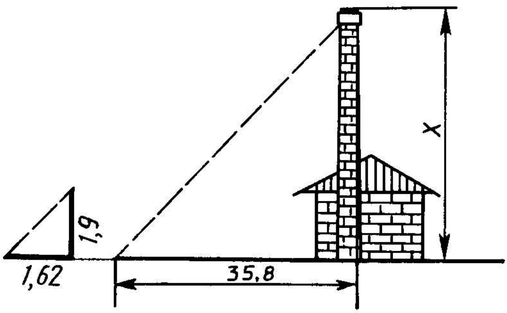
40. Основа висоти прямокутного трикутника, опущеної на гіпотенузу, ділить її на відрізки 9 см і 16 см. Знайдіть сторони трикутника.

41. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 25 см, а один з катетів дорівнює 10 см. Знайдіть проекцію другого катета на гіпотенузу.

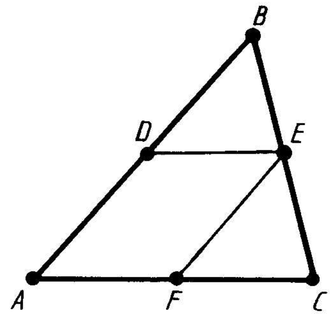
42. Доведіть, що відповідні висоти подібних трикутників відносяться, як відповідні сторони.

43. Катети прямокутного трикутника відносяться як $m : n$. Як відносяться проекції катетів на гіпотенузу?

44. Довжина тіні фабричної труби дорівнює 35,8 м. У той самий час вертикально поставлена жердина завдовжки 1,9 м дає тінь довжиною 1,62 м (мал. 257). Знайдіть висоту труби.



Мал. 257



Мал. 258

45. У трикутник ABC вписано ромб $ADEF$ так, що кут A у них спільний, а вершина E лежить на стороні BC (мал. 258). Знайдіть сторону ромба, якщо $AB = c$, $AC = b$.

46*. Бісектриса зовнішнього кута трикутника ABC при вершині C перетинає пряму AB в точці D (мал. 259). Доведіть, що $AD : BD = AC : BC$.

47*. Доведіть, що геометричним місцем точок, відношення відстаней від яких до двох даних точок стале (не дорівнює одиниці), є коло.

48. Знайдіть доповняльні плоскі кути, якщо: 1) один з них у 5 раз більший за другий; 2) один з них на $100°$ більший за другий; 3) різниця їх дорівнює $20°$.

49. Точки A, B, C лежать на колі. Чому дорівнює хорда AC, якщо кут ABC дорівнює $30°$, а діаметр кола 10 см?

50. Точки A, B, C лежать на колі. Чому дорівнює кут ABC, якщо хорда AC дорівнює радіусу кола? (Два випадки.)

51. Доведіть, що центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є середина гіпотенузи.

52. Доведіть, що медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, розбиває його на два рівнобедрених трикутники.

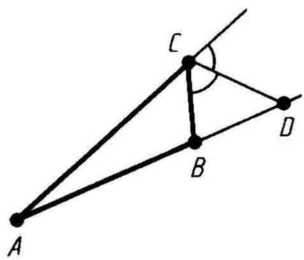
53. Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою і висотою, опущеною з вершини прямого кута на гіпотенузу.

54. На колі позначено чотири точки: A, B, C, D. Чому дорівнює кут ADC, якщо кут ABC дорівнює α? (Два випадки.)

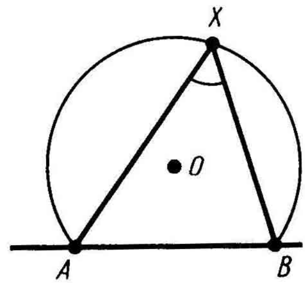
55. Хорди кола AD і BC перетинаються. Кут ABC дорівнює $50°$, а кут ACD дорівнює $80°$. Знайдіть кут CAD.

56*. Доведіть, що у чотирикутнику, вписаному у коло, сума протилежних кутів дорівнює $180°$.

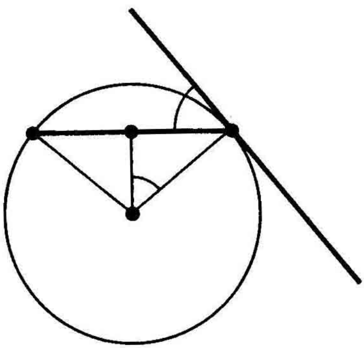
57. Доведіть, що геометричним місцем вершин прямих кутів, сторони яких проходять через дві дані точки, є коло.



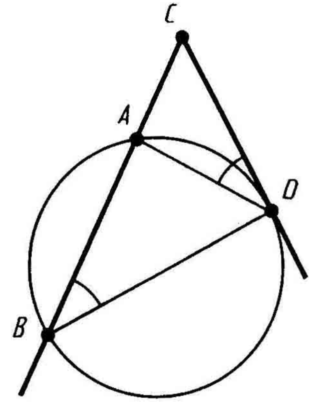
Мал. 259



Мал. 260



Мал. 261



Мал. 262

58. Доведіть, що геометричним місцем вершин кутів з даною градусною мірою, сторони яких проходять через дві дані точки, а вершини лежать з одного боку від прямої, що сполучає ці точки, є дуга кола з кінцями в цих точках (мал. 260).

59. Доведіть, що гострий кут між хордою кола і дотичною до кола в кінці хорди дорівнює половині кута між радіусами, проведеними до кінців хорди (мал. 261).

60. Побудуйте трикутник за стороною, протилежним їй кутом і висотою, проведеною з вершини цього кута.

61. З точки C кола проведено перпендикуляр CD до діаметра AB. Доведіть, що $CD^2 = AD \cdot BD$.

62. Доведіть, що добуток відрізків січної кола дорівнює квадрату відрізка дотичної, проведеної з тієї самої точки: $AC \times$ $\times BC = CD^2$ (мал. 262).

63. Як далеко видно з літака, який летить на висоті 4 км над Землею, якщо радіус Землі 6370 км?

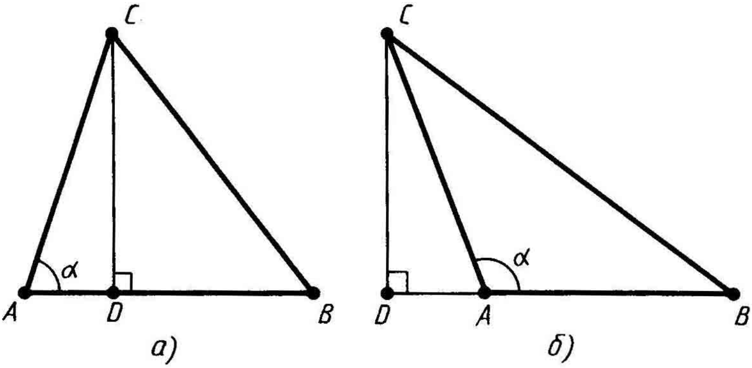
64. Обчисліть радіус горизонту, що видно з вершини телебашти в Києві, висота якої 373 м.

§ 12. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ

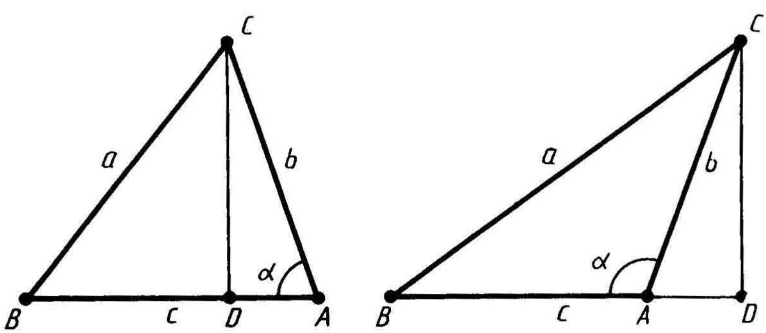
109. ТЕОРЕМА КОСИНУСІВ

Теорема 12.1 (теорема косинусів). ***Квадрат будь-якої сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними.***

Доведення. Нехай ABC — даний трикутник (мал. 263). Доведемо, що $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$.



Мал. 263



Мал. 264

Маємо векторну рівність $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$. Підносимо цю рівність скалярно до квадрата, дістанемо:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,\overline{AB} \cdot \overline{AC},$$

або

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

Теорему доведено.

Зауважимо, що $AC \cdot \cos A$ дорівнює за абсолютною величиною проекції AD сторони AC на сторону AB (мал. 263, a) або її продовження (мал. 263, $б$). Знак $AC \cdot \cos A$ залежить від кута A: якщо кут A гострий, то береться «+», якщо тупий, то «—». Звідси маємо наслідок: ***квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін «±» подвоєний добуток однієї з них на проекцію другої. Знак «+» слід брати тоді, коли протилежний кут тупий, а знак «—»,— коли гострий.***

Задача (7). Дано сторони трикутника a, b, c. Знайдіть висоту трикутника, опущену на сторону c.

Розв'язання. Маємо $a^2 = b^2 + c^2 \pm 2c \cdot AD$ (мал. 264). Звідси $AD = \pm\dfrac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}$. За теоремою Піфагора

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}\right)^2}.$$

110. ТЕОРЕМА СИНУСІВ

Теорема 12.2 (теорема синусів). ***Сторони трикутника пропорційні до синусів протилежних кутів.***

Доведення. Нехай ABC — трикутник із сторонами a, b, c і протилежними кутами α, β, γ (мал. 265). Доведемо, що

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Опустимо з вершини C висоту CD. З прямокутного трикутника ACD, якщо кут α гострий, дістаємо:

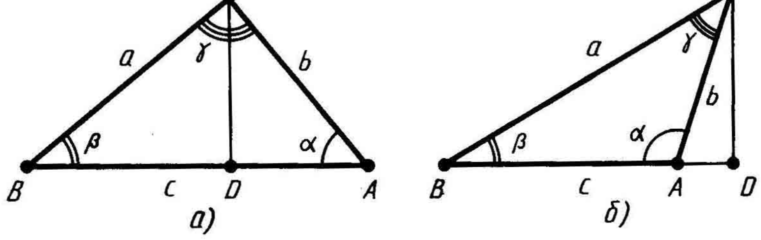
$$CD = b\sin\alpha$$

(мал. 265, a). Якщо кут α тупий, то

$$CD = b\sin(180° - \alpha) = b\sin\alpha$$

(мал. 265, $б$). Аналогічно з трикутника BCD дістаємо:

$$CD = a\sin\beta.$$



Мал. 265

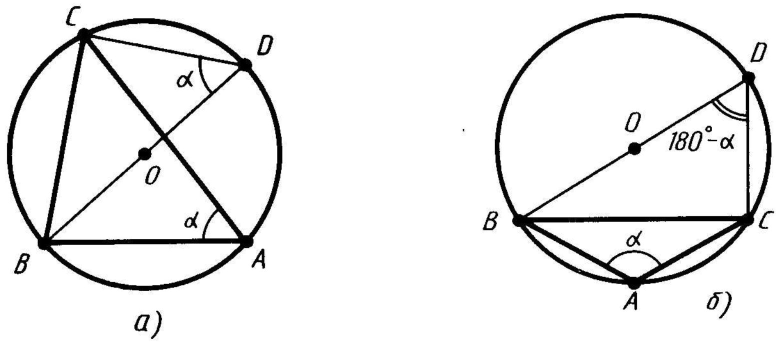
Отже, $a \sin \beta = b \sin \alpha$. Звідси

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

Аналогічно доведемо рівність

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Для доведення треба провести висоту трикутника з вершини A. Теорему доведено.



Мал. 266

Задача (13). Доведіть, що в теоремі синусів кожне з трьох відношень $\frac{a}{\sin \alpha}$, $\frac{b}{\sin \beta}$, $\frac{c}{\sin \gamma}$ дорівнює $2R$, де R — радіус кола, описаного навколо трикутника.

Розв'язання. Проведемо діаметр BD (мал. 266). За властивістю кутів, вписаних у коло, кут при вершині D прямокутного трикутника BCD дорівнює або α, якщо точки A і D лежать з одного боку від прямої BC (мал. 266, *а*), або $180° - \alpha$, якщо вони лежать з різних боків від прямої BC (мал. 266, *б*). У першому випадку $BC = BD \sin \alpha$, у другому $BC = BD \sin (180° - \alpha)$.

Оскільки $\sin (180° - \alpha) = \sin \alpha$, то для будь-якого випадку $a = 2R \sin \alpha$. Тобто

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R,$$

що й треба було довести.

111. СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ КУТАМИ ТРИКУТНИКА І ПРОТИЛЕЖНИМИ СТОРОНАМИ

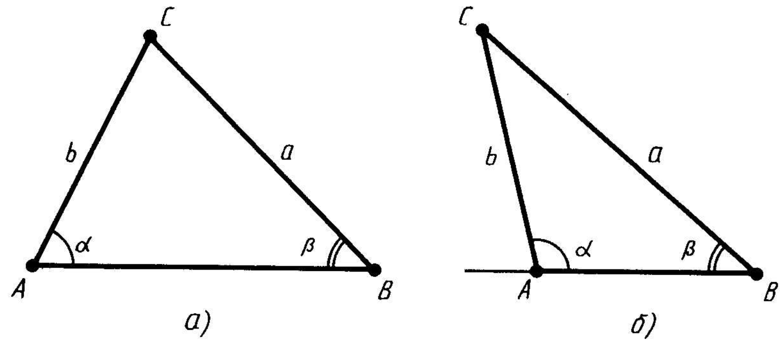
У трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона, проти більшої сторони лежить більший кут.

Нехай a і b — дві сторони трикутника і α, β — протилежні їм кути. Доведемо, що коли $\alpha > \beta$, то $a > b$. І навпаки, якщо $a > b$, то $\alpha > \beta$.

Якщо кути α і β гострі (мал. 267, *а*), то коли $\alpha > \beta$, буде $\sin\alpha > \sin\beta$. А оскільки

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b},$$

то $a > b$. Якщо кут α тупий (обидва кути не можуть бути тупими), то кут $180° - \alpha$ гострий (мал. 267, *б*). Причому кут $180° - \alpha$ більший від кута β як зовнішній кут трикутника, не суміжний з кутом β. Звідси $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha) > \sin\beta$. І ми знову маємо, що $a > b$.



Мал. 267

Доведемо обернене твердження. Нехай $a > b$. Треба довести, що $\alpha > \beta$. Припустимо, що $\alpha \leqslant \beta$. Якщо $\alpha = \beta$, то трикутник рівнобедрений і $a = b$. Якщо $\alpha < \beta$, то за доведеним $a < b$. В двох випадках дістали суперечність, оскільки за припущенням $a > b$, отже $\alpha > \beta$, що й треба було довести.

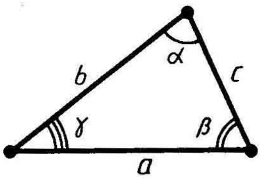
З а д а ч а (17). Доведіть, що коли у трикутнику є тупий кут, то протилежна йому сторона найбільша.

Р о з в' я з а н н я. У трикутнику може бути тільки один тупий кут. Отже, він більший від будь-якого з двох інших кутів. А це означає, що протилежна йому сторона більша від будь-якої з двох інших сторін трикутника.

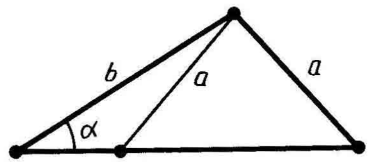
112. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ

Розв'язування трикутників полягає у знаходженні невідомих сторін і кутів трикутника за відомими його кутами і сторонами. Позначатимемо сторони трикутника через a, b, c, а протилежні їм кути — через α, β, γ (мал. 268).

З а д а ч а (26). 1) У трикутнику дано сторону $a = 5$ і два кути: $\beta = 30°$, $\gamma = 45°$. Знайдіть третій кут і інші дві сторони.



Мал. 268



Мал. 269

Р о з в' я з а н н я. Оскільки сума кутів трикутника дорівнює $180°$, то третій кут α дорівнює: $a = 180° - \beta - \gamma = 180° - 30° - 45° = 105°$.

Знаючи сторону і всі три кути, за теоремою синусів знаходимо дві інші сторони:

$$b = a \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = 5 \cdot \frac{\sin 30°}{\sin 105°} \approx 5 \cdot \frac{0{,}500}{0{,}966} \approx 2{,}59;$$

$$c = a \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \approx 5 \cdot \frac{0{,}707}{0{,}966} \approx 3{,}66.$$

З а д а ч а (27). 1) У трикутнику дано дві сторони: $a = 12$, $b = 8$ і кут між ними $\gamma = 60°$. Знайдіть інші два кути і третю сторону.

Р о з в' я з а н н я. Третю сторону знаходимо за теоремою косинусів:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma} = \sqrt{144 + 64 - 2 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 0{,}500} = \sqrt{112} \approx 10{,}6.$$

Тепер, маючи три сторони, за теоремою косинусів знаходимо косинуси двох невідомих кутів і самі кути:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \approx 0{,}189.$$

Звідки $a = 79°$, $\beta = 180° - \alpha - \gamma \approx 41°$.

З а д а ч а (28). 5) У трикутнику дано дві сторони: $a = 6$, $b = 8$ і протилежний стороні a кут $\alpha = 30°$. Знайдіть інші два кути і третю сторону.

Р о з в' я з а н н я. За теоремою синусів знаходимо значення $\sin\beta$:

$$\sin\beta = \frac{b}{a} \cdot \sin\alpha = \frac{8}{6} \cdot \sin 30° \approx 0{,}667.$$

Цьому значенню синуса відповідають два кути: $\beta_1 \approx 42°$ і $\beta_2 \approx 138°$.

Розглянемо спочатку кут $\beta_1 \approx 42°$. За ним знаходимо третій кут $\gamma_1 = 180° - \alpha - \beta_1 = 108°$ і за теоремою синусів третю сторону

$$c_1 = \frac{a\sin\gamma_1}{\sin\alpha} = 6 \cdot \frac{\sin 108°}{\sin 30°} \approx 6 \cdot \frac{0{,}951}{0{,}500} \approx 11{,}4.$$

Аналогічно, за кутом $\beta_2 = 138°$, знаходимо $\gamma_2 = 12°$ і $c_2 \approx 2{,}49$.

З а у в а ж е н н я. Ми бачимо, що ця задача на відміну від попередніх має два розв'язки (мал. 269). При інших числових значеннях, наприклад, коли $\alpha \geqslant 90°$, задача може мати лише один розв'язок або зовсім не мати розв'язків.

З а д а ч а (29). 1) Дано три сторони трикутника: $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$. Знайдіть його кути.

Р о з в' я з а н н я. Кути знаходимо за теоремою косинусів:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7}{8} = 0{,}875, \text{ звідки } \alpha \approx 29°.$$

Аналогічно знаходимо $\cos \beta = 0{,}688$. Звідки $\beta \approx 47°$ і $\gamma = 180° - 47° - 29° = 104°$.

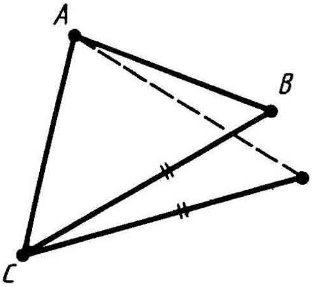
КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Доведіть теорему косинусів.
2. Доведіть, що квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін «$\pm$» подвоєний добуток однієї з цих сторін на проекцію другої. Від чого залежить знак «+» або «—»?
3. Доведіть теорему синусів.
4. Доведіть, що в довільному трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут і проти більшого кута лежить більша сторона.

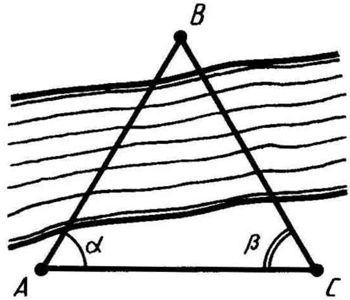
ЗАДАЧІ

1. Сторони трикутника 5 м, 6 м, 7 м. Знайдіть косинуси кутів трикутника.
2. У трикутнику дві сторони дорівнюють 5 м і 6 м, а синус кута між ними дорівнює 0,6. Знайдіть третю сторону.
3. Сторони трикутника дорівнюють a, b, c. Доведіть, що коли $a^2 + b^2 > c^2$, то кут, протилежний стороні c, гострий. Коли $a^2 + b^2 < c^2$, то кут, протилежний стороні c, тупий.
4. Дано діагоналі паралелограма c і d і кут між ними α. Знайдіть сторони паралелограма.
5. Дано сторони паралелограма a і b і один з кутів α. Знайдіть діагоналі паралелограма.
6. Сторони трикутника 4 м, 5 м і 6 м. Знайдіть проекції сторін 4 м і 5 м на пряму, на якій лежить сторона 6 м.
7. Дано сторони трикутника a, b, c. Знайдіть висоту трикутника, опущену на сторону c.
8. Знайдіть висоти трикутника в задачі 1.
9. Знайдіть медіани трикутника в задачі 1.
10.* Знайдіть бісектриси трикутника в задачі 1.
11.* Як змінюється сторона AB трикутника ABC, якщо кут C зростає, а довжини сторін AC і BC залишаються без змін (мал. 270)?

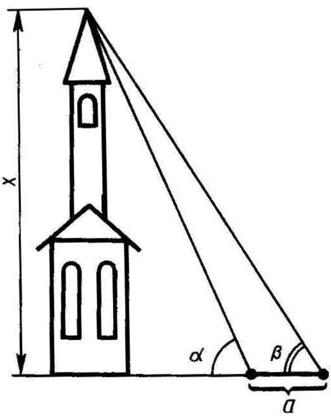
12. У трикутнику ABC: $AB = 15$ см, $AC = 10$ см. Чи може $\sin\beta = \frac{3}{4}$?
13. Доведіть, що в теоремі синусів кожне з трьох відношень $\frac{a}{\sin\alpha}, \frac{b}{\sin\beta}, \frac{c}{\sin\gamma}$ дорівнює $2R$, де R — радіус кола, описаного навколо трикутника.
14. Як знайти радіус кола, описаного навколо трикутника, знаючи його сторони? Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника із сторонами 5 м, 6 м, 7 м.
15. Поясніть, як знайти відстань від точки A до недоступної точки B (мал. 271), знаючи відстань AC і кути α, β.
16. Поясніть, як знайти висоту x будівлі (мал. 272) за кутами α і β і відстанню a.
17. Доведіть, що коли в трикутнику є тупий кут, то протилежна йому сторона найбільша.
18. У трикутнику ABC: $\angle A = 40°$; $\angle B = 60°$; $\angle C = 80°$. Яка із сторін трикутника найбільша, яка — найменша?
19. У трикутнику ABC сторони $AB = 5{,}1$ м; $BC = 6{,}2$ м; $AC = 7{,}3$ м. Який з кутів трикутника найбільший, який найменший?
20. Що більше: основа чи бічна сторона рівнобедреного трикутника, якщо прилеглий до основи кут більший від 60°?
21. У трикутнику ABC кут C тупий. Доведіть, що коли точка X лежить на стороні AC, то $BX < AB$.
22. У трикутнику ABC кут C тупий. Доведіть, що коли точка X лежить на стороні AC, а точка Y — на стороні BC, то $XY < AB$.
23. На стороні AB трикутника ABC позначено точку D. Доведіть, що відрізок CD менший хоча б за одну із сторін: AC або BC.
24.* Дано трикутник ABC. CD — медіана, проведена до сторони AB. Доведіть, що коли $AC > BC$, то кут ACD менший від кута BCD.



Мал. 270



Мал. 271



Мал. 272

25* Доведіть, що бісектриса трикутника не менша за висоту і не більша від медіани, проведених з тієї самої вершини.

26. Дано сторону і два кути трикутника. Знайдіть третій кут та інші дві сторони, якщо:
1) $a = 5$, $\beta = 30°$, $\gamma = 45°$;
2) $a = 20$, $\alpha = 75°$, $\beta = 60$;
3) $a = 35$, $\beta = 40°$, $\gamma = 120°$;
4) $b = 12$, $\alpha = 36°$, $\beta = 25°$;
5) $c = 14$, $\alpha = 64°$, $\beta = 48°$.

27. Дано дві сторони трикутника і кут між ними. Знайдіть інші два кути і третю сторону, якщо:
1) $a = 12$, $b = 8$, $\gamma = 60°$;
2) $a = 7$, $b = 23$, $\gamma = 130°$;
3) $b = 9$, $c = 17$, $\alpha = 95°$;
4) $b = 14$, $c = 10$, $\alpha = 145°$;
5) $a = 32$, $c = 23$, $\beta = 152°$;
6) $a = 24$, $c = 18$, $\beta = 15°$.

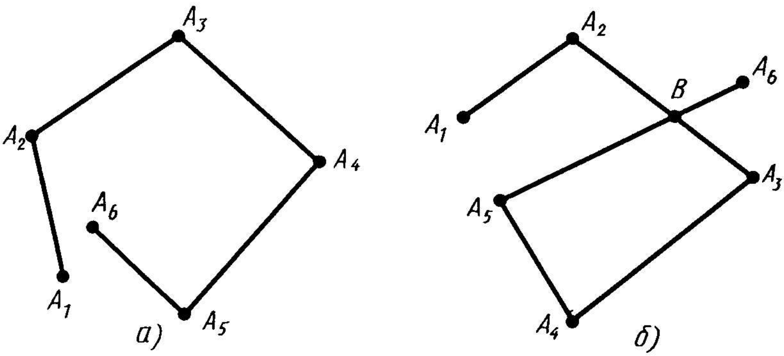
28. У трикутнику дано дві сторони і кут, протилежний до однієї із сторін. Знайдіть інші два кути і третю сторону трикутника, якщо:
1) $a = 12$, $b = 5$, $\alpha = 120°$;
2) $a = 27$, $b = 9$, $\alpha = 138°$;
3) $a = 34$, $b = 12$, $\alpha = 164°$;
4) $a = 2$, $b = 4$, $\alpha = 60°$;
5) $a = 6$, $b = 8$, $\alpha = 30°$.

29. Дано три сторони трикутника. Знайдіть його кути, якщо:
1) $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$;
2) $a = 7$, $b = 2$, $c = 8$;
3) $a = 4$, $b = 5$, $c = 7$;
4) $a = 15$, $b = 24$, $c = 18$;
5) $a = 23$, $b = 17$, $c = 39$;
6) $a = 55$, $b = 21$, $c = 38$.

§ 13. МНОГОКУТНИКИ

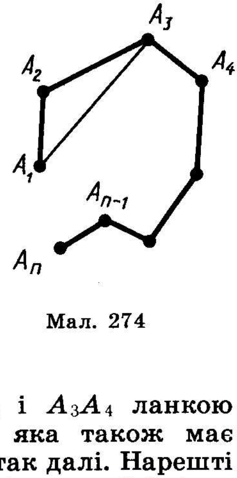
113. ЛАМАНА

Ламаною $A_1A_2A_3...A_n$ називається фігура, яка складається з точок $A_1, A_2, ..., A_n$ і відрізків $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1}A_n$, що їх сполучають. Точки $A_1, A_2, ..., A_n$ називаються ***вершинами*** ламаної, а відрізки $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1}A_n$ ***ланками*** ламаної. Ламана



Мал. 273

називається *простою,* якщо вона не має самоперетинів. На малюнку 273, *а* показано просту ламану, а на малюнку 273, *б* — ламану з самоперетином (у точці B). *Довжиною ламаної* називається сума довжин її ланок.



Мал. 274

Теорема 13.1. ***Довжина ламаної не менша за довжину відрізка, що сполучає її кінці.***

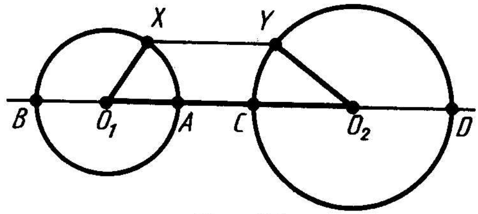
Доведення. Нехай $A_1A_2A_2A_3...A_n$ — дана ламана (мал. 274).

Замінимо ланки A_1A_2 і A_2A_3 однією ланкою A_1A_3. Дістанемо ламану $A_1A_3A_4...A_n$. Оскільки за нерівністю трикутника $A_1A_3 < A_1A_2 + A_2A_3$, то ламана $A_1A_3A_4...A_n$ має довжину не більшу, ніж початкова ламана.

Замінюючи таким способом ланки A_1A_3 і A_3A_4 ланкою A_1A_4, переходимо до ламаної $A_1A_4A_5...A_n$, яка також має довжину не більшу, ніж початкова ламана. І так далі. Нарешті ми дійдемо до відрізка A_1A_n, що сполучає кінці ламаної. Звідси випливає, що дана ламана має довжину, не меншу за довжину відрізка A_1A_n. Теорему доведено.

Задача (1). Дано два кола з радіусами R_1, R_2 і відстанню між центрами $d > R_1 + R_2$. Чому дорівнюють найбільша і найменша відстані між точками X і Y цих кіл?

Розв'язання. Для ламаної O_1XYO_2 за теоремою 13.1. $O_1O_2 \leqslant O_1X + XY + YO_2$ (мал. 275). Отже, $d \leqslant R_1 + XY + R_2$. Звідси $XY \geqslant d - R_1 - R_2$. Оскільки $AC = d - R_1 - R_2$, то найменша відстань між точками кіл дорівнює $d - R_1 - R_2$.



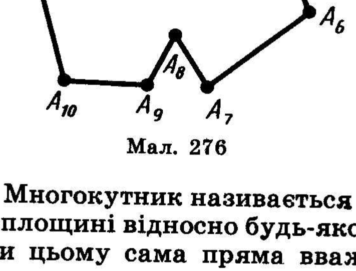
Мал. 275

Для ламаної XO_1O_2Y за тією самою теоремою $XY \leqslant \leqslant R_1 + d + R_2$. Оскільки $BD = d + R_1 + R_2$, то найбільша відстань між точками кіл дорівнює $d + R_1 + R_2$.

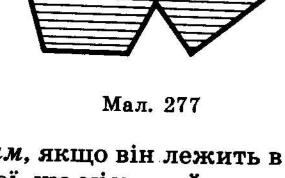
114. ОПУКЛІ МНОГОКУТНИКИ

Ламана називається *замкненою,* якщо її кінці збігаються. Проста замкнена ламана називається *многокутником,* якщо її сусідні ланки не лежать на одній прямій (мал. 276). Вершини ламаної називаються *вершинами многокутника,* а ланки ламаної — *сторонами многокутника.* Відрізки, що сполучають несусідні вершини многокутника, називаються *діагоналями.* Многокутник з n вершинами, а отже, і з n сторонами називається *n-кутником.*

Плоским многокутником, або *многокутною областю* називається скінченна частина площини, обмежена многокутником (мал. 277).

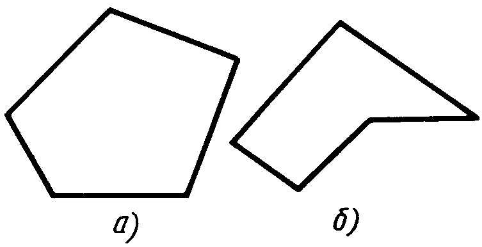


Мал. 276

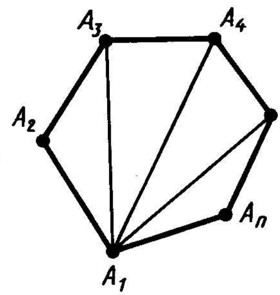


Мал. 277

Многокутник називається *опуклим,* якщо він лежить в одній півплощині відносно будь-якої прямої, що містить його сторону. При цьому сама пряма вважається такою, що належить півплощині. На малюнку 278, *а* зображено опуклий многокутник, на мал. 278, *б* — неопуклий.



Мал. 278



Мал. 279

Кутом опуклого многокутника при даній вершині називається кут, утворений його сторонами, що сходяться в цій вершині.

Теорема 13.2. ***Сума кутів опуклого n-кутника дорівнює 180°(n − 2).***

Доведення. Для випадку $n = 3$ теорема правильна. Нехай $A_1A_2...A_n$ — даний опуклий многокутник і $n > 3$ (мал. 279). Проведемо $n - 3$ діагоналі: A_1A_3, A_1A_4, ... , A_1A_{n-1}. Оскільки многокутник опуклий, то ці діагоналі розбивають його на $n - 2$ трикутники: $\triangle A_1A_2A_3$, $\triangle A_1A_3A_4$, ..., $\triangle A_1A_{n-1}A_n$. Сума кутів многокутника $A_1A_2...A_n$ дорівнює сумі кутів усіх цих трикутників. Сума кутів кожного трикутника становить 180°, а кількість таких трикутників дорівнює $n - 2$. Тому сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180° \times \times (n - 2)$. Теорему доведено.

Зовнішнім кутом опуклого многокутника при даній вершині називається кут, суміжний з внутрішнім кутом многокутника при цій вершині.

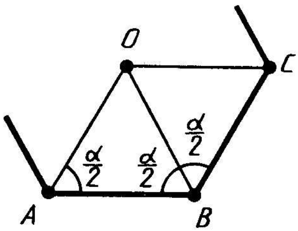
Задача (9). Чому дорівнює сума зовнішніх кутів опуклого n-кутника, узятих по одному при кожній вершині?

Розв'язання. Сума внутрішнього кута многокутника і суміжного з ним зовнішнього дорівнює 180°. Тому сума всіх внутрішніх і зовнішніх кутів дорівнює $180° \cdot n$. Але сума всіх внутрішніх кутів дорівнює $180° \cdot (n - 2)$. Отже, сума зовнішніх кутів, узятих по одному при кожній вершині, становить $180° \cdot n - 180° \cdot (n - 2) = 360°$.

115. ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ

Опуклий многокутник називається *правильним*, якщо в нього всі сторони рівні і всі кути рівні.

Многокутник називається *вписаним* у коло, якщо всі його



Мал. 280

вершини лежать на деякому колі. Многокутник називається *описаним* навколо кола, якщо всі його сторони дотикаються до деякого кола.

Теорема 13.3. ***Правильний опуклий многокутник є вписаним у коло і описаним навколо кола.***

Доведення. Нехай A і B — дві сусідні вершини многокутника (мал. 280). З вершин A і B проведемо бісектриси кутів многокутника. Нехай O — точка їх перетину. Трикутник AOB рівнобедрений з основою AB і кутами при основі, що дорівнюють $\frac{\alpha}{2}$, де α — кут многокутника.

Сполучимо точку O із сусідньою з B вершиною C. Трикутники ABO і CBO рівні за першою ознакою рівності трикутників. У них сторона OB спільна, сторони AB і BC рівні як сторони многокутника, а кути при вершині B дорівнюють $\frac{\alpha}{2}$. З рівності трикутників випливає, що трикутник OBC рівнобедрений з кутом при вершині C, що дорівнює $\frac{\alpha}{2}$, тобто CO — бісектриса кута C. Тепер сполучаємо точку O із сусідньою з C вершиною D і доводимо, що трикутник COD рівнобедрений і DO — бісектриса кута D многокутника. І так далі.

У результаті дістанемо, що кожний трикутник, у якого однією стороною є сторона многокутника, а протилежною вершиною — точка O, рівнобедрений. Усі ці трикутники мають рівні бічні сторони і рівні висоти, опущені на їх основи. Звідси випливає, що всі вершини многокутника лежать на колі з центром O і радіусом, що дорівнює бічним сторонам трикутників, а всі сторони многокутника дотикаються до кола з центром O і радіусом, що дорівнює висотам трикутників, опущеним з вершини O. Теорему доведено.

Вписане і описане кола правильного многокутника мають один і той самий центр, який називають *центром многокутника.* Кут, під яким видно сторону правильного многокутника з його центра, називається *центральним кутом* многокутника.

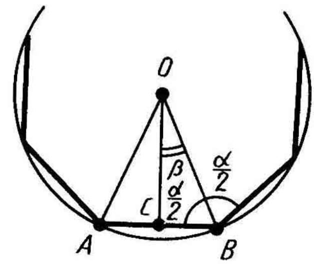
116. ФОРМУЛИ ДЛЯ РАДІУСІВ ВПИСАНИХ І ОПИСАНИХ КІЛ ПРАВИЛЬНИХ МНОГОКУТНИКІВ

Знайдемо радіус R описаного кола і радіус r вписаного кола для правильного многокутника із стороною a і кількістю сторін n (мал. 281).

$$\beta = \frac{180^\circ}{n}.$$

$$R = OB = \frac{CB}{\sin\beta} = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}};$$

$$r = OC = \frac{CB}{\mathrm{tg}\,\beta} = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}}.$$



Мал. 281

Для правильного (рівностороннього) трикутника $n = 3$, $\beta = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$,

$$R = \frac{a}{2\sin 60^\circ} = \frac{a}{\sqrt{3}};\ r = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\,60^\circ} = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Для правильного чотирикутника (квадрата) $n = 4$, $\beta = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$,

$$R = \frac{a}{2\sin 45^\circ} = \frac{a}{\sqrt{2}};\ r = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\,45^\circ} = \frac{a}{2}.$$

Для правильного шестикутника $n = 6$, $\beta = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$,

$$R = \frac{a}{2\sin 30^\circ} = a;\ r = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\,30^\circ} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Задача (16). Знайдіть вираз для сторони a_n правильного n-кутника через радіус R описаного навколо нього кола і радіус r вписаного кола. Обчисліть a_n, коли $n = 3, 4, 6$.

Розв'язання. Оскільки $R = \frac{a_n}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$, то звідси маємо:

$$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}.$$

Зокрема,

$$a_3 = R\sqrt{3},\ a_4 = R\sqrt{2},\ a_6 = R.$$

Оскільки $r = \frac{a_n}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}}$, то звідси випливає

$$a_n = 2r\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}.$$

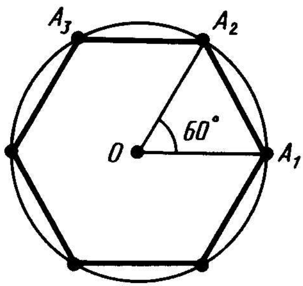
Зокрема,

$$a_3 = 2r\sqrt{3},\ a_4 = 2r,\ a_6 = \frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

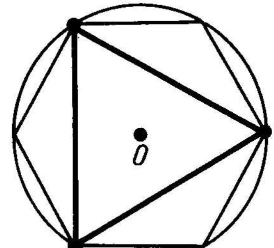
117. ПОБУДОВА ДЕЯКИХ ПРАВИЛЬНИХ МНОГОКУТНИКІВ

Для побудови правильного многокутника, вписаного в коло, досить побудувати його центральний кут. У правильному шестикутнику такий кут дорівнює $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$, тому для побудови правильного шестикутника одну вершину (A_1) на колі беремо довільно. З неї як із центра радіусом, що дорівнює радіусу кола, робимо засічку і дістаємо вершину A_2 (мал. 282). Аналогічно будуємо інші вершини A_3, A_4, A_5, A_6 і сполучаємо їх відрізками.

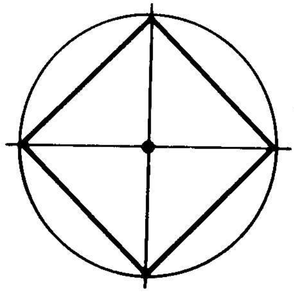
Для побудови правильного вписаного трикутника досить сполучити через одну вершини правильного вписаного шестикутника (мал. 283).



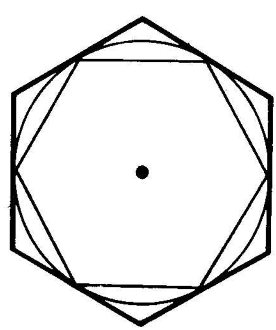
Мал. 282



Мал. 283



Мал. 284

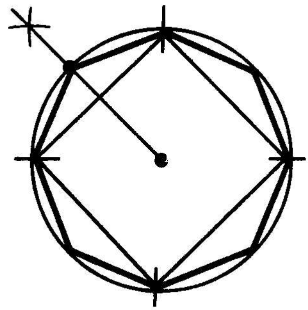


Мал. 285

Для побудови правильного вписаного чотирикутника (квадрата) досить провести через центр кола перпендикулярні прямі. Вони перетнуть коло у вершинах квадрата (мал. 284).

Для побудови правильного описаного многокутника досить провести дотичні до кола у вершинах правильного вписаного многокутника. Дотичні, що проходять через вершини правильного вписаного многокутника, перетинаються у вершинах правильного описаного многокутника (мал. 285).

Якщо в коло вписано правильний n-кутник, то легко побудувати правильний вписаний $2n$-кутник. На малюнку 286 показано побудову правильного восьмикутника.



Мал. 286

118. ПОДІБНІСТЬ ПРАВИЛЬНИХ ОПУКЛИХ МНОГОКУТНИКІВ

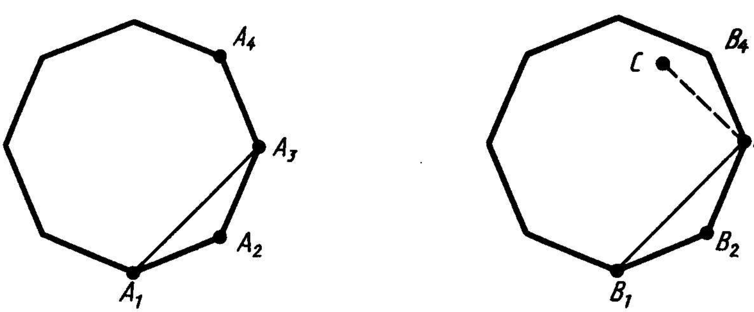
Теорема 13.4. ***Правильні опуклі n-кутники подібні. Зокрема, якщо у них сторони однакові, то вони рівні.***

Доведення. Доведемо спочатку друге твердження теореми. Отже, нехай P_1: $A_1A_2...A_n$, P_2: $B_1B_2...B_n$ — правильні опуклі n-кутники з однаковими сторонами (мал. 287). Доведемо, що вони рівні, тобто суміщаються рухом.

Трикутники $A_1A_2A_3$ і $B_1B_2B_3$ рівні за першою ознакою. У них $A_1A_2 = B_1B_2$, $A_2A_3 = B_2B_3$, $\angle A_1A_2A_3 = \angle B_1B_2B_3$.

Застосуємо до многокутника P_1 рух, при якому його вершини A_1, A_2, A_3 переходять відповідно у вершини B_1, B_2, B_3. Як ми знаємо, такий рух існує.

При цьому вершина A_4 перейде в деяку точку C. Точки



Мал. 287

B_4 і C лежать з точкою B з одного боку відносно прямої B_2B_3. Оскільки рух зберігає кути і відстані, то $\angle B_2B_3C = \angle B_2B_3B_4$ і $B_3C = B_3B_4$. Отже, точка C збігається з точкою B_4. Таким чином, під час нашого руху вершина A_4 переходить у вершину B_4. Далі таким самим способом робимо висновок, що вершина A_5 переходить у вершину B_5 і т. д. Тобто многокутник P_1 переводиться рухом у многокутник P_2, а тому вони рівні.

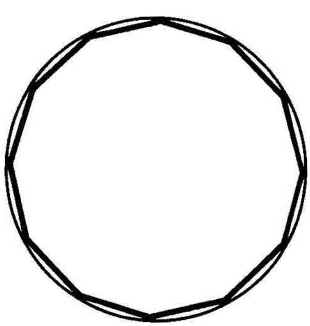
Щоб довести перше твердження теореми, спочатку застосуємо до многокутника P_1 перетворення подібності, наприклад гомотетію, з коефіцієнтом подібності $k = \frac{B_1B_2}{A_1A_2}$. При цьому дістанемо правильний n-кутник P' з такими самими сторонами, як і в P_2.

За доведеним многокутник P' переводиться рухом у многокутник P_2. Отже, многокутник P_1 переводиться у многокутник P_2 перетворенням подібності і рухом. А це знову є перетворення подібності. Теорему доведено.

Коефіцієнт подібності подібних фігур дорівнює відношенню відповідних лінійних розмірів. У правильних n-кутників такими лінійними розмірами є довжини сторін, радіуси вписаних і описаних кіл. Звідси випливає, що у правильних n-кутників відношення сторін, радіусів вписаних і радіусів описаних кіл рівні. А оскільки периметри n-кутників теж відносяться, як сторони, то ***у правильних n-кутників відношення периметрів, радіусів вписаних і радіусів описаних кіл рівні.***

119. ДОВЖИНА КОЛА

Наочне уявлення про довжину кола дістанемо таким чином. Уявімо собі нитку у формі кола. Розріжемо її і розтягнемо за кінці. Довжина утвореного відрізка і є довжиною кола. Як знайти довжину кола, знаючи його радіус? Зрозуміло, що при необмеженому збільшенні кількості сторін вписаного в коло правильного многокутника його периметр необмежено наближається до довжини кола (мал. 288). Виходячи з цього, доведемо деякі властивості довжини кола.



Мал. 288

Теорема 13.5. ***Відношення довжини кола до його діаметра не залежить від кола, тобто одне й те саме для будь-яких двох кіл.***

Доведення. Візьмемо два довільних кола. Нехай R_1 і R_2 — їх радіуси, а l_1 і l_2 — довжини кіл. Припустимо, що твердження теореми неправильне і $\frac{l_1}{2R_1} \neq \frac{l_2}{2R_2}$, наприклад

$$\frac{l_1}{2R_1} < \frac{l_2}{2R_2}. \qquad (*)$$

Впишемо у наші кола правильні опуклі многокутники з великою кількістю сторін n. Якщо n дуже велике, то довжини наших кіл дуже мало відрізнятимуться від периметрів вписаних многокутників p_1 і p_2. Тому нерівність (*) не порушиться, якщо в ній замінити l_1 на p_1, а l_2 на p_2, тобто:

$$\frac{p_1}{2R_1} < \frac{p_2}{2R_2}. \qquad (**)$$

Архімед — давньогрецький учений (III ст. до н. е.)

Як відомо, периметри правильних опуклих n-кутників відносяться, як радіуси описаних кіл:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Звідси $\frac{p_1}{R_1} = \frac{p_2}{R_2}$, а це суперечить нерівності (**). Теорему доведено.

Відношення довжини кола до діаметра прийнято позначати грецькою буквою π (читається «пі»):

$$\frac{l}{2R} = \pi.$$

Число π — ірраціональне. Наближене значення $\pi \approx 3{,}1416$.

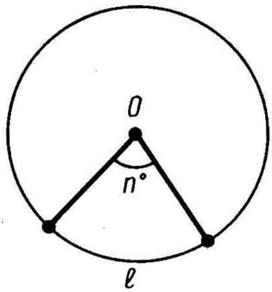
Наближене значення числа π було відоме вже древнім грекам. Архімед знайшов дуже просте наближене значення π : $\frac{22}{7}$. Воно відрізняється від точного значення π менш ніж на 0,002.

Оскільки $\frac{l}{2R} = \pi$, то довжина кола обчислюється за формулою:

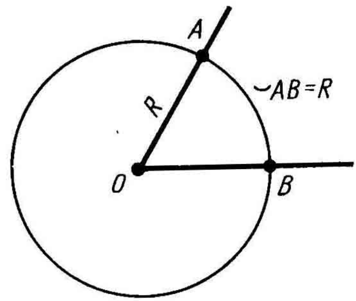
$$l = 2\pi R.$$

120. РАДІАННА МІРА КУТА

Знайдемо довжину дуги кола, яка відповідає центральному куту n^0 (мал. 289). Розгорнутому куту відповідає довжина півкола πR. Отже, куту 1° відповідає дуга довжиною $\frac{\pi R}{180}$, а куту $n°$ — дуга довжиною $l = \frac{\pi R}{180} \cdot n$.



Мал. 289



Мал. 290

Радіанною мірою кута називається відношення довжини відповідної дуги до радіуса кола. З формулою для довжини дуги кола випливає, що

$$\frac{l}{R} = \frac{\pi}{180} \cdot n,$$

тобто радіанну міру кута дістають з градусної множенням на $\frac{\pi}{180^\circ}$. Зокрема, радіанна міра кута 180° дорівнює π, радіанна міра прямого кута становить $\frac{\pi}{2}$.

Одиницею радіанної міри кутів є *радіан*. Кут один радіан — це кут, довжина дуги якого дорівнює радіусу (мал. 290). Градусна міра кута в один радіан дорівнює $\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$.

З а д а ч а (50). Знайдіть радіанну міру кутів трикутника, якщо $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 45^\circ$.

Р о з в' я з а н н я. Радіанна міра кута A дорівнює $60^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}$. Радіанна міра кута B дорівнює $45^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{4}$. За теоремою про суму кутів трикутника

$$\angle C = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}.$$

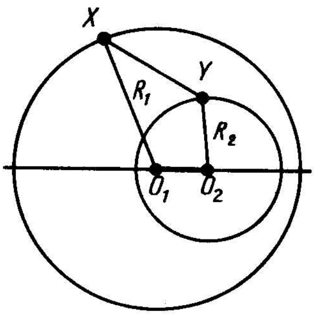
КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що таке ламана, довжина ламаної?
2. Доведіть, що довжина ламаної не менша від довжини відрізка, що сполучає її кінці.
3. Що таке многокутник, опуклий многокутник?
4. Що таке плоский многокутник?
5. Що таке кут опуклого многокутника при даній вершині?
6. Виведіть формулу для суми кутів опуклого многокутника.

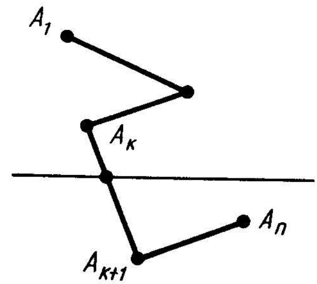
7. Що таке зовнішній кут опуклого многокутника?
8. Доведіть, що правильний многокутник є вписаним у коло і описаним навколо кола.
9. Що називається центром многокутника? Центральним кутом многокутника?
10. Виведіть формули для радіусів вписаного і описаного кіл правильного n-кутника.
11. Знайдіть радіуси вписаного і описаного кіл для правильного трикутника, чотирикутника (квадрата), шестикутника.
12. Як побудувати правильний опуклий шестикутник, трикутник, чотирикутник, восьмикутник?
13. Доведіть, що правильні опуклі n-кутники подібні. Зокрема, якщо в них сторони однакові, то вони рівні.
14. Доведіть, що відношення довжини кола до його діаметра не залежать від кола, тобто одне й те саме для всіх кіл.
15. За якою формулою обчислюється довжина кола?
16. За якою формулою обчислюється довжина дуги кола?
17. Що таке радіанна міра кута?
18. Чому дорівнюють радіанні міри кутів 180° і 90°?

ЗАДАЧІ

1. Дано два кола з радіусами R_1 і R_2 і відстанню між центрами $d > R_1 + R_2$. Чому дорівнюють найбільша і найменша відстані між точками X і Y цих кіл?
2. Розв'яжіть задачу 1 за умови, що $d < R_1 - R_2$ (мал. 291).
3. Доведіть, що коли вершини ламаної не лежать на одній прямій, то довжина ламаної більша від довжини відрізка, що сполучає її кінці.
4. Доведіть, що в замкненої ламаної відстань між будь-якими двома вершинами не більша від половини довжини ламаної.
5. Доведіть, що в замкненої ламаної довжина кожної ланки не більша від суми довжин решти ланок.
6. Чи може замкнена ламана мати ланки довжиною 1 м, 2 м, 3 м, 4 м, 11 м? Поясніть відповідь.
7. Доведіть, що коли кінці ламаної лежать по різні боки від даної прямої, то вона перетинає цю пряму (мал. 292).
8. Скільки діагоналей у n-кутника?
9. Чому дорівнює сума зовнішніх кутів опуклого n-кутника, взятих по одному при кожній вершині?
10. Кути опуклого чотирикутника пропорційні до чисел 1, 2, 3, 4. Знайдіть їх.
11. Доведіть, що у чотирикутника, описаного навколо кола, суми довжин протилежних сторін рівні.
12. Скільки сторін має правильний многокутник, кожний з внутрішніх кутів якого дорівнює: 1) 135°; 2) 150°?



Мал. 291



Мал. 292

13. Скільки сторін має правильний многокутник, якщо кожний із зовнішніх його кутів дорівнює: 1) 36°; 2) 24°?

14. Доведіть, що взяті через одну вершини правильного $2n$-кутника є вершинами правильного n-кутника.

15. Доведіть, що середини сторін правильного n-кутника є вершинами іншого правильного n-кутника.

16. Виразіть сторону a_n правильного n-кутника через радіус R описаного навколо нього кола і радіус r вписаного кола. Обчисліть a_n, коли $n = 3, 4, 6$.

17. Хорда, яка перпендикулярна до радіуса і проходить через його середину, дорівнює стороні правильного вписаного трикутника. Доведіть.

18. У правильного трикутника радіус вписаного кола вдвічі менший за радіус описаного кола. Доведіть.

19. Сторона правильного вписаного в коло трикутника дорівнює a. Знайдіть сторону квадрата, вписаного в це коло.

20. У коло, радіус якого 4 дм, вписано правильний трикутник, на стороні якого побудовано квадрат. Знайдіть радіус кола, описаного навколо квадрата.

21. Кінець валика діаметром 4 см обпиляно у вигляді квадрата. Визначте, який найбільший розмір може мати сторона квадрата.

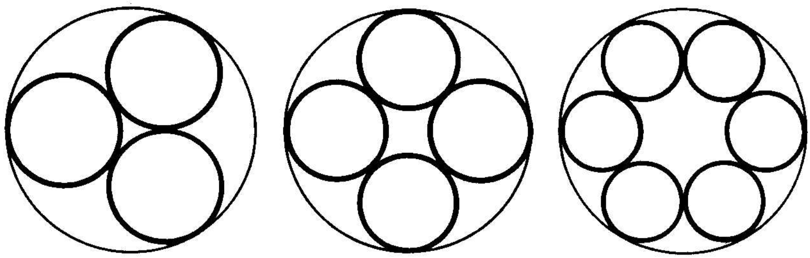
22. Кінець гвинта газової засувки має правильну тригранну форму. Який найбільший розмір може мати кожна грань, якщо діаметр циліндричної частини гвинта дорівнює 2 см?

23. Доведіть, що сторона правильного 8-кутника обчислюється за формулою $a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$, де R — радіус описаного кола.

24. Доведіть, що сторона правильного 12-кутника обчислюється за формулою $a_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$, де R — радіус описаного кола.

25* Знайдіть сторони правильного п'ятикутника і правильного 10-кутника, вписаних у коло радіуса R.

26. Сторона правильного многокутника дорівнює a, а радіус описаного кола R. Знайдіть радіус вписаного кола.
27. Сторона правильного многокутника a, а радіус вписаного кола r. Знайдіть радіус описаного кола.
28. Виразіть сторону b правильного описаного многокутника через радіус R кола і сторону a правильного вписаного многокутника з тією самою кількістю сторін.
29. Виразіть сторону a правильного вписаного многокутника через радіус R кола і сторону b правильного описаного многокутника з тією самою кількістю сторін.
30. Впишіть у коло правильний 12-кутник.
31. Опишіть навколо кола правильний трикутник, квадрат, правильний восьмикутник.
32. Радіуси вписаного і описаного кіл одного правильного n-кутника дорівнюють r_1 і R_1, а радіус вписаного кола другого правильного n-кутника дорівнює r_2. Чому дорівнює радіус описаного кола другого n-кутника?
33. Периметри двох правильних n-кутників відносяться, як $a : b$. Як відносяться радіуси їх вписаних і описаних кіл?
34. Обчисліть довжину кола, якщо радіус дорівнює: 1) 10 м; 2) 15 м.
35. На скільки зміниться довжина кола, якщо радіус зміниться на 1 мм?
36. Знайдіть відношення периметра правильного 8-кутника до діаметра і порівняйте його з наближеним значенням π.
37. Розв'яжіть задачу 36 для правильного 12-кутника.
38. Знайдіть радіус земної кулі, виходячи з того, що 1 м становить одну 40-мільйонну частку довжини екватора.
39. На скільки б подовшав земний екватор, якби радіус земної кулі збільшився на 1 см?
40. n рівних кіл, що лежать усередині кола радіуса R, дотикаються між собою і до даного кола. Знайдіть радіуси цих кіл, якщо їх кількість дорівнює: 1) 3; 2) 4; 3) 6 (мал. 293).
41. Розв'яжіть попередню задачу, якщо кола лежать поза даним колом.
42. Шків має у діаметрі 1,4 м і робить 80 обертів за хвилину. Знайдіть швидкість точки на ободі шківа.
43. Знайдіть довжину дуги кола радіуса 1 см, яка відповідає центральному куту: 1) 30°; 2) 45°; 3) 120°; 4) 270°.
44. Скільки градусів містить центральний кут, якщо відповідна йому дуга становить: 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{5}$; 4) $\frac{1}{6}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{3}{4}$ кола?
45. Який кут утворюють радіуси Землі, проведені до двох точок на її поверхні, відстань між якими дорівнює 1 км? Радіус Землі дорівнює 6370 км.



Мал. 293

46. За даним радіусом $R = 1$ м знайдіть довжину дуги, що відповідає центральному куту: 1) $45°$; 2) $30°$; 3) $120°$; 4) $45°\,45'$; 5) $60°\,30'$; 6) $150°\,36'$.

47. За даною хордою a знайдіть довжину її дуги, якщо градусна міра дуги дорівнює: 1) $60°$; 2) $90°$; 3) $120°$.

48. За даною довжиною дуги l знайдіть її хорду, якщо дуга містить: 1) $60°$; 2) $90°$; 3) $120°$.

49. Знайдіть радіанну міру кутів: 1) $30°$; 2) $45°$; 3) $60°$.

50. Знайдіть радіанну міру кутів трикутника ABC, якщо $\angle A = 60°$, $\angle B = 45°$.

51. Знайдіть градусну міру кута, якщо його радіанна міра дорівнює: 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{8}$; 4) $\frac{5\pi}{6}$; 5) $\frac{7\pi}{18}$; 6) $\frac{4\pi}{3}$.

§ 14. ПЛОЩІ ФІГУР

121. ПОНЯТТЯ ПЛОЩІ

Геометричну фігуру називатимемо *простою*, якщо її можна розбити на скінченну кількість плоских трикутників. Нагадаємо, що плоским трикутником називають скінченну частину площини, обмежену трикутником (мал. 294).

Прикладом простої фігури є опуклий плоский многокутник. Він розбивається на плоскі трикутники діагоналями, проведеними з будь-якої його вершини (мал. 295).

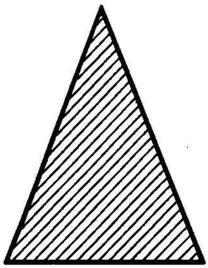
У цьому параграфі розглядатимемо тільки плоскі многокутники, тому повторювати кожний раз «плоский» не будемо.

Дамо означення площі для простих фігур.

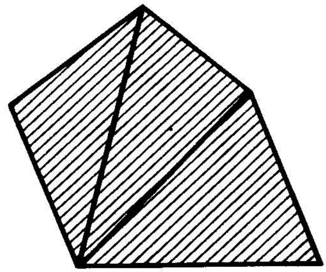
Для простих фігур *площа — це додатна величина, числове значення якої має такі властивості:*

1) *Рівні фігури мають рівні площі.*

2) *Якщо фігура розбивається на частини, що є простими фігурами, то площа цієї фігури дорівнює сумі площ її частин.*



Мал. 294



Мал. 295

3) *Площа квадрата із стороною, що дорівнює одиниці вимірювання, дорівнює одиниці.*

Якщо квадрат, про який ідеться в означенні, має сторону 1 м, то площа буде в квадратних метрах (м^2). Якщо сторона квадрата 100 м, то площа буде в гектарах. Якщо сторона квадрата 1 км, то площа буде в квадратних кілометрах і т. д.

122. ПЛОЩА ПРЯМОКУТНИКА

Визначимо площу прямокутника із сторонами a, b. Для цього спочатку доведемо, що площі двох прямокутників з рівними основами відносяться так, як їх висоти.

Нехай $ABCD$ і AB_1C_1D — два прямокутники із спільною основою AD (мал. 296, a). Нехай S і S_1 — їх площі. Доведемо, що $\frac{S}{S_1} = \frac{AB}{AB_1}$. Розіб'ємо сторону AB прямокутника на велику кількість n рівних частин, кожна з яких дорівнює $\frac{AB}{n}$. Нехай m — число точок поділу, які лежать на стороні AB_1. Тоді

$$\left(\frac{AB}{n}\right)m \leqslant AB_1 \leqslant \left(\frac{AB}{n}\right)(m+1).$$

Звідси, поділивши на AB, дістанемо:

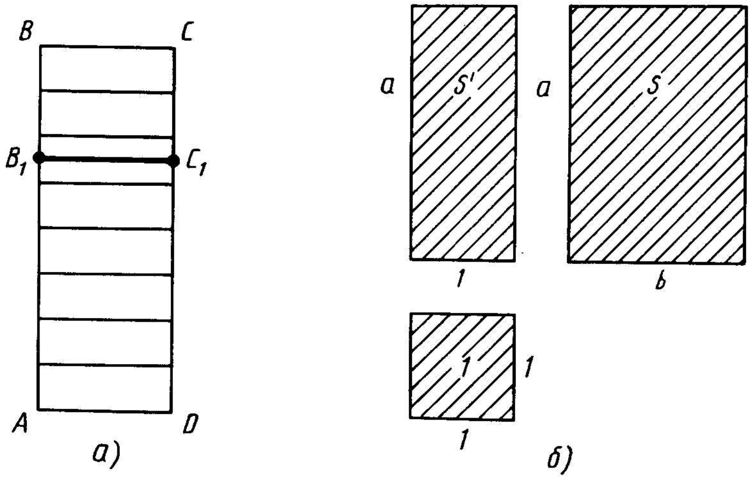
$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{AB_1}{AB} \leqslant \frac{m}{n} + \frac{1}{n}. \qquad (*)$$

Проведемо через точки поділу прямі, паралельні основі AD. Вони розіб'ють прямокутник $ABCD$ на n рівних прямокутників, кожний з яких має площу $\frac{S}{n}$. Прямокутник AB_1C_1D містить перші m прямокутників, починаючи знизу, й міститься в $m+1$ прямокутниках. Тому

$$\left(\frac{S}{n}\right)m \leqslant S_1 \leqslant \left(\frac{S}{n}\right)(m+1).$$

Звідси

$$\frac{m}{n} \leqslant \frac{S_1}{S} \leqslant \frac{m}{n} + \frac{1}{n}. \qquad (**)$$



Мал. 296

З нерівностей (*) і (**) бачимо, що обидва числа $\frac{AB_1}{AB}$ і $\frac{S_1}{S}$ містяться між $\frac{m}{n}$ і $\frac{m}{n}+\frac{1}{n}$. Тому вони відрізняються одне від одного не більше ніж на $\frac{1}{n}$. Оскільки n можна взяти як завгодно великим, то це може бути тільки тоді, коли $\frac{S_1}{S}=\frac{AB_1}{AB}$, що й треба було довести.

Візьмемо тепер квадрат, який є одиницею площі, прямокутник із сторонами 1, a і прямокутник із сторонами a, b (мал. 296, *б*). Порівнюючи їх площі, за доведеним матимемо:

$$\frac{S'}{1}=\frac{a}{1} \text{ і } \frac{S}{S'}=\frac{b}{1}.$$

Перемноживши ці рівності, дістанемо:

$$S=ab.$$

Отже, ***площа прямокутника із сторонами a, b обчислюється за формулою S = ab.***

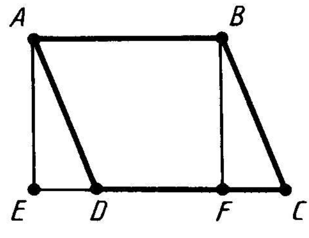
123. ПЛОЩА ПАРАЛЕЛОГРАМА

Нехай $ABCD$ — даний паралелограм. Якщо він не є прямокутником, то один з його кутів A або B — гострий. Нехай, наприклад, кут A — гострий, як зображено на малюнку 297.

Опустимо з вершини A на пряму CD перпендикуляр AE. Площа трапеції $ABCE$ дорівнює сумі площ паралелограма $ABCD$ і трикутника ADE.

Опустимо також перпендикуляр BF з вершини B на пряму CD. Тоді площа трапеції $ABCE$ дорівнює сумі площ прямокутника $ABFE$ і трикутника BCF.

Прямокутні трикутники ADE і BCF рівні і тому мають рівні площі. Звідси випливає, що площа паралелограма $ABCD$ дорівнює площі прямокутника $ABFE$, тобто дорівнює $AB \cdot BF$.



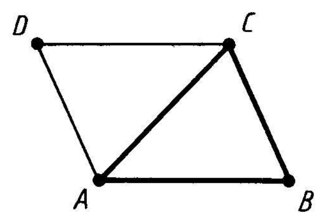
Мал. 297

Відрізок BF називається *висотою* паралелограма, яка відповідає сторонам AB і CD.

Отже, ***площа паралелограма дорівнює добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони.***

124. ПЛОЩА ТРИКУТНИКА

Нехай ABC — даний трикутник (мал. 298). Доповнимо цей трикутник до палалелограма $ABCD$, як показано на малюнку. Площа паралелограма дорівнює сумі площ трикутників ABC і CDA. Оскільки ці трикутники рівні, то площа паралелограма дорівнює подвоєній площі трикутника ABC. Висота паралелограма, яка відповідає стороні AB, дорівнює висоті трикутника ABC, проведеній до сторони AB. Звідси випливає, що ***площа трикутника дорівнює половині добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони:***



Мал. 298

$$S = \frac{1}{2}ah.$$

Доведемо тепер, що ***площа трикутника дорівнює половині добутку двох будь-яких його сторін на синус кута між ними.***

Нехай ABC — даний трикутник (мал. 299). Доведемо, що

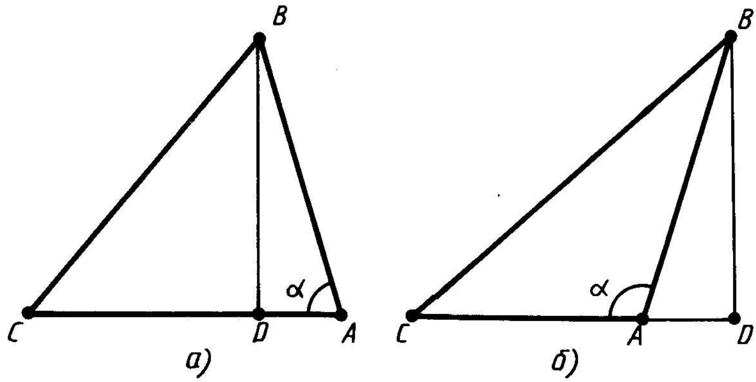
$$S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A.$$

Проведемо у трикутнику ABC висоту BD.

Маємо:

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BD.$$

З прямокутного трикутника ABD: $BD = AB \cdot \sin\alpha$, якщо кут α — гострий (мал. 299, *а*), і $BD = AB \cdot \sin(180° - \alpha)$, якщо



Мал. 299

кут α — тупий (мал. 299, *б*). Оскільки $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, то для будь-якого випадку $BD = AB \cdot \sin\alpha$. Отже, площа трикутника $S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin A$, що й треба було довести.

125. ФОРМУЛА ГЕРОНА ДЛЯ ПЛОЩІ ТРИКУТНИКА

Задача (29). Виведіть формулу Герона[1] для площі трикутника:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

де a, b, c — довжини сторін трикутника, а $p = \frac{a+b+c}{2}$ — півпериметр.

Розв'язання. Маємо

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma,$$

де γ — кут трикутника, протилежний стороні c. За теоремою косинусів

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Звідси

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

А тому

$$\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = (1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma) =$$
$$= \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab} \cdot \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} =$$
$$= \frac{c^2 - (a-b)^2}{2ab} \cdot \frac{(a+b)^2 - c^2}{2ab} =$$
$$= \frac{1}{4a^2b^2}(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c).$$

[1] Герон Александрійський — давньогрецький учений, який жив у І ст. н. е.

Взявши до уваги, що $a+b+c=2p$, $a+b-c=2p-2c$, $a+c-b=2p-2b$, $c-a+b=2p-2a$, дістанемо:

$$\sin\gamma = \frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Таким чином

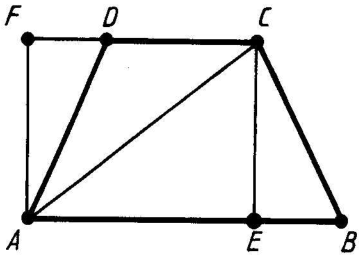
$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

126. ПЛОЩА ТРАПЕЦІЇ

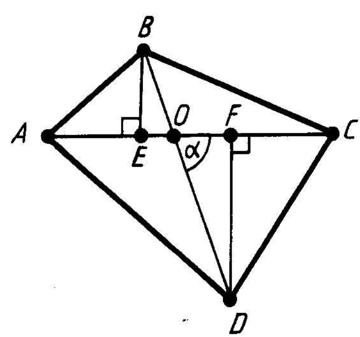
Нехай $ABCD$ — дана трапеція (мал. 300). Діагональ трапеції AC розбиває її на два трикутники: ABC і CDA. Отже, площа трапеції дорівнює сумі площ цих трикутників. Площа трикутника ABC дорівнює $\frac{1}{2}AB \cdot CE$, а площа трикутника ACD — $\frac{1}{2}DC \cdot AF$. Висоти CE й AF цих трикутників дорівнюють відстані між паралельними прямими AB і CD. Ця відстань називається *висотою* трапеції.

Отже, ***площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту:***

$$\boldsymbol{S = \frac{a+b}{2}\cdot h.}$$



Мал. 300



Мал. 301

З а д а ч а (40). Доведіть, що коли діагоналі чотирикутника перетинаються, то площа чотирикутника дорівнює половині добутку діагоналей на синус кута між ними.

Р о з в' я з а н н я. Площа S чотирикутника дорівнює сумі площ трикутників ABC і ADC (мал. 301):

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BE + \frac{1}{2}AC \cdot DF =$$

$$= \frac{1}{2}AC \cdot BO \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}AC \cdot DO \cdot \sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}AC \cdot \sin\alpha\,(BO + DO) = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin\alpha,$$

що й треба було довести.

127. ФОРМУЛИ ДЛЯ РАДІУСІВ ВПИСАНОГО І ОПИСАНОГО КІЛ ТРИКУТНИКА

З а д а ч а (42). Виведіть такі формули для радіусів описаного (R) і вписаного (r) кіл трикутника:

$$R = \frac{abc}{4S},\ r = \frac{2S}{a + b + c},$$

де a, b, c — сторони трикутника, S — його площа.

Р о з в' я з а н н я. Почнемо з формули для R. Як ми знаємо, $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$, де α — кут, протилежний стороні a трикутника.

Помноживши чисельник і знаменник правої частини на bc і взявши до уваги, що $\frac{1}{2}bc\sin\alpha = S$, дістанемо:

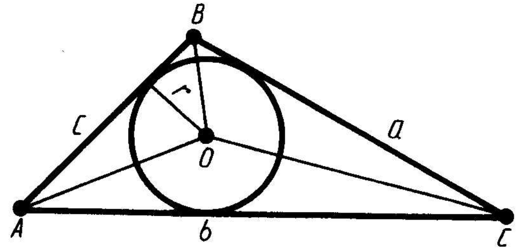
$$R = \frac{abc}{4S}.$$

Виведемо формулу для r (мал. 302). Площа трикутника ABC дорівнює сумі площ трикутників OAB, OBC і OCA:

$$S = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br.$$

Звідси

$$r = \frac{2S}{a + b + c}.$$

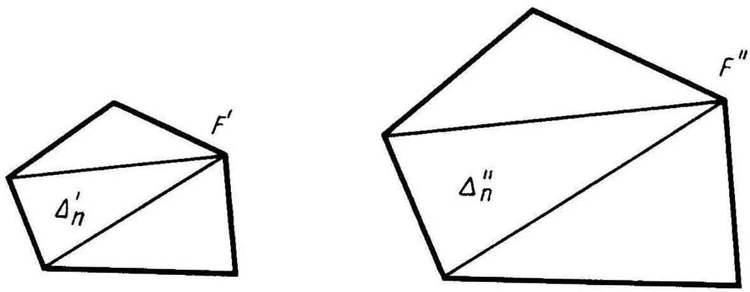


Мал. 302

128. ПЛОЩІ ПОДІБНИХ ФІГУР

Нехай F' і F'' — дві подібні фігури. З'ясуємо, як відносяться площі цих фігур. Оскільки фігури подібні, то існує перетворення подібності, при якому фігура F' переходить у фігуру F''.

Розіб'ємо фігуру F' на трикутники $\triangle_1'$, $\triangle_2'$, $\triangle_3'$, ... (мал. 303). Перетворення подібності, яке переводить фігуру F' у фігуру F'', переводить ці трикутники у трикутники $\triangle_1''$, $\triangle_2''$, $\triangle_3''$ ... розбиття фігури F''. Площа фігури F' дорівнює сумі площ трикутників $\triangle_1'$, $\triangle_2'$, $\triangle_3'$, ..., а площа фігури F'' дорівнює сумі площ трикутників $\triangle_1''$, $\triangle_2''$, $\triangle_3''$, ...



Мал. 303

Якщо коефіцієнт подібності дорівнює k, то розміри трикутника $\triangle_n''$ у k разів більші за відповідні розміри трикутника $\triangle_n'$. Зокрема, сторони і висоти трикутника $\triangle_n''$ у k разів більші за відповідні сторони і висоти трикутника $\triangle_n'$. Звідси випливає, що

$$S(\triangle_n'') = k^2 \cdot S(\triangle_n').$$

Додавши ці рівності почленно, дістанемо:

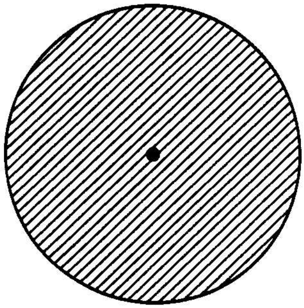
$$S(F'') = k^2 S(F').$$

Коефіцієнт подібності k дорівнює відношенню відповідних лінійних розмірів фігур F' і F''. Отже, *площі подібних фігур відносяться як квадрати їх відповідних лінійних розмірів.*

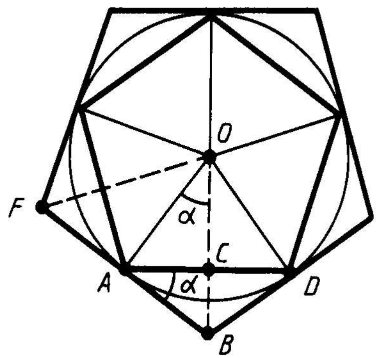
129. ПЛОЩА КРУГА

Якщо фігура проста, тобто може бути розбита на скінченну кількість трикутників, то її площа дорівнює сумі площ цих трикутників. Для довільної фігури площа означається таким чином.

Дана фігура має площу S, якщо існують прості фігури, які містять її, і прості фігури, які містяться в ній, з площами, що як



Мал. 304



Мал. 305

завгодно мало відрізняються від S. Застосуємо це означення для знаходження площі круга.

Кругом називається фігура, яка складається з усіх точок площини, відстань від яких до даної точки не більша за дану. Ця точка називається ***центром круга***, а дана відстань — ***радіусом круга***. Межею круга є коло з тим самим центром і радіусом (мал. 304).

Площа круга дорівнює половині добутку довжини кола, що його обмежує, на радіус.

Доведемо це. Побудуємо два правильні n-кутники: P_1 — вписаний у круг і P_2 — описаний навколо круга (мал. 305). Многокутники P_1 і P_2 є простими фігурами. Многокутник P_1 міститься в крузі, а многокутник P_2 містить круг.

Радіуси, проведені у вершини многокутника P_1, розбивають його на n трикутників, кожний з яких дорівнює трикутнику AOD.

Тому

$$S_{P_1} = nS_{AOD}.$$

Оскільки

$$S_{AOD} = AC \cdot OC = AC \cdot AO \cos\alpha,$$

то

$$S_{P_1} = (nAC)\,AO \cdot \cos\alpha = \frac{pR}{2}\cos\alpha,$$

де p — периметр многокутника P_1, R — радіус круга. Аналогічно знаходимо площу многокутника P_2:

$$S_{P_2} = nS_{BOF},$$

$$S_{BOF} = AB \cdot AO = \frac{AC}{\cos\alpha} \cdot AO,$$

$$S_{p2} = \frac{(nAC)\,AO}{\cos\alpha} = \frac{pR}{2\cos\alpha}.$$

Отже, многокутник P_1, який міститься в крузі, має площу

$$S_{P_1} = \frac{pR}{2}\cos\alpha,$$

а многокутник P_2, який містить круг, має площу

$$S_{P_2} = \frac{pR}{2\cos\alpha}.$$

Оскільки при досить великому n периметр p як завгодно мало відрізняється від довжини l кола, а $\cos\alpha$ як завгодно мало відрізняється від одиниці, то площі многокутників P_1 і P_2 як завгодно мало відрізняються від $\frac{lR}{2}$. Відповідно до означення, це означає, що площа круга

$$S = \frac{lR}{2} = \pi R^2,$$

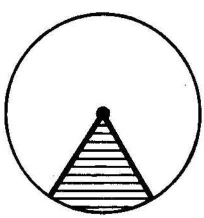
що й треба було довести.

Круговим сектором називається частина круга, яка лежить усередині відповідного центрального кута (мал. 306).

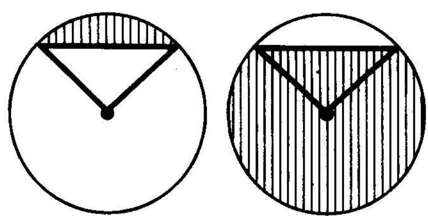
Площа кругового сектора обчислюється за формулою:

$$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha,$$

де R — радіус круга, а α — градусна міра відповідного центрального кута.



Мал. 306



Мал. 307

Круговим сегментом називається спільна частина круга і півплощини (мал. 307).

Площа сегмента, що не дорівнює півкругу, обчислюється за формулою

$$S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha \pm S_\Delta,$$

де α — градусна міра центрального кута, який містить дугу кругового сегмента, а S_Δ — площа трикутника з вершинами в центрі круга і на кінцях радіусів, які обмежують даний сектор. Знак «$+$» треба брати, коли $\alpha > 180°$, а знак «$-$» — тоді, коли $\alpha < 180°$.

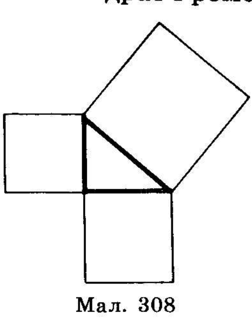
? КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Сформулюйте властивості площі для простих фігур.
2. Доведіть, що площа прямокутника дорівнює добутку його сторін.

3. Доведіть, що площа паралелограма дорівнює добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони.
4. Доведіть, що площа трикутника дорівнює половині добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони.
5. Доведіть, що площа трикутника дорівнює половині добутку двох довільних його сторін на синус кута між ними.
6. Доведіть, що площа трапеції дорівнює добутку півсуми основ на висоту.
7. Як відносяться площі подібних фігур?
8. Виведіть формулу площі круга.
9. За якими формулами обчислюються площі кругового сектора і кругового сегмента?

ЗАДАЧІ

1. Доведіть, що сума площ квадратів, побудованих на катетах прямокутного трикутника, дорівнює площі квадрата, побудованого на гіпотенузі (мал. 308).
2. Сторони двох земельних ділянок квадратної форми дорівнюють 100 м та 150 м. Знайдіть сторону рівновеликої їм квадратної ділянки.
3. Знайдіть площу квадрата S за його діагоналлю a.
4. У скільки разів площа квадрата, описаного навколо кола, більша від площі квадрата, вписаного в те саме коло?
5. Як зміниться площа квадрата, якщо кожну його сторону збільшити у 3 рази?
6. У скільки разів треба зменшити сторони квадрата, щоб його площа зменшилась у 25 раз?
7. Чому дорівнюють сторони прямокутника, якщо вони відносяться, як 4 : 9, а його площа 144 м^2?
8. Чому дорівнюють сторони прямокутника, якщо його периметр 74 дм, а площа 3 м^2?
9. Паралелограм і прямокутник мають однакові сторони. Знайдіть гострий кут паралелограма, якщо площа його дорівнює половині площі прямокутника.
10. Квадрат і ромб мають однакові периметри. Яка з фігур має більшу площу? Поясніть відповідь.
11. Знайдіть площу ромба, якщо його висота 10 см, а гострий кут 30°.
12. Знайдіть площу ромба, якщо його висота 12 см, а менша діагональ 13 см.
13. Доведіть, що площа ромба дорівнює половині добутку діагоналей.
14. Знайдіть сторони ромба, знаючи, що його діагоналі відносяться, як 1 : 2, а площа ромба дорівнює 12 см^2.



Мал. 308

15. Поділіть даний трикутник на три рівновеликих частини прямими, що проходять через одну вершину.

16*. Розв'яжіть попередню задачу, взявши замість трикутника паралелограм.

17. Чому дорівнює площа рівнобедреного трикутника, якщо його основа 120 м, а бічна сторона 100 м?

18. Знайдіть площу рівнобедреного прямокутного трикутника з гіпотенузою a.

19. У трикутнику із сторонами 8 см і 4 см проведено висоти до цих сторін. Висота, проведена до сторони 8 см, дорівнює 3 см. Чому дорівнює висота, проведена до сторони 4 см?

20. Доведіть, що сторони трикутника обернено пропорційні до його висот, тобто

$$a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}.$$

21. Знайдіть площу рівностороннього трикутника із стороною a.

22. Знайдіть площу правильного трикутника, вписаного в коло радіуса R.

23. Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо його висота ділить гіпотенузу на відрізки 32 см і 18 см.

24. Чому дорівнюють катети прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює 73 см, а площа 1320 см^2?

25. У трикутнику ABC: $AC = a$, $BC = b$. При якому куті C площа трикутника буде найбільшою?

26. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, у якого бічні сторони дорівнюють 1 м, а кут між ними становить 70°.

27. Знайдіть площу паралелограма, якщо його сторони 2 м і 3 м, а один з кутів дорівнює 70°.

28*. Знайдіть площу трикутника за стороною a і прилеглими до неї кутами α і β.

29. Виведіть формулу Герона для площі трикутника: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де a, b, c — довжини сторін трикутника, p — півпериметр.

30. Знайдіть площу трикутника за трьома сторонами: 1) 13, 14, 15; 2) 5, 5, 6; 3) 17, 65, 80; 4) $\frac{25}{6}$, $\frac{29}{6}$, 6; 5) 13, $37\frac{12}{13}$, $47\frac{1}{13}$; 6) $2\frac{1}{12}$, $3\frac{44}{75}$, 1,83.

31. Сторони трикутника a, b, c. Знайдіть висоту трикутника, опущену на сторону c.

32. Бічні сторони трикутника 30 см та 25 см. Знайдіть висоту трикутника, опущену на основу, що дорівнює: 1) 25 см; 2) 11 см.

33. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 64 см, а його бічна сторона на 11 см більша від основи. Знайдіть висоту трикутника, опущену на бічну сторону.

34. Знайдіть висоту трикутника, у якого сторони дорівнюють 13, 14, 15 см.

35. Знайдіть висоту трикутника із сторонами: $2\frac{1}{12}$, $3\frac{44}{75}$, 1,83, проведену до основи $2\frac{1}{12}$.

36. Знайдіть найменшу висоту трикутника із сторонами: 1) 5, 5, 6; 2) 17, 65, 80 і найбільшу висоту трикутника із сторонами: 3) $\frac{25}{6}$, $\frac{29}{6}$, 6; 4) 13, $37\frac{12}{13}$, $47\frac{1}{13}$.

37. Знайдіть площу трапеції, у якої паралельні сторони 60 см і 20 см, а непаралельні — 13 см і 37 см.

38. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 10 см і 24 см, бічна сторона 25 см, знайдіть площу трапеції.

39. У рівнобічній трапеції більша основа дорівнює 44 м, бічна сторона 17 м, а діагональ 39 м. Знайдіть площу трапеції.

40. Доведіть, що коли діагоналі чотирикутника перетинаються, то площа чотирикутника дорівнює половині добутку його діагоналей на синус кута між ними.

41.* Доведіть, що серед усіх паралелограмів з даними діагоналями найбільшу площу має ромб.

42. Виведіть такі формули для радіусів описаного (R) і вписаного (r) кіл трикутника:

$$R = \frac{abc}{4S}, \quad r = \frac{2S}{a+b+c},$$

де a, b, c — сторони трикутника, а S — його площа.

43. Знайдіть радіуси описаного (R) і вписаного (r) кола для трикутника із сторонами: 1) 13, 14, 15; 2) 15, 13, 4; 3) 35, 29, 8; 4) 4, 5, 7.

44. Бічна сторона рівнобедреного трикутника 6 см, а висота, проведена до основи, 4 см. Знайдіть радіус описаного кола.

45. Знайдіть радіуси кіл, описаного навколо рівнобедреного трикутника з основою a і бічною стороною b і вписаного в нього.

46. Знайдіть радіус r вписаного і радіус R описаного кіл для рівнобедреного трикутника з основою 10 см і бічною стороною 13 см.

47. Доведіть, що в прямокутному трикутнику радіус вписаного кола дорівнює половині різниці між сумою катетів і гіпотенузою.

48. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 40 см і 42 см. Знайдіть радіуси описаного і вписаного кіл.

49. Доведіть, що площа многокутника, описаного навколо кола, дорівнює половині добутку периметра многокутника на радіус кола.

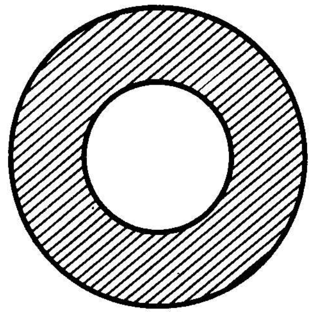
50. Через середину висоти трикутника проведено перпендикулярно до неї пряму. В якому відношенні вона ділить площу трикутника?

51. Пряма, перпендикулярна до висоти трикутника, ділить його площу пополам. Знайдіть відстань від цієї прямої до вершини трикутника, з якої проведено висоту, якщо вона дорівнює h.

52. Периметри правильних n-кутників відносяться, як $a : b$. Як відносяться їх площі?

53. Знайдіть площу круга, якщо довжина кола l.

54. Знайдіть площу кругового кільця (мал. 309), обмеженого двома колами з одним і тим самим центром і радіусами: 1) 4 см і 6 см; 2) 5,5 м і 6,5 м; 3) a і b, $a > b$.



Мал. 309

55. У скільки разів збільшиться площа круга, якщо його діаметр збільшити: 1) у 2 рази; 2) у 5 раз; 3) в m разів?

56. Знайдіть відношення площі круга і площі вписаного в нього: 1) квадрата; 2) правильного трикутника; 3) правильного шестикутника.

57. Знайдіть відношення площі круга, вписаного в правильний трикутник, до площі круга, описаного навколо нього.

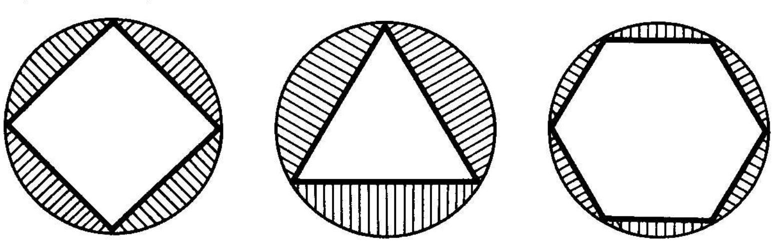
58. Знайдіть відношення площі круга, описаного навколо квадрата, до площі круга, вписаного в нього.

59. Знайдіть площу сектора круга радіуса R, якщо відповідний цьому сектору центральний кут дорівнює: 1) 40°; 2) 90°; 3) 150°; 4) 240°; 5) 300°; 6) 330°.

60. Дано коло радіуса R. Знайдіть площу сектора, що відповідає дузі довжиною: 1) R; 2) l.

61*. Знайдіть площу кругового сегмента з основою $a\sqrt{3}$ і висотою $\frac{a}{2}$.

62. Знайдіть площу тієї частини круга, яка розміщена поза вписаним у нього: 1) квадратом; 2) правильним трикутником; 3) правильним многокутником. Радіус круга R (мал. 310).



Мал. 310

§ 15. ЕЛЕМЕНТИ СТЕРЕОМЕТРІЇ

130. АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Стереометрія — це розділ геометрії, в якому вивчаються фігури у просторі. У стереометрії, як і в планіметрії, властивості геометричних фігур встановлюються доведенням відповідних теорем. Основними фігурами у просторі є *точки*, *прямі* і *площини*.

Система аксіом стереометрії складається з аксіом планіметрії I—IX і трьох просторових аксіом.

Аксіоми

C_1. ***Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй.***

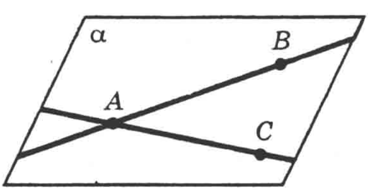
C_2. ***Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку.***

C_3. ***Якщо дві різні прямі мають спільну точку, то через них можна провести площину, і до того ж тільки одну.***

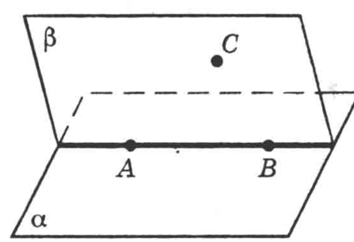
Наведемо як приклад доведення двох теорем із стереометрії з використанням аксіом C_1, C_2, C_3.

Теорема 15.1. ***Через три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину.***

Доведення. Нехай A, B, C — три дані точки (мал. 311). Проведемо прямі AB і AC (аксіома I). Прямі AB і AC різні, бо точки A, B, C не лежать на одній прямій. Проведемо через прямі AB і AC площину (аксіома C_3). Ця площина проходить через точки A, B, C, бо містить прямі AB і AC. Теорему доведено.



Мал. 311



Мал. 312

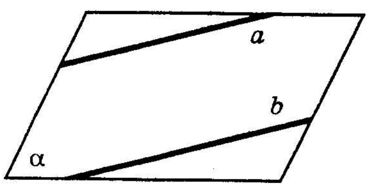
Теорема 15.2. ***Якщо дві точки прямої належать площині, то вся пряма належить цій площині.***

Доведення. Нехай α — дана площина і A, B — точки прямої, які належать площині α (мал. 312). Позначимо точку C, яка не лежить у площині α (аксіома C_1). Проведемо через точки A, B, C площину β. Площини α і β перетинаються по прямій, яка містить точки A і B, а ця пряма єдина (аксіома I). Отже, пряма AB належить площині α. Теорему доведено.

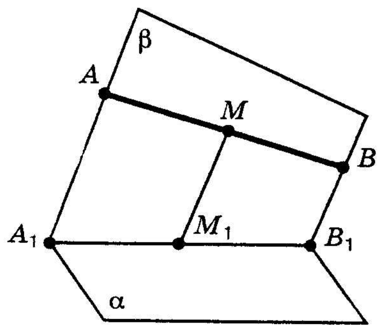
Щоб можна було розв'язувати найпростіші задачі стереометрії, дамо означення основних понять стереометрії і наведемо основні теореми (без доведення).

131. ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ

Дві прямі в просторі називаються *паралельними*, якщо вони лежать в одній площині і не перетинаються (мал. 313). Прямі, які не перетинаються і не лежать в одній площині, називаються *мимобіжними*.



Мал. 313



Мал. 314

Через точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну цій прямій, і тільки одну.

Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою.

Задача (5). Через кінці відрізка AB і його середину M проведено паралельні прямі, що перетинають деяку площину в точках A_1, B_1 і M_1. Знайдіть довжину відрізка MM_1, якщо відрізок AB не перетинає площину і коли $AA_1 = 7$ м, $BB_1 = 5$ м.

Розв'язання. Нехай α — площина, якій належать точки A_1, B_1, M_1 (мал. 314). Проведемо площину β, якій належать прямі AA_1 і BB_1. Чотирикутник ABB_1A_1 — трапеція з основами AA_1 і BB_1. Оскільки пряма AB належить площині β, то і точка M належить площині β. Оскільки $MM_1 \parallel AA_1$ і точка M належить площині β, то й точка M_1 також належить площині β. Оскільки точка M_1 належить і площині α і площині β, то вона належить прямій A_1B_1, по якій площини α і β перетинаються. Оскільки $AM = MB$, то за теоремою Фалеса $A_1M_1 = B_1M_1$, тобто MM_1 — середня лінія трапеції. За властивістю середньої лінії трапеції $MM_1 = \frac{1}{2}(AA_1 + BB_1) = \frac{1}{2}(7 + 5) = 6$ (м).

Пряма і площина у просторі називаються *паралельними*, якщо вони не перетинаються.

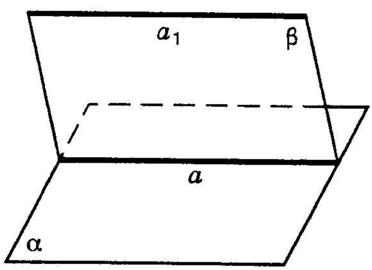
Пряма паралельна площині, якщо вона паралельна якій-небудь прямій, що лежить у цій площині (мал. 315).

Дві площини називаються *паралельними*, якщо вони не перетинаються.

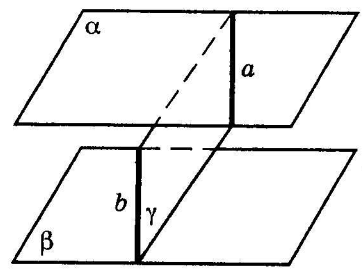
Якщо дві паралельні площини перетинаються третьою площиною, то прямі перетину площин паралельні (мал. 316).

Через точку поза даною площиною можна провести площину, паралельну даній, і до того ж тільки одну.

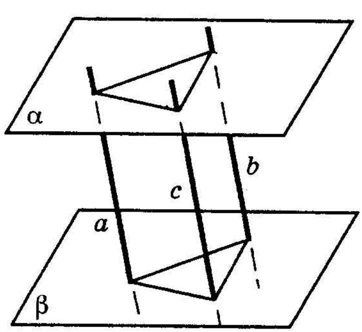
Відрізки паралельних прямих, які містяться між двома паралельними площинами, рівні (мал. 317).



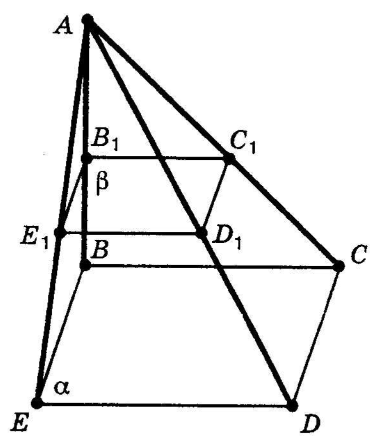
Мал. 315



Мал. 316



Мал. 317



Мал. 318

Задача (8). Доведіть, що коли чотири прямі, які проходять через точку A, перетинають площину α у вершинах паралелограма, то вони перетинають будь-яку площину, паралельну α, яка не проходить через точку A, також у вершинах паралелограма.

Розв'язання. Нехай B, C, D, E — точки перетину прямих з площиною α, а B_1, C_1, D_1, E_1 — відповідні точки перетину прямих з площиною β, яка паралельна площині α (мал. 318). Проведемо площину γ_1 через прямі AB і AC. Ця площина перетинає площини α і β по паралельних прямих BC і B_1C_1. Проведемо площину γ_2 через прямі AE і AD. Площина γ_2 перетинає площини α і β по паралельних прямих ED і E_1D_1. Оскільки чотирикутник $BCDE$ — паралелограм, то його протилежні сторони BC і ED паралельні, $BC \parallel ED$. Отже, маємо $E_1D_1 \parallel ED$, $ED \parallel BC$, $BC \parallel B_1C_1$. Звідси за властивістю паралельних прямих випливає, що $E_1D_1 \parallel B_1C_1$. А це означає, що у чотирикутнику $B_1C_1D_1E_1$ протилежні сторони E_1D_1 і B_1C_1 паралельні.

Аналогічно доводять, що у цього чотирикутника паралельні сторони B_1E_1 і C_1D_1. Отже, чотирикутник $B_1C_1D_1E_1$ — паралелограм, що й треба було довести.

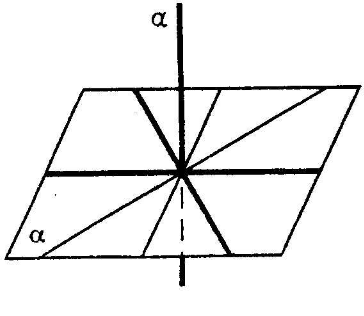
132. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ

Прямі у просторі називаються *перпендикулярними*, якщо вони перетинаються під прямим кутом.

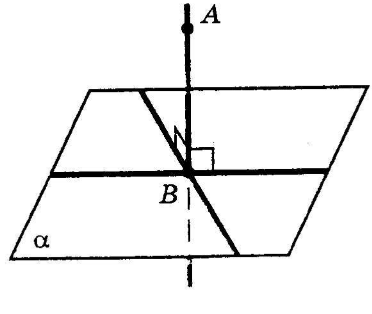
Якщо прямі a і b перпендикулярні і a_1, b_1 — прямі, які перетинаються, паралельні прямим a і b, то вони теж перпендикулярні.

Пряма, яка перетинає площину, називається *перпендикулярною* до цієї площини, якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині й проходить через точку їх перетину (мал. 319).

Пряма, яка перетинає площину, перпендикулярна до площини, якщо вона перпендикулярна до двох прямих у площині, які проходять через точку їх перетину (мал. 320).

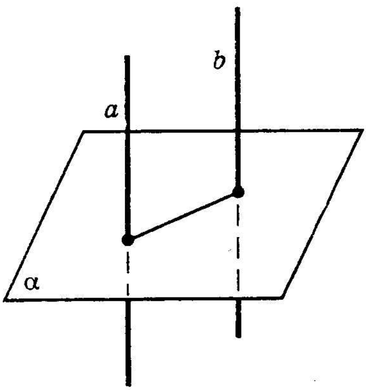


Мал. 319

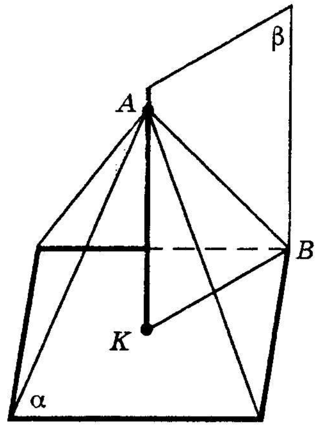


Мал. 320

Через кожну точку площини можна провести перпендикулярну до неї пряму, і тільки одну. Всі прямі, перпендикулярні до даної площини, паралельні (мал. 321).



Мал. 321



Мал. 322

Перпендикуляром, опущеним з даної точки на дану площину, називається відрізок, що сполучає дану точку з точкою площини і лежить на прямій, перпендикулярній до площини. Кінець цього відрізка, який лежить у площині, називається *основою перпендикуляра.*

Відстанню від точки до площини називається довжина перпендикуляра, опущеного з цієї точки на площину (див. мал. 320).

Задача (16). Відстані від точки A до вершин квадрата дорівнюють a. Знайдіть відстань від точки A до площини квадрата, якщо сторона квадрата дорівнює b.

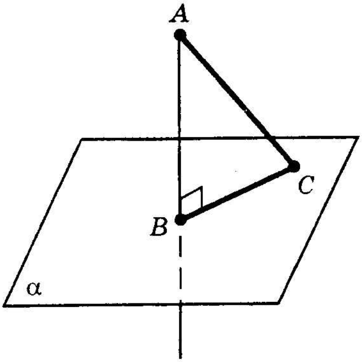
Розв'язання. Нехай α — площина, в якій лежить квадрат (мал. 322). Опустимо з точки A перпендикуляр на площину α; точка K — основа перпендикуляра. Нехай B — будь-яка вершина квадрата. Проведемо площину β через точки A, B, K. Трикутник ABK у площині β прямокутний, бо пряма AK перпендикулярна до будь-якої прямої у площині α, яка проходить через точку K. Звідси випливає, що $KB^2 = AB^2 - AK^2$. Оскільки B — будь-яка вершина квадрата, то всі вершини квадрата рівновіддалені від точки K. Отже, точка K є центром кола, описаного навколо квадрата. Сторона квадрата дорівнює b, тому радіус кола

$R = \frac{b}{\sqrt{2}}$. Відстань точки A від площини квадрата

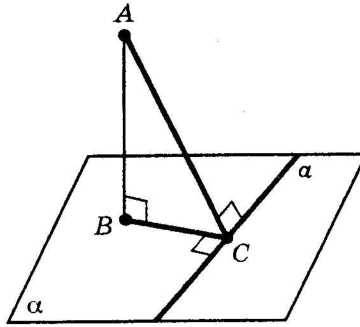
$$AK = \sqrt{AB^2 - KB^2} = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{2}}.$$

Похилою, проведеною з даної точки до даної площини, називається будь-який відрізок, який сполучає дану точку з точкою площини і не є перпендикуляром до площини. Кінець відрізка, що лежить у площині, називається *основою похилої*. Відрізок, який сполучає основи перпендикуляра і похилої, проведених з однієї і тієї самої точки, називається *проекцією похилої* (мал. 323). На малюнку AB — перпендикуляр, AC — похила, BC — проекція похилої.

Теорема (про три перпендикуляри) 15.3. ***Якщо пряма, проведена на площині через основу похилої, перпендикулярна до її проекції, то вона перпендикулярна і до похилої.*** І навпаки: ***якщо пряма на площині перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна і до проекції похилої*** (мал. 324).

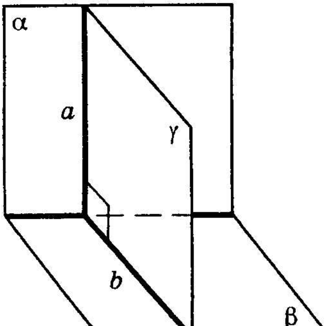


Мал. 323

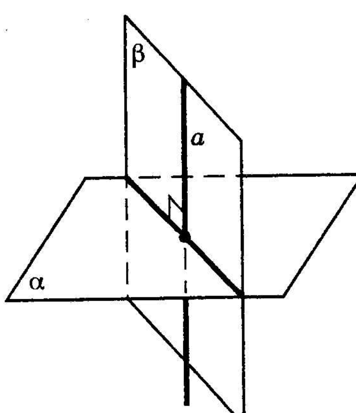


Мал. 324

Дві площини, що перетинаються, називаються *перпендикулярними*, якщо площина, перпендикулярна до прямої перетину цих площин, перетинає дані площини по перпендикулярних прямих (мал. 325).



Мал. 325



Мал. 326

Якщо пряма а перпендикулярна до площини α, а площина β проходить через пряму а, то площини α і β перпендикулярні (мал. 326).

133. МНОГОГРАННИКИ

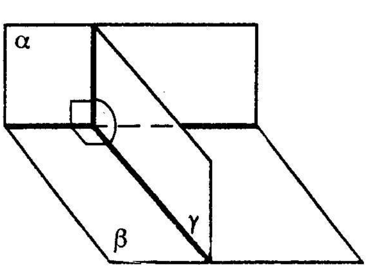
Двогранним кутом називається геометрична фігура, утворена двома півплощинами із спільною прямою, що їх обмежує,— ребром кута. За міру двогранного кута приймається міра плоского кута, утвореного в перетині двогранного кута площиною, перпендикулярною до ребра (мал. 327).

Многогранним кутом називається фігура, яка складається з послідовно сполучених плоских кутів із спільною вершиною. Сторони плоских кутів многогранного кута називаються його *ребрами*.

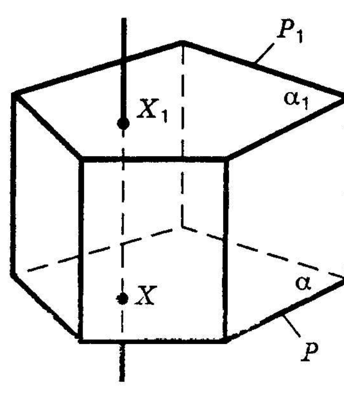
У стереометрії вивчаються геометричні тіла, обмежені скінченним числом плоских многокутників,— *многогранники*. Найпростішими з них є *призми* і *піраміди*. Дамо означення цих многогранників.

Призма.

Нехай α і α_1 — дві паралельні площини і P — плоский многокутник у площині α. Проведемо через довільну точку X многокутника P пряму, перпендикулярну до площини α. Вона буде перпендикулярна і до площини α_1 і перетне її у деякій точці X_1. Геометричне тіло, утворене всіма відрізками XX_1, називається *прямою призмою* (мал. 328). Поверхня прямої призми складається з многокутника P у площині α, многокутника P_1 у площині α_1, який дорівнює многокутнику P,— *основ призми*, і прямокутників, площини яких перпендикулярні до площин основ α і α_1 призми, а сторони, що сполучають вершини многокутників P і P_1, рівні. Вони називаються *бічними ребрами* призми. *Висотою* призми називається відстань між площинами її основ.



Мал. 327



Мал. 328

Пряма призма називається *правильною*, якщо її основи — правильні многокутники.

Перерізи прямої призми площинами, паралельними основам призми, є многокутниками, які дорівнюють основам призми. Перерізи прямої призми площинами, перпендикулярними до основ призми, є прямокутники. Зокрема, прямокутниками є діагональні перерізи.

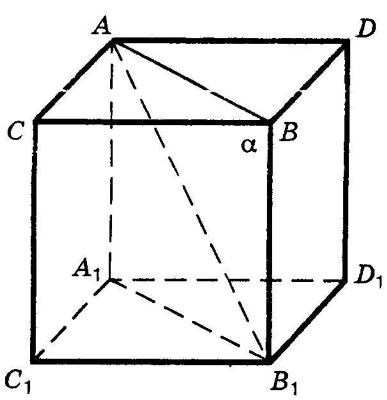
Задача (19). У правильній чотирикутній призмі площа основи 144 см^2, а висота 14 см. Знайдіть діагональ призми.

Розв'язання. Діагональ призми — це відрізок, який сполучає дві вершини призми, що не належать одній грані, наприклад відрізок AB_1 (мал. 329). Оскільки бічні ребра AA_1 і BB_1 паралельні, то через них можна провести площину (α). Чотирикутник ABB_1A_1 у площині α — прямокутник, бо бічні ребра перпендикулярні до основ призми.

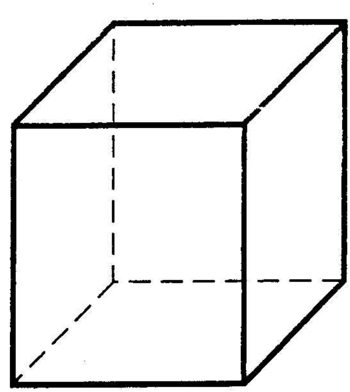
Звідси випливає, що діагональ призми $AB_1 = \sqrt{AA_1^2 + A_1B_1^2}$. $AA_1 = 14$ см, а A_1B_1 — діагональ квадрата з площею 144 см^2, тому $A_1B_1 = 12\sqrt{2}$. Отже, діагональ призми $AB_1 =$

$$= \sqrt{14^2 + \left(12\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{196 + 288} = \sqrt{484} = 22 \text{ (см)}.$$

Пряма призма називається *паралелепіпедом*, якщо її основи — паралелограми (мал. 330). Якщо основи призми — прямокутники, то вона називається *прямокутним паралелепіпедом*. У прямокутного паралелепіпеда всі грані — прямокутники. Довжини ребер прямокутного паралелепіпеда, які сходяться в одній вершині, називаються *лінійними вимірами* паралелепіпеда.



Мал. 329

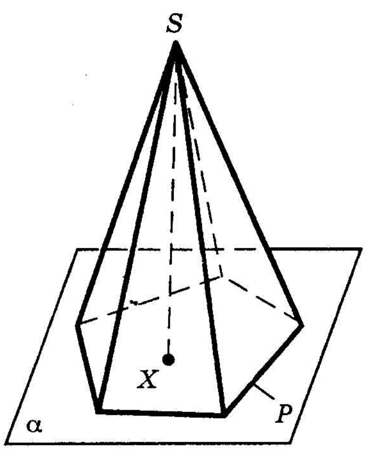

Мал. 330

Прямокутний паралелепіпед, у якого всі лінійні виміри рівні, називається *кубом*. Отже, у куба всі ребра рівні, а грані — квадрати.

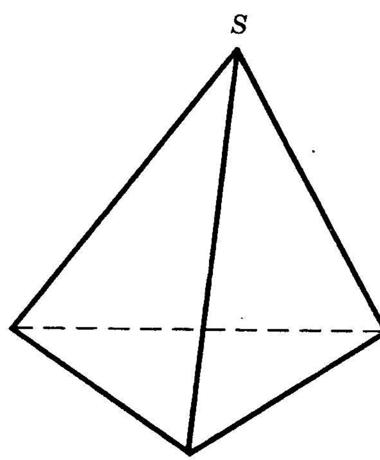
Піраміда.

Дамо означення піраміди. Нехай P — плоский многокутник у площині α і S — точка, яка не лежить у площині α. Сполучимо будь-яку точку X многокутника P з точкою S.

Геометричне тіло, яке складається з точок усіх відрізків XS, називається *пірамідою* (мал. 331). Поверхня цього тіла складається з многокутника P — *основи піраміди* — і бічних граней, що являють собою трикутники зі спільною вершиною S — *вершиною піраміди*. Відрізки, що сполучають вершину піраміди з вершинами основи, називаються *бічними ребрами*. *Висотою* піраміди називається перпендикуляр, опущений з вершини піраміди на площину основи, а також і довжина цього перпендикуляра. Піраміда називається *правильною*, якщо її основою є правильний многокутник, а основою висоти піраміди є центр цього многокутника. Трикутну піраміду називають *тетраедром* (мал. 332). Але часто тетраедром називають трикутну піраміду, в якої всі ребра рівні (правильний тетраедр).



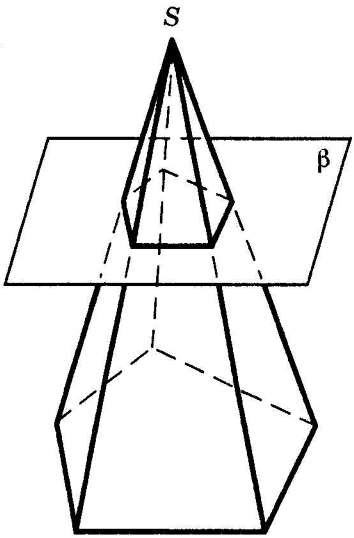
Мал. 331



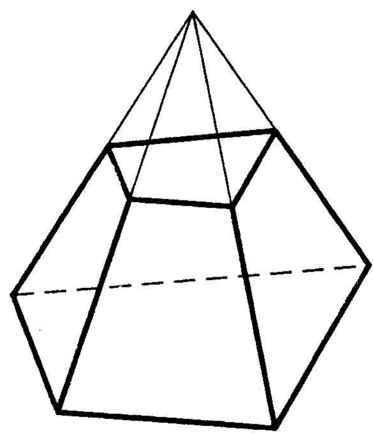
Мал. 332

Перерізами піраміди площинами, паралельними основі, є многокутники, подібні до основи піраміди. Перерізами піраміди площинами, які проходять через її вершини, є трикутники.

Площина, яка паралельна основі піраміди, розбиває піраміду на дві частини (мал. 333). Та з них, яка містить вершину піраміди, є пірамідою, подібною даній. Друга частина називається *зрізаною пірамідою*. Поверхня зрізаної піраміди складається з основ — подібних многокутників у паралельних площинах — і бічної поверхні, складеної з трапецій. Зрізана піраміда, яка утворюється з правильної, також називається правильною. *Висотою* зрізаної піраміди називається відстань між площинами основ.



Мал. 333



Мал. 334

З а д а ч а (29). У чотирикутній зрізаній піраміді сторони однієї основи дорівнюють 6 см, 7 см, 8 см і 9 см, а менша сторона другої основи дорівнює 5 см. Знайдіть решту сторін цієї основи.

Р о з в ' я з а н н я. Основи даної зрізаної піраміди — подібні чотирикутники (мал. 334). Менші сторони цих чотирикутників є відповідними сторонами. Тому в даному випадку коефіцієнт подібності $k = \frac{5}{6}$. Отже, решта сторін другої основи дорівнює:

$$\frac{7 \cdot 5}{6} = 5\frac{5}{6}\ (\text{см}), \quad \frac{8 \cdot 5}{6} = 6\frac{2}{3}\ (\text{см}), \quad \frac{9 \cdot 5}{6} = 7\frac{1}{2}\ (\text{см}).$$

У стереометрії вводиться поняття об'єму для геометричних тіл. Спочатку розглядаються прості тіла, тіла, які можна розбити на скінченну кількість трикутних пірамід. Об'єми цих тіл визначаються такими умовами: 1) рівні тіла мають рівні об'єми; 2) якщо тіло є об'єднанням двох простих тіл, то об'єм всього тіла дорівнює сумі об'ємів його частин; 3) об'єм куба з лінійними вимірами, що дорівнюють одиниці, дорівнює одиниці. З цих властивостей об'єму простих тіл маємо:

1. ***Об'єм прямокутного паралелепіпеда з лінійними вимірами a, b, c обчислюється за формулою V = abc.***

2. ***Об'єм будь-якої призми дорівнює добутку площі її основи на висоту.***

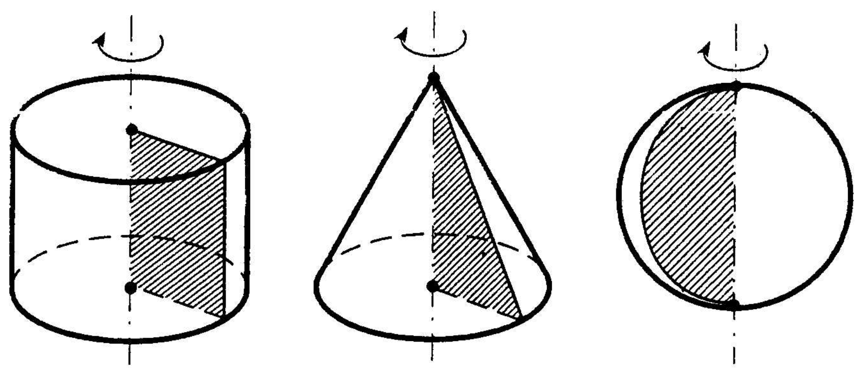
3. ***Об'єм піраміди дорівнює одній третині добутку площі її основи на висоту.***

4. ***Об'єм зрізаної піраміди дорівнює різниці об'ємів повної піраміди і подібної піраміди, яка відтинається від неї.***

5. ***Об'єми подібних тіл відносяться як куби їх відповідних лінійних вимірів.***

134. ТІЛА ОБЕРТАННЯ

Тіло обертання — це геометрична фігура, утворена в результаті обертання плоскої фігури навколо осі, яка лежить у площині фігури. Найпростішими тілами обертання є *циліндр, конус* і *куля* (мал. 335). Циліндр утворюється в результаті обертання прямокутника навколо однієї з його сторін як осі, конус — в результаті обертання прямокутного трикутника навколо одного з катетів, а куля — в результаті обертання півкруга навколо діаметра як осі.



Мал. 335

Поверхня циліндра складається з рівних кругів у паралельних площинах — *основ циліндра* — і *бічної поверхні.* Прямолінійні відрізки на бічній поверхні циліндра паралельні осі циліндра і називаються *твірними* циліндра. Всі вони паралельні і мають довжину, що дорівнює висоті циліндра. Перерізи циліндра площинами, паралельними основам, є кругами, які дорівнюють кругам основ. Перерізи циліндра площинами, паралельними осі,— прямокутники.

Задача (46). Висота циліндра 6 см, радіус основи 5 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного паралельно осі циліндра на відстані 4 см від неї.

Розв'язання. Переріз циліндра — прямокутник, у якого бічні сторони — твірні циліндра, а основа — хорда кола AB, яка знаходиться від центра O на відстані 4 см (мал. 336). Оскільки радіус кола дорівнює 5 см, а хорда знаходиться на відстані 4 см від центра, то довжина хорди

$AB = 2\sqrt{5^2 - 4^2} = 6$ (см).

Отже, площа перерізу $S = 6 \cdot 6 = 36$ (см^2).

Призма називається *вписаною* в циліндр, якщо її основи вписано в кола основ циліндра. Призма називається *описаною* навколо циліндра, якщо її основи описано навколо основ циліндра. *Радіусом циліндра* називається радіус круга в основі циліндра.

Об'єм циліндра знаходять, порівнюючи його з об'ємами вписаної і описаної призм. При цьому дістають формулу для обчислення об'єму циліндра

$$V = \pi R^2 H,$$

де πR^2 — площа основи циліндра, а H — висота.

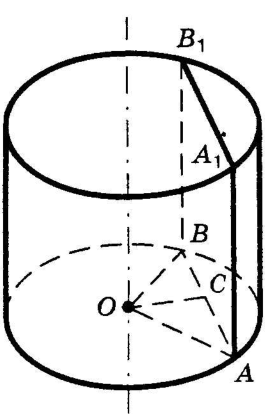
Бічна поверхня циліндра обчислюється за формулою

$$S = 2\pi RH,$$

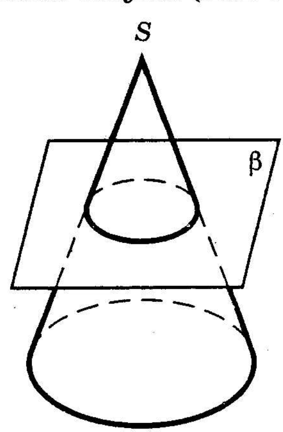
де $2\pi R$ — довжина кола основи циліндра, а H — висота.

Поверхня конуса складається з круга в основі конуса і бічної поверхні. Прямолінійні відрізки на бічній поверхні конуса, що сполучають вершину конуса з точками кола основи, називаються *твірними конуса*. Перерізом конуса площиною, паралельною основі, є круг. Перерізом конуса площиною, що проходить через вершину, є трикутник. *Висотою* конуса називається перпендикуляр, опущений з вершини конуса на основу.

Площина, паралельна основі конуса, розбиває його на дві частини. Одна з них, яка містить вершину, є конус, подібний даному. Друга частина називається *зрізаним конусом* (мал. 337).



Мал. 336



Мал. 337

Об'єм конуса обчислюється за формулою

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H,$$

де πR^2 — площа основи конуса, а H — висота конуса. Площа бічної поверхні конуса

$$S = \pi R l,$$

де R — радіус кола основи конуса, а l— довжина твірної конуса.

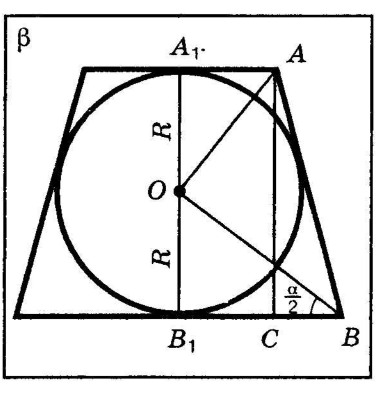
Об'єм зрізаного конуса обчислюється як різниця об'ємів повного конуса і частини, що відтинається. Аналогічно площа бічної поверхні зрізаного конуса обчислюється як різниця бічних поверхонь повного конуса і частини, що відтинається.

З означення кулі як тіла обертання, утвореного в результаті обертання півкруга навколо діаметра як осі, випливає, що всі точки кулі знаходяться від центра на відстані, не більшій за радіус. А точки поверхні кулі — *сфери* — знаходяться від центра на відстані, яка дорівнює радіусу.

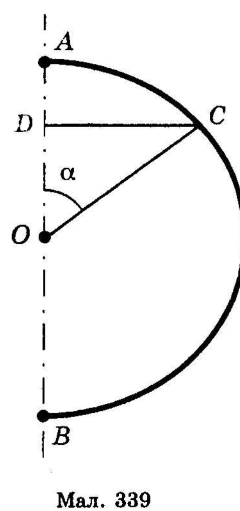
Перерізом кулі будь-якою площиною є круг. Його центром є основа перпендикуляра, опущеного з центра кулі на січну площину.

Задача (53). Кулю радіуса R вписано у зрізаний конус. Кут нахилу твірної до площини нижньої основи конуса дорівнює α. Знайдіть радіуси основ і твірну зрізаного конуса.

Розв'язання. Проведемо переріз зрізаного конуса площиною β, яка проходить через вісь конуса (мал. 338).



Мал. 338



Мал. 339

У перерізі дістанемо рівнобічну трапецію, описану навколо кола радіуса R, у якої бічні сторони — твірні конуса, а гострий кут при нижній основі дорівнює α. Радіус BB_1 нижньої основи конуса знаходимо з прямокутного трикутника OB_1B, у якого кут B дорівнює $\frac{\alpha}{2}$. $BB_1 = \frac{R}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. Аналогічно знаходимо радіус верхньої основи $AA_1 = R \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Твірну AB конуса знаходимо з прямокутного трикутника ACB: $AB = \frac{2R}{\sin\alpha}$.

При обертанні півкруга навколо діаметра AB як осі, півкруг описує кулю радіуса R, який дорівнює радіусу півкруга (мал. 339). При цьому плоский кут α описує *кульовий сектор*, а півсегмент ADC круга описує *кульовий сегмент*, висота якого AD. Дуга AC півкруга описує *сферичний сегмент*.

Для визначення площ і об'ємів використовують такі формули.

Площа сфери радіуса R: $S = 4\pi R^2$.

Площа сферичного сегмента радіуса R і висоти H: $S = 2\pi RH$.

Об'єм кулі: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Об'єм кульового сектора: $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$, ***де H — висота відповідного сферичного сегмента.***

? КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що таке стереометрія?
2. Сформулюйте аксіоми групи C.
3. Доведіть, що через три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину.
4. Доведіть, що коли дві точки прямої належать площині, то вся пряма належить цій площині.
5. Які прямі в просторі називаються паралельними?
6. Які прямі називаються мимобіжними?
7. Що означає: пряма і площина паралельні?
8. Які площини називаються паралельними?
9. Які прямі в просторі називаються перпендикулярними?
10. Дайте означення перпендикулярності прямої і площини.
11. Що називається відстанню від точки до площини?
12. Що таке проекція похилої?
13. Які площини називаються перпендикулярними?
14. Що таке двогранний кут?

15. Що таке призма; висота призми?
16. Яка призма називається правильною?
17. Що таке паралелепіпед?
18. Що таке піраміда?
19. Яка піраміда називається правильною?
20. Поясніть, що таке зрізана піраміда.
21. Назвіть найпростіші тіла обертання.

ЗАДАЧІ

1. Точки A, B, C і D не лежать в одній площині. Доведіть, що прямі AB і CD не перетинаються.
2. Чи можна через точку перетину двох даних прямих провести третю пряму, яка не лежить з ними в одній площині? Поясніть відповідь.
3. Чотири точки не лежать в одній площині. Чи можуть які-небудь три з них лежати на одній прямій? Поясніть відповідь.
4. Доведіть, що коли прямі AB і CD мимобіжні, то прямі AC і BD також мимобіжні.
5. Через кінці відрізка AB і його середину M проведено паралельні прямі, що перетинають деяку площину в точках A_1, B_1 і M_1. Знайдіть довжину відрізка MM_1, якщо відрізок AB не перетинає площину і коли: 1) $AA_1 = 7$ м, $BB_1 = 5$ м; 2) $AA_1 = 3{,}6$ дм, $BB_1 = 4{,}8$ дм; 3) $AA_1 = 8{,}3$ см, $BB_1 = 4{,}1$ см; 4) $AA_1 = a$, $BB_1 = b$.
6. Прямі a та b не лежать в одній площині. Чи можна провести пряму c, паралельну прямим a та b?
7. Дано трикутник ABC. Площина, паралельна прямій AB, перетинає сторону AC цього трикутника в точці A_1, а сторону BC — в точці B_1. Знайдіть довжину відрізка A_1B_1, якщо: 1) $AB = 15$ см, $AA_1 : AC = 2 : 3$; 2) $AB = 8$ см, $AA_1 : A_1C = 5 : 3$; 3) $B_1C = 10$ см, $AB : BC = 4 : 5$; 4) $AA_1 = a$, $AB = b$, $A_1C = c$.
8. Доведіть, що коли чотири прямі, які проходять через точку A, перетинають площину α у вершинах паралелограма, то вони перетинають будь-яку площину, паралельну α, яка не проходить через точку A, також у вершинах паралелограма.
9. Дано три паралельні площини α_1, α_2, α_3. Нехай X_1, X_2, X_3 — точки перетину цих площин з довільною прямою. Доведіть, що відношення довжин відрізків $X_1X_2 : X_2X_3$ не залежить від прямої, тобто однакове для будь-яких двох прямих.
10. *Прямі AB, AC і AD попарно перпендикулярні. Знайдіть* відрізок CD, якщо: 1) $AB = 3$ см, $BC = 7$ см, $AD = 1{,}5$ см; 2) $BD = 9$ см, $BC = 16$ см, $AD = 5$ см; 3) $AB = b$, $BC = a$, $AD = d$; 4) $BD = c$, $BC = a$, $AD = d$.

11. Через центр описаного навколо трикутника кола проведено пряму, перпендикулярну до площини трикутника. Доведіть, що кожна точка цієї прямої рівновіддалена від вершин трикутника.
12. Через вершину A прямокутника $ABCD$ проведено пряму AK, перпендикулярну до його площини. Відстані від точки K до решти вершин прямокутника дорівнюють 6 м, 7 м і 9 м. Знайдіть відрізок AK.
13. Через точки A і B проведено прямі, перпендикулярні до площини α, які перетинають її відповідно в точках C і D. Знайдіть відстань між точками A і B, якщо $AC = 3$ м, $BD = 2$ м, $CD = 2{,}4$ м і відрізок AB не перетинає площину α.
14. Верхні кінці двох вертикальних стовпів, які знаходяться на відстані 3,4 м один від одного, з'єднано поперечкою. Висота одного стовпа 5,8 м, а другого — 3,9 м. Знайдіть довжину поперечки.
15. Точка A знаходиться на відстані a від вершин рівностороннього трикутника зі стороною a. Знайдіть відстань від точки A до площини трикутника.
16. Відстані від точки A до вершин квадрата дорівнюють a. Знайдіть відстань від точки A до площини квадрата, якщо сторона квадрата дорівнює b.
17. З точок A і B, які лежать на гранях двогранного кута, опущено перпендикуляри AA_1 і BB_1 на ребро кута. Знайдіть: 1) довжину відрізка AB, якщо $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $A_1B_1 = c$ і двогранний кут дорівнює α; 2) двогранний кут α, якщо $AA_1 = 3$, $BB_1 = 4$, $A_1B_1 = 6$, $AB = 7$.
18. У прямій трикутній призмі сторони основи дорівнюють 10 см, 17 см і 21 см, а висота призми 18 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через бічне ребро і меншу висоту основи.
19. У правильній чотирикутній призмі площа основи 144 см^2, а висота 14 см. Знайдіть діагональ призми.
20. У прямій трикутній призмі всі ребра рівні. Бічна поверхня дорівнює 12 м^2. Знайдіть висоту.
21. За стороною основи a і бічним ребром b знайдіть повну поверхню правильної призми: 1) трикутної; 2) чотирикутної; 3) шестикутної.
22. У паралелепіпеді три грані мають площі 1 м^2, 2 м^2 і 3 м^2. Чому дорівнює повна поверхня паралелепіпеда?
23. У прямому паралелепіпеді сторони основи 3 см і 5 см, а одна з діагоналей основи 4 см. Знайдіть більшу діагональ паралелепіпеда, знаючи, що менша діагональ утворює з площиною основи кут 60°.
24. Знайдіть діагоналі прямого паралелепіпеда, кожне ребро якого дорівнює a, а один з кутів основи дорівнює 60°.

25. Знайдіть поверхню прямокутного паралелепіпеда за трьома його вимірами: 10 см, 22 см і 16 см.
26. Діагоналі трьох граней прямокутного паралелепіпеда, які сходяться в одній вершині, дорівнюють a, b, c. Знайдіть лінійні виміри паралелепіпеда.
27. Основа піраміди — прямокутник зі сторонами 6 см і 8 см. Кожне бічне ребро піраміди дорівнює 13 см. Обчисліть висоту піраміди.
28. Основа піраміди — паралелограм, сторони якого 3 см і 7 см, а одна з діагоналей 6 см; висота піраміди проходить через точку перетину діагоналей і дорівнює 4 см. Знайдіть бічне ребро піраміди.
29. У чотирикутній зрізаній піраміді сторони однієї основи дорівнюють 6 см, 7 см, 8 см і 9 см, а менша сторона другої основи дорівнює 5 см. Знайдіть решту сторін цієї основи.
30. Висота піраміди дорівнює 16 м. Площа основи дорівнює 512 $м^2$. На якій відстані від основи знаходиться переріз, паралельний їй, якщо площа перерізу 50 $м^2$?
31. За даною стороною основи a і бічним ребром b знайдіть висоту правильної піраміди: 1) трикутної; 2) чотирикутної; 3) шестикутної.
32. Висота правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнює 4 см. Сторони основ дорівнюють 2 см і 8 см. Знайдіть площі діагональних перерізів.
33. Три латунних куби з ребрами 3 см, 4 см і 5 см переплавлено в один куб. Яке ребро цього куба?
34. Якщо кожне ребро куба збільшити на 1 м, то його об'єм збільшиться у 125 раз. Знайдіть ребро.
35. Виміри прямокутного бруска 3 см, 4 см і 5 см. Якщо збільшити кожне ребро на x сантиметрів, то поверхня бруска збільшиться на 54 $см^2$. Як збільшиться його об'єм?
36. У прямому паралелепіпеді сторони основи $2\sqrt{2}$ см і 5 см утворюють кут 45°. Менша діагональ паралелепіпеда дорівнює 7 см. Знайдіть його об'єм.
37. Основа прямого паралелепіпеда — ромб, площа якого 1 $м^2$. Площі діагональних перерізів 3 $м^2$ і 6 $м^2$. Знайдіть об'єм паралелепіпеда.
38. За стороною основи a і бічним ребром b знайдіть об'єм правильної призми: 1) трикутної; 2) чотирикутної; 3) шестикутної.
39. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 3,5 см, а діагональ бічної грані 2,5 см. Знайдіть об'єм призми.
40. Переріз залізничного насипу має форму трапеції, нижня основа якої 14 м, а верхня 8 м і висота 3,2 м. Знайдіть, скільки кубічних метрів землі припадає на 1 км насипу.

41. За стороною основи a і бічним ребром b знайдіть об'єм правильної піраміди: 1) трикутної; 2) чотирикутної; 3) шестикутної.
42. Бічні ребра трикутної піраміди взаємно перпендикулярні і кожне дорівнює b. Знайдіть об'єм піраміди.
43. Знайдіть об'єм зрізаної піраміди з площами основ Q_1 і Q_2 ($Q_1 > Q_2$) і висотою h.
44. Через середину висоти піраміди проведено площину, паралельну основі. В якому відношенні вона ділить об'єм піраміди?
45. Радіус основи циліндра 2 м, висота 3 м. Знайдіть діагональ осьового перерізу.
46. Висота циліндра 6 см, радіус основи 5 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного паралельно осі циліндра на відстані 4 см від неї.
47. Радіус основи конуса 3 м, висота 4 м. Знайдіть твірну.
48. Радіус основи конуса R. Осьовим перерізом є прямокутний трикутник. Знайдіть його площу.
49. Конус перетнуто площиною, паралельною основі, на відстані d від вершини. Знайдіть площу перерізу, якщо радіус основи конуса R, а висота H.
50. Висота конуса H. На якій відстані від вершини треба провести площину, паралельну основі, щоб площа перерізу дорівнювала половині площі основи?
51. Радіуси основ зрізаного конуса 3 м і 6 м, висота 4 м. Знайдіть твірну.
52. Радіуси основ зрізаного конуса 3 дм і 7 дм, твірна 5 дм. Знайдіть площу осьового перерізу.
53. Кулю радіуса R вписано у зрізаний конус. Кут нахилу твірної до площини нижньої основи конуса дорівнює α. Знайдіть радіуси основ і твірну зрізаного конуса.

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ЗАДАЧ

§ 1.

4. Через дві точки можна провести тільки одну пряму. **7.** 1) 6 см; 2) 7,7 дм; 3) 18,1 м. **10.** Не належить. **11.** Не може. **12.** Не можуть. **13.** Не можуть. **14.** 0,5 м або 5,9 м. **15.** 1) $AC = 9$ м, $BC = 6$ м; 2) $AC = 10$ м, $BC = 5$ м; 3) $AC = BC = 7{,}5$ м; 4) $AC = 6$ м, $BC = 9$ м. **18.** 1), 4), 6) Перетинає; 2), 3), 5) не перетинає. **19.** 6 відрізків. **24.** 1) 110°; 2) 119°; 3) 179°. **25.** 2), 3) Не може. **26.** 1) $\angle (ac) = 45°$, $\angle (bc) = 15°$; 2) $\angle (ac) = 40°$, $\angle (bc) = 20°$; 3) $\angle (ac) = \angle (bc) = 30°$; 4) $\angle (ac) = 24°$, $\angle (bc) = 36°$. **29.** Не існує. **31.** 1) 1,2 м; 2) 2,4 см. **33.** 11 см. **34.** 100°. **36.** $PQ = 5$ см, $QR = 6$ см, $PR = 7$ см. **37.** $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$. $\angle C = 80°$. **39.** У ΔABC: $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 7$ см. **40.** Існує. **42.** Не можна. **43.** Не може. **49.** 2) **Вказівка.** Сполучіть відрізком точки A і C та скористайтесь твердженням задачі 49, 1). **51.** 1) Див. розв'язання задачі 30 у тексті; 2) Проведіть через точку A пряму, відмінну від a.

§ 2.

1. 150°, 135°, 120°, 90°. **2.** 1), 2) Не можуть; 3) можуть. **4.** 1) 105° і 75°; 2) 110° і 70°; 3) 45° і 135°; 4) 90° і 90°. **5.** 180°; 90°; 120°. **6.** 1) 72° і 108°; 2) 54° і 126°; 3) 55° і 125°; 4) 88° і 92°. **7.** 150°, 150°, 30°. **8.** 130°. **10.** 144° і 36°. **11.** 65° і 115°. **12.** Всі кути прямі. **15.** 1) 15°; 2) 26°; 3) 86°. **16.** 1) 120°; 2) 150°; 3) 178°. **18.** **Вказівка.** Сторони кута лежать у різних півплощинах відносно прямої, частиною якої є даний промінь. **19.** 90°. **20.** **Вказівка.** Скористайтесь результатом задачі 19 і теоремою 2.3. **21.** 1) 155°; 2) 135°; 3) 105°. **22.** **Вказівка.** Скористайтесь теоремою 1.1. **23.** 1) 20°; 2) 60°; 3) 90°. **24.** $\angle (a_1b) = 120°$, $\angle (a_1c) = 150°$, $\angle (bc) = 30°$. **25.** 1) 110°; 2) 175°; 3) 170°; 4) 130°. **26.** 1) Не проходить; 2) не може.

§ 3.

7. **Вказівка.** Продовжіть медіани на їх довжину. **9.** 0,3 м. **10.** 3,5 м. **11.** 1) 3,2 м, 6,2 м, 6,2 м; 2) 7,2 м, 4,2 м, 4,2 м. **22.** **Вказівка.** Скористайтесь властивістю медіани у рівнобедреному трикутнику. **25.** 3) **Вказівка.** Продовжіть бісектрису BD на її довжину. **27.** 15 м. **30.** **Вказівка.** Скористайтесь твердженням задачі 29. **39.** **Вказівка.** Продовжіть медіани на їх довжину.

§ 4.

5. Кути AB_1C_1 і AC_1B_1 і кути BB_1C_1 і CC_1B_1 внутрішні односторонні, а кути AB_1C_1 і CC_1B_1 та кути BB_1C_1 і AC_1B_1 внутрішні різносторонні. **7.** Кути BCA і DBC внутрішні різносторонні; кути CAB і DBA внутрішні односторонні. **14.** 1) 105° і 75°; 2) 75°. **15.** Три кути по 72° кожний і чотири кути по 108° кожний. **16.** Не може. **18.** 1) 100°; 2) 65°; 3) 35°; 4) 35°. **19.** 1) 30°, 60°, 90°; 2) 40°, 60°, 80°;

3) 45°, 60°, 75°; 4) 48°, 60°, 72°; 5) 50°, 60°, 70°. **20.** Не може. **21.** Не може. **22.** 1) 100°; 2) 70°; 3) 36°. **23.** 1) 50°; 2) 30°; 3) 75°. **24.** 40°, 40°. **25.** 70° і 40° або 55° і 55°. **27.** 1) 80°, 80°, 20°; 2) 70°, 70°, 40°; 3) два кути дорівнюють $120° - \frac{2}{3}\alpha$ і один $\frac{4}{3}\alpha - 60°$. **29.** 1) 105°; 2) $180° - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$; 3) 155°; 4) $90° + \frac{1}{2}\gamma$. **31.** 90°. **32.** 110°, 35°, 35°. **33.** 60°, 30° і 90°. **34.** 110°. **36.** Точка A. **38.** 60°. **39.** $\angle D = \frac{1}{2} \angle A$, $\angle E = \frac{1}{2} \angle C$, $\angle DBE = \angle B + \frac{1}{2}(\angle A + \angle C)$. **40.** 140°, 10°. **41.** 1) 20°; 2) 65°; 3) α. **42.** Кути ΔABD: $\angle A = \alpha$, $\angle D = 90°$, $\angle B = 90° - \alpha$; кути ΔCBD: $\angle D = 90°$, $\angle B = \alpha + \beta - 90°$, $\angle C = 180° - \alpha - \beta$. **44.** 90°, 45°, 45°. **45.** $\angle D = 90°$, $\angle B = 60°$, $\angle A = 30°$. **46.** 150°. **47.** 90°.

§ 5.

1. Вказівка. Відкладіть на промені відрізок, що дорівнює радіусу. **2.** Див. задачу 1. **5.** 1) 60°; 2) 120°. **7.** Не може. **9.** 30°. **10.** 60° і 120°. **11.** 70 см, 10 см. **12.** Не можуть. **13.** 1) Не можуть; 2) не можуть. **14.** 2) Вказівка. Скористайтесь доведенням від супротивного. **15.** 2) Вказівка. Скористайтесь доведенням від супротивного; 3) Вказівка. Доведіть спочатку, що спільна точка даних кіл лежить на прямій, яка проходить через їх центри. **16.** 2) Вказівка. Скористайтесь доведенням від супротивного. **18.** Вказівка. Скористайтесь твердженням задачі 16, 1). **28.** Вказівка. Почніть з побудови рівностороннього трикутника. **32.** Вказівка. У шуканому трикутнику продовжіть медіану на її довжину. **36.** Вказівка. Див. задачу 35. **37.** Вказівка. Див. задачу 35. **38.** Вказівка. Див. задачу 35. **39.** Вказівка. Почніть з побудови висоти. **41.** Див. задачу 50 § 4. **42.** Див. задачу 41. **46.** Вказівка. Побудуйте спочатку трикутник, у якого одна сторона дорівнює даній стороні шуканого трикутника, друга сторона — сумі двох інших його сторін і кут між ними дорівнює даному куту. **47.** Вказівка. Скористайтесь вказівкою до попередньої задачі з тією різницею, що замість суми двох сторін шуканого трикутника треба взяти їх різницю. **48.** Див. вказівку до задачі 46. **50.** Вказівка. Зведіть розв'язування задачі до попередньої, побудувавши допоміжне коло, концентричне одному з даних, яке має радіус, що дорівнює сумі або різниці радіусів даних кіл.

§ 6.

3. Три. **4.** 10 м. **5.** 3 см і 4 см. **7.** $BC = AD = 4{,}8$ м. **8.** $AD = 15$ см, $CD = 10$ см. **9.** $\angle B = \angle D = 150°$, $\angle C = 30°$. **10.** 3 см. **11.** 40°, 140°, 140°. **12.** 115° і 65°. **13.** Не можуть. **14.** 60°, 60°, 120°, 120°. **15.** 1) 40°, 40°, 140°, 140°; 2) 50°, 50°, 130°, 130°; 3) 80°, 80°, 100°, 100°. **16.** 1) 55°, 55°, 125°, 125°; 2) 35°, 35°, 145°, 145°; 3) 20°, 20°, 160°, 160°. **19.** $BE = 9$ см, $CE = 6$ см. Вказівка. Доведіть, що ΔABE рівнобедрений з основою AE. **20.** 0,6 м і 0,8 м. **21.** $AB = BD = 1{,}1$ м,

$AD = 0{,}8$ м. **28.** 60 см. **29.** 10 см і 18 см. **30.** 12 см, 20 см. **31.** 12 см. **32.** 10 см і 25 см або 7,5 см і 18,75 см. **35.** 80° і 100°. **37.** 60° і 120°. **41.** 4 м. **43.** 2 м. **44.** 2 м. **45.** 4 м, 8 м. **46.** 1 м. **47.** 10 см. **50.** 4 см, 5 см, 6 см. **51.** 6 см. **52.** 6 см, 5 см, 5 см. **56.** 5 м, 6 м. **57.** $a + b$. **59.** 3 м, 4 м. **61.** 70° і 110°. **62.** 1,7 м. **63.** 24 см, 36 см. **64.** 60° і 120°. **65.** 15 м. **66.** 3 см. **67.** 4 м, 6 м. **68.** 2,2 м. **69.** 9 см і 5 см. **70.** a. **71.** Вказівка. Побудуйте спочатку трикутник, дві сторони якого дорівнюють бічним сторонам трапеції, а третя — різниці основ. **72.** Вказівка. Побудуйте спочатку трикутник, дві сторони якого дорівнюють діагоналям трапеції, а третя — сумі її основ. **73.** Побудуйте спочатку відрізок $x = \frac{ab}{d}$, скориставшись розв'язком задачі 6.1.

§ 7.

2. 1) 5; 2) $\sqrt{2} \approx 1{,}4$; 3) $\sqrt{61} \approx 7{,}8$. **3.** 1) 4; 2) 12; 3) $\sqrt{11} \approx 3{,}3$. **4.** 5 м або $\sqrt{7}$ м $\approx 2{,}6$ м. **5.** Не можуть. **6.** 1) 5 см; 2) 17 дм; 3) 6,5 м. **7.** 109 см. **8.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **9.** Не можна. **10.** $\sqrt{7}$ м $\approx 2{,}6$ м. **12.** Так. **13.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **15.** Вказівка. Побудуйте спочатку відрізки $c = \frac{a+b}{2}$ і $d = \frac{|a-b|}{2}$. Тоді шуканий відрізок $x = \sqrt{c^2 - d^2}$. **16.** $\sqrt{116}$ м $\approx 10{,}8$ м. **18.** 90°. **20.** Вказівка. Сполучіть одну з точок з вершиною трикутника відрізком і скористайтесь результатом задачі 19. **22.** Скористайтесь результатом задачі 21. **26.** Не може. **27.** 2 м. **28.** Вказівка. Продовжіть медіану на її довжину. **31.** 2) Вказівка. Зведіть розв'язування цієї задачі до попередньої відповідно до малюнка 165, *б*. **32.** Не можуть. **34.** $R - d$, $R + d$. Вказівка. Скористайтесь нерівністю трикутника. **35.** $d + R$, $d - R$. Вказівка. Скористайтесь нерівністю трикутника. **36.** Не можуть. **37.** Не можуть. **38.** Вказівка. Порівняйте відстані між центрами кіл з їх радіусами. **39.** Не можуть. **41.** Вказівка. Дані числа задовольняють умову задачі 40. **42.** 1), 3), 4) Не можна; 2) можна. **43.** Скористайтесь результатом задачі 41. **44.** 10 см, 6 см. **45.** $90° - \alpha$, $a\cos\alpha$, $a\sin\alpha$. **46.** $90° - \alpha$, $\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\frac{a}{\sin\alpha}$. **49.** 1) $\sin 16° = 0{,}2756$, $\cos 16° = 0{,}9613$; 2) $\sin 24°36' = 0{,}4163$, $\cos 24°36' = 0{,}9092$; 3) $\sin 70°32' = 0{,}9428$, $\cos 70°32' = 0{,}3333$; 4) $\sin 88°49' = 0{,}9998$, $\cos 88°49' = 0{,}0206$. **50.** 1) $x = 1°$; 2) $x = 30°6'$; 3) $x = 47°3'$; 4) $x = 86°9'$. **51.** 1) $\operatorname{tg} 10° = 0{,}1763$; 2) $\operatorname{tg} = 40°40' = 0{,}8591$; 3) $\operatorname{tg} 50°30' = 1{,}213$; 4) $\operatorname{tg} 70°15' = 2{,}785$. **52.** 1) $x = 17°53'$; 2) $x = 38°7'$; 3) $x = 80°46'$; 4) $x = 83°50'$. **53.** 31°25'; 31°25'; 117°10'; 23,8 м. **54.** 34°10' і 55°50'. **55.** 51°. **56.** 116°16' і 63°44'. **57.** 29°52' і 150°8'. **58.** 12 м, 45°14'. **59.** 60°16'. **60.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **61.** 1) а) 5; 36°52'; 53°8'; б) 41; 12°41'; 77°19'; в) 29; 43°36'; 46°24'; г) 61; 10°23'; 79°37'; 2) а) 12; 22°37'; 67°23'; б) 24; 16°16'; 73°44'; в) 15; 28°4'; 61°56'; г) 13; 81°12'; 8°48'; 3) а) 70°; 0,68; 1,88; б) 39°40';

3,08; 2,55; в) 19°24′; 7,55; 2,66; г) 13°39′; 15,55; 3,78; 4) а) 59°33′; 5,92; 5,10; б) 49°12′; 7,65; 5,79; в) 29°25′; 8,04; 3,95; г) 22°; 9,71; 3,64. **62.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $\sin^2\alpha$; 3) 2; 4) $\sin^3\alpha$; 7) 1; 8) $\sin^2\alpha$; 9) $1 + \mathrm{tg}^6\alpha$.

63. 1) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{12}{5}$; 2) $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{8}{15}$; 3) $\sin\alpha = 0{,}8$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{4}{3}$. **64.** 1) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}$; 2) $\cos\alpha = \frac{9}{41}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{40}{9}$; 3) $\cos\alpha = 0{,}6$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{4}{3}$. **66.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **67.** $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

68. 29 см або $\sqrt{882}$ см $\approx$ 29,7 см. **69.** $(\sqrt{3} - 1)$ м $\approx 0{,}732$ м, $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}517$ м. **70.** 60° і 120°. **71.** 60°, 60°, 120°, 120°. **72.** 1), 6) α; 2), 3), 4), 5) β. **73.** BC. **74.** $\angle$ A.

§ 8.

3. 2. **4.** 3. **5.** (2; 0). **6.** (0; 3). **7.** Пряма, паралельна осі y. **8.** Дві прямі $x = 3$ і $x = -3$. **10.** Додатну. **11.** 4; 3. **12.** 1) (3; 2); 2) (−1; 3); 3) (1; 1). **13.** 1) (−2; 3); 2) (3; −5); 3) (−4; 4). **16.** (0; 1), (−2; 0), (−2; 1). **17.** $AB = 5$, $AC = 10$, $BC = 5$. **18.** Точка B. **20.** (3; 3) і (15; 15). **23.** (3; 4), (−4; 3), (0; 5). **24.** (5; 12) і (5; −12); (5; −12) і (−5; −12). **25.** $x^2 + (y - 3)^2 = 13$. **26.** $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$. **27.** (−2; 0) або (4; 0). **28.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$. **29.** $(x+3)^2 + (y-4)^2 = 25$. **31.** (0; 1) і $\left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$. **32.** (7; 0) і (1; 0). **36.** 1) $x + y - 5 = 0$; 2) $3x + 10y - 2 = 0$; 3) $x + 6y + 13 = 0$. **37.** $x = 0$, $y = 0$, $x + 2y - 4 = 0$. **38.** $a = b = \frac{1}{3}$.

39. 1) (−3; 0) і $\left(0; -\frac{3}{2}\right)$; 2) (4; 0) і (0; 3); 3) (−2; 0) і (0; 3); 4) (2,5; 0) і (0; −5). **40.** 1) (1; −2); 2) (2; 4); 3) (0,5; −2). **41.** Вказівка. Знайдіть точку перетину двох прямих і перевірте, чи лежить вона на третій прямій. **42.** $\left(2; \frac{5}{3}\right)$. **43.** 1) і 6), 2) і 3), 4) і 5). **45.** $x = 2$. **46.** $y = 3$.

47. $3x - 2y = 0$. **48.** 1) $k = -\frac{1}{2}$; 2) $k = -\frac{3}{4}$; 3) $k = \frac{3}{2}$; 4) $k = 2$.

49. 1) 45°; 2) 60°; 3) 30°. **50.** 2) (0; 1) і (−1; 0); 3) (0; 1) і $\left(-\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$; 4) (0; 1) і $\left(-\frac{2k}{k^2+1}; \frac{1-k^2}{k^2+1}\right)$. **51.** Пряма дотикається до кола, коли $c = \pm\sqrt{2}$, перетинає його, коли $|c| < \sqrt{2}$ і не перетинає при $c > \sqrt{2}$. Вказівка. Пряма, яка дотикається до кола і має з ним єдину спільну точку, тобто корені відповідного квадратного рівняння мають збігатися. **52.** $\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos 120° = -\frac{1}{2}$; $\mathrm{tg}\,120° = -\sqrt{3}$; $\sin 135° = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos 135° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\mathrm{tg}\,135° = -1$; $\sin 150° = \frac{1}{2}$;

$\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{tg}\, 150° = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. **53.** $\sin 160° = 0{,}3420$; $\cos 140° = -0{,}7660$; $\text{tg}\, 130° = -1{,}192$. **54.** 1) $\sin 40° = 0{,}6428$; $\cos 40° = 0{,}7660$; $\text{tg}\, 40° = 0{,}8391$; 2) $\sin 14°36' = 0{,}2521$; $\cos 14°36' = 0{,}9677$; $\text{tg}\, 14°36' = 0{,}2605$; 3) $\sin 70°20' = 0{,}9417$; $\cos 70°20' = 0{,}3365$; $\text{tg}\, 70°20' = 2{,}798$; 4) $\sin 30°16' = 0{,}5040$; $\cos 30°16' = 0{,}8637$; $\text{tg}\, 30°16' = 0{,}5836$; 5) $\sin 130° = 0{,}7660$; $\cos 130° = -0{,}6428$; $\text{tg}\, 130° = -1{,}192$; 6) $\sin 150°30' = 0{,}4924$; $\cos 150°30' = -0{,}8704$; $\text{tg}\, 150°30' = -0{,}5658$. **55.** $\alpha_1 \approx 11°32'$ або $168°28'$; $\alpha_2 \approx 134°26'$; $\alpha_3 \approx 158°12'$. **56.** 1) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\text{tg}\,\alpha = 2\sqrt{2}$; 2) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\text{tg}\,\alpha = -\sqrt{3}$; 3) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\text{tg}\,\alpha = 1$; 4) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; $\text{tg}\,\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. **57.** 1) $\cos\alpha = 0{,}8$; $\text{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}$; 2) $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{2}$; $\text{tg}\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$; 3) $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\text{tg}\alpha = -1$ або $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\text{tg}\,\alpha = 1$. **58.** $\sin\alpha = \frac{5}{13}$; $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$. **61.** Вказівка. Розгляньте спочатку випадок, коли обидва кути α та β — гострі. **62.** Див. вказівку до задачі 61.

§ 9.

2. У квадрат. **4.** Вказівка. Побудуйте послідовно вершини C, D і E рівносторонніх трикутників ABC, ACD, ADE. Точка E шукана. **7.** Не може. **9.** Вказівка. Вершини даного чотирикутника переходять при симетрії відносно його центра у вершини. **10.** Вказівка. Скористайтесь симетрією відносно даної точки. **11.** 1) Відрізок; 2) кут; 3) трикутник. **14.** 1) $(-3; -4)$; 2) $(3; 4)$; $(3; -4)$. **19.** Три. **24.** Вказівка. Скористайтесь симетрією відносно прямої b. **28.** $(1; -1)$, $(2; -1)$, $(1; 1)$. **29.** 1) $a = b = 2$; 2) $a = -3$, $b = 8$; 3) $a = b = 1$. **31.** 1) Не існує; 2) не існує. **34.** Однаково напрямлені промені: AB і DC, AD і BC, CD і BA, DA і CB. Протилежно напрямлені промені: AB і CD, BC і DA, DC і BA, AD і CB.

§ 10.

1. $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$ — однаково напрямлені, $\overline{BA}$ і кожний з векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{BC}$ — протилежно напрямлені. **4.** $(2; 4)$, $(-1; 2)$ і $(c_1; c_2)$. **5.** $m = \pm 12$, $n = \pm 7$. **8.** 1) $\bar{c}(-3; 4)$, $|\bar{c}| = 5$; 2) $\bar{c}(6; 8)$, $|\bar{c}| = 10$. **10.** 1) $\bar{c}(5; -12)$, $|\bar{c}| = 13$; 2) $\bar{c}(-6; 8)$, $|\bar{c}| = 10$. **12.** $\overline{AB} = \bar{a} - \bar{b}$, $\overline{CD} = \bar{b} - \bar{a}$. **14.** 2) Вказівка. Побудуйте ΔABC, у якого $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{BC} = \bar{b}$. Тоді $|AC| = \bar{a} + \bar{b}$. **15.** $\frac{P}{\sqrt{3}}$. **19.** $\bar{c}(-6; -8)$, $|\bar{c}| = 10$. **20.** 1) $\pm\frac{1}{2}$; 2) ± 1; 3) $\pm\frac{5}{13}$. **23.** $\overline{AB} = \frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b})$, $\overline{CD} = -\frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b})$, $\overline{CB} = \frac{1}{2}(\bar{b} - \bar{a})$, $\overline{AD} = \frac{1}{2}(\bar{a} - \bar{b})$. **25.** $\bar{a}$ і $\bar{c}$, $\bar{b}$ і $\bar{d}$. Вектори $\bar{a}$ і $\bar{c}$ однаково напрямлені, а $\bar{b}$ і $\bar{d}$ — протилежно напрямлені. **26.** $m = 2$.

27. $\lambda = -1$, $\mu = 0$. **28.** Вказівка. Скористайтесь теоремою 10.3. **29.** 90°. **30.** $\sqrt{3}$. Вказівка. $|\bar{a}+\bar{b}|^2 = (\bar{a}+\bar{b})^2$. **31.** 30°. **32.** $\cos A = 0{,}6$, $\cos B = 0$, $\cos C = 0{,}8$. **33.** $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 90°$. **35.** $m = -\frac{8}{3}$. **36.** $\lambda = -1$. **39.** $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}$, $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(a^2+c^2\right)-b^2}$, $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}$. Вказівка. Скористайтесь задачею 38. **45.** Одиничні вектори $\bar{a}$, $\bar{c}$ і $\bar{d}$, вектори $\bar{a}$ і $\bar{d}$ колінеарні. **46.** $\bar{e}(0{,}6;\ 0{,}8)$. **47.** (2; −3). **48.** 1) $\overline{OX} = \frac{\mu\bar{a}+\lambda\bar{b}}{\mu+\lambda}$.

§ 11.

5. Трикутник. **6.** $\angle A = 30°$, $A_1B_1 = 1{,}5$ м. **8.** Вказівка. Побудуйте спочатку яке-небудь коло, що дотикається до сторін кута, і скористайтесь гомотетією відносно вершини кута. **9.** Вказівка. Скористайтесь гомотетією відносно однієї з вершин трикутника. **11.** 13,6 см. **12.** $AC = 4$ м, $B_1C_1 = 14$ м. **13.** $AC = 24$ см, $A_1C_1 = 18$ см, $B_1C_1 = 15$ см. **16.** $\frac{ah}{a+h}$. **17.** $\frac{m}{n}$. **18.** 4 см. **19.** $\frac{27}{28}$. **20.** 1) 14 см; 2) 6 дм. **22.** $m : n$. **23.** $n : m$. **24.** $AC = 18$ м. Вказівка. Трикутники ACD і CBA подібні. **25.** $m : n$. **26.** 15 см, 18 см. **27.** 4,5 см. **29.** $\frac{a\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$. **30.** $A_1C_1 = 1{,}2$ м; $AC = 3$ м. **32.** $\angle D = 180° - 2\angle A$, $\angle E = 180° - 2\angle B$, $\angle F = 180° - 2\angle C$. **34.** Подібні. **35.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **37.** 1 м, 2 м, 2,5 м. **38.** 6,5 м, 5,5 м. **39.** 1) Подібні; 2) не подібні. **40.** 15 см, 20 см, 25 см. **41.** 21 см. **43.** $m^2 : n^2$. **44.** ≈ 42 м. **45.** $\frac{bc}{b+c}$. **46.** Вказівка. Проведіть через точку B пряму, паралельну прямій DC. **47.** Вказівка. Скористайтесь попередньою задачею. **48.** 1) 300° і 60°; 2) 230° і 130°; 3) 190° і 170°. **49.** 5 см. **50.** 30° або 150°. **52.** Див. задачу 51. **54.** α або $180° - \alpha$. **55.** 50°. **56.** Вказівка. Доведіть спочатку, що протилежні вершини вписаного чотирикутника лежать по різні боки від прямої, яка проходить через дві інші протилежні вершини. **60.** Вказівка. Скористайтесь двома попередніми задачами. **63.** ≈ 225,8 км (див. задачу 62). **64.** ≈ ≈ 68,9 км.

§ 12.

1. $\frac{5}{7}$, $\frac{19}{35}$, $\frac{1}{5}$. **2.** $\sqrt{13}$ м або $\sqrt{109}$ м. **4.** $\frac{1}{2}\sqrt{c^2+d^2 \pm 2cd\cos\alpha}$. **5.** $\sqrt{a^2+b^2 \pm 2ab\cos\alpha}$. **6.** 2,25 м, 3,75 м. **8.** $\frac{12\sqrt{6}}{5}$ м, $2\sqrt{6}$ м, $\frac{12\sqrt{6}}{7}$ м. **9.** $\frac{\sqrt{145}}{2}$ м, $2\sqrt{7}$ м, $\frac{\sqrt{73}}{2}$ м. **10.** $\frac{12\sqrt{42}}{13}$ м, $\frac{\sqrt{105}}{2}$ м, $\frac{12\sqrt{15}}{11}$ м.

11. Сторона AB збільшується. **12.** Не може. **14.** $\frac{35}{2\sqrt{6}}$ м. **15.** $AB = \frac{AC \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **16.** $x = \frac{a \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$. Сторона AB найбільша, сторона BC найменша. **19.** Кут B найбільший, кут C найменший. **20.** Бічна сторона більша. **24.** Вказівка. Продовжіть медіану CD за точку D на її довжину. **25.** Вказівка. Скористайтесь властивістю перпендикуляра і похилих, проведених до прямої з однієї точки, і твердженням попередньої задачі.

26. 1) $\alpha = 105°$,	$b \approx 2{,}59$,	$c \approx 3{,}66$;
2) $\gamma = 45°$,	$b \approx 17{,}9$,	$c \approx 14{,}6$;
3) $\alpha = 20°$,	$b \approx 65{,}8$,	$c \approx 88{,}6$;
4) $\gamma = 119°$,	$a \approx 16{,}7$,	$c \approx 24{,}8$;
5) $\gamma = 68°$,	$a \approx 13{,}6$,	$b \approx 11{,}2$.
27. 1) $\alpha \approx 79°$,	$\beta \approx 41°$,	$c \approx 10{,}6$;
2) $\alpha \approx 11°$,	$\beta \approx 39°$,	$c \approx 28$;
3) $\beta \approx 27°$,	$\gamma \approx 58°$,	$a \approx 19{,}9$;
4) $\beta \approx 21°$,	$\gamma \approx 15°$,	$a \approx 22{,}9$;
5) $\alpha \approx 16°$,	$\gamma \approx 12°$,	$b \approx 53{,}4$;
6) $\alpha \approx 130°$,	$\gamma \approx 35°$,	$b \approx 8{,}09$.
28. 1) $c \approx 8{,}69$,	$\beta \approx 21°$,	$\gamma \approx 39°$;
2) $c \approx 19{,}6$,	$\beta \approx 13°$,	$\gamma \approx 29°$;
3) $c \approx 22{,}3$,	$\beta \approx 6°$,	$\gamma \approx 10°$;
4) розв'язку не має;		
5) $c \approx 11{,}4$,	$\alpha \approx 42°$,	$\gamma \approx 108°$;
або $c \approx 2{,}49$,	$\beta \approx 138°$,	$\gamma \approx 12°$.
29. 1) $\alpha \approx 29°$,	$\beta \approx 47°$,	$\gamma \approx 104°$;
2) $\alpha \approx 54°$,	$\beta \approx 13°$,	$\gamma \approx 113°$;
3) $\alpha \approx 34°$,	$\beta \approx 44°$,	$\gamma \approx 102°$;
4) $\alpha \approx 39°$,	$\beta \approx 93°$,	$\gamma \approx 48°$;
5) $\alpha \approx 15°$,	$\beta \approx 11°$,	$\gamma \approx 154°$;
6) $\alpha \approx 136°$,	$\beta \approx 15°$,	$\gamma \approx 29°$.

§ 13.

2. $R_1 + R_2 + d$, $R_1 - R_2 - d$. **6.** Не може. **8.** $\frac{1}{2}n(n-1)$. **10.** 36°, 72°, 108°, 144°. **12.** 1) 8; 2) 12. **13.** 1) 10 сторін; 2) 15 сторін. **14.** Вказівка. У цього n-кутника всі сторони рівні, всі кути рівні. **15.** Вказівка. У цього n-кутника всі сторони рівні, всі кути рівні. **18.** Вказівка. Виразіть обидва радіуси через сторону трикутника. **19.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Вказівка. Знайдіть спочатку радіус кола. **20.** $2\sqrt{6}$ дм. **21.** $2\sqrt{2}$ см. **22.** $\sqrt{3}$ см. **24.** Вказівка. Скористайтесь теоремою косинусів. **25.** Вказівка. Спочатку за допомогою задачі 29 § 11 знайдіть сторону 10-кутника, а потім за теоремою косинусів — сторону 5-кутника. $a_{10} = \frac{R\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$, $a_5 = R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. **26.** $\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$. **27.** $\sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}}$. **28.** $b = \frac{2aR}{\sqrt{4R^2 - a^2}}$. **29.** $a = \frac{2bR}{\sqrt{4R^2 + b^2}}$. **30.** Вказівка. Впишіть спочатку правильний шестикутник. **32.** $\frac{R_1 r_2}{r_1}$. **33.** $a : b$. **34.** 1) 62,8 м; 2) 94,2 м. **35.** 6,28 мм. **36.** ≈ 3,06. Вказівка. Скористайтесь результатом задачі 23. **37.** ≈ 3,11. Вказівка. Скористайтесь результатом задачі 24. **38.** ≈ 6366,2 км. **39.** ≈ 6,3 см. **40.** 1) $\frac{R\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$; 2) $\frac{R}{1+\sqrt{2}}$; 3) $\frac{R}{3}$. Вказівка. Центри кругів є вершинами правильного n-кутника. **41.** 1) $R(3 + 2\sqrt{3})$; 2) $R(1 + \sqrt{2})$; 3) R. Вказівка. Центри кругів є вершинами правильного n-кутника. **42.** ≈ 351,9 м/хв. **43.** 1) $\frac{\pi}{6}$ см; 2) $\frac{\pi}{4}$ см; 3) $\frac{2\pi}{3}$ см; 4) $\frac{3\pi}{2}$ см. **44.** 1) 120°; 2) 90°; 3) 72°; 4) 60°; 5) 240°; 6) 270°. **45.** ≈ 31″. **46.** 1) ≈ 0,79 м; 2) ≈ 0,52 м; 3) ≈ 2,09 м; 4) ≈ 0,80 м; 5) ≈ 1,06 м; 6) ≈ 2,63 м. **47.** 1) $\frac{\pi a}{3}$; 2) $\frac{\pi a}{3}$; 3) $\frac{2\pi a}{3\sqrt{3}}$. Вказівка. За хордою і відповідним центральним кутом знайдіть радіус кола. **48.** 1) $\frac{3l}{\pi}$; 2) $\frac{2\sqrt{2l}}{\pi}$; 3) $\frac{3\sqrt{3l}}{2\pi}$. Вказівка. Знайдіть спочатку радіус кола. **49.** 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{3}$. **51.** 1) 90°; 2) 45°; 3) 22,5°; 4) 150°; 5) 70°; 6) 240°.

§ 14.

1. Вказівка. Застосуйте теорему Піфагора. **2.** ≈ 180 м. **3.** $S = \frac{a^2}{2}$. **4.** У два рази. **5.** Площа збільшиться у 9 разів. **6.** У 5 разів. **7.** 8 м, 18 м. **8.** 12 дм, 25 дм. **9.** 30°. **10.** Квадрат. **11.** 200 см^2. **12.** 202,8 см^2. **14.** $\sqrt{15}$ см. **17.** 4800 м^2. **18.** $\frac{a^2}{4}$. **19.** 6 см. **21.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **22.** $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. **23.** 600 см^2. **24.** 55 см, 48 см. **25.** $\angle C = 90°$. **26.** ≈ 0,47 м^2. **27.** 5,64 м^2. **28.** $\frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **30.** 1) 84; 2) 12; 3) 288; 4) 10; 5) $\frac{2520}{13}$; 6) 1,4. **31.** $\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. **32.** 1) 24 см; 2) 24 см. **33.** 13,44 см. **34.** 12 см, 11,2 см, $\frac{168}{13}$ см. **35.** 1,344. **36.** 1) 4; 2) 7,2; 3) 4,8; 4) $\frac{5040}{169}$. **37.** 480 см^2. **38.** 408 см^2. **39.** 540 м^2. **43.** 1) $R = \frac{65}{8}$,

$r = 4$; 2) $R = \frac{65}{8}$, $r = 1{,}5$; 3) $R = \frac{145}{6}$, $r = \frac{7}{3}$; 4) $R = \frac{35}{4\sqrt{6}}$, $r = \frac{\sqrt{6}}{2} \approx$ $\approx 1{,}2$. **44.** 4,5 см. **45.** $R = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$, $r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}$. **46.** $R = \frac{169}{24}$ см, $r = \frac{10}{3}$ см. **47.** Вказівка. Скористайтесь властивістю дотичних, проведених з однієї точки до кола. **48.** $R = 29$ см, $r = 12$ см. **50.** 1 : 3. **51.** $\frac{h}{\sqrt{2}}$. **52.** $a^2 : b^2$. **53.** $\frac{l^2}{4\pi^2}$. **54.** 1) 20π см^2; 2) 12π м^2; 3) $\pi(a^2 - b^2)$. **55.** 1) У 4 рази; 2) у 25 разів; 3) в m^2 разів. **56.** 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$; 3) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **57.** $\frac{1}{4}$. **58.** 2. **59.** 1) $\frac{\pi R^2}{9}$; 2) $\frac{\pi R^2}{4}$; 3) $\frac{5\pi R^2}{12}$; 4) $\frac{2\pi R^2}{3}$; 5) $\frac{5\pi R^2}{6}$; 6) $\frac{11\pi R^2}{12}$. **60.** 1) $\frac{R^2}{2}$; 2) $\frac{Rl}{2}$. **61.** $a^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. **62.** 1) $(\pi - 2)R^2$; 2) $\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)R^2$; 3) $\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.

§ 15.

2. Можна. **5.** 2) 4,2 дм; 3) 6,2 см; 4) $\frac{a+b}{2}$. **6.** Не можна. **7.** 1) 5 см; 2) 3 см; 3) 8 см; 4) $\frac{bc}{a+c}$. **9.** Вказівка. Порівняйте відношення відрізків двох довільних прямих: $X_1X_2X_3$ і $Y_1Y_2Y_3$. **10.** 1) 6,5 см; 2) 15 см; 3) $\sqrt{a^2 - b^2 + d^2}$; 4) $\sqrt{a^2 - c^2 + 2d^2}$. **12.** 2 м. **13.** 2,6 м. **14.** $\approx 3{,}9$ м. **15.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. **17.** 1) $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha + c^2}$; 2) 60°. **18.** 144 см^2. **20.** 2 м. **21.** 1) $3ab + \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; 2) $4ab + 2a^2$; 3) $6ab + 3a^2\sqrt{3}$. **22.** 12 м^2. **23.** 10 см. **24.** $2a$, $a\sqrt{2}$. **25.** 1464 см^2. **26.** $\sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}$, $\sqrt{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}}$, $\sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}$. **27.** 12 см. **28.** 5 см, 6 см. **30.** 11 м. **31.** 1) $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}$; 2) $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}}$; 3) $\sqrt{b^2 - a^2}$. **32.** $20\sqrt{2}$. **33.** 6 см. **34.** 25 см. **35.** Вдвічі. **36.** 60 см^3. **37.** 3 м^3. **38.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2b$; 2) a^2b; 3) $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2b$. **39.** 3 см^3. **40.** 35 200 м^3. **41.** 1) $\frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2 - a^2}$; 2) $\frac{a^2}{6}\sqrt{4b^2 - 2a^2}$; 3) $\frac{a^2}{2}\sqrt{3\left(b^2 - a^2\right)}$. **42.** $\frac{1}{6}b^3$. **45.** 5 м. **48.** R^2. **52.** 30 дм^2.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

7 КЛАС

8 КЛАС

§ 6. Чотирикутники

§ 7. Теорема Піфагора

§ 8. Декартові координати на площині

§ 9. Рух

§ 10. Вектори

9 КЛАС

§ 11. Подібність фігур

§ 12. Розв'язування трикутників

§ 13. Многокутники

§ 14. Площі фігур

§ 15. Елементи стереометрії